# 静态时空上狄拉克算子的Gutzwiller迹公式

arXiv:2301.11021v1 [math.AP] 26 Jan 2023




**Mohammad Onirban**
**Islam**纯数学系数学学院利兹大学 LS2 9JT，英国

为获得哲学博士学位而提交的论文
2022年10月

... 献给所有教过我的人

# 声明

据我所知，我声明，除已引用或众所周知的内容外，本论文中的研究工作均为原创且由我本人完成。第3章所呈现的工作与我和 Alexander Strohmaier 合著的论文《关于正规双曲算子的微局部化与费曼传播子的构造》完全相同，arXiv:2012。09767 [math.AP] （已被*Communicationsin AnalysisandGeometry*接收），并加入了少量背景材料。第4章是我独著的文章《静态时空上狄拉克算子的 Gutzwiller迹公式》的一个略具阐释性的版本，arXiv:2109。09219 [math.AP], 发表于J GeomAnal **33**，57（2023年）。

# 摘要

通过将 Strohmaier 和 Zelditch [《数学进展》**376**, 107434 (2021年)] 近期的构造推广至向量丛框架，建立了整体双曲、空间紧致平稳时空上 Dirac 型算子的 Duistermaat-Guillemin-Gutzwiller 迹公式。我们分析了狄拉克方程解空间上关于全局类时 Killing 向量场的李导数的谱，并发现其由离散实特征值构成。时间演化算子的分布迹在流形上诱导的 Killing 流的类光测地线周期处具有奇点。这在周期趋于零时给出了 Weyl 定律渐近式。证明这些结果的关键技术要素是费曼传播子。为获得该传播子的傅里叶积分描述，我们将 Duistermaat 和 Hörmander 关于整体双曲时空上正规双曲算子的特定初始解的经典工作 [《数学学报》**128**, 183 (1972年)] 推广至丛框架，并提出了其微局部化定理。作为这些分析的副产品，本文还给出了正规双曲算子（分别地，Dirac 型算子）存在 Hadamard 双解的另一种证明。

# 致谢

我要感谢我的导师 Alexander Strohmaier，感谢他给予我探索傅里叶积分算子、量子场论与谱几何之间不可言喻之联系的机会。作为一名电子与通信工程专业的学士和物理学硕士，若不是得到如此出色的指导，踏入纯数学领域对我而言将是一项艰巨的任务。在博士项目期间，我获得了利兹国际博士生奖学金的支持，并感谢所有帮助我实现这一目标的人。

我要感谢 Benjamin Sharp 作为我的第二导师所给予的支持，他帮助我澄清了对角嵌入的海森矩阵，并对论文的展示提出了意见。

感谢 Yan-Long Fang，以及 Rakibur Rahman 和 Christian Bär 分别就傅里叶积分算子和拉里塔-施温格算子展开讨论。感谢 Ryan O'Loughlin 和 Ahasan Habib 一直支持我应对在利兹的学术与非学术生活。特别感谢 Joseph Elmes、Amrita Khan、Sayeed Shawon、Sadat Hasan、Mehboob Rehman Khan、Jowadul Kader 和 Sadia Rahman，在我陷入低谷时给予心理支持，并帮助我校对论文。非常感谢 Marta Fiori Carones，是你让英国的天气变得多彩！

我想借此机会向我所有曾经的导师表达谢意：Stefan HOLLANDS、Ko Sanders、Jürgen Berges、Arshad Momen、ASM Moslehuddin 和 Zahid Hasan Mahmood。我从他们那里学到的远不止学术研究。不幸的是，Mahmood 教授在我攻读博士学位之初离开了我们，但至少可以说，如果没有他和他的妻子 Kaniz Fatema，我或许最终会成为一名工程师。

我感谢我的父母 Ruksana Islam 和 ABM Rafiqul Islam。他们不顾最初的反对，支持我追求自己的抱负，并从我童年到高中阶段竭尽所能为我提供教育条件。每一位家人都直接或间接地帮助了我的求学之路，我谨向他们致以敬意。尤其是对于我的妻子 Rebeka Alam 为我所作出的牺牲，我唯有以歉意与爱来回报。

# 目录

**1 引言** 11.1 迹公式.1

1.1.1 前言.11.1.2 Duistermaat-Guillemin-Gutzwiller迹公式.41.1.3 Sandoval迹公式.51.1.4 黎曼迹公式：相对论视角.71.1.5 Strohmaier-Zelditch迹公式.8

1.2 费曼传播子.91.3 组织结构.121.4 约定.13

**2 傅里叶　积分算子 15**

2.1 傅里叶积分算子局部理论.152.1.1 微分算子.152.1.2 伪微分算子.172.1.3 傅里叶积分算子.212.2 流形上的傅里叶积分算子.26

2.2.1 分布半密度.262.2.2 伪微分算子.292.2.3 拉格朗日分布.33

2.3 傅　里叶积分算子在向量丛上的应用.36

2.3.1 积分算子.372.3.2 伪微分算子.382.3.3 拉格朗日分布.412.3.4 傅里叶积分算子的伴随.432.3.5 傅里叶积分算子代数.442.3.6 由辛同胚定义的拉格朗日分布 . . . . . 50

2.4 文献.54

**3 费曼　　n 传播子 5** **5**

3.1 洛伦兹流形.55

3.1.1 因果结构.553.1.2 整体双曲时空.57

3.2 正规双曲算子与参数子.583.2.1 正规双曲算子（NHO）.583.2.2 格林算子.623.2.3 参数子.643.3 正规双曲算子的费曼传播子.663.3.1 主要结果.663.3.2 联络1-形式与次主符号.693.3.3 正规双曲算子的微局部共轭算子.723.3.4 定理证明3.3.1 .813.3.5 命题证明3.3.2 .853.3.6 由费曼参数子构造费曼传播子.883.3.7 因果传播子.903.4 狄拉克算子的费曼传播子.91

3.4.1 狄拉克型算子.913.4.2 格林算子.963.4.3 柯西问题.973.4.4 主要结果.98

3.5 例子.100

3.5.1 协变克莱因-戈尔登算子.1003.5.2 联络达朗贝尔算子.1013.5.3 霍奇-达朗贝尔算子.1013.5.4 普罗卡算子.1013.5.5 扭曲自旋狄拉克算子.1013.5.6 拉里塔-施温格算子.1023.5.7 高自旋算子.103

3.6 文献.104

**4 Gutzwiller迹公式** **105**

4.1 平滑算子的迹.105 4.2 静态时空.105 4.3 Dirac算子的Gutzwiller迹公式.108 4.3.1 $\mathbb{S}$ 上的泊松求和公式.108 4.3.2 主要结果.109 4.3.3 证明策略与创新之处.114 4.4 平稳时空上的狄拉克算子.117 4.4.1 李导数.117 4.4.2 经典动力学.118 4.4.3 时间演化算子.119 4.5 迹公式.119 4.6 $\ker D$ 上L的谱理论.120 4.7 主要定理的证明.121 4.7.1 $t = 0$ 处$\mathrm{Tr}\, U_t$ 的主符号.123 4.7.2 $t = T \in \mathrm{P}$处$\mathrm{Tr}\, U_t$ 的主符号.125

4.8 Weyl定律的证明.1264.9 文献.127

**A 典 范关系与复合129**

A.1 典范关系.129

A.1.1 锥辛几何预备知识.129A.1.2 拉格朗日子流形.132A.1.3 洁净复合.137A.1.4 Keller-Maslov 丛.139A.1.5 马斯洛夫指标.141A.1.6 自然体积形式.143

A.2 典范关系上的密度复合.144

A.2.1 半密度.144

A.2.2 Keller-Maslov 丛值半密度.145A.2.3 同态丛值半密度.146

A.3 文献.146

**B 符号 147**

B.1 欧几里得空间上的符号.147B.2 流形上的符号.149B.3 向量丛上的符号.151B.4 文献.152

**C Hadamard态 153**

C.1 量子场代数.154C.2 量子态与 Hadamard条件.155C.3 时序乘积.158C.4 文献.160

# 插图目录

2.1 微分算子主符号的变换 . . . . . 17 2.2 伪微分算子（次）主符号的变换 . 32 2.3 积分算子的欧几里得代表.38 2.4 $\mathscr{E} \to M$ 经由 $\pi$ 的拉回：$\mathrm{T}^*M \to M$ .46 3.1 $C^+$, $C^{\mathrm{ret}}, C^{\mathrm{adv}}, C^-$ 在 $d \geq 3$ 中.66 3.2 微局部化示意图.73 3.3 时空整体双曲性的一个推论.82 3.4 洛伦兹自旋结构.94 4.1 时空等距变换下 Clifford 模丛的拉回 . . . . . 110 4.2 由因果传播子和 Killing流表示的时间演化映射 114 4.3 $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2)$ 上的一条周期测地线.119

# 表格目录

1.1 不同的选择 $U_t$ .2C.1 量子场论模型.155

# 第1章

# 引言

1966年，Kac [1] 曾以相当悠闲的口吻问道：

“你能听出鼓的形状吗?

这可以说是谱几何中最经典的问题。下文将解释，Gutzwiller迹公式是研究几何与谱世界之间这种美妙交织的重要工具之一。

## 1.1 迹公式

### 1.1.1 前言

为了准确理解迹公式的概念，让我们考虑最简单的非平凡微分算子：导数

$$\mathrm{D} := -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

作用于长度为 $T$ 的圆 $\mathbb{S}$ 上的光滑函数 $C^\infty(\mathbb{S})$。由于 $C^\infty(\mathbb{S})$ 与 $\mathbb{R}$ 上的 $T$-周期函数一一对应，因此可定义

$$L^2(\mathbb{S}) := \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : u(x+T) = u(x), \int_0^T \bar{u}(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right\}. \tag{1.2}$$

直接计算 D 的谱即可：

$$\operatorname{Spec}\mathrm{D} = \{\lambda_n | n \in \mathbb{Z}\}, \quad \lambda_n := n\omega, \quad \omega := \frac{2\pi}{T} \tag{1.3}$$

对应于标准正交特征函数 $\phi_n := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}/\sqrt{T}$。对于 $\mathbb{R}$ 上的任意 Schwārtz函数 $\rho \in \mathrm{S}(\mathbb{R})$ 以及所有 $T > 0$，**泊松求和公式** 表述为（参见例如 [2, 定理 1.2]）

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(\lambda_n) = T \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}^{-1}\rho)(kT), \tag{1.4}$$

其中 $\mathcal{F}^{-1}(\rho)$表示 $\rho$ 的傅里叶逆变换。注意到，该恒等式的左侧完全由 $\omega$ 上基频角频率的整数倍组成，而右侧仅涉及 $T$ 的长度 $\mathbb{S}$。换言之，泊松求和公式将谱数据与几何量联系起来。自然地，我们可能会问，这种联络是否为简单算子 (D) 和/或我们所考虑的几何 ($\mathbb{S}$) 所特有。然而，这一猜想并不成立。例如，对于环面上的拉普拉斯算子，泊松求和公式同样成立（参见例如 [2, 定理 1.3]）。因此，人们不禁会思考，在谱数据与几何世界之间建立这种桥梁的背后，是否存在更深层的原因。

为获得系统性的理解，我们考虑半密度丛（见第2.2.1节） $\Omega^{1/2}\Sigma \to \Sigma$ 以及定义在一个无 $\Sigma$边界的 $d-1$维紧流形上的（正定）厄米向量丛（$\mathscr{E}_\Sigma \to \Sigma$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$），并令 $P$为作用在 $\mathscr{E}_\Sigma \otimes \Omega^{1/2}\Sigma$上的椭圆（见定义2.3.7）、对称的一阶伪微分算子（见定义2.3.2）。众所周知， $P$的谱由离散实特征值 $\lambda_n^\pm$组成，并且不一定具有半有界性；每个 $\lambda_n^\pm$都是孤立的，且具有有限重数。这里， $\lambda_n^\pm$ 按递增顺序枚举，即$\ldots\ldots < \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0 =: \lambda_0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots\ldots$，并计入重数。一般而言， $P$ 不是迹类算子，但其适当的函数可以是迹类算子。例如，几何分析中最重要的算子，包括拉普拉斯-贝尔特拉米算子（见（3.11））、达朗贝尔算子（见例3.2.2）、薛定谔算子和狄拉克算子（见定义3.4.1），都不是迹类算子，但它们的适当函数是迹类算子。我们选取以下形式的算子，该形式最初归因于Levitan [3] 和Avakumovi˘c [4]（另见 [5]）

$$\forall t \in \mathbb{R} : U_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP}. \tag{1.5}$$

这绝不是一个规范的选择；参见表 1.1 以了解其他一些可能性。然而，采用（1.5）而非其他选项具有以下两个优点 [5, 第196]（另见 [6, 第 XXV 页]）：

| $U_t$ | $t$ | $P$ | 偏微分方程（PDE） | 方法 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{t-P}$ | $\mathbb{R}\setminus\operatorname{Spec}P$ | - | $(t-P)U_t = I$ | 预解式 |
| $P^{-t}$ | $\mathbb{C}$ | - | - | $\zeta$-函数 |
| $\mathrm{e}^{-tP}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\Delta$ | 热方程（$\partial_t + \Delta$）$u = 0$ | 次椭圆型偏微分方程 |
| $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP}$ | $\mathbb{R}$ | $\pm\sqrt{\Delta}$ | 半波方程（$-\mathrm{i}\,\partial_t \pm \sqrt{\Delta}$）$u = 0$ | 双曲型偏微分方程 |
| | $\mathbb{R}$ | $H$ | 薛定谔方程（$-\mathrm{i}\,\partial_t - H$）$u = 0$ | 抛物型偏微分方程 |
| | $\mathbb{R}$ | $H_D$ | 狄拉克方程 $Du = 0$ | 双曲型偏微分方程 |

表 1.1： $U_t$ 的不同选择及其对应的 $t$ 定义域和可行的 $P$ （例如参见 [5, 6]。此处 $\Delta$、$H$、$H_D$、$D$ 分别为拉普拉斯-贝尔特拉米算子、非相对论哈密顿量、狄拉克哈密顿量和狄拉克型算子。

- $U_t$ 是半波方程柯西问题的解算子。也就是说，给定初始数据 $k \in H^1(\Sigma;\ \mathscr{E}_\Sigma \otimes \Omega^{1/2}\Sigma)$，有

$$(-\mathrm{i}\,\partial_t + P)u = 0 \Rightarrow u = U_t(k), \tag{1.6}$$

其中 $H^1(\cdot)$ 表示 Sobolev空间（参见截面 3.3.1）。我们甚至可以考虑 $P$阶的 $m \geq 2$，并将前述方程中的 $P$ 替换为 $|P|^{1/m}$，而不破坏其双曲性质；然而 $-\mathrm{i}^m\,\partial_t^m + P$ 在 $m > 2$时不再具有双曲性。事实上，这正说明了我们为何可以不失一般性地只考虑一阶算子。相较于次椭圆算子或抛物型算子，严格双曲算子 $-\mathrm{i}\,\partial_t + P$ 的主要优势在于其具有 奇点的有限传播速度，而这些奇点属于 $U_t$。

- 关于 $P$的魏尔特征值计数函数

$$\mathsf{N}^+(\lambda) := \#\{n \mid \lambda_n^+ \leq \lambda^+\}, \quad \mathsf{N}^-(\lambda) := \#\{n \mid \lambda_n^- \geq \lambda^-\} \tag{1.7}$$

与分布迹（如下文所述）$\operatorname{Tr} U_t$ 通过分布傅里叶变换相关（例如参见第 [7,章 3]）：

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{N}^\pm}{\mathrm{d}\lambda} = \mathcal{F}^{-1}_{t\mapsto\lambda}(\operatorname{Tr} U_t). \tag{1.8}$$

因此，可以借助陶伯论证，将 $U_t$ 中包含的信息有效地传递到谱函数中。

我们的选择有一个限制：$U_t$ 不是迹类算子，因为例如$U_0$ 是恒等算子。因此，$\operatorname{Tr} U_t$ 只有作为 $\mathbb{R}$上的分布才有意义：

$$\operatorname{Tr} U_t : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},\ \rho \mapsto \operatorname{Tr} U_\rho := \operatorname{Tr}\Big(\int_{\mathbb{R}} U_t\,\mathcal{F}^{-1}(\rho)\,\mathrm{d}t\Big), \tag{1.9a}$$

$$U_\rho u := \Big(\int_{\mathbb{R}} U_t\,\mathcal{F}^{-1}(\rho)\,\mathrm{d}t\Big)u := \int_{\mathbb{R}} U_t\,\mathcal{F}^{-1}(\rho)\,u\,\mathrm{d}t, \tag{1.9b}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\rho)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1.9c}$$

对于任意 $u \in C_c^\infty(\Sigma;\ \mathscr{E}_\Sigma \otimes \Omega^{1/2}\Sigma)$，其中 (1.9b) 中最右侧的积分定义为向量值黎曼积分。此外，它是作用于 $L^2(\Sigma;\ \mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma)$上的一参数酉算子群（见第 4.6 节），也是作用于 $H^s(\Sigma;\ \mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma)$上的有界算子；这一结论对 $t \in \mathbb{R}$ 一致成立，并且对任意 $s \in \mathbb{R}$ 均成立（标量情形见 [5, 第 3] 节；进一步阐述可参见例如 [8,§20] ）。

因此，讨论 $U_t$在 $L^2(\Sigma;\ \mathscr{E}_\Sigma \otimes_{\Omega^{1/2}}\Sigma)$ 上的分布迹是有意义的，并且根据函数演算，$\operatorname{Tr}\ U_t = \sum_n \exp(-\mathrm{i}\ t\lambda_n^\pm)$。等价地，我们可以利用 $U_t$ 的施瓦茨核 $\mathsf{U}_t$ 来计算它。将两者结合起来，我们得到迹公式的本质特征（参见例如 [9, 导论]）

$$\sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\lambda_n^\pm} = \operatorname{Tr} U_t = \int_\Sigma \operatorname{tr}\big(\mathsf{U}_t(x,x)\big), \tag{1.10}$$

其中，$\mathsf{U}_t(x,x)$ 是施瓦茨核 $\mathsf{U}_t(x,y)$ 的限制，$U_t$ 限制在 $\Sigma\times\Sigma$ 的对角线上，而 tr 是端同态迹（见（3.8））。这揭示了连接 $P$ 的谱数据与该算子作用所在的几何世界之间的桥梁之基础，正如泊松求和公式（1.4）中所体现的，其中 $P$ =D 和 $\Sigma=\mathbb{S}$。

在（$\mathbb{S}$）中考虑的几何（1.4）足够简单，可以显式计算谱和施瓦茨核，因此可得到一个恒等式。然而，这在一般的紧流形中并不典型。因此，至多只能通过运用双曲[1] 微分方程理论来近似 $_t$，通常的做法是构造参数（见定义3.2.14），然后以直接的方式得到陶伯部分。这便引出了渐近迹公式的概念：通过将测试函数 $\rho(\cdot)\mapsto\rho_\mu(\cdot):=\rho(\cdot-\mu)$ 平移 $\mu$ 一定的量，并令 $\mu\to\infty$，从而只研究较大的特征值。特别地，如果 $\{\phi_n\}$ 是 $P$ 在 $\mathscr{E}_\Sigma$ 上的标准正交特征截面，¯那么（关于反对偶丛 $\mathscr{E}_\Sigma^*\to\Sigma$ 的确切含义，见第2.3.4 节）

$$\mathsf{U}_\rho(x,y)=\int_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_n^{\pm}}(\bar{\phi}_n^*\boxtimes\phi_n)(x,y)\,(\mathcal{F}^{-1}\rho)(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

其中该级数在 $C^\infty\big(\Sigma\times\Sigma;\ (\bar{\mathscr{E}}_\Sigma^*\boxtimes\mathscr{E}_\Sigma)\otimes\Omega^{1}{}_{/2}(\Sigma\times\Sigma)\big)$（标量版本见，例如 [11,第 133]页），而渐近迹公式为

$$\mathrm{Tr}(U_{\rho_\mu})=\int_\Sigma\mathrm{tr}\left(\mathsf{U}_{\rho_\mu}(x,x)\right),\quad\text{as}\quad\mu\to\pm\infty. \tag{1.12}$$

渐近（半经典）迹公式领域源于 Gutzwill-er [12] 对普朗克常数趋于零时薛定谔算子的格林算子的研究（另见 [13，第 17] 章）。这项开创性工作并不完全严谨；例如，参见 [2, 14]，其中对其最初思想进行了仔细讨论。此后已有许多数学上严谨的证明 [10, 15–22] 被提出。其中，Chazarain [16, 17]（针对闭黎曼流形上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子）和 Duistermaat-Guillemin [10]（针对满足正在讨论中的其他假设的标量且正的 $P$）运用傅里叶积分算子的整体理论，推导出了波迹的完整奇异性结构。有关详情，请参阅专著 [23，第 XXIX 章], [24, 第 1], [25, 章 11] 第 11] 章。

## 1.1.2 Duistermaat-Guillemin-Gutzwiller迹公式

为了获得具体理解，设 $\Delta$ 为一个 $d-1$ 维闭黎曼流形上的拉普拉斯算子（采用几何学家约定）（$\Sigma$，h）。众所周知，它的

[1]非双曲型方法（预解式、 $\zeta$-函数、热核）的情况则恰恰相反：偏微分方程部分较为简单，但陶伯部分始终无法提供令人满意的余项估计。事实上，最佳的 余项估计都是通过双曲型方法 [5, 10] 获得的（另请参见专著 [6] 及其中的参考文献）。

谱 Spec $\Delta$ 由离散特征值 $\lambda_n^2$ 组成，并且计数函数 $\mathrm{N}_\Delta(\lambda)$ 满足著名的 Weyl定律 [5]

$$\mathrm{N}_\Delta(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{d-1} \mathrm{vol}(\bar{\mathbb{B}}^{d-1})\ \mathrm{vol}(\Sigma), \quad \text{as} \quad \lambda \to \infty, \tag{1.13}$$

其中 $\mathrm{vol}(\bar{\mathbb{B}}^{d-1})$ 是闭单位球 $\bar{\mathbb{B}}^{d-1}$ 在 $\mathbb{R}^{d-1}$中的体积。如前所述，计数测度 $\mathrm{dN}_\Delta/\mathrm{d}\lambda$ 与分布迹 $\mathrm{Tr}\, U_t$ 通过傅里叶变换（1.8）相关，其中

$$\forall t \in \mathbb{R} : U_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{\Delta}} \tag{1.14}$$

是半波算子 $-\mathrm{i}\,\partial_t + \sqrt{\Delta}$的柯西问题的解映射。此外，$\mathrm{Tr}\, U_t$ 在 $t = 0$ 处的奇性分析产生了半波迹不变量，其奇异支集包含于周期测地线 $\gamma$ 在 $\Sigma$上的周期集合中。此外，$\mathrm{Tr}\, U_t$ 在非零周期附近具有奇异性展开 $t = T \neq 0$ （在某些与洁净交相关的技术性假设下（见定义 A.1.15 ），该条件涉及某些流形之间的干净交） [10, 16] ，其首阶项可通过 $\gamma$ 的庞加莱映射的基本周期和特征值表示，见 [10,定理 4。5]。

在他们具有奠基意义的工作中，Duistermaat 和 Guillemin [10] 实际上考察了$U_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{P}}$，其中 $P$是在紧无边界流形 $\Sigma$上的一个正的、椭圆的、对称的 $m > 0$ 阶伪微分算子。

Gutzwiller迹公式在结构上与 Duistermaat-Guillemin迹公式相似，但其渐近行为是在普朗克常数趋于零的极限下考察的。更准确地说，取$\Sigma = \mathbb{R}^{d-1}$ ，为简单起见，取一个平凡的 $\mathbb{R}$ 线丛。令 $H := \hbar^2\Delta + V$ 为非相对论哈密顿量，使得 $U_{t,\hbar} := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH/\hbar}$，其中 $\hbar$ 是某个实参数，而 $V$ 是定义在 $\mathbb{R}^{d-1}$上的任意适当的光滑势。如果 $\hbar$ 足够小，那么 $H$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ 上的谱是离散的，并且存在一个正交归一基 $\{\phi_n\}$，它是 $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ 中由 $H$ 的特征函数组成的基。令 $\mathrm{E}_{n,\hbar}$ 表示 $H$ 的相应特征值。于是，我们希望研究 $\sum_n \rho(\mathrm{E}_{n,\hbar}\text{-}\mathrm{E}/\hbar)$ 在 $\hbar \to 0$ 的极限下的渐近展开。在物理上，$\hbar$ 被认作约化普朗克常数，因此 $\hbar \to 0$ 可以被视为量子到经典转变，这也正是半经典迹公式这一名称的由来（例如参见 [2, Sec. 2]）。然而，在本论文中，我们仅遵循 Duistermaat-Guillemin迹公式的原则，并在整个研究过程中令 $\hbar = 1$。注意，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta}$ 不是迹类算子，因为例如在圆上，其奇异支集是整个实轴 [10, p.46]

## 1.1.3 Sandoval迹公式

Sandoval 通过研究闭黎曼流形（$\Sigma$，$\mathrm{h}$）上的厄米向量丛（$\mathscr{E}_\Sigma \to \Sigma$，$\langle\cdot|\cdot\rangle$）上的 Dirac 型算子 $\hat{D}$，推广了 Duistermaat-Guillemin迹公式

$$\forall t \in \mathbb{R} : \hat{U}_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{D}}. \tag{1.15}$$

可以说，$\hat{D}$ 是几何分析中最基本的一阶微分算子，而它与拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $\Delta$ 在 $\mathscr{E}_\Sigma$ 上的区别在于，其谱 Spec $\hat{D}$在下方和上方均无界，而 Spec $\Delta$ 从下方有界（半有界）。Sandoval 的研究直接推广了 Weyl定律 [26, (5)] 和狄拉克波迹不变量 [26, 定理 2。2]。然而，真正的丛特征体现在 Tr $U_{T\neq 0}(\hat{D})$ [26, 定理 2。8]的奇性分析中的整体单值化群上。不过，如下文所阐明的，在用于推导整体单值化群的联络方面存在一个临时性的选择。

事实上，由 $D$ 和 h 确定的魏岑伯克联络（见（3.124））$\hat{\nabla}$ 并不会自动诱导出 Clifford 联络，尽管这样的联络总是存在（见注记 3.4.3），相应的算子通常称为相容的狄拉克型算子 $\check{D}$。它们之间仅相差一个光滑项 $W := \hat{D} - \check{D} \in C^\infty(\Sigma; \mathrm{End}\ \mathscr{E})$。为了计算 $\hat{U}_t$ 的主符号 $\sigma_{\hat{U}_t}$，Sandoval 使用了相对于 $\check{D}$ 的魏岑伯克联络 $\check{\nabla}$ 所对应的平行传输算子 $\check{\mathrm{T}}$，而不是对应于 $\hat{\nabla}$ [26, 的 $\hat{\mathrm{T}}$（命题 5.3]）。此外，她采用了由 $\check{D}^2$ [26, 的子主符号 $\check{\sigma}_{D^2}$ 消失这一条件刻画的平凡化（推论 5.11]）。因此，出现在表达式中的 $\check{\mathrm{T}}\,\sigma_{\hat{U}_t}$ 在某种程度上是权宜之计，而将 $\hat{\mathrm{T}}$ 分解为 $\check{\mathrm{T}}$ 与沿测地线 $[0,t] \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{S}^*\Sigma$ 的平均值 [2]（$W$）的形式相当随意。

我们的研究目标有两个方面。首先，我们放宽了上述所有临时性考虑，以计算 $\sigma_{\hat{U}_t}$。接下来，可以注意到，$\hat{U}_t$ 满足微分方程的初值问题

$$(-\mathrm{i}\,\partial_t + \hat{D})u = 0, \quad u(t_0) = k \tag{1.16}$$

在一个 $d$维乘积流形上（在广义相对论的语境中，这被称为超静态时空；参见注记 4.2.6 (e)）

$$(\mathscr{M}, \mathrm{g}) := (\mathbb{R} \times \Sigma, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{h}) \tag{1.17}$$

至少存在一个全局类时Killing向量场 $Z := \partial_t$，因此$\hat{U}_t$ 中的外部参数 $t$ 可以被视为 $\mathbb{R}$ 上的全局时间坐标。但是，$-\mathrm{i}\,\partial_t + \hat{D}$ 不满足广义相对论协变性，因此，与其如此处理，不如改为研究洛伦兹狄拉克型算子 $D$。因此，本文致力于研究 Sandoval 的迹公式的洛伦兹推广。

[2]参见 [26, （16）]以获取精确表达式。

### 1.1.4 黎曼迹公式：一种相对论观点

从黎曼到洛伦兹的过渡在概念上并非易事，因为狄拉克方程的柯西问题的解映射

$$Du = 0, \quad u \restriction \Sigma = k \tag{1.18}$$

在整体双曲时空上（参见定义 3.1.3）不再具有（1.15）的形式，因为狄拉克哈密顿量（$\hat{}D$的对应物）变为依赖时间。为了探究在洛伦兹情形下应当寻找什么，我们从相对论的观点重新审视乘积情形。可以推测，方程（1.16）的解具有以下形式

$$\psi_n^{\pm} := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_n^{\pm}}\phi_n^{\pm}, \tag{1.19}$$

其中， $\phi_n^{\pm}$ 是$\hat{}D$ 对应于特征值 $\lambda_n^{\pm}$的特征截面。不过

$$Z\psi_n^{\pm} = -\mathrm{i}\,\lambda_n^{\pm}\psi_n^{\pm} \tag{1.20}$$

因此，

$$\mathrm{Tr}_{L^2(\Sigma;\mathscr{E})}\,\hat{U}_t = \sum_{\lambda_n^{\pm}\in\mathrm{Spec}\,\hat{D}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda_n^{\pm}} = \mathrm{Tr}_{\ker(-\mathrm{i}\,\partial_t+\hat{D})}\,\mathrm{e}^{tZ}. \tag{1.21}$$

换言之，闭黎曼流形上狄拉克波群$\hat{}\,U_t$ 的迹，等价于超静态时空 $\mathscr{M}$的全局类时Killing向量场 $Z$ 所诱导的流$\mathrm{e}^{tZ}$ 在半波算子$-\mathrm{i}\,\partial_t+\hat{}D$的核$\ker(-\mathrm{i}\,\partial_t+\hat{}D)$上的作用之迹。这实质上是对Strohmaier和Zelditch最初在标量波算子背景下提出的观察结果的一种直接推广 [27, 第10节1] 。因此，正如第1.1.2节和第1.1.3节所述，关于黎曼谱几何的深刻结果（以及更多成果，例如汇编著作 [23, 24, 28–30], 中所收录的成果），本质上都是通过研究具有紧致、无边界柯西超曲面的超静态时空上的半波方程解算子（参见定义3.1.4）而获得的。

因此，显然，全局类时Killing流（见（4.3）） $\Xi$ 在洛伦兹流形上发挥着关键作用，而允许此类流的最一般时空类别称为静态时空（见定义4.2.1）（$\mathscr{M}$，g，$\Xi$）。从物理角度而言，这些时空具有规范的时间流，但不同于超静态情形，它们没有优选的时间坐标。它们之所以引人关注，是因为爱因斯坦方程的一些精确解（Schwarzschild 和 Kerr 黑洞）属于这一类别。我们要求（$\mathscr{M}$，g，$\Xi$）满足整体双曲性条件，以确保（1.18）的柯西问题适定。因此，我们研究的对象是在无边界的紧致（以保证离散特征值）柯西超曲面 $\Sigma \subset \mathscr{M}$ 上的分布迹 $\mathrm{Tr}\,U_t$（见（4.20）），即时间演化算子 $U_t$。除了概念层面的问题之外，我们的计算技术（详情见第4.3.3 节）也有所不同

于 Sandoval 所采用的方法，这主要是因为在静态时空上，狄拉克哈密顿量 $H_D$（见（4.35））并非Dirac 型，这与 $\hat{}D$相反。此外，我们使用由 $D$ 诱导的魏岑伯克联络计算了 $\sigma_{U_t}$（见引理4.7.3 和4.7.4），以避免采用 Sandoval 工作中上述为图方便的选择，正如最主要定理4.3.6陈述之后的注释中所解释的那样。

作为典型的相对论算子，它还允许研究与经典引力相互作用的量子场论可观测量的半经典极限[3]。尽管从物理学角度看，自旋（参见例3.4.4）算子或自旋$^c$-狄拉克算子更为理想，但我们更倾向于研究更一般的狄拉克型算子，因为它们不会对 $\mathscr{M}$[4] 施加任何拓扑限制，不像自旋[5]-狄拉克算子。

我们想在本小节末尾指出，关于洛伦兹迹公式的文献并非仅此一项；事实上，这一方向的首项工作是针对3.2.2例中所述的达朗贝尔算子展开的，研究的时空几何与本文相同，作者为 Strohmaier 和 Zelditch [27]。我们将在下一节简要介绍他们的工作。因此，本文（主要结果见第4.3.2 节）可视为 Sandoval 工作的洛伦兹推广：将 Strohmaier-Zelditch 框架扩展到丛框架。近期，McCormick [32]还利用本研究的若干结果，将 Strohmaier-Zelditch 迹公式推广至配备 Kaluza-Klein 度量的空间紧致、全局双曲定常时空上的向量达朗贝尔算子。

### 1.1.5 Strohmaier-Zelditch 迹公式

在具有紧致柯西超曲面（$\mathscr{M}$，g，$\Xi$）的全局双曲静态时空（$\Sigma$，h）的设定下，Strohmaier-Zelditch [27] 研究了 $\Box$——一个在诱导的 Killing 流$\Xi_s^*$下保持不变的带光滑势的达朗贝尔算子，因此谱问题可以表述为

$$\Box\psi_n = 0, \quad Z\psi_n = \lambda_n\psi_n, \tag{1.22}$$

其中 $\lambda_n$ 是（类时）完备Killing向量场 $Z$ （见备注4.2.6 (a)）在 $\mathscr{M}$ 上的特征值，而 $\psi_n$ 是 $\Box$ 和 $Z$的联合特征函数。这个特征值问题等价于某种[6] 形式的算子铅笔的特征值问题，这意味着对于 $\Sigma$上的某个算子而言，该特征值问题无法进行解释。此外，只有当时空 $(\Delta - \lambda^2)\,\phi_n = 0$ 时，它才归结为经典特征值问题

[3]我们不要求满足爱因斯坦场方程。[4]洛伦兹度量的全局存在性取决于 $\mathscr{M}$的拓扑。[5]特别地，这样的度量存在于所有非紧流形以及欧拉示性数为零的紧流形上。[5]自旋结构总是局部存在的，但其全局存在性取决于基流形的某种更高阶可定向性。例如，自旋（分别为自旋$^c$）结构存在，当且仅当 $\mathscr{M}$ 的第二（分别为第三个整系数）Stiefel–Whitney类 [31]消失。[6]参见 [27，（29）]以了解其精确形式。

度量g 具有乘积形式（1.17），其中 $\Delta$ 是 $\Sigma$上的拉普拉斯算子。

在相对论框架下，经典相空间是锥形辛流形 $\mathscr{N}$，由余切丛 T 上的类光（余）测地线构成${}^*\mathscr{M}$，其底空间为 $\mathscr{M}$，这与定义在柯西超曲面${}^*\Sigma \to \Sigma$ 上的余切丛 T 相对照 $\Sigma$，正如非相对论情形所预期的那样（详见第 4.4.2 节）。量子动力学的迹 $\operatorname{Tr} U_t$ 由时间演化算子 $U_t$ 的 $\Box$给出（参见（1.21））

$$\operatorname{Tr} U_t = \operatorname{Tr}_{\ker \Box} \mathrm{e}^{tZ}. \tag{1.23}$$

随后，他们针对这一洛伦兹框架调整了 Duistermaat-Guillemin [10]框架，得到了 $\operatorname{Tr} U_{t=0}$ 和 Tr $U_{T\neq 0}$的渐近表达式，并进一步得到了洛伦兹版韦尔定律 [27]（另见 [33]以及综述 [34]）。

## 1.2 费曼传播子

在整体双曲时空上，任意正规双曲算子的柯西问题（见定义 3.2.1） $\Box$ 都是适定的。这意味着唯一的超前基本解和推迟基本解（传播子）存在（见定义 3.2.10和注记 3.2.13）。这些基本解的性质对于理解经典波传播（例如电磁波）极为重要。它们由于因果性而自然出现：推迟基本解向未来传播，而超前基本解向过去传播。在量子场论中，时间排序的出现（见附录 C.3）以及能量正性的要求，促成了另一类基本解——费曼传播子的形成。它将 正能量解传播到未来，并将负能量解传播到过去，从而将因果性与能量正性的概念结合起来（见例 C.3.2）。关于闵可夫斯基时空中正规双曲算子的洛伦兹不变费曼传播子的显式公式，可参见量子场论的标准教材。正如例 C.3.2所述，通常的构造采用傅里叶变换。然而，在一般的整体双曲时空上，若不存在全局类时Killing向量场，既没有傅里叶变换，也没有任何合理的能量概念。因此，费曼传播子究竟应当是什么，先验而言并不清楚。

在偏微分方程理论中，拟逆的概念（参见定义 3.2.14）通常有助于构造真正基本解的第一阶段。拟逆本身是算子 $\Box$ 模去平滑算子后的逆。若两个参数子之差为平滑算子，则认为它们是等价的。Duistermaat 和 Hörmander [35] 的一项深刻洞见是，费曼参数子具有良定义的概念，并且这些参数子在相差平滑算子的意义下是唯一的。换言之，它们作为参数子是唯一的。事实上，对于任意实主类型的标量伪微分算子，都存在 distinguished 参数子的概念

（参见定义 2.2.10），他们在那篇开创性文章中提出了伪凸性的几何概念，从而能够证明此类参数子的唯一性。粗略地说，尽管由于缺乏全局类时Killing向量场而不存在任何能量概念，但仍然存在能量正性的微局部概念，以及余切丛上的相应流。这一微局部概念可用于刻画费曼参数子（参见定义 3.2.17）：它们由其波前集而非支集性质所区分。

费曼参数子在弯曲时空中的量子场论里发挥着极其重要的作用，而这套理论实际上最初是在物理学文献中发展到一定程度的。线性场的正则量子化可以分两个阶段进行。第一步（见附录 C.1）是从相应运动方程的解空间构造场代数；接下来（见附录C.2），需要选取某个量子状态，以构造该场代数的希尔伯特空间表示。在闵可夫斯基时空中，由于真空态的存在（见例 C.2.2），这两个步骤通常合并为一个步骤；而在弯曲时空中，将它们分开则更为有益。第一步可以毫无问题地完成，方法与在闵可夫斯基时空中完全相同；但第二步则需要对合理状态的概念作出界定。人们已经认识到，一个状态必须满足某些条件，才能在微扰量子场论中执行通常的运算 [36–38]。其中一个已确定的条件，是限制由该状态得到的奇性的类型，即所谓的 Hadamard条件（定义C.2.3）。尽管 Duistermaat 和 Hörmander 无疑了解物理学领域的发展，但直到很久以后，Radzikowski [39]才认识到：对于满足 Hadamard条件的状态，时间序列乘积的期望值就是费曼传播子。事实上，构造一个 Hadamard 态等价于构造一个满足某种（见命题 3.3.2）正性性质的费曼传播子。Duistermaat 和 Hörmander 早已证明，参数子具有这种正性性质。参数子的这一性质意味着此类费曼传播子的存在，因而也意味着 Hadamard 态的存在（见 [40]）。

除了在物理学中的应用之外，费曼参数子在数学中也发挥着极其重要的作用。例如，它们出现在洛伦兹指标理论的背景下，作为满足 Atyiah- Patodi-Singer 边界条件的狄拉克算子模紧算子的逆 [41], 局部指标定理 [42], 以及渐近静态时空 [43]中。这些概念也出现在 Vasy 对渐近双曲问题的处理中，参见例如 [44] 及其中的参考文献；在这一背景下，甚至还讨论了非线性问题。此外，正如 [27]中首次指出的，费曼传播子的概念也自然出现在 Duistermaat-Guillemin- Gutzwiller 迹公式的洛伦兹推广中。

迄今为止，Duistermaat 和 Hörmander 为实主类型标量伪微分算子构造特定初始解的方法，在

物理学文献中尚未得到广泛应用，这可能是由于该方法具有很强的一般性，且相关记号较为复杂。不过，他们的核心思想既有说服力，也很简单。该算子可以在微局部意义下共轭为一个向量场，因此，只需为实直线上的微分算子构造一个拟逆。微分算子有两个特定的基本解。为该算子的特征集的每个连通分支选择一个拟逆，便可得到一个特定的拟逆。因此，若 $N$ 是该算子的特征集的连通分支数，则这类伪微分算子有 $2^N$ 个特定的拟逆。对于波算子，在 $d \geq 3$ 维中这给出 4 个特定的拟逆，在 $d = 2$维中则给出 16 个特定的拟逆。

本研究的目标有三个。首先，我们希望修订并简化 Duistermaat-Hörmander [35] 在正规双曲算子特殊情形下的构造。第二个目标是填补文献中的一个空白：Duistermaat-Hörmander 中的微局部化以及相应的特定初始解构造，在文献中仅针对标量算子进行了论述。指标理论、迹公式以及物理学中的若干构造，都要求作用于向量丛上的算子存在唯一的费曼参数子。已知，大多数构造都可以推广到任意正规双曲算子的情形，因为其主符号是标量的。然而，在次主符号层面也会出现一些重要差异（见定义 2.3.4）。在本研究中，我们将对这类几何算子的微局部化给出精确表述（见定理 3.3.10 和 3.3.13）。随后，我们将详细构造（定理 3.3.1）向量丛上的费曼参数子，完整证明其唯一性，并讨论丛联络曲率的影响。我们证明（见命题3.3.2），只要向量丛带有一个厄米内积，并且算子关于该内积形式自伴，就可以以一种使上述正性性质成立的方式完成构造。接下来，借助整体双曲时空上正规双曲算子的适定柯西问题，我们将费曼参数子提升为费曼传播子（见定理 3.3.3）。第三，也是最后一点，对于任意 Dirac 型算子，我们给出（见定理 3.4.8）一种更为直接的费曼传播子构造，使其满足正性性质。我们还讨论了一些推论，包括通常的奇性传播定理（见定理 3.3.16）。众所周知，这些结论对于向量丛上的非常一般的算子均成立。例如，Dencker 已经通过矩阵情形下的微局部化证明了偏振集传播 [45]。

如上文所述（另见（C.16）），构造满足正性性质的费曼传播子等价于构造 Hadamard 态。即使在解析范畴中，也有多种构造 Hadamard 态的方法 [46]。其中一些方法是直接方法，利用洛伦兹距离函数进行奇性展开（即所谓的 Hadamard 展开）[40, 47–52], 依赖频率分裂的谱方法（变形方法）

[53, 54], 伪微分方法 [55–60] （另见专著 [61]）、全息术 [62–65] （另见综述 [66]），甚至还有整体方法 [44, 67–69]（另见评论 [70]）。其中许多构造可以推广到丛情形，而且已经得到了推广。每种方法都有其优缺点。

## 1.3 组织结构

论文由三章和三篇附录组成。第2 章主要包含论文所需的背景材料，而我们的实质性贡献则置于第3 章和第4章中。附录A 和B 主要补充第2章以及第4章的大部分内容，而第3 章则由附录C补充。

傅里叶积分算子是本论文所使用的主要技术工具。具体而言，符号观点得到了广泛运用。我们从第2章的局部理论开始，以此引出整体表述。为使从局部到整体的过渡更加顺畅，我们首先以循序渐进的方式介绍了欧几里得空间上傅里叶积分算子的朴素理论，随后给出了不变局部形式体系。这一刻画为将拉格朗日分布理论推广到流形、进而推广到向量丛铺平了道路。除了回顾标准公式外，我们还证明了若干通常仅在标量情形下可用的定理的丛版本。尽管这些证明只是在标准证明的基础上略作修改，但在现有文献中，很难系统地找到它们。

第 3 章讨论整体双曲时空上任意正规双曲算子和任意狄拉克型算子的费曼传播子。为使论述自成一体，我们先介绍洛伦兹几何以及这些算子的必要背景。随后在第 3.3.1、3.4.4 和 3.5.6 节陈述主要结果。为推导这些结果，我们引入了由伪微分算子的次主符号 $P$ 所诱导的相容联络概念（见定义 3.3.6 ）。借此，我们得以表述（见定理 3.3.10 和注记3.3.12）向量丛上实主型伪微分算子的微局部化。因此，正规双曲算子也得以微局部化（见定理 3.3.13）。

整体双曲静态时空上任意狄拉克型算子的核上的时间流的迹已在第4章中进行了研究。本章介绍了有关静态时空几何的充分背景知识，随后在第4.3.2节阐述了我们的主要研究成果。

附录 A 总结了齐次典范关系上的向量丛值半密度的复合，以及锥辛几何中的相关材料。

附录中介绍了典范关系上的向量丛值多重齐次符号类B。

附录 C介绍了曲时空量子场论代数方法的非技术性前言，以及代数量子态的技术性导论。为将这一方法与标准物理学文献联系起来，我们以闵可夫斯基真空为例加以说明。这也促使我们要求施加 Hadamard条件，将其作为在曲时空中选取物理态的一项必要标准。

## 1.4 约定

在全文中，向量丛 $\mathscr{E} \to M$ 指定义在豪斯多夫、第二可数的 $d \in \mathbb{N}$维拓扑空间 $M$ 上的光滑 $\mathbb{C}$-向量丛，并配备有一个光滑图册的等价类。我们用记号 $\mathscr{E}$表示去掉 $\mathscr{E}$零截面后的部分。有时，$\mathscr{E}$配备一个非退化半双线性型（$\cdot|\cdot$），并假定该型关于其第一个自变量是反线性的。对于 $\mathscr{E}$上的厄米型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$，我们指正定的（$\cdot|\cdot$）。洛伦兹流形及其特殊情形——全局双曲流形，均记作 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$，其度规号差为 $+-\ldots-$，且 $d :=$ 维数为 $\mathscr{M} \geq 2$。

令 $\Omega^{1/2} \to M$ 为 $M$上的半密度丛。我们将 $\mathscr{E}$上的光滑半密度和紧支光滑半密度的向量空间分别记为 $C^\infty(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2})$ 和 $C_c^\infty(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2})$，并分别赋予 Fréchet空间拓扑和归纳极限拓扑。（紧支）分布半密度的向量空间 E

$$\Omega^{1/2} \quad \mathscr{E}' \quad M \quad \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2} = \left(C^\infty \quad M \quad \mathscr{E}^* \otimes \Omega^{1/2}\right)' \qquad C^\infty \quad M \quad \mathscr{E}^* \otimes \Omega^{1/2}' \quad M \quad \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2} = \left(C_c^\infty \quad M \quad \mathscr{E}^* \otimes (\,;/\,) : (\,;/\,)\right.$$

resp. D ( ; / ) : ( ; / )

$$\left.\Omega^{1/2}\right)' \qquad C_c^\infty \quad \mathscr{E}^* \otimes \text{on 由 } ((\,;/\,)$$

resp.) ( ; / ) 的拓扑对偶定义，其中后者装备由 $(C^\infty(M; \mathscr{E}^* \otimes \Omega^{1/2})$ resp.) $C_c^\infty(M; \mathscr{E}^* \otimes \Omega^{1/2})$ 的拓扑诱导的弱*拓扑；这里，$\mathscr{E}^* \to M$是 $\mathscr{E}$的对偶丛（详见例如 [71, 第 307], [72, 页及第 24-25, 146] 页，了解这些空间的细节）。在定向洛伦兹流形（$\mathscr{M}$, g）上，我们使用自然的洛伦兹体积元，将$C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) = C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}\mathscr{M})$以及 $\mathrm{D}'(\mathscr{M}; \mathscr{E}) = \mathrm{D}'(\mathscr{M}; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}\mathscr{M})$ 识别起来。此外，将 $C_{sc}^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$定义为 $\mathscr{E}$的空间紧支光滑截面的空间，即所有$u \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$的集合，其中存在 $\mathscr{M}$的某个紧子集 $K$，使得 s upp $u \subset J(K)$，其中 $J(K) := J^+(K) \cup J^-(K)$ 和 $J^\pm(K)$ 分别是 $K$的因果未来（过去）；作为向量空间，$C_{sc}^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \subset C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$。以同样的精神，$C^\infty(M)$表示 $M$上所有取值于 $\mathbb{C}$的光滑函数的集合。

任意 $u \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$ 的傅里叶变换 F $(u)$ 定义为

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\theta} u \,\mathrm{d}x, \qquad \text{and} \qquad u = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\theta} \mathcal{F}(u) \,\mathrm{d}\theta, \tag{1.24}$$

当 $\mathrm{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}\theta/(2\pi)^d)$ 时，其中 $\cdot$ 根据上下文既可以表示欧几里得内积，也可以表示闵可夫斯基内积。如果 $T\colon C_{\mathrm{c}}^{\infty}(N; \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N) \to \mathrm{D}'(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M)$ 是一个积分算子，则其施瓦茨核记为 $\mathrm{T}$。

符号 $\sim$ 表示渐近求和，而本论文仅使用多重齐次符号类 $S^m$，因此 $\Psi\mathrm{DO}^m$（分别地，$I^m$）表示具有多重齐次总符号的伪微分算子（分别地，拉格朗日分布）的集合。我们使用记号 $S^{m-[m']} := S^m/S^{m-m'}$ 表示商空间（类似地，$\Psi\mathrm{DO}^{m-[m']}, I^{m-[m']}$ 等）。对于任意 $u, v \in \mathrm{D}'(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2})$，我们简洁地写作 $u \equiv v$，表示 $u - v \in C^{\infty}(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2})$。

# 第2章

# 傅里叶积分算子

本章回顾向量丛上拉格朗日分布的标准理论。为了引出整体形式体系，我们从偏微分算子的局部理论开始，并按递增的阶进行推广，即先讨论伪微分算子，再讨论傅里叶积分算子。在流形上对伪微分算子（以及傅里叶积分算子）的表述，被用作补充丛框架的中间步骤。

## 2.1 傅里叶积分算子的局部理论

### 2.1.1 微分算子

设 $U$ 是 $d \in \mathbb{N}$维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$的一个开子集。 $U$ 上具有光滑系数、阶（至多为） $m \in \mathbb{R}$ 的偏微分算子 $L$ 可表示为

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha \, \mathrm{D}^\alpha : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \tag{2.1}$$

对某个 $f_\alpha \in C^\infty$（$U$），此处使用了多重指标记号（见附录 B）。对的$U$（$u$）应用傅里叶变换 （$U$）可得

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \int_U \mathsf{L}(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y, && (2.2)\\ \mathsf{L}(x,y) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\theta} \mathsf{l}(x,\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{(2\pi)^d}, && (2.3)\\ \mathsf{l}(x,\theta) &:= \sum_{|\alpha| \leq m} f_\alpha \theta^\alpha, && (2.4) \end{aligned}$$

其中，$\mathsf{L}$ 和 $\mathsf{l}$ 分别称为 $L$ 的**施瓦茨核**和**全符号**。最高阶项

$$l(x,\theta) := \sum_{|\alpha| = m} f_\alpha \theta^\alpha \tag{2.5}$$

全符号 l 的最高阶项称为 $L$ 的**主符号**。我们将 $U$ 上阶数至多为 $m \in \mathbb{R}$ 的所有偏微分算子的集合记为 $\mathrm{PDO}^m(U)$。

可以观察到，全符号

$$\sigma^{\mathrm{tot}} : \mathrm{PDO}^m(U) \to \mathbb{P}_m(U \times \mathbb{R}^d), \quad L \mapsto \sigma_L^{\mathrm{tot}} := \mathrm{l} \tag{2.6'}$$

是 PDO 之间的同构$^m$（$U$）以及所有定义在 $\mathbb{P}_m$（$U \times \mathbb{R}^d$）上的、次数至多为$U \times \mathbb{R}^d$ 的多项式光滑函数集合 $m$ 中的 $\mathbb{R}^d$。该同构表明，在光滑项意义下知道全符号l 等价于知道算子$L$ 模去光滑End $\left(C^\infty\right.$（$U$）$\left.\right)$，因此，（2.6'）的更精确形式为

$$\sigma^{\mathrm{tot}} : \mathrm{PDO}^{m-[\infty]}(U) \to \mathbb{P}_{m-[\infty]}(\mathrm{T}^*U), \quad [L] \mapsto \sigma_{[L]}^{\mathrm{tot}} := [\mathrm{l}], \tag{2.6}$$

其中 $\mathrm{T}^*U$ 是 $U$ 上的余切丛，而 $\mathrm{PDO}^{m-[\infty]}$（$U$）表示 $\mathrm{PDO}^m$（$U$）模去 $U$上的光滑算子。还可以观察到，在（2.1）中改变次于首阶项的部分并不会改变主符号：

$$\sigma : \mathrm{PDO}^{m-[1]}(U) \to \mathbb{P}_{m-[1]}(\mathrm{T}^*U), \quad [L] \mapsto \sigma_{[L]} := [l], \tag{2.7}$$

其中 $\mathrm{PDO}^{m-[1]} := \mathrm{PDO}^m/\mathrm{PDO}^{m-1}$。注意，无论 l 还是 L，在坐标变换下都表现不佳，而 $l$ 则表现良好。更确切地说，考虑一个微分同胚

$$\kappa : U \to V, \; x \mapsto y := \kappa(x) \tag{2.8}$$

两个开子集之间的 $U$，$V \subset \mathbb{R}^d$ 其余切提升为

$$\mathrm{T}^*\kappa : \mathrm{T}^*V \to \mathrm{T}^*U, \; (y,\eta) \mapsto (x,\xi) := \mathrm{T}^*\kappa\,(y,\eta) := \left(\kappa^{-1}(y), \mathrm{T}^*_{\kappa^{-1}(y)}\kappa\,(\eta)\right), \tag{2.9}$$

其中 $\mathrm{T}^*_y V \ni \eta \mapsto \overset{*}{\mathrm{T}}_{\kappa^{-1}(y)}\kappa(\eta) := \eta \circ \mathrm{d}_x\kappa \in \mathrm{T}^*_x U$，而 $\mathrm{d}_x\kappa : \mathrm{T}_x U \to \mathrm{T}_{\kappa(x)}V$ 是 κ的切映射。因此可得诱导映射

$$(\mathrm{T}^*\kappa)^* : C^\infty(\mathrm{T}^*U) \to C^\infty(\mathrm{T}^*V), \; a \mapsto \left((\mathrm{T}^*\kappa)^* a\right)(y,\eta) := a\left(\mathrm{T}^*\kappa\,(y,\eta)\right). \tag{2.10}$$

于是，链式法则

$$\mathrm{D}_x^\alpha \mapsto \left(\frac{\partial \kappa^{j_1}}{\partial x^1}\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial y^{j_1}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial \kappa^{j_d}}{\partial x^d}\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial y^{j_d}}\right)^{\alpha_d} \tag{2.11}$$

意味着变换后的全符号 $\mathrm{l} \mapsto (\mathrm{T}^*\kappa)^*\mathrm{l}$ 最终会出现涉及 κ高阶导数的复杂纠缠项，而主符号则不变地变换：

$$\left((\mathrm{T}^*\kappa)^* l\right)(y,\eta) = \sum_{|\alpha|=m} \left((\kappa^{-1})^* f_\alpha\right)(y) \left(\left((\kappa^{-1})^*\frac{\partial \kappa^{j_1}}{\partial x^1}\right)(y)\,\eta_{j_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\left((\kappa^{-1})^*\frac{\partial \kappa^{j_d}}{\partial x^d}\right)(y)\,\eta_{j_d}\right)^{\alpha_d}. \tag{2.12}$$

换言之，对于任意 $L_U \in$伪微分算子$^m(U)$，$L_V \in$伪微分算子$^m(V)$，以下图表交换：

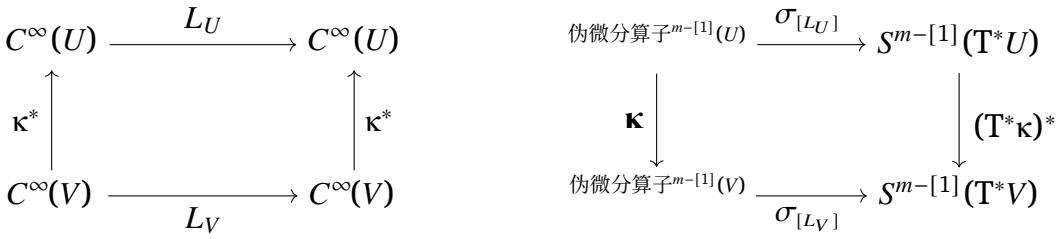


图2.1：微分同胚下偏微分算子及其主符号的变换 $\kappa :=$ （2.8）。在右图中，伪微分算子$^m(U) \ni L_U \mapsto L_V := \boldsymbol{\kappa}(L_U) := (\kappa^*)^{-1} \circ L_U \circ \kappa^* \in$伪微分算子$^m(V)$，所有其他符号均如当前讨论中所定义。

为了实现对这些概念的内禀刻画，人们注意到 [73]（另见 [74], [75, 第 151-152]页）

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : e^{-i\lambda x\cdot\xi} L(e^{i\lambda x\cdot\xi}) = \sum_{|\alpha|\le m} f_\alpha \xi^\alpha \lambda^\alpha \tag{2.13}$$

是 $\lambda$ 上的一个 $m$ 度为 $L \in$ 的任意$^m(U)$的多项式。反之，任何满足上述性质的连续线性算子都是 $m$ 阶的微分算子，并可表示为（2.2）。显然，因此

$$\sigma_L^{\mathrm{tot}}(x,\xi) := e^{-i x\cdot\xi} L(e^{i x\cdot\xi}), \qquad \sigma_L(x,\xi) := \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-m} e^{-i\lambda x\cdot\xi} L(e^{i\lambda x\cdot\xi}). \tag{2.14}$$

## 2.1.2 伪微分算子

伪微分算子的基本概念是考虑形如（2.2）的算子，其施瓦茨核在对角线上同样是奇异的，但它以不保持支集以及将微分算子的总符号（2.5）替换为更广泛的一类函数的方式推广了微分算子的概念。严格地说，**伪微分算子** $P$ 在 $U$ 上且**阶**（至多）为 $m \in \mathbb{R}$ 是一个连续线性映射（参见例如 [76, 第 69]页）

$$P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U),\ u \mapsto (Pu)(x) := \int_U \mathsf{P}(x,y)\, u(y)\, \mathrm{d}y \tag{2.15}$$

其施瓦茨核 $\mathsf{P} \in \mathrm{D}'(U\times U)$ 具有如下形式

$$\mathsf{P}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} \mathsf{p}(x,y;\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{2.16}$$

对于符号类中的某个元素 $\mathsf{p}$（参见定义 B.1.6） $S^m(U\times U\times\mathbb{R}^d) \supseteq \mathbb{P}_m(U\times U\times\mathbb{R}^d)$。注意，前面的表达式是一个 振荡积分，因此必须在分布意义下理解。我们将所有此类算子的集合记为 $\Psi\mathrm{DO}^m(U)$。

回顾一下，**平滑算子** $\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(U)$ 定义为所有线性连续算子 $C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ 的集合，其施瓦茨核是光滑的。

自然地，我们现在希望引入全符号和主符号的概念。为此，我们引入 $\Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 的一个保持支集的子集。

定义 2.1.1. 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开集，$\Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 为 $U$ 上阶数（至多为） $m \in \mathbb{R}$ 的所有伪微分算子组成的集合。若元素 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 的施瓦茨核 $\mathrm{P}$ 在 $U \times U$ 中的支集上的两个投影 $\operatorname{supp}\mathrm{P} \to U, U$ 到 $U$ 都是适当映射，则称其为适当支撑的；也就是说，对于每个紧集 $K \subset U$，都存在一个紧集 $\tilde{K} \subset U$，使得 [77, p。 103]（另见 [76，定义 18.1。21]）

$$\operatorname{supp} u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp}(Pu) \subset \tilde{K}, \quad u \restriction \tilde{K} = 0 \Rightarrow (Pu) \restriction K = 0. \tag{2.17}$$

类似地，若投影算子 $\operatorname{clo}\left(\Pr(\operatorname{supp}\mathrm{p})\right) \to U, U$ 是适当映射，则称 $\mathrm{p} \in S^m(U \times U \times \mathbb{R}^d)$ 是适当支撑的；其中 Pr 将 p 投影到 $U \times U$ 上，clo 表示闭包。

适当支撑的伪微分算子可以通过限制支集来定义，即 $P : C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(U)$，$P : E'(U) \to E'(U)$，此外 $P : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$，$P : D'(U) \to D'(U)$。这些算子之所以有用，是因为

**命题 2.1.2**。 每个阶为 $m$ 的伪微分算子都可以写成一个 $m$ 阶适当支撑的伪微分算子与一个平滑算子 *[77, p* 的组合。 *103]*。

伪微分算子的全符号这一概念形式化如下。

**定理2.1.3**。 按照定义 *2.1.1* 中的术语，任意适当支撑的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 都可以唯一表示为 *[77,* 定理 *2.1*。*1]*

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} \sigma_P^{\mathrm{tot}}(x,\xi)\, u(y)\, \mathrm{d}y\, \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}, \tag{2.18}$$

其中，全符号 $\sigma_P^{\mathrm{tot}}(x,\ \xi) :=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\cdot\xi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bullet\cdot\xi})(x)$ 由以下渐近求和给出（见定义 *B.1.4*）公式

$$\sigma_P^{\mathrm{tot}}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha \mathrm{D}_y^\alpha \mathrm{p})(x,x;\xi), \tag{2.19}$$

其中 p 如 (2.16) 所示，是 $S^m(U \times U \times \mathbb{R}^d)$ 的一个元素。

反之，给定任意真 $\mathrm{p} \in S^m(U \times U \times \mathbb{R}^d)$，所有形如 (2.18) 且全符号为 (2.19) 的算子都属于适当支撑的 $\Psi\mathrm{DO}^m(U)$集合。

由于一般的伪微分算子 $P$ 与其适当支撑部分$\tilde{P}$ 之间仅相差一个平滑算子，因此定义

$$\sigma^{\mathrm{tot}} : \Psi\mathrm{DO}^{m-[\infty]}(U) \to S^{m-[\infty]}(\mathrm{T}^*U),\ [P] \mapsto \sigma^{\mathrm{tot}}_{[P]} := \sigma^{\mathrm{tot}}_{\tilde{P}}. \tag{2.20}$$

前述 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{[P]}$ 表达式表明，(2.4) 对伪微分算子以渐近意义成立。此外，该表达式为定义 $\sigma_{\tilde{P}}$ 的 $\tilde{P}$主符号铺平了道路，它正是 (最高阶齐次项在 2.19 中的项)。显然，它看不到光滑项，因此 $\sigma_P$ 可与之等同。

**定义 2.1.4**。 按照定义 2.1.1中的术语，令 $S^m(\mathrm{T}^*U)$ 为余切丛 $\mathrm{T}^*U$ 上的 $U$符号空间。那么， **主符号** $\sigma_P$ of$P \in \Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 由同构 [77, p. 110]定义。

$$\begin{aligned}\sigma \ :\ & \Psi\mathrm{DO}^{m-[1]}(U) \to S^{m-[1]}(\mathrm{T}^*U),\ [P] \mapsto \\ & \sigma_{[P]} := \text{homogeneous term of degree } m \text{ in (2.19)} \mod S^{m-1}(\mathrm{T}^*U).\end{aligned} \tag{2.21}$$

就变换性质而言， $\sigma^{\mathrm{tot}}_P$ 和 $\sigma_P$ 与微分算子的变换性质相似。更确切地说，在 $\kappa$ 的作用下: = (2.8)，任意适当支撑的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 的全符号按 [77, (2.1.14)] 变换（另见 [76, 定理 18.1。17]）

$$\left((\mathrm{T}^*\kappa)^*\sigma^{\mathrm{tot}}_P\right)(y,\eta) \sim \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi \mathrm{p}(x,\xi)\,\mathrm{D}^\alpha_{\tilde{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\rho(x,\tilde{x})\cdot(\mathrm{T}^*_x\kappa)^{-1}(\xi)}\big|_{\tilde{x}=x}, \tag{2.22}$$

其中 $(x,\ \xi)\ :=\ \left(\kappa^{-1}(y),\ \mathrm{T}^*_x\kappa\,\eta\right)$ 以及 $\rho(x,\ \tilde{x})\colon =\kappa(\tilde{x})\ -\kappa(x)\ -(\tilde{x}-x)\mathrm{d}_x\kappa$。

**注记 2.1.5**。 首齐次项 $p$ 在（2.22）中满足（参见例如 [76, 第 83]页）

$$\left((\mathrm{T}^*\kappa)^* p\right)(y,\eta) = p(x, \mathrm{T}^*_x\kappa\,\eta). \tag{2.23}$$

由此显然，主符号是一个 不变地 定义的 齐次函数，定义在去心余切丛 $\dot{\mathrm{T}}^*U$ 上，这与全符号形成对比。换言之，图 2.1 对伪微分算子同样成立。

迄今为止，我们通过其施瓦茨核（2.18）指定了一个（适当支撑的）伪微分算子，该核以振荡积分的形式给出，其被积函数为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\sigma^{\mathrm{tot}}_P(x,\ \xi)$。但是，指数和全符号都不具备微分同胚不变性，因此无法预见施瓦茨核是否具有不变的意义。因此，我们应当为这类分布寻求一种内禀刻画。人们普遍认为，奇异性结构是分布的一个特征。但奇异支集[1] 因为它 不具备微分同胚不变性，故无法满足我们的目的。因此，我们引入**波前集** [78], [77, (2.5.2)]

$$\mathrm{WF}\,u := \bigcap_{\substack{P\in\Psi\mathrm{DO}^0(U)\\ Pu\in C^\infty(U)}} \mathrm{Char}\,P, \quad \mathrm{Char}\,P := \{(x_0,\xi^0) \in \dot{\mathrm{T}}^*U \mid \sigma_P(x_0,\xi^0) = 0\}. \tag{2.24}$$

[1]回顾一下，分布 $u \in \mathrm{D}'(U)$ 的**奇异支集** $\mathrm{singsupp}\,u$ 是 $U$ 中所有这样的点的集合：不存在一个开邻域，使得将 $u$ 限制在该邻域上后成为光滑函数（参见例如 [75, 定义 2.2.3]。

分布 $u \in \mathrm{D}'(U)$的波前集，其中交集遍历所有适当支撑的 $P$，而特征集 $P$ 称为 $P$的特征簇。显然，波前集在微分同胚下协变变换。等价地，$\dot{\mathrm{T}}^*U \ni (x_0, \xi^0) \notin \mathrm{WF}\, u$ 当且仅当存在一个紧支撑光滑函数 $f$，定义在 $U$ 上，且在 $x_0 \in U$ 处不为零，使得 $(\mathrm{F}(fu))(\xi)$的傅里叶变换在 $\xi^0$ [77, 的某个锥形邻域内快速衰减（命题 2.5.5]）。注意，波前集是奇异支集的推广，因为后者是前者的底投影（定理 2.5.3]）。换言之，$\mathrm{singsupp}\, u$ 仅指出奇点的位置，而 WF $u$除了提供奇点的位置外，还给出导致这些奇点的余切向量。如果 $\mathrm{A} \in \mathrm{D}'(U \times V)$是一个双分布，其中 $V$ 是任意欧几里得空间的一个开子集，那么它的扭曲波前集由下式给出（定理 2.5.14]）

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{A} := \{(x, \xi; y, -\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*U \times \dot{\mathrm{T}}^*V \,|\, (x, \xi; y, \eta) \in \mathrm{WF}\,\mathrm{A}\} \tag{2.25}$$

例如，[75, 79, 80]中介绍了波前集的详细内容。

因此，伪微分算子 [77, p. 124] 的施瓦茨核的波前集（另见 [76,定理 18.1.16、18.1.26]）满足：

$$\mathrm{WF}\,\mathrm{P} \subseteq \{(x, \xi; x, -\xi) \in \dot{\mathrm{T}}^*U \times \dot{\mathrm{T}}^*U\} = (\Delta U)^{\perp *} \tag{2.26}$$

包含于余法丛中（见例子 A.1.7 和 A.1.11）$(\Delta U)^{\perp *}$ 的对角嵌入

$$\Delta : U \to U \times U,\ x \mapsto \Delta(x) := (x, x). \tag{2.27}$$

通过投影 $\mathrm{ng}\ \mathrm{T}^*U \times \mathrm{T}^*U \to \mathrm{T}^*U$到第一个因子上，$(\Delta U)^{\perp *}$可以与 $\mathrm{T}^*U$识别，并且

$$\mathrm{WF}\, P = \mathrm{ES}\, P := \{(x, \xi) \in \dot{\mathrm{T}}^*U \,|\, (x, \xi; x, \xi) \in \mathrm{WF}'\,\mathrm{P}\} \tag{2.28}$$

称为**波前集**，也称为**本质支集**伪微分算子 $P$。这是使得最小锥集满足 $P$ 是阶 $-\infty$ 的 $\dot{\mathrm{T}}^*U \setminus \mathrm{WF}\, P$。特别地，如果 $P$ 具有适当支撑，则 $\dot{\mathrm{T}}^*U \setminus \mathrm{WF}\, P$ 是最大的开锥集，在该集合上$\sigma_P^{\mathrm{tot}}$ (2.19)快速衰减 [77,命题 2.5。8]。

给定一个 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(U)$，存在唯一的形式对偶算子 $P^* \in \Psi\mathrm{DO}^m$，使得 $(U)$

$$P^* : \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U),\ u \mapsto (P^*u)(\phi) := u(P\phi) \tag{2.29}$$

对于任意 $\phi \in C_c^\infty(U)$。伪微分算子是微局部的，这意味着

$$\mathrm{WF}(Pu) \subseteq \mathrm{WF}\, P \cap \mathrm{WF}\, u \Rightarrow \mathrm{singsupp}(Pu) \subseteq \mathrm{singsupp}\, u \tag{2.30}$$

对于任意 $u \in \mathrm{E}'(U)$。$\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(U)$ 的元素被称为平滑算子，这是因为它们将 $\mathrm{E}'(U)$ 映射为 $\to C^\infty(U)$。我们注记，根据 Peetre定理 [81] - 每个线性局部算子都是偏微分算子 $L$:

$$\forall u \in \mathcal{D}'(U) : \mathrm{supp}(Lu) \subseteq \mathrm{supp}\, u. \tag{2.31}$$

因此，伪微分算子是微分算子的伪局部（实际上是微局部）推广，其含义是它们保持奇异支集（实际上是波前集），而不是支集。

按照 P 的奇点的精确定式（2.26），还可以注意到 $(\Delta U)^{\perp *}$ 是由非退化相位函数（见定义 A.1.8）$\varphi :=(x-y)\cdot\xi$生成的，如例 A.1.11所述。实际上，刻画P 的不变性质的并不是振荡积分（2.16），而是余法丛 [77]（详情参见，例如 [82], [83,第 2 节。3], [84,第 VIII 节。1]）。

定义 2.1.6. 按照定义 2.1.4 中的术语，令 $(\Delta U)^{\perp *}$ 为对角嵌入（2.27）的余法丛。则余法阶数（至多）为 $m$ 的余法分布空间 $I^m\big(U\times U,\ (\Delta U)^{\perp *}\big)$ 定义为所有双分布 $\mathsf{P}\in\mathrm{D}'(U\times U)$ $U$ 上具有如下形式 [77,（2.4.1）]的集合

$$\mathsf{P}(\phi\otimes u)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_U\int_U \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathsf{p}(x,y;\xi)\,\phi(x)\,u(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d},\tag{2.32}$$

其中 $u,\ \phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U)$，且 $\mathsf{p}\in S^m(U\times U\times\mathbb{R}^d)$。

那么，$P\in\Psi\mathrm{DO}^m(U)$ 被不变地定义为积分算子（2.15），其施瓦茨核为 $\mathsf{P}\in I^m\big(U\times U,\ (\Delta U)^{\perp *}\big)$。

**例 2.1.7**。设 $\Delta$ 是开集 $U\subset\mathbb{R}^d$ 上的拉普拉斯算子。那么 $\sqrt{\Delta}\in\Psi\mathrm{DO}^1(\overline{U})$。

## 2.1.3 傅里叶积分算子

正如前两节所见，偏微分算子是局部的，而伪微分算子是微局部的。傅里叶积分算子是后者的一种广义推广：它允许使用一般的相位函数，从而将一个开集上的函数映射为另一个开集上的分布。设 $U\subset\mathbb{R}^{d_U}$ 和 $V\subset\mathbb{R}^{d_V}$ 是开集。那么，**阶数**为（至多）$m\in\mathbb{R}$ 的傅里叶积分算子是连续线性映射 [77, 第 1 节4]（另见 [23,命题 25.1.5']以及例如 [84, 第 VI 节2]）

$$A:C_{\mathrm{c}}^{\infty}(V)\to\mathcal{D}'(U),\ v\mapsto(Av)(x):=\int_V\mathsf{A}(x,y)\,v(y)\,\mathrm{d}y\tag{2.33}$$

其施瓦茨核 A 由如下形式的振荡积分给出

$$\mathsf{A}(x,y)=(2\pi)^{-(d_U+d_V+2n-2e)/4}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x,y;\theta)}\mathsf{a}(x,y;\theta)\,\mathrm{d}\theta\tag{2.34}$$

其中 $\varphi$ 是一个洁净相位函数（见定义 A.1.8），在 $U\times V\times\dot{\mathbb{R}}^n)/^4(U\times V\times\mathbb{R}^n)$ 上具有超额 $e$，且 $\mathrm{d}\theta$是 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度。

作为一个振荡积分，（2.34）必须被理解为一个形式表达式，它在逐点意义下并无意义，而是定义了一个双分布 $\mathcal{D}'(U\times V)$，其含义是 [77, 第 1 节。2]（另见，例如 [83,第 2.2-2 节。3], [8,第 1.1-1 节。3]，详情请参见）

$$(Av)(\phi) := \mathsf{A}(\phi\otimes v) = (2\pi)^{-(d_U+d_V+2n-2e)/4}\int_{\mathbb{R}^n}\int_V\int_U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x,y;\theta)}\mathsf{a}(x,y;\theta)\,\phi(x)\,v(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta \tag{2.35}$$

对于任意 $\phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U)$。该表达式的确切含义如下 [77, 定理 1.4.1]:

(i) 若 $\varphi$ 作为 $(x,\ y;\ \theta)$ 的函数没有临界点，则振荡积分（2.35）存在，并且对于 $C_{\mathrm{c}}^{k}$拓扑上的 $v$ 和 $\phi$，只要

$$m-k<-n. \tag{2.36}$$

当（2.36）成立时，可得到一个连续线性映射

$$A: C_{\mathrm{c}}^{k}(V)\to\mathcal{D}'^{k}(U) \tag{2.37}$$

其施瓦茨核 $\mathsf{A}\in\mathsf{D}'^{k}(U\times V)$ 由振荡积分给出

$$\forall u\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U\times V):\mathsf{A}(u)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_V\int_U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x,y;\theta)}a(x,y;\theta)\,u(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta. \tag{2.38}$$

(ii) 若对于每个固定的 $x$，$\varphi$ 没有临界点 $(y_0;\ \theta^0)$，则（2.34）被定义为振荡积分。可得到一个连续映射

$$A: C_{\mathrm{c}}^{k}(V)\to C(U) \tag{2.39}$$

当2.36）成立时。对积分号下求导可知，$A$ 也是从$C_{\mathrm{c}}^{k}(V)$）到 $C^{j}(U)$）的连续映射，条件是

$$m+n+j<k. \tag{2.40}$$

(iii) 若对每个固定的 $y$，$\varphi$ 在（$x_0;\ \theta^0$）处没有临界点，则 $A$ 的伴随算子具有 (ii) 中列出的性质，因此

$$A:\mathcal{E}'^{j}(V)\to\mathcal{D}'^{k}(U) \tag{2.41}$$

在2.40）成立时是连续映射。特别地，$A$ 定义了一个从$\mathcal{E}'(V)$）到$\mathcal{D}'(U)$。

(iv) 令 $\mathscr{R}$ 为所有满足以下条件的（$x,\ y$）$\in U\times V$ 构成的开集：$\varphi$（$x,\ y;\ \theta$）作为 $\theta$ 的函数没有临界点。于是，振荡积分

$$\mathsf{A}(x,y)=(2\pi)^{-(d_U+d_V+2n-2e)/4}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi(x,y;\theta)}a(x,y;\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{2.42}$$

在 $C^{\infty}(\mathscr{R})$）中定义了一个函数，该函数等于2.38）中的分布 $\mathscr{R}$。若$\mathscr{R}=U\times V$，则可知 $A$ 是一个积分算子，其施瓦茨核为光滑函数$\mathsf{A}\in C^{\infty}(U\times V)$，因此

$$A:\mathcal{E}'(V)\to C^{\infty}(U) \tag{2.43}$$

是一个连续映射，称为从 $V$ 到 $U$的**平滑算子**。

如伪微分算子的核部分所述，我们希望以不变的方式刻画振荡积分A ，首先注意到它的波前集 [77, 定理 3.2。6]

$$\mathrm{WF}\,\mathsf{A} \subseteq C', \quad C' := \left\{(x_0, \mathrm{d}_{x_0}\varphi; y_0, -\mathrm{d}_{y_0}\varphi) \in \dot{\mathrm{T}}^*U \times \dot{\mathrm{T}}^*V \middle| (\mathrm{grad}_\theta\,\varphi)(x_0, y_0; \theta^0) = 0\right\} \tag{2.44}$$

包含于齐次扭曲典范关系中（见定义 A.1.12） $C'$从 $\dot{\mathrm{T}}^*V$到 $\dot{\mathrm{T}}^*U$，该关系在 $\dot{\mathrm{T}}^*$（$U \times V$）中是闭的。傅里叶积分算子的施瓦茨核随后被内在地形式化为：

定义 2.1.8. 设 $U \subset \mathbb{R}^{d_U}$、$V \subset \mathbb{R}^{d_V}$ 为开集，且 $C \subset \dot{\mathrm{T}}^*U \times \dot{\mathrm{T}}^*V$ 为在 $\dot{\mathrm{T}}^*$（$U \times V$）中闭的齐次典范关系。则 $U \times V$ 上阶（至多为） $m \in \mathbb{R}$ 的拉格朗日分布空间 $I^m$（$U \times V$， $C'$）定义为所有形如（2.35） [77, 定义 3.2.2] 的双分布 $\mathsf{A} \in \mathcal{D}'$（$U \times V$） $U \times V$ 的集合。

因此，与闭齐次典范关系 $A$ 相关联的傅里叶积分算子 $C \subset \dot{\mathrm{T}}^*U \times \dot{\mathrm{T}}^*V$ 定义为积分算子（2.33），其施瓦茨核 A 是 $I^m(U \times V, C')$ 的一个元素。我们将所有此类算子的集合记为 $\mathrm{FIO}^m(V \to U, C')$。注意，给定 A 的形如（2.34）的振荡积分表示，a 的齐次性 $\mu$度与 $A$ 的阶 $m$ 之间的关系为（例如参见 [83, （2.4.22）]）

$$m = \mu + \frac{n}{2} - \frac{d_U + d_V}{4}. \tag{2.45}$$

（2.35）中看似违反直觉的 $(2\pi)^{-(d_U+d_V+2n-2e)/4}$ 因子，是为了在 $d_U = d_V = d = n$ 和 $e = 0$时与（2.16）中的 $(2\pi)^{-d}$ 因子相匹配而选取的。正如预期的那样， $I^m\big(U \times U, (\Delta U)^{\perp^*}\big)$是 $I^m(U \times V, C')$ 的特殊情形，其中 $C$由 $U$上的恒等齐次辛同胚的图给出，该图由非退化相位函数 $\varphi := (x - y) \cdot \xi$整体生成（如例 A.1.11 所阐明）。此外，$C^\infty(U \times V) \subset I^{-\infty}(U \times V, C')$（例如参见 [84, 命题 3.2（第 439 页）]），即平滑算子（2.43）的核，可以看作 $I^{-\infty}(U \times V, C')$ 的一个元素。

为了定义傅里叶积分算子的主符号，不能像对伪微分算子所做的那样（定义 2.1.4），直接寻找 $\mathrm{FIO}^m$（$V \to U$， $C'$）与相应符号类之间的同构，因为由于典范关系比余法丛 $(\Delta U)^{\perp^*}$更为复杂，傅里叶积分算子的全符号不存在（2.19）的类似结果。由于伪微分算子由其施瓦茨核和 $(\Delta U)^{\perp^*} \cong \dot{\mathrm{T}}^*U$刻画，其主符号同构映射（2.21）等价于 [77, 定理 2.4。2]

$$I^{m-[1]}\big(U \times U, (\Delta U)^{\perp^*}\big) \cong S\big((\Delta U)^{\perp^*}\big). \tag{2.46}$$

这为处理傅里叶积分算子的主符号指明了正确方向。换言之，我们寻求 $I^m$（$U \times V$， $C'$）与 $C$上的相应符号空间之间的同构。事实证明，为了定义不变主符号，实际上需要考虑 $C$ 上$m + (d_U + d_V)/4$ 阶的半密度（参见第 2.2.1 节和注记 2.2.8 以了解进一步的动机）值符号 [77, 定理 3.2。1]。

定义 2.1.9. 按照定义 2.1.8 中的术语，设 $\Omega^{1/2}C$、$\mathbb{M}\to C$ 分别为 $C$上的半密度丛（参见附录 A.1.6）和 Keller-Maslov 丛（参见定义 A.1.19），并设 $S^{m+(d_U+d_V)/4-[1]}(C;\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C)$ 是 $C$上取值于 $\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C$的符号空间（参见（B.14））。则，拉格朗日分布的主符号由同构 [10, (7.6)]（另见 [23, 命题 25.1.5']）定义

$$\begin{aligned}\sigma \;:\; & I^{m-[1]}(U\times V,C')\to S^{m+\frac{d_U+d_V}{4}-[1]}(C;\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C),\\ [\mathrm{A}]\;\mapsto\;& \sigma_{[\mathrm{A}]}(x,\xi;y,\eta):=\int_{\mathfrak{C}_{\xi,\eta}}\mathrm{d}\theta''a(x,y;\theta',\theta'')\mathfrak{m}\otimes|\mathrm{dv}_C|^{\frac12}\ \bmod S^{m+\frac{d_U+d_V}{4}-1}(\cdot),\end{aligned}\tag{2.47}$$

其中，$I^{m-[1]}:=I^m/I^{m-1}$，$a$ 是式 (2.34) 中 a 的最高次齐次项，$\mathfrak{m}$ 和$\sqrt{|\mathrm{dv}_C|}$分别是 $\mathbb{M}$ 和 $\Omega^{1/2}C$ 的截面。对于每个 $(x,\xi;y,\eta)\in C$，$\varphi$是具有超额 $e$ （见定义 A.1.8）的干净相位函数的稳定等价类（见注 A.1.9）的一个代表元，适用于 $C$，并且

$$\mathfrak{C}_{\xi,\eta}:=\{(x,y;\theta)\in(\mathrm{grad}_\theta\,\varphi)^{-1}(0)\,|\,\mathrm{d}_x\varphi:=\xi,\mathrm{d}_y\varphi=:\eta\}\tag{2.48}$$

是相应拉格朗日纤维化上维数为 $e$ 的纤维（见（A.34））。这里，$\mathrm{d}\theta''$ 是 $\dot{\mathbb{R}}^e$ 上的勒贝格测度，变量 $\theta''$ 通过分解[2] $\dot{\mathbb{R}}^n\ni\theta=(\theta',\theta'')\in\dot{\mathbb{R}}^{n-e}\times\dot{\mathbb{R}}^e$ 定义，使得投影 $\mathfrak{C}_{\xi,\eta}\ni(x,y;\theta',\theta'')\mapsto\theta''\in\dot{\mathbb{R}}^e$具有双射微分，从而对于固定的 $\theta''=\mathrm{cst}$，$\varphi(x,y;\theta',\mathrm{cst})$是非退化的。

显式表达式 $\mathfrak{m}$ （见附录 A.1.4）以及 $\sqrt{|\mathrm{dv}_C|}$ （见附录 A.1.6）可用 $\varphi$ entail [23, （25.1.4）′, 第 15]

$$\sigma_{\mathrm{A}}(x,\xi;y,\eta)=\sqrt{|\mathrm{d}\xi||\mathrm{d}\eta|}\int_{\mathfrak{C}_{\xi,\eta}}a(x,y;\theta',\theta'')\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Hess}_{x,y;\theta'}\varphi)}}{\sqrt{|\det(\mathrm{Hess}_{x,y;\theta'}\varphi)|}}\mathrm{d}\theta'',\tag{2.49}$$

其中 $\mathrm{Hessian}_{x,y;\theta'}\varphi$ 是 $(x,y;\theta',\mathrm{cst})$ 关于 $(x,y;\theta')\in\mathfrak{C}_{\xi,\eta}$ 的海森矩阵（见（3.18））：

$$\mathrm{Hess}_{x,y;\theta'}\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^{i`}} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial y^j} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial\theta'_k}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial x^i} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial y^{j`}} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial\theta'_k}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta'_k\partial x^i} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta'_k\partial y^j} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta'_k\partial\theta'_{k`}}\end{pmatrix}\tag{2.50}$$

对于 $i,\ i`=1,\ldots\ldots,d_U$；$j,\ j`=1,\ldots\ldots,d_V$；$k,\ k`=1,\ldots\ldots,n-e$。这里，$\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$是在 $C$ 上的勒贝格测度（$x,\ \xi;\ y,\ \eta$）。

[2]这种分裂总是可以实现的，这是由于 Thom 分裂（也称为参数化 Morse）引理（例如见 [76,附录 C. 6], [85,第 52]页）。

如果 $C$ 由非退化相位函数 φ参数化，即 $e = 0$，那么 $\theta$变量无需再拆分，因此 $\sigma_{\mathrm{A}}$ 可简化为 [77, 定理 3.2。5] （另见 [23, 命题 25.1。5]和（A.69））

$$\sigma_{[\mathrm{A}]}(x,\xi;y,\eta) := a(x,y;\theta)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4\,\operatorname{sgn}(\operatorname{Hess}\varphi)}}{\sqrt{|\det(\operatorname{Hess}\varphi)|}}\sqrt{|\mathrm{d}\xi||\mathrm{d}\eta|} \mod S^{m+\frac{d_U+d_V}{4}-1}(\cdot),$$

$$\operatorname{Hess}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^{i`}} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial y^j} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial\theta_k} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial x^i} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial y^{j`}} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^j\partial\theta_k} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_k\partial x^i} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_k\partial y^j} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_k\partial\theta_{k`}} \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

**注记 2.1.10**。 半密度 $\sigma_{\mathrm{A}}$ 在任意微分同胚下除 Maslov因子外保持不变 $\mathrm{m}$，其绝对值为 1 [23, (25.1.14)]。

**例 2.1.11**。 假设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 和 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，并且 $\kappa \in C^\infty(U, V)$。那么，拉回的定义

$$\kappa^* : C_{\mathrm{c}}^\infty(V) \to C^\infty(U),\ u \mapsto \kappa^* u := u \circ \kappa \tag{2.52}$$

意味着（参见例如 [83, 第 37], [86,节 5.25]）

$$(\kappa^* u)(x) = u\big(\kappa(x)\big) = \delta_{\kappa(x)}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\kappa(x)-y)\cdot\eta}u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta. \tag{2.53}$$

也就是说， $\kappa^*$ 是一个傅里叶积分算子，其施瓦茨核为

$$\mathsf{K} := (2\pi)^{-(n-d+d+3n)/4}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\mathrm{d}\eta, \quad \varphi := \big(\kappa(x)-y\big)\cdot\eta \tag{2.54}$$

其中相位函数 $\varphi$ 是非退化的，其纤维临界集（见（A.18））为

$$\mathscr{C} := \big\{(x_0,y_0;\eta^0) \in U\times V\times\dot{\mathbb{R}}^n \mid y_0 = \kappa(x_0)\big\}. \tag{2.55}$$

因此， $\kappa^*$ 是 阶为 ((2.45)) $\frac{n-d}{4}$ 并且与典范关系相关（参见 (A.34)）

$$C := \{(x,\xi;y,-\eta) \in \mathrm{T}^*U\times\dot{\mathrm{T}}^*V \mid y = \kappa(x), \xi = \mathrm{T}_x^*\kappa\,(\eta)\}, \tag{2.56}$$

其中 $\mathrm{T}_x^*\kappa$ ： $\mathrm{T}^*_{\kappa\,(x)}V \to \mathrm{T}_x^*U$ 是切映射 d 的代数对偶$_x\kappa$ ： $\mathrm{T}_xU \to\mathrm{T}_{\kappa(x)}V$ 的 κ。此外，其主符号由下式给出（参见 (2.51)）

$$\sigma_\kappa(x,\xi;y,\eta) := \frac{\sqrt{|\mathrm{d}\xi||\mathrm{d}\eta|}}{(2\pi)^{\frac{n-d}{4}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4\,\operatorname{sgn}(\operatorname{Hess}\varphi)}}{\sqrt{|\det(\operatorname{Hess}\varphi)|}}, \quad \operatorname{Hess}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2\kappa^j}{\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^{i`}}\eta_j & 0 & \frac{\mathrm{d}\kappa^j}{\mathrm{d}x^i} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\mathrm{d}\kappa^j}{\mathrm{d}x^i} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

其中我们使用了 $\kappa(x) = \big(\kappa^1(x)、\ldots\ldots、\kappa^n(x)\big)$。

此外，如果 $\kappa$ 是一个微分同胚，那么我们可以考虑其余切提升 $\mathrm{T}^*\kappa$，从而 $C' = \{(\mathrm{T}^*\kappa(y,\ \eta);\ (y,\ \eta))\}$ 是所诱导辛同胚的图

$$\mathrm{T}^*\kappa : \dot{\mathrm{T}}^*V \to \dot{\mathrm{T}}^*U,\ (y,\eta) \mapsto \varkappa(y,\eta) := \left(\kappa^{-1}(y), \mathrm{T}^*_x\kappa\,(\eta)\right). \tag{2.58}$$

仔细考察 $C$ 前面的例子可以发现，$C$ 是非齐次的，因为 $\xi$ 在（2.56）中即使 $\eta$ 不为零，Hessian $\varphi$ 在 $\sigma_\kappa$ 中也可能为零。这意味着 $\kappa^*$ 不是一个齐次的傅里叶积分算子。在此背景下，齐次性的假设确保傅里叶积分算子（及其对偶）将光滑函数映射为光滑函数，而不是分布（参见例如 [23, （25.2.1）]）。我们将在例2.3.12中，在丛框架下讨论限制映射（前述例子的特殊情形）这一问题的一个合理解决方案。

## 2.2 流形上的傅里叶积分算子

本节将扩展我们前面关于流形的讨论。由于伪微分算子及其推广——傅里叶积分算子——是通过不变地定义的施瓦茨核作为积分算子来定义的，因此这些核必须是可积的，至少关于其第二个变量如此。然而，不存在以不变方式对流形上的函数进行积分的方法。因此，我们不得不使用密度而不是函数，尤其是半密度事实证明十分方便。

### 2.2.1 分布半密度

**密度**

我们回顾一下，一个 $s \in \mathbb{C}$-**维密度**在一个 $d$维实向量空间 $\mathcal{V}$ 是一个映射 $\mu : \mathcal{V}^d \to \mathbb{C}$ 满足以下条件（例如参见 [25, 第 6.1-6 节3], [84, 第 374-377], [87, 第 428-432]）

$$\mu(Tv_1, \ldots, Tv_d) = |\det T|^s \mu(v_1, \ldots, v_d) \tag{2.59}$$

对于任意线性变换 $T\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，以及所有 $(v_1, \ldots, v_d) \in \mathcal{V}^d$。这样的量总是存在，所有此类密度的集合记为 $\Omega^s(\mathcal{V})$。它是一个在 $\mathbb{C}$上的 1 维向量空间。

流形 $M$ 上的 $s$-**密度丛** $\Omega^s M \to M$ 定义为

$$\forall s \in \mathbb{C}:\ \Omega^s M := \bigsqcup_{x\in M} \Omega^s(\mathrm{T}_x M), \tag{2.60}$$

它是一个（光滑的）可平凡化的 $\mathbb{C}$-线丛，即，对于每个 $s$，$\Omega^s(\mathrm{T}_x M) \cong \mathbb{C}$但这种方式并不具有规范性。$\Omega^s M$ 的截面称为 $s$-**密度**；在 $M$ 上，$s = 1$-密度简称为密度。令 $(U,\ (x^i))$ 为 $x \in M$ 附近的一个局部坐标图，并令 $(\mathrm{T}_x U,\ (\partial/\partial x^i))$

（分别为 $(\mathrm{T}^*_x U,\ (\mathrm{d}x^i))$）为切丛 $\mathrm{T}M \to M$ （分别为余切丛 $\mathrm{T}^*M \to M$）所诱导的自然坐标图。于是

$$|\mathrm{d}x^1(x) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^d(x)|^s \Big( \frac{\partial}{\partial x^1}(x) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x^d}(x) \Big) = 1 \tag{2.61}$$

定义一个典范局部截面 $|\mathrm{d}x|^s := |\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^d|^s \in C^\infty(U;\ \Omega^s M)$，其中 $\partial/\partial x^1(x) \wedge \ldots \wedge \partial/\partial x^d(x)$ 是由局部坐标定义的线 $\dot{\Lambda}^d \mathrm{T}_x M$ 的生成元。注意，通过让 $x$ 在前述等式中变化，$|\mathrm{d}x|^s$ 定义了 $\Omega^s M$ 的一个处处不为零的截面。任意（紧支撑）光滑的 $s$-密度 $\mu$ 在 $M$ 上都可以局部表示为

$$\mu = f|\mathrm{d}x|^s \tag{2.62}$$

其中 $f = \mu(\partial/\partial x^1 \wedge \ldots \wedge \partial/\partial x^d)$ 是定义在 $U$ 上、取值于 $\mathbb{C}$ 的唯一（紧支撑）光滑函数。若密度 $\mu$ 在 $M$ 上满足如下性质，则称其为**正的**：对于 $M$ 上任意一组线性无关的 $d$ 个切向量（$x;\ X_1, \ldots, X_d$），$x$ 属于 $M$ 中每一点处都有 $\mu(x)\,(X_1, \ldots, X_d) > 0$。注意，光滑流形 $M$ 总是允许在 $M$ 上存在光滑正密度，且 $M$ 上正密度的集合是 $\Omega M$ 的一个开子集，其与每个纤维的交都是凸集。

**例 2.2.1**。(a) 设 $M := \mathbb{R}^d$ 具有标准坐标（$x^1,\ \ldots,\ x^d$），且 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑函数。密度丛 $\Omega\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 的一个典型平凡化由勒贝格测度 $\mathrm{d}x$ 给出。因此，$\mathbb{R}^d$ 上的一般光滑 $s$-密度可表示为 $\mu := f|\mathrm{d}x|^\alpha$，并且当 $f$ 为正时它也是正的。

(b) 设 $M$ 是一个定向流形，即它具有体积形式 $\mathrm{d}v$。那么，$M$ 上的每个光滑函数 $f$ 都定义了 $M$ 上的一个光滑 $s$-密度 $\mu := f|\mathrm{d}v|^s$，其中 $|\mathrm{d}v|$ 是一个正密度，其定义为：对于每个 $x \in M$，$|\mathrm{d}v|_x := |\mathrm{d}v(x)|$。

(c) 设 $(\mathrm{M},\ \sigma)$ 是一个 $2d$ 维辛流形（见第 A.1.1 节），且 $f \in C^\infty(\mathrm{M})$。这样的流形 M 总是可定向的，因为它具有一个光滑的典型体积形式，即**Liouville形式**

$$\mathrm{d}v := (-1)^{d(d-1)/2} \frac{\sigma^d}{d!}, \quad \sigma^d := \sigma \wedge \ldots \wedge \sigma \tag{2.63}$$

因此，任意光滑 $s$-密度在M 由 $\mu := f|\mathrm{d}v|^s$。特别地，余切丛 $\mathrm{T}^*M \to M$ 上的 $d$ 维流形 $M$ 是一个辛流形，其 Liouville 形式为（见例A.1.2）

$$\mathrm{d}v \restriction U = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^d \wedge \mathrm{d}\xi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\xi_d = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \tag{2.64}$$

在Darboux图 $(U,\ (x^i,\ \xi_i))$中。因此，$\mathrm{T}^*M$ 上的任意光滑 $s$-密度都可在整体上（分别在局部上）表示为 $\mu = f|\mathrm{d}v|^s$（分别为 $\mu = f(|\mathrm{d}x||\mathrm{d}\xi|)^s$）。

(d) 设$(\mathscr{M},\mathrm{g})$是一个 $d$维洛伦兹流形（见第3.1节）。在每个$x\in\mathscr{M}$处，$(\mathscr{M},\mathrm{g})$具有一个规范的光滑体积元，即**洛伦兹体积元**$\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}$，它由洛伦兹度量g 诱导（例如参见 [88, 第 195]页）：

$$\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}(x)(X_1,\dots,X_d):=\sqrt{|\det\left(\mathrm{g}_x(X_n,e_i)\right)|},\tag{2.65}$$

其中 $X_n\in \mathrm{T}_x\mathscr{M}$和 $\{e_i\}$ 是 $\mathrm{T}_x\mathscr{M}$ 的一个正交基。用局部定向坐标图 $\left(U,(x^i)\right)$ 表示 $\mathscr{M}$ 上的坐标，则此典范体积元可写为

$$\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}(x)=\sqrt{|\det \mathrm{g}|}\mathrm{d}x^1\wedge\ldots\mathrm{d}x^d.\tag{2.66}$$

因此，每个定义在 $\mathscr{M}$ 上的光滑 $s$-密度 $\mu$，局部都可唯一表示为 $\mu(x)=f(x)|\mathrm{d}x|^s$，其中 $f\in C^\infty(U)$。然而，与 $\mu$ 相比，$\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}$ 可能并非全局存在。全局洛伦兹体积形式存在当且仅当 $\mathscr{M}$ 是可定向的；此时，通过洛伦兹 $s$-密度 $|\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}|^s:=|\det \mathrm{g}|^{s/2}|\mathrm{d}x|^s$，可以将 $\mathscr{M}$ 上的光滑函数与 $\mathscr{M}$ 上的光滑 $s$-密度等同起来：

$$C^\infty(\mathscr{M})\ni f\mapsto f|\mathrm{dv}_{\mathrm{g}}|^s\in C^\infty(\mathscr{M};\Omega^s\mathscr{M}).\tag{2.67}$$

(e) 可定向半黎曼流形 $(\mathscr{M},\mathrm{g})$ 的半黎曼超曲面 $(\Sigma,\iota)$ 可定向，当且仅当它存在光滑单位法向量场 N。特别地，若 $c$ 是 $f\in C^\infty(\mathscr{M},\mathbb{R})$ 的一个取值，则 $\Sigma:=f^{-1}(c)$ 是 $\mathscr{M}$ 的半黎曼超曲面，当且仅当在 $\Sigma$ 上 $\mathrm{g}(\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)\leqslant 0$。在这种情况下

$$\mathrm{N}:=\frac{\mathrm{grad}\,f}{\|\mathrm{grad}\,f\|_{\mathrm{g}}}\tag{2.68}$$

是沿着 $\Sigma$ 的单位法向量场（在 $\pm$ 意义下唯一）。因此， $\Sigma$ 是可定向的，其定向由 N 确定，且其体积形式由下式给出（例如参见 [88, 引理 7.8、命题 4.17], [87,命题 15.21]）

$$\mathrm{dv}_\Sigma=\iota^*(\mathrm{N}\lrcorner\mathrm{dv}_{\mathscr{M}}),\tag{2.69}$$

其中 $\lrcorner$ 表示内乘。

为说明这一点，考虑标准的 $d$ 维球面 $\mathbb{S}^d$。嵌入 $\iota:\mathbb{S}^d\hookrightarrow\mathbb{R}^{d+1}$ 是光滑嵌入，且向量场 $\mathrm{N}:=x^i\partial/\partial x^i$ 处处不与$\mathbb{S}^d$ 相切，因此 N 通过前述公式在 $\mathbb{S}^d$ 上诱导出一个密度。特别地，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的体积形式，因此前述公式推出，$|x^1\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+x^2\,\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+x^3\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2|$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的诱导密度，其中 $(x^1)^1+(x^2)^2+(x^3)^2=1$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上（例如参见 [87, 例 15.22、例 16 – 9]）。

下文需要考虑穿孔余切丛及其锥形拉格朗日子流形上的齐次（半）密度。这些是例子

（见例子 A.1.2 和 A.1.11）以及锥形辛流形 （M，$\mathsf{m}_\lambda$）（精确定义见 A.1.1 ）。流形 $\mu$ 上的 $\mathcal{M}$ 半密度称为 **齐次**，或 **正齐次**，其度为 $k \in \mathbb{R}$，如果

$$\forall \lambda \in \dot{\mathbb{R}} \quad (\text{resp. } \mathbb{R}_+) : \mathsf{m}_\lambda^* \mu = \lambda^k \mu. \tag{2.70}$$

**例 2.2.2**。 (a) 标准 $s$密度（例 2.2.1 (a)） $|\mathrm{d}\theta|^s$ 在 $\dot{\mathbb{R}}^n$ 上是齐次的，齐次度为 $sn$ （例如参见 [23, 第 13], [83, (2.1.13)]）。

(b) 与例 2.2.1 (c)中一样，余法丛（见例 A.1.7）$(\Delta M)^\perp$ 是 $M \times M$ 中对角线的余法丛，与 $\mathrm{T}^*M$ 同构。因此，它具有自然的半密度$|\mathrm{d}x|^{1/2}|\mathrm{d}\xi|^{1/2}$，其度为 $\dim(M \times M)/4 = d/2$（例如参见 [76, 第 104]）。

(c) 典范关系 $|\mathrm{d}v_C|$ 上的密度 $C$ 按附录 A.1.6 中的构造并在定义 2.1.9 中使用，其度为 $n$，因为纤维临界流形上的勒贝格密度的齐次度（见（A.66））为 $d_M + d_N$，而（A.66）中行列式的齐次度为 $d_M + d_N - n$ （例如参见 [11, 第 123]）。

### 分布密度

$s$密度与 $1-s$ 密度之间的逐点乘积是一个 1-密度，由此我们可以定义如下双线性形式（例如参见 [9,第 4.2], [83,节第 1.1]节）

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^\infty(M; \Omega^s M) \times C_c^\infty(M; \Omega^{1-s} M) \to \mathbb{C}, \ (\mu, \phi) \mapsto \langle \mu, \phi \rangle := \int_M \mu(x)\, \phi(x). \tag{2.71}$$

由于 $|\langle \mu, \phi \rangle| \leq \|\mu\|_{L^1(M;\sqrt{\Omega})} \|\phi\|_\infty$，该形式是连续的。除非另有说明，本文仅使用 $s$ =1/2。因此，我们将 $M$ 上的分布半密度空间 $\mathrm{D}'(M; \Omega^{1/2}M) := (C_c^\infty(M; \Omega^{1/2}M))'$定义为 $C_c^\infty(M; \Omega^{1/2}M)$ 的拓扑对偶，即 $C_c^\infty(M; \Omega^{1/2}M)$ 上所有取值于 $\mathbb{C}$ 的连续 $\mathbb{C}$- 线性泛函所构成的空间。在全文中，$\mathrm{D}'(M; \Omega^{1/2}M)$ 都赋予弱 $*$-拓扑。注意，可以通过将局部坐标图 $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_\alpha$ 上的分布 $\mathrm{D}'(U_\alpha)$ 拼接起来，在 $M$ 上定义分布 $\mathrm{D}'(M)$，其中 $\mathrm{D}'(U_\alpha)$ 由将分布 $\mathrm{D}'(\kappa_\alpha(U_\alpha)$ 向前推得到；$\Omega\mathbb{R}^d)$。但是，$\mathrm{D}(M; \Omega) \neq \mathrm{D}'(M)$（例如参见 [75, 第 6.3], [9, 节第 4.2.2]节）。

## 2.2.2 伪微分算子

为了提出流形上余法分布的概念，可以选择一个适用不变定义2.1.6 的局部坐标图，然后拉回各个局部部分，将它们拼接起来，并证明其与所选坐标图无关。然而，事实证明，可以以内在的方式定义这一对象，这需要引入如下所述的 Besov空间概念。

设 $1 \leq \mathfrak{p} \leq \infty$ 和 $m \in \mathbb{R}$。**Besov空间** ${}^{\mathfrak{p}}H^m(\mathbb{R}^d)$ 是由欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 上的所有温和分布 $u \in \mathrm{S}'(\mathbb{R}^d)$ 构成的巴拿赫空间，这些分布满足 $\mathrm{F}(u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$

并且范数（当 $\mathfrak{p} \neq \infty$时） ${}^{\mathfrak{p}}\|u\|_m := \left(\sum_i \|(2\pi)^{-d} \int \mathrm{U}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}(\mathrm{F}\ u)\ (\xi)\ \mathrm{d}\xi\|_m^{\mathfrak{p}}\right)^{1/\mathfrak{p}}$有限；当$\mathfrak{p} = \infty$时，令 ${}^{\infty}\|u\|_m := \left(\sup_i \|(2\pi)^{-d} \int \mathrm{U}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}(\mathrm{F}\ u)\ (\xi)\ \mathrm{d}\xi\|_m^{\mathfrak{p}}\right)^{1/\mathfrak{p}}$。这里，$\|\cdot\|_s$表示索伯列夫范数，而 $\mathrm{U}_i := \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{R}_{i-1} < |\xi| < \mathrm{R}_i\}$, $\mathrm{R}_0 := 0$, $\mathrm{R}_i := 2^{i-1}$对所有 $i > 0$均成立（例如参见 [76, Def. B.1.1]）。如果 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开子集，那么 Besov空间 ${}^{\mathfrak{p}}H^s\,\mathrm{loc}\,(U)$ 定义为所有满足 $\phi u \in {}^{\mathfrak{p}}H^s(\mathbb{R}^d)$ 对每个 $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U)$ 都成立的分布 $u \in \mathrm{D}'(U)$ 所构成的集合。更一般地，在流形 $M$上，Besov空间 ${}^{\mathfrak{p}}H^s\mathrm{loc}\,(M)$ 定义为所有满足 $(\kappa^{-1})^* u \in {}^{\mathfrak{p}}H^s\mathrm{loc}\,{}^{(\kappa}(U))$ 对每个属于 $M$的光滑坐标图 $(U, \kappa)$ 都成立的分布 $u \in \mathrm{D}'(M)$ 所构成的集合。其拓扑由半范数 $u \mapsto {}^{\mathfrak{p}}\|\phi(\kappa^{-1})^* u\|_s$定义，其中 $\phi$是 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\kappa(U))$ 中的任意元素（例如参见 [76, 第 475]页）。

定义 2.2.3. 设 $\Omega^{1}\!/\!_{2} \to M$ 为 $d$ 维流形 $M$ 上的半密度丛，且 $S \subset M$ 为一个闭子流形。则在 $M$ 上、关于 $S$ 余法向且度至多为 $m \in \mathbb{R}$ 的分布半密度空间 $I^m(M, S;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$，定义为所有满足 $L_1 \ldots L_N u \in {}^{\infty}H^{-m-d/4}\mathrm{loc}\,(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$ 的分布半密度 $u \in \mathrm{D}'(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$ 的集合，其中对所有 $N \in \mathbb{N}_0$ 以及所有具有沿 $S$ 切向的光滑系数的 $L_i \in \mathrm{PDO}^1(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$ 均成立。这里，${}^{\infty}H^{-m-d/4}\,\mathrm{loc}\,(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$ 表示 Besov空间，而拓扑是使映射 $u \mapsto L_1 \ldots L_N u \in {}^{\infty}H^{-m-d/4}\mathrm{loc}\,(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$ 连续的最弱拓扑 [76,定义 18.2.6]。

**定义 2.2.4.** 设 $\Omega^{1}\!/\!_{2} \to M$ 是流形 $M$ and$m \in \mathbb{R}$上的半密度丛。流形 $M$ 上的**伪微分算子** $P$，其**阶** 至多为 $m$，是一个连续线性映射（参见例如 [76,第 100] 页）

$$P : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(M; \Omega^{1/2}) \to C^{\infty}(M; \Omega^{1/2}),\ u \mapsto (Pu)(x) := \int_M \mathrm{P}(x, y)\, u(y) \tag{2.72}$$

其施瓦茨核 P 是余法分布空间
$M \quad \Delta M \ {}^{\perp *}\ \Omega^{1}{}_{2}\ M \times M \qquad\qquad \Delta \quad M \to M \times M$
$I^m(M \times$
$,(\,)\,;\,{}_{/}(\,))$中的一个元素，其中 : 是对角嵌入。所有此类算子的集合记为 $\Psi\mathrm{DO}^m(M;\ \Omega^{1}\!/\!_{2})$。

抽象定义意味着，流形$M$上的伪微分算子 $P$ 在局部是由伪微分算子 $P_\alpha \in \Psi\mathrm{DO}^m\left(\kappa_\alpha(U_\alpha)\right)$构成的集合 $\{P_\alpha\}_\alpha$，这些算子定义在局部坐标图 $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_\alpha$ 上，其中 $M$。为说明这一断言，取 $\sqrt{|\mu|}$为 $M$ 上任意但固定的半密度，并将 $\hat{\mathrm{M}}, \check{\mathrm{M}} \in \mathrm{End}\left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U_\alpha)\right)$ 分别定义为乘以 $\hat{\chi}, \check{\chi} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U_\alpha)$的算子。于是（参见例如 [76,第 85], [89, 页第 7.3] 节），

$$\begin{aligned} P_\alpha &:= P_{\kappa_\alpha} := (\kappa_\alpha^*)^{-1} \circ P \restriction U_\alpha \circ \kappa_\alpha^* \in \Psi\mathrm{DO}^m\left(\kappa_\alpha(U_\alpha)\right), \\ P \restriction U_\alpha &:= \hat{\mathrm{M}} \circ P \circ \check{\mathrm{M}} \in \Psi\mathrm{DO}^m(U_\alpha) \end{aligned} \tag{2.73}$$

是 $P$ 相对于局部坐标图和所选半密度的局部表示。根据命题 2.1.2，施瓦茨核 $\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\sqrt{|\mu_\alpha(\boldsymbol{x})|} \otimes \sqrt{|\mu_\alpha(\boldsymbol{y})|}$属于 $P_\alpha$必为以下形式

$$\mathrm{P}_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} \sigma_{P_\alpha}^{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{(2\pi)^d} \mod C^{\infty}\left(\kappa_\alpha(U_\alpha) \times \kappa_\alpha(U_\alpha)\right) \tag{2.74}$$

反之亦然。这里，全符号 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{P_\alpha}(x,\xi)$ 由 (2.19) 给出，而 $\mu_\alpha(x)$ 是所选密度在 $x := \kappa_\alpha(x) \in \kappa_\alpha(U_\alpha)$ 处的欧几里得代表（参见 (2.62) 和例 2.2.1(a)）。一般而言，需要有足够多的局部片 $U_\alpha$，使得 $M$ 的乘积 $U_\alpha \times U_\alpha$ 构成 $M \times M$ 的图册。但 P 在非对角线上光滑，因此只需考虑 $M$ 的一个图册 $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_\alpha$。

**注记 2.2.5**。设 $\dot{\mathrm{T}}^*M \to M$ 是流形 $M$ 上的去心余切丛，并设 $\{(U_\alpha,\ \kappa_\alpha)\}_\alpha$（分别为 $\{(\mathcal{U}_\alpha,\ \varkappa_\alpha)\}_\alpha$）是 $M$（分别为 $\dot{\mathrm{T}}^*M$）的图册（分别为齐次辛图册，见定理 A.1.4 和例A.1.2），满足

$$\varkappa_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \kappa_\alpha(U_\alpha) \times \dot{\mathbb{R}}^d. \tag{2.75}$$

前述映射允许我们将 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{P_\alpha}$ 拉回，从而得到 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{P\restriction U_\alpha} \in S^m(\mathcal{U}_\alpha)$（见附录 B.2）。但是，$\sigma^{\mathrm{tot}}_{P_\alpha}$ 在坐标变换下的表现并不理想，如（2.22）所示，因此无法拼接局部同构 $\Psi\mathrm{DO}^m(U_\alpha) \cong S^m(\mathcal{U}_\alpha)$ 以获得一个整体同构。

类似地，$\sigma_{P\restriction U_\alpha}$ 只需将 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{P_\alpha}$ 中的最高阶齐次项$\sigma_{P_\alpha}$ 拉回即可得到：

$$\sigma : \Psi\mathrm{DO}^m(U_\alpha) \to S^m(\mathcal{U}_\alpha),\ P \restriction U_\alpha \mapsto \sigma_{P\restriction U_\alpha} := \varkappa_\alpha^* \sigma_{P_\alpha}. \tag{2.76}$$

不同于 $\sigma^{\mathrm{tot}}_{[P]}$，$\sigma_{[P]}$可以提升为整体同构 $\Psi\mathrm{DO}^m(M) \cong S^m(\mathrm{T}^*M)$，这是由于 $\sigma_{P\restriction U_\alpha}$ 是定义在$U_\alpha$ 上的不变地定义的齐次函数，正如2.1.5（例如参见 [76,第85-86]页）中重新指出的那样。

**定义2.2.6**。按照定义2.2.4中的术语，令 $S^m(\mathrm{T}^*M)$ 表示余切丛$\mathrm{T}^*M$ 上 $M$的半密度值符号空间（见附录B.2）。则**主符号** $\sigma_P$ $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M;\ \Omega^1/2)$由下述同构定义（例如参见 [76, (18.1.29)′]）

$$\sigma : \Psi\mathrm{DO}^{m-[1]}(M;\Omega^{1/2}) \to S^{m-[1]}(\mathrm{T}^*M), \tag{2.77}$$

其中 $\Psi\mathrm{DO}^{m-[1]} := \Psi\mathrm{DO}^m/\Psi\mathrm{DO}^{m-1}$。在齐次辛坐标图（如注 2.2.5）$_\alpha$ 中，对于 $\dot{\mathrm{T}}^*M$，前述同构表示为

$$[P] \mapsto \sigma_{[P]}(x,\xi) := \varkappa_\alpha^*(\sigma_{[P_\alpha]})\sqrt{|\mathrm{dv}_{\mathrm{T}^*M}(x,\xi)|} \mod S^{m-1}(\cdot), \tag{2.78}$$

其中 $\mathrm{dv}_{\mathrm{T}^*M}$ 是 2.2.1(c) 中 $^*M$ 上的自然体积形式，而 $\sigma_{[P_\alpha]}$ 是欧几里得代表 $P_\alpha :=$(2.73) 的主符号 $P$。

此时，人们可能会想知道，$\sigma^{\mathrm{tot}}_{[P]}$ 中的次领阶项是否具有某种不变意义。遗憾的是，这种朴素的预期并不成立；相反，以下组合才是可行的。

**定义 2.2.7.** 按照定义 2.2.4和 2.2.6中的术语，**次主符号** $\sigma_P^{\mathrm{sub}}$的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M;\ \Omega^1/2)$ 由同构 [35,(5.2.8)](另见 [76, 定理 18.1.33])

$$\sigma^{\mathrm{sub}}:\ \Psi\mathrm{DO}^{m-[2]}(M;\ \Omega^1/2)\ \to S^{m-1-[1]}(\mathrm{T}^*M),$$
$$[P] \mapsto \sigma^{\mathrm{sub}}_{[P]}(x,\xi) := p_{m-1}|\mathrm{dv}_{\mathrm{T}^*M}(x,\xi)|^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2\sigma_P}{\partial x^i\partial\xi_i}(x,\xi) \mod S^{m-2}(\cdot), \quad (2.79)$$

其中， $p_{m-1}$ 是 （2.19）中 $P$的全符号表达式中的次领阶项，拉回到$\alpha$。

**注记 2.2.8。** $\sigma^{\mathrm{sub}}_{P\restriction U}$ 按照 [35, 命题 5.21] （另见 [76, （18。1。33′）]）变换为：

$$\left((\mathrm{T}^*\kappa)^*\sigma_P^{\mathrm{sub}}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sigma^{\mathrm{sub}}_{P_\kappa}\left(\boldsymbol{x},\mathrm{T}^*_x\kappa\,\boldsymbol{\xi}\right) \quad (2.80)$$

在坐标变换 $U \ni x \mapsto \boldsymbol{x} :=\kappa$ （$x$） $\in \kappa$ （$U$） 下。因此，它是定义在 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 上的不变定义的齐次函数（参见注记 2.1.5）。

我们将在第3章中计算洛伦兹流形（$\mathscr{M}$，g）上 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m$（$\mathscr{M}$）的次主符号。于是，有规范的洛伦兹体积形式 $\mathrm{dv_g}$ （例 2.2.1 (d)），使得 $\sigma_P = p\sqrt{|\mathrm{dv_g}|}$，且$\sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 由下式给出（例如参见 [24, 注记 2.110]）

$$\sigma_P^{\mathrm{sub}}(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\partial\xi_i}(x,\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma^j_{ji}(x)\frac{\partial p}{\partial\xi_i}(\xi) \mod S^{m-2}(\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}), \quad (2.81)$$

其中， $p$， $p_{m-1}$ 是函数，而 $\Gamma^j_{ji}$ 是在 $\mathscr{M}$ 上的缩并克里斯托费尔符号。因此，次主符号独立于局部坐标，但取决于所选取的半密度。

$$\begin{array}{ccc}
C_{\mathrm{c}}^\infty(U) & \xrightarrow{\ P\ } & C^\infty(U) \\
{\scriptstyle\kappa^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\kappa^*} \\
C_{\mathrm{c}}^\infty(\kappa(U)) & \xrightarrow[\ P_\kappa\ ]{} & C^\infty(\kappa(U))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
S^m(\mathrm{T}^*U) & \xleftarrow{\ \sigma_P\ } & \Psi\mathrm{DO}^m(U;\Omega^{1/2}) & \xrightarrow{\ \sigma_P^{\mathrm{sub}}\ } & S^{m-1}(\mathrm{T}^*U) \\
\downarrow{\scriptstyle(\mathrm{T}^*\kappa)^*} & & \downarrow{\scriptstyle(2.73)} & & \downarrow{\scriptstyle(\mathrm{T}^*\kappa)^*} \\
S^m(\kappa(U)) & \xleftarrow[\ \sigma_{P_\kappa}\ ]{} & \Psi\mathrm{DO}^m(\kappa(U)) & \xrightarrow[\ \sigma^{\mathrm{sub}}_{P_\kappa}\ ]{} & S^{m-1}(\kappa(U))
\end{array}$$

图 2.2：伪微分算子、其主符号和次主符号在坐标图（$U$， $\kappa$）下的变换。

现在我们介绍以下术语，用于定义一类特殊的伪微分算子；这类算子将在本文中发挥关键作用。

定义 2.2.9. 设 $M$ 是一个流形， $H$ 是其余切丛 $\mathrm{T}^*M$ 上的一个哈密顿函数。 $H$ 在点 $(x_0,\ \xi^0) \in \mathrm{T}^*M$ 处的双特征曲线（带）是哈密顿向量场 $X_H$ （见（A.3））的积分曲线 $\gamma:\ \mathbb{R} \supseteq \mathbb{I} \to \mathrm{T}^*M$ ，其初始数据为 $\gamma(s_0) := (x_0,\ \xi^0)$ 。若 $H(x_0,\ \xi^0) = 0$ ，则 $\gamma$ 称为 $H$ 的零双特征曲线（带）。 $\gamma$ 在 $M$ 上的投影 $c:\ \mathbb{I} \to M$ 称为双特征曲线。

**定义 2.2.10**。 按照定义 2.2.4中的术语，任意适当支撑的$P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M;\ \Omega^1\!/_2)$在流形**上属于实主类型**，如果 $M$具有实齐次主符号 $P$，其阶为 $p$ ，并且不存在完整的零双特征曲线（条带） $m$ ，使得其 $p$始终位于 $M$ [35,定义 6.32]中的紧集上。

**注记 2.2.11**。 的双特征曲线的非陷获性质 $p$ 局部意味着 $\mathrm{d}p$ 不与刘维尔 1-形式成比例（见 例 A.1.2）对于 $\mathrm{T}^*M$ 在任意$(x_0,\ \xi^0) \in$特征集 $P$上均成立。等价地，这可以表述为: $X_p$ 与径向向量场（见定义 A.8）在每个$(x_0,\ \xi^0) \in$特征集 $P$处均线性无关:

$$\forall (x_0,\xi^0) \in \operatorname{Char} P : X_p(x_0,\xi^0) \neq 0. \tag{2.82}$$

这一性质意味着特征集 $P$ 是一个 维数为 $2d-1$ 的光滑、闭锥形超曲面（参见例如 [23, 第 54], [84,VIII 节。7]）。

## 2.2.3 拉格朗日分布

为定义 $M$上的拉格朗日分布，注意到 $I^m(M,S;\ \Omega^1\!/_2)$ 是 Besov空间（在第 2.2.2 节中介绍） ${}^\infty H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\ \Omega^1\!/_2)$ 的最大子空间，该子空间在所有切于 $S$ 的一阶偏微分算子的作用下保持不变。此外，任何在余法丛 $S^{\perp *}$of $S$ 上主符号为零的一阶伪微分算子，都会使 $I^m(M,S;\ \Omega^1\!/_2)$ 保持不变 [76,定理 18.2.12]。由于余法丛是拉格朗日子流形的一个特例（参见例 A.1.7），因此利用这一事实来定义拉格朗日分布。

定义 2.2.12。设 $\Omega^1\!/2,\ \dot{\mathrm{T}}^*M \to M$ 是 $d$ 维流形 $M$ 上的半密度丛和去零余切丛，并设 $\Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*M$ 是一个闭锥拉格朗日子流形（见定义 A.1.5 ）。则 $M$ 上、阶（至多为） $m \in \mathbb{R}$ 的拉格朗日分布半密度空间 $I^m(M,\Lambda;\ \Omega^1\!/_2)$ 定义为所有分布半密度 $u \in \mathrm{D}'(M;\ \Omega^1\!/_2)$ 的集合，其中这些分布半密度定义在 $M$ 上，并满足 $P_1$。..... $P_N u \in {}^\infty H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\ \Omega^1\!/_2)$，对所有 $N \in \mathbb{N}_0$ 以及所有在 $\Lambda$ 上主符号为零的适当支撑的 $P_i \in \Psi\mathrm{DO}^1(M;\ \Omega^1\!/_2)$ 均成立；其中 ${}^\infty H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\ \Omega^1\!/_2)$ 表示 Besov空间 [23, 定义 25.1.1]。

为了利用 $I^m(M,\ \Lambda;\ \Omega^1\!/_2)$作为傅里叶积分算子的施瓦茨核， $M$必须替换为乘积流形 $M\times N$其中 $N$是任意流形，而 $\Lambda$ 的作用将由一个典范关系来承担（见定义A.1.12）。

定义 2.2.13. 设 $M$、$N$ 是流形，并分别配备半密度丛 $\Omega^{1/2}M \to M$、$\Omega^{1/2}N \to N$。假设 $\dot{\mathrm{T}}^*M$（分别为 $\dot{\mathrm{T}}^*N$）是 $M$（分别为 $N$）的去心余切丛，并且 $C$ 是从 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 的齐次典范关系，且在 $\dot{\mathrm{T}}^*(M\times N)$ 中闭合。一个线性连续算子 [23, 定义 25.2.1]

$$A : C_c^\infty(N;\Omega^{1/2}N) \to \mathcal{D}'(M;\Omega^{1/2}M),\ v \mapsto (Av)(x) := \int_N \mathrm{A}(x,y)\,v(y) \tag{2.83}$$

若其施瓦茨核 A 属于拉格朗日分布 $I^m\big(M\times N,\ C';\ \Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$，则称其为从 $N$ 上紧支集半密度 $C_c^\infty(N;\ \Omega^1{}_{/2}N)$ 到 $M$ 上与典范关系 $C$ 相关的分布半密度 $\mathrm{D}'(M;\ \Omega^1{}_{/2}M)$ 的（至多） $m\in\mathbb{R}$ 阶**傅里叶积分算子**。我们将所有此类算子的集合记为 $\mathrm{FIO}^m(\Omega^1{}_{/2}N\to N,\ \Omega^1{}_{/2}M\to M;\ C')$。

与伪微分算子类似，傅里叶积分算子也可以写成 $M$ 和 $N$ 的图册上的一组局部傅里叶积分算子。然而，它们的局部化较为复杂，因为一般的典范关系比余法丛 $(\Delta M)^{\perp *}$ 更复杂，而且需要同时对余向量及其基点进行局部化，这使得我们先前通过截断函数进行的局部化方法不再适用。我们通过以下方式对 $I^m\big(M\times N,\ C';\ \Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$ 的一个元素进行局部化：

**Lem定义 2.2.14**。 按照定义 *2.2.12* 中的术语，若 $u\in I^m(M,\Lambda;\ \Omega^1{}_{/2})$ *th en*

$$\mathrm{WF}\,u\subset\Lambda \tag{2.84}$$

且当 $P\in\Psi DO^0(M;\ \Omega^1{}_{/2})$ 时，$Pu\in I^m(M,\Lambda;\ \Omega^1{}_{/2})$。反之，若对于每个 $(x,\xi)\in\dot{T}^*M$，都能找到在 $(x,\xi)$ 处非特征的适当支撑的 $Q\in\Psi DO^0(M;\ \Omega^1{}_{/2})$，使得 $Qu\in I^m(M,\Lambda;\ \Omega^1{}_{/2})$ *[23,* 引理 *25.1.2]*，则 $u\in I^m(M,\Lambda;\ \Omega^1{}_{/2})$。

因此，适当的伪微分算子对于拉格朗日分布所起的作用，与截断函数（参见 (2.73)）对于余法丛 $(\Delta M)^{\perp *}$ 所起的作用相同；前述引理将对 $\mathrm{A}\in I^m\big(M\times N,C';\ \Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$的研究归结为 WF A 包含于 $(x,\xi;\ y,\eta)\in C'$的一个小的闭锥邻域内，且 $(x,y)\in\mathrm{supp}\,\mathrm{A}$。更一般地，给定开锥 $\mathfrak{U}\times\mathfrak{V}\subset\dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N$的齐次典范关系 $C$，若存在包含于 $\mathfrak{U}\times\mathfrak{V}$中的 $(P\otimes Q)\mathrm{A}\in I^m\big(M\times N,$ $C';\ \Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$的开锥邻域 U ×V，包含 $(x,\xi;\ y,\eta)$，使得对于所有 WF $P\subset$clo(U)、WF $Q\subset$clo(V) 的适当支撑的 $P\in\Psi\mathrm{DO}^0(M;\ \Omega^1{}_{/2}M)$、$Q\in\Psi\mathrm{DO}^0(N;\ \Omega^1{}_{/2}N)$，$\in I^m\big(M\times N,C';$ $\Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$在 $(x,\xi;\ y,\eta)\in\mathfrak{U}\times\mathfrak{V}$，则称 $\mathrm{A}\in I^m\big(M\times N,C';\ \Omega^1{}_{/2}(M\times N)\big)$在 $(x,\xi;\ y,\eta)$ $\in\mathfrak{U}\times\mathfrak{V}$处具有该性质。事实上，只需对某个在 $(x,\xi;\ y,\eta)$ [23, p 处非特征的此类 $P\otimes Q$ 加以验证即可。

为了得到 A 的局部描述，设 $\{(U_\alpha,\kappa_\alpha)\}_\alpha$（分别）$\{(V_\beta,\rho_\beta)\}_\beta$ 是 $M$（分别是 $N$）的图册。由于 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 和 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 是锥辛流形（见定义 A.1.1 和例 A.1.2），因此存在一个齐次图册 $\{(\mathrm{U}_\alpha,\varkappa_\alpha)\}_\alpha$（分别）$\{(\mathrm{V}_\beta,\varrho_\beta)\}_\beta$，它适用于 $\dot{\mathrm{T}}^*M$（分别适用于 $\dot{\mathrm{T}}^*N$），使得

$$\varkappa_\alpha : \mathcal{U}_\alpha\to\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\dot{\mathbb{R}}^{d_M},\qquad \varrho_\beta:\mathcal{V}_\beta\to\rho_\beta(V_\beta)\times\dot{\mathbb{R}}^{d_N}, \tag{2.85}$$

根据齐次达布定理 A.1.4。对于每个 $(x,\xi;\ y,\eta)\ \in\ C'$，假设$[\varphi_{\alpha,\beta}]$ 是 $C'$ 的相位函数稳定等价类中的一个元素，超额为$e_{\alpha,\beta}$ （见定义 A.1.8 和注记A.1.9），定义在 $(\boldsymbol{x}:=\kappa_\alpha(x),\boldsymbol{y}:=\rho_\beta(y),\theta)$在 $\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\rho_\beta(V_\beta)\times\dot{\mathbb{R}}^{n_{\alpha,\beta}}$的一个开锥邻域上，其中某个 $n_{\alpha,\beta}\in\mathbb{N}$，并且

$$\mathscr{C}_{\alpha,\beta}:=\{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0;\theta^0)\in\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\rho_\beta(V_\beta)\times\dot{\mathbb{R}}^{n_{\alpha,\beta}}|\,\mathrm{grad}_\theta\,\varphi_{\alpha,\beta}\,(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0;\theta^0)=0\}\tag{2.86}$$

是 $\varphi_\alpha$ 的纤维临界流形，$\beta$。那么（见（A.34））

$$C'_{\alpha,\beta}:=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta})\in\varkappa_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\times\varrho_\beta(\mathcal{V}_\beta)|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\theta)\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta},\boldsymbol{\xi}=\mathrm{d}_x\varphi_{\alpha,\beta},\boldsymbol{\eta}=\mathrm{d}_y\varphi_{\alpha,\beta})\}\tag{2.87}$$

是 $C'$ 在锥形邻域 $\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{V}\beta$ of $(x,\ \xi;\ y,\ \eta)\ \in C'$中的欧几里得代表。因此，在局部地

$$\mathsf{A}=\sum_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha\times\rho_\beta)^{-1}_*\,\mathsf{A}_{\alpha,\beta},\tag{2.88}$$

其中模 $C^\infty(\kappa_\alpha\ (U_\alpha)\ \times\rho_\beta\ (V_\beta)\ )$，$\mathsf{A}_{\alpha,\ \beta}$是如下形式的振荡积分 [77,定义 3.2。2], [23, 命题 25.1.5']:

$$\mathsf{A}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\equiv(2\pi)^{-(d_M+d_N+2n_{\alpha,\beta}-2e_{\alpha,\beta})/4}\int_{\mathbb{R}^{n_{\alpha,\beta}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\theta)}\mathsf{a}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\theta)\,\mathrm{d}\theta\tag{2.89}$$

并且 $\mathrm{supp}\ \mathsf{A}_{\alpha,\ \beta}$在局部是有限的。这里，$_{\alpha,\ \beta}\in S^{m+(d_M+d_N-2n_{\alpha,\beta}-2e_{\alpha,\beta})\ /4}$（$\mathbb{R}^{d_M}\times\mathbb{R}^{d_N}\times\mathbb{R}^{n_{\alpha,\ \beta}}$）的支集位于包含于 $\varphi_{\alpha,\ \beta}$定义域内的、足够小的锥形邻域的内部，$\mathscr{C}_{\alpha,\ \beta}$ 符号 $\equiv$ 表示模去光滑化核，而 $\mathrm{d}\theta$ 是 $_\theta\in\dot{\mathbb{R}}^{n_{\alpha,\ \beta}}$处的勒贝格测度。

由于标量拉格朗日分布的主符号在微分同胚下具有良好的变换性质（注记2.1.10），因此在局部坐标图中定义 $\sigma_{\mathsf{A}}$，使其与 $\sigma_{\mathsf{A}_{\alpha,\ \beta}}$ 相对应，并且不依赖于所选取的坐标。

定义 2.2.15。按照定义 2.2.12 中的术语，设 $\Omega^{1}\!/\!_{2}C$、$\mathbb{M}\ \to\ C$ 分别为 $C$上的半密度丛（见附录 A.1.6）和 Keller-Maslov 丛（见定义 A.1.19），并设 $S^{m+(d_M+d_N)}\!/\!_{4-[1]}(C;\mathbb{M}\otimes\Omega^{1}\!/\!_{2}C)$ 为 $C$上取值于 $\mathbb{M}\otimes\Omega^{1}\!/\!_{2}C$的符号空间（见（B.14））。则拉格朗日分布的主符号由同构 [10, (7.6)]定义（另见 [23, 命题 25.1.5']）。

$$\sigma:I^{m-[1]}\big(M\times N,C';\Omega^{1/2}(M\times N)\big)\to S^{m+\frac{d_M+d_N}{4}-[1]}(C;\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C),\tag{2.90}$$

其中 $I^{m-[1]}:=I^{m}\!/\!I^{m-1}$。在由 $\dot{\mathrm{T}}^*M$（分别由 $\dot{\mathrm{T}}^*N$）上的 $\{(\mathrm{U}_\alpha,\varkappa_\alpha)\}_\alpha$（分别为 $\{(\mathrm{V}_\beta,\varrho_\beta)\}_\beta$）诱导出的 $C'$ 的齐次辛坐标图 $(\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{V}\beta,\varkappa_\alpha\times\varrho_\beta)$ 中（参见例如 [76, Thm. 21.2.8]），结合 (2.85)，上述同构表示为

$$\begin{aligned}[\mathsf{A}]\mapsto\sigma_{[\mathsf{A}]}(x,\xi;y,\eta)\ :=\ (\varkappa_\alpha\times\varrho_\beta)^*\left(\int_{\mathfrak{C}}\mathrm{d}\theta''a_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\theta',\theta'')\right)\mathfrak{m}(x,\xi;y,\eta)\otimes\\ \sqrt{|\mathrm{dv}_C(x,\xi;y,\eta)|}\mod S^{m+\frac{d_U+d_V}{4}-1}(\cdot),\end{aligned}\tag{2.91}$$

其中$a_{\alpha,\ \beta}$ 是$\mathsf{a}_\alpha$的最高阶齐次项$\beta$，见（2.89），其他所有符号均同定义2.1.9。

**例 2.2.16**。设 $(\Sigma,\ \iota_\Sigma)$ 是一个 $n$ 维浸入子流形，嵌入于一个 $d$ 维流形 $M$，且 $\Omega^1/{}^2M \to M$ 是 $M$ 上的半密度丛。那么拉回

$$\iota_\Sigma^* : C_c^\infty(M;\Omega^{1/2}M) \to C^\infty(\Sigma;\Omega^{1/2}M_\Sigma) \tag{2.92}$$

单射浸入 $\iota_\Sigma:\ \Sigma \hookrightarrow M$ 称为<style id='3'>限制映射。已知 $\Sigma$具有适配图册，即其图册中的坐标图由 $M$的坐标图诱导而来。换言之，对于每个 $x'\in\Sigma$，存在 $\Sigma$在 $x'$处的一个坐标图（$V,\ \rho$），以及 $M$在 $\iota_\Sigma$（$x'$）处的一个坐标图（$U,\ \kappa$），使得 $\iota_\Sigma$（$V$）$\subset U$并且

$$\kappa\circ\iota_\Sigma\circ\rho^{-1}(\boldsymbol{x}') = (0,\dots,0,\boldsymbol{x}^{d-n+1},\dots,\boldsymbol{x}^d) \tag{2.93}$$

是 $\Sigma$的一个坐标图。由例 2.1.11 这一特殊情形可直接看出，$\iota_\Sigma^*$ 是一个傅里叶积分算子，其施瓦茨核为

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_\Sigma(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) &:= (2\pi)^{-(d-n+n+3d)/4}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_\Sigma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta},\\ \varphi_\Sigma &:= (\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{y}^i)\boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{y}^j\boldsymbol{\eta}_j,\quad i=\operatorname{codim}\Sigma+1,\dots,d,\ j=1,\dots,\operatorname{codim}\Sigma, \end{aligned} \tag{2.94}$$

其中，$\operatorname{codim}\Sigma := \dim M - \dim\Sigma$是 $\Sigma$的余维数。相位函数 $\varphi_\Sigma$是非退化的，因此（例如参见 [83, (2.4.4)、(5.1.2)]）

$$\mathsf{R}_\Sigma \in I^{\operatorname{codim}\Sigma/4}\big(\Sigma\times M,\Lambda'_\Sigma;\Omega^{1/2}(M_\Sigma\times M)\big), \tag{2.95a}$$

$$\Lambda'_\Sigma := \{(x',\xi';x,\xi)\in \mathrm{T}^*M_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*M \mid x=\iota_\Sigma(x'),\xi'=\xi\restriction \mathrm{T}_{x'}M_\Sigma\}, \tag{2.95b}$$

$$\sigma_{\mathsf{R}_\Sigma} := (2\pi)^{-\operatorname{codim}\Sigma/4}\,\mathbb{1}_{\Omega^{1/2}(M_\Sigma\times M)}\sqrt{|\mathrm{dv}_{\Lambda_\Sigma}|}\otimes\mathbb{1}, \tag{2.95c}$$

其中，$|\mathrm{dv}_\Lambda|$是 $\Lambda_\Sigma$上的密度，而 l 是 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{L}\to\Lambda_\Sigma$的一个截面。$\mathrm{T}^*M$ 上的典范辛形式 $\sigma$ 为（见例 A.1.2）$\sigma=\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}\xi_i+\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}\xi_j$（在适配坐标中），因此 $|\mathrm{dv}_\Lambda| = |\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}\xi|$是$\Lambda_\Sigma$上的诱导密度。丛 $\mathbb{L}$ 包含由 $\varphi_\Sigma$ 构造的全局常值截面（参见例 A.1.21）（另见例如 [90]）。

正如例 2.1.11 中所观察到的，仔细审视前一个例子中的 $\Lambda_\Sigma$ 可以发现，$\Lambda_\Sigma$不是齐次的，因为元素 $(y'、0;\ \iota_\Sigma(y')、\ \eta)$出现在 $\Lambda_\Sigma$ 中：当 $\eta\in\Sigma^{\perp *}_{\iota_\Sigma}(y')$ 时，=(2.95b)，其中 $\Sigma^{\perp *}$是余法丛（见例 A.1.7）。因此，$\iota_\Sigma^*$ 不是齐次傅里叶积分算子。我们将在例 2.3.12 中针对限制算子的丛版本给出这一问题的解决方案。

## 2.3 向量丛上的傅里叶积分算子 es

现在，借助前两节所做的准备工作，我们将介绍本论文中最主要的技术工具。先从作用于向量丛上的积分算子的一些基本事实讲起。

## 2.3.1 积分算子

设 $\mathscr{E}, \Omega^{1/2}M \to M$（分别为 $\mathscr{F}, \Omega^{1/2}N \to N$）是定义在一个 $d_M$（分别为 $d_N$）维流形 $M$（分别为 $N$）上的向量丛和半密度丛。回顾一下，半密度值分布的集合 $\mathrm{D}'(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M)$ 是定义在 $\mathscr{E}$ 上、取值于 $\Omega^{1/2}M$ 的 $\mathbb{C}$-线性泛函，其中 $\mathscr{E}^* \to M$ 是 $\mathscr{E}$ 的对偶丛（见第 2.3.4 节）。若 $\mathrm{pr}_M : M\times N \to M$、$\mathrm{pr}_N : M\times N \to N$ 是笛卡尔投影，则

$$\mathscr{E}\boxtimes\mathscr{F} := \mathrm{pr}_M^*\,\mathscr{E}\otimes\mathrm{pr}_N^*\,\mathscr{F} \to M\times N. \tag{2.96}$$

是 $\mathscr{E}$与 $\mathscr{F}$之间的外张量积丛。设$\{(U_\alpha,\kappa_\alpha)\}_\alpha$（分别地，$\{(V_\beta,\rho_\beta)\}_\beta$）是 $M$（分别地，$N$）的一个图册，使得 $\mathscr{E}$（分别地，$\mathscr{F}$）在 $U_\alpha$（分别地，$V_\beta$）上有一个局部平凡化，并且$\{(U_\alpha,\chi_\alpha)\}_\alpha$（分别地，$\{(V_\beta,\tau_\beta)\}_\beta$）是 $\mathscr{E}$（分别地，$\mathscr{F}^*$）的一个丛图册。令 $|\mathrm{d}x|$（分别地，$|\mathrm{d}y|$）为 $\Omega^{1/2}M$（分别地，$\Omega^{1/2}N$）的任意选定的处处非零整体截面（第 2.2.1 节），并令 $(\mathrm{E}_r)$（分别地，$(\mathrm{F}^k)$）为 $\mathscr{E}$（分别地，$\mathscr{F}$）的一个标架。局部地，$\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty M\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M\quad \psi\in C_{\mathrm{c}}^\infty N\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N\quad \Upsilon\in C_{\mathrm{c}}^\infty\big(M\times N\quad \mathscr{E}^*\boxtimes\mathscr{F}\ \otimes\Omega^{1/2}\ M\times(\ ;/\ ),\ N\quad u\in\quad' M\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M\quad v\in\quad' N\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N\quad\in\quad\mathscr{E}\boxtimes\mathscr{F}^*\ \otimes\Omega^{1/2}\ M\times N$ $(\ ;/\ ),;(\ )/(\ )),\mathrm{D}(\ ;/\ ),\mathrm{D}(\ ;/\ ),\mathrm{T}\,\mathrm{D}'\big(M\times N,(\ )/(\ )\big)$可表示为（例如参见第 [9,节第 4.2], [72,页第 148-150]页）

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi^r \mathrm{E}_r\otimes\sqrt{|\mathrm{d}x|},\quad \phi^r\in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_\alpha), && (2.97a)\\
\psi &= \psi^k \mathrm{F}_k\otimes\sqrt{|\mathrm{d}y|},\quad \psi^k\in C_{\mathrm{c}}^\infty(V_\beta), && (2.97b)\\
\Upsilon &= \Upsilon_r^k(\mathrm{E}^r\boxtimes\mathrm{F}_k)\otimes\sqrt{|\mathrm{d}x||\mathrm{d}y|},\quad \Upsilon_r^k\in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_\alpha\times V_\beta), && (2.97c)\\
u &= u^r \mathrm{E}_r\otimes\sqrt{|\mathrm{d}x|},\quad u^r\in\mathcal{D}'(U_\alpha), && (2.97d)\\
v &= v^k \mathrm{F}_k\otimes\sqrt{|\mathrm{d}y|},\quad v^k\in\mathcal{D}'(V_\beta), && (2.97e)\\
\mathsf{T} &= \mathsf{T}_k^r(\mathrm{E}_r\boxtimes\mathrm{F}^k)\otimes\sqrt{|\mathrm{d}x||\mathrm{d}y|},\quad \mathsf{T}_k^r\in\mathcal{D}'(U_\alpha\times V_\beta), && (2.97f)
\end{aligned}$$

其中 $r=1,\dots,\mathrm{rk}\ \mathscr{E}$和 $k=1,\dots,\mathrm{rk}\ \mathscr{F}$。因此，存在依赖于所选坐标图和丛图的双射

$$\begin{aligned}
C^\infty(U_\alpha;\mathscr{E}_\alpha\otimes\Omega_\alpha^{1/2}) &\cong \big(C^\infty(U_\alpha;\Omega_\alpha^{1/2})\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times 1}\cong\Big(C^\infty\big(\kappa_\alpha(U_\alpha)\big)\Big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times 1}, && (2.98a)\\
\mathcal{D}'(U_\alpha;\mathscr{E}_\alpha\otimes\Omega_\alpha^{1/2}) &\cong \big(\mathcal{D}'(U_\alpha;\Omega_\alpha^{1/2})\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times 1}\cong\Big(\mathcal{D}'\big(\kappa_\alpha(U_\alpha)\big)\Big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times 1}, && (2.98b)\\
C^\infty(V_\beta;\mathscr{F}_\beta\otimes\Omega_\beta^{1/2}) &\cong \big(C^\infty(V_\beta;\Omega_\beta^{1/2})\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times 1}\cong\Big(C^\infty\big(\rho_\beta(V_\beta)\big)\Big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times 1}, && (2.98c)\\
\mathcal{D}'(V_\beta;\mathscr{F}_\beta\otimes\Omega_\beta^{1/2}) &\cong \big(\mathcal{D}'(V_\beta;\Omega_\beta^{1/2})\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times 1}\cong\Big(\mathcal{D}'\big(\rho_\beta(V_\beta)\big)\Big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times 1}. && (2.98d)
\end{aligned}$$

根据施瓦茨核定理（例如参见 [23, 第 93] 页），给定一个双分布 $\mathsf{T}\in\mathrm{D}'\big(M\times N,(\mathscr{E}\boxtimes\mathscr{F}^*)\otimes\Omega^{1/2}(M\times N)\big)$，存在唯一的连续线性算子

$$T : C_{\mathrm{c}}^\infty(N;\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N)\to\mathcal{D}'(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M),\ v\mapsto(Tv)(x) := \int_N \mathsf{T}(x,y)\,v(y) \tag{2.99}$$

反之亦然。定义受限算子

$$T_\beta^\alpha := \big(T(\psi\restriction V_\beta)\big)\restriction U_\alpha : C_{\mathrm{c}}^\infty(V_\beta;\mathscr{F}_\beta\otimes\Omega_\beta^{1/2})\to\mathcal{D}'(U_\alpha;\mathscr{E}_\alpha\otimes\Omega_\alpha^{1/2}), \tag{2.100}$$

可将其识别为一个 $\operatorname{rk}\mathscr{E}\times\operatorname{rk}\mathscr{F}$-标量算子矩阵（例如参见 [9, 第4.3节。1]）

$$T^{\alpha,r}_{\beta,k} := \chi_{\alpha *}\circ T^{\alpha}_{\beta}\circ\tau^{*}_{\beta} : C^{\infty}_{\mathrm{c}}(V_\beta;\Omega^{1/2}_{\beta}) \to \mathcal{D}'(U_\alpha;\Omega^{1/2}_{\alpha}). \tag{2.101}$$

这可以进一步简化到欧几里得空间的层面

$$T^{\alpha,r,i}_{\beta,k,j} := \kappa_{\alpha *}\circ T^{\alpha,r}_{\beta,k}\circ\rho^{*}_{\beta} : C^{\infty}_{\mathrm{c}}\big(\rho_\beta(V_\beta)\big) \to \mathcal{D}'\big(\kappa_\alpha(U_\alpha)\big), \tag{2.102}$$

如下面图中的交换图所示。2.3。

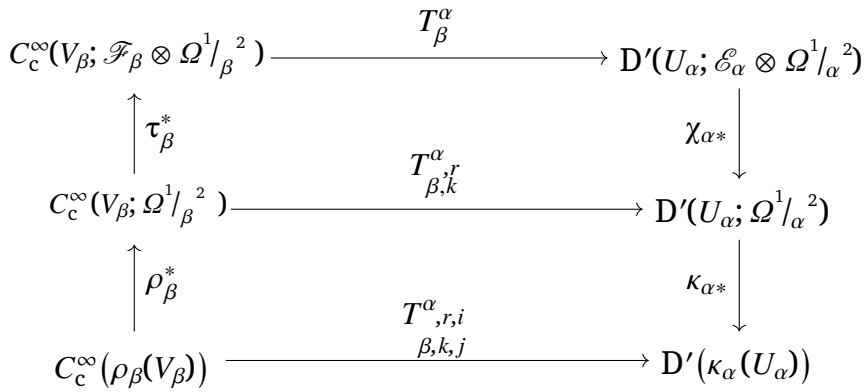


图 2.3：作用于向量丛上的积分算子的欧几里得代表。

因此，我们总可以在局部将作用于半密度值向量丛上的积分算子表示为一组作用于相应欧几里得空间子集上函数的标量积分算子：

$$T \leftrightarrow \big(T^{\alpha,r,i}_{\beta,k,j}\big),\quad r=1,\dots,\operatorname{rk}\mathscr{E};\, k=1,\dots,\operatorname{rk}\mathscr{F};\, i=1,\dots,d_M;\, j=1,\dots,d_N. \tag{2.103}$$

## 2.3.2 伪微分算子

第 2.2.2 节中引入的 Besov空间 ${}^{\infty}H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\,\Omega^{1}\!/_{2})$ 可以以一种直接的方式推广到向量丛 $\mathscr{E}\to M$, ${}^{\infty}H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$。

定义 2.3.1. 设 $\mathscr{E}$、$\Omega^{1}\!/^{2}\to M$ 分别为 $d$ 维流形 $M$ 上的向量丛和半密度丛，且 $S$ 为 $M$ 的闭子流形。则 $I^{m}(M,S;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 表示由 $\mathscr{E}$ 生成、关于 $S$ 余法向且度（至多）为 $m\in\mathbb{R}$ 的半密度值分布空间，其定义为所有满足以下条件的 $\mathscr{E}$ 上的半密度值分布 $u\in\mathrm{D}'(M;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 的集合：$L_1\dots\dots L_N u$ 对所有 $N\in\mathbb{N}_0$ 以及所有具有光滑系数且沿 $S$ 切向的 $L_i\in\mathrm{PDO}^{1}(M;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$，均属于 Besov空间${}^{\infty}H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$。这里的拓扑是使映射 $u\mapsto L_1\dots\dots L_N u\in{}^{\infty}H^{-m-d/4}\operatorname{loc}(M;\,\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 连续的最弱拓扑 [76, 定义 18.2.6]。

设 $\mathscr{F} \to M$ 为流形 $M$ 上的向量丛。我们利用自然的向量丛同构

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \cong \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{F} \to M \tag{2.104}$$

在下面的定义中。

**定义 2.3.2**。设 $\mathscr{E}$、$\mathscr{F}$、$\Omega^{1/2} \to M$ 分别是流形 $M$ 上的两个向量丛和半密度丛。一个从 **伪微分算子** $P$ 从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{F}$ 的 **阶**（至多为） $m \in \mathbb{R}$ 是一个连续线性映射（参见，例如 [76,第 100]页）

$$P : C_c^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) \to C^\infty(M;\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}),\ u \mapsto (Pu)(x) := \int_M \mathsf{P}(x,y)\,u(y)$$

其施瓦茨核 P 属于余法分布空间 $I^m\big(M\times M,\ (\Delta M)^{\perp *};\ \mathrm{Hom}(\mathscr{E},$
$\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}\big)$，其中：$M\times M$ 是对角嵌入。我们将所有此类算子的集合记为 $\Psi\mathrm{DO}^m(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2},\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2})$。$\Delta: M\to M\times M$

如第 2.3.1 节所述，局部地 $P$（相应地，其施瓦茨核 P）与一个由适当支撑的标量伪微分算子组成的矩阵 $(P_r^k)$（相应地，标量核 $(\mathsf{P}_r^k)$）在相应的欧几里得空间上构成一一对应关系，且相差平滑算子（相应地，核）；参见命题2.1.2（详情请参阅，例如 [76,定义 18.1。32], [9,第 1.5 节。3]）：

$$\begin{aligned} P &\leftrightarrow (P_r^k)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} \mod (\Psi_r^k)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}},\quad \Psi_r^k \in \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\kappa_\alpha(U_\alpha)),\\ \mathsf{P} &\leftrightarrow \big(\mathsf{P}_r^k\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} \mod \big(\Psi_r^k\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}},\quad \Psi_r^k \in I^{-\infty}\big(\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\kappa_\alpha(U_\alpha)\big) \end{aligned} \tag{2.105}$$

其中（参见定理 2.1.3）

$$\mathsf{P}_r^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{(2\pi)^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} \sigma^{\mathrm{tot}}_{P_r^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\quad \sigma^{\mathrm{tot}}_{P_r^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{1}{\alpha!}(\partial_{\boldsymbol{\xi}}^\alpha \mathrm{D}_{\boldsymbol{y}}^\alpha \mathsf{p}_r^k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \tag{2.106}$$

对于某个真 $\mathsf{p}_r^k \in S^m\big(\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\kappa_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^d\big)$，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在每个 $\boldsymbol{x}$ 处都是勒贝格测度$=\kappa(x)$，并且 $\sim$ 表示渐近求和（见定义 B.1.4）。因此，定义

$$\sigma^{\mathrm{tot}}_{[P]}(x,\xi) \equiv \sigma^{\mathrm{tot}}_{\left[\left(P_r^k\right)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}}\right]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \equiv \big(\sigma^{\mathrm{tot}}_{[P_r^k]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} \tag{2.107}$$

作为 $P$ 的全符号。

**定义 2.3.3**。按照定义 2.3.2 和 2.2.6中的术语，令 $\pi:\ \mathrm{T}^*M \to M$是 $M$ 上的余切丛，并且 $S^m\big(\mathrm{T}^*M,\ \mathrm{Hom}\ (\mathscr{E},\ \mathscr{F})\ \big)$ 是 $\mathrm{Hom}\ (\mathscr{E},\ \mathscr{F})$ 值半密度的符号空间（见附录 B.3）在 $\mathrm{T}^*M$上。则**主符号**由如下同构定义（例如参见第 [76,页 92]）

$$\sigma : \Psi\mathrm{DO}^{m-[1]}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2},\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}) \to S^{m-[1]}\big(\mathrm{T}^*M,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})\big), \tag{2.108}$$

其中 $\Psi\mathrm{DO}^{m-[1]} := \Psi\mathrm{DO}^m/\Psi\mathrm{DO}^{m-1}$。前述映射在局部表示为

$$[P] \mapsto \sigma_{[P]}(x,\xi) := \big(\sigma_{[P_r^k]}\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} \sqrt{|\mathrm{dv}_{\mathrm{T}^*M}(x,\xi)|} \mod S^{m-[1]}(\cdot), \tag{2.109}$$

其中，$\sigma_{[P_r^k]}$ 是 $P$ 的欧几里得代表 $P_r^k$ 的主符号，取自 $\mathrm{T}^*M$ 的任意齐次辛坐标图以及 $\mathscr{E}$、$\mathscr{F}$的任意丛图。

**定义 2.3.4**。 按照定义 2.3.2、2.3.3和 2.2.7中的术语，**子主符号** 的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2, \mathscr{F} \otimes \Omega^1/2)$ 由以下同构定义 [76, 定理 18.1。33])

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathrm{sub}} \quad : \quad & \Psi\mathrm{DO}^{m-[2]}(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}, \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}) \to S^{m-[2]}\big(\mathrm{T}^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})\big), \\ & [P] \mapsto \sigma^{\mathrm{sub}}_{[P]}(x,\xi) := \big(\sigma^{\mathrm{sub}}_{[P^k_r]}\big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{F} \times \mathrm{rk}\,\mathscr{E}}, \end{aligned} \tag{2.110}$$

其中， $\sigma^{\mathrm{sub}}_{[P^k_r]}$ 是 $P^k_r$的次主符号。

**注记 2.3.5**。 主符号不依赖于的平凡化的选择 $\mathscr{F}$，但次主符号取决于所作的选择，这一点已在第3.3.2节中进行了深入探讨。因此，结合注记2.2.8 ，我们总结如下：次主符号不依赖于局部坐标，但取决于所选的半密度和丛图。

为了在丛框架下介绍实主类型伪微分算子的概念，设 $\mathscr{G} \to M$ 是一个向量丛。于是存在自然的双线性映射（例如参见 [89,引理 8.3。6], [9,第 85]页）

$$\begin{aligned} \cdot \circ \cdot \quad : \quad & S^m\big(\mathrm{T}^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{G})\big) \times S^{m'}\big(\mathrm{T}^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{F})\big) \to S^{m+m'}\big(\mathrm{T}^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})\big), \\ & (p, p') \mapsto (p' \circ p)\,(x,\xi) := p'(x,\xi)\big(p(x,\xi)\big). \end{aligned} \tag{2.111}$$

此外，我们注意到， $S^0\big(\mathrm{T}^*M, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})\big)$具有一个特殊元素 I，由恒等$\mathbb{1}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})} = \mathbb{1}_{\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E},\pi^*\mathscr{F})}$同态 $(\pi^*\mathscr{E})_{(x,\xi)} \ni p \mapsto p \in (\pi^*\mathscr{F})_{(x,\xi)}$给出：

$$\mathrm{T}^*_x M \ni (x,\xi) \mapsto \mathtt{I}(x,\xi) := \mathbb{1}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})_{(x,\xi)}} \in \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E}, \pi^*\mathscr{F}), \tag{2.112}$$

其中 $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ 是 $M$ 的余切丛。

定义 2.3.6。按照定义 2.3.2 和定义 2.3.3 中的术语，具有主符号 $p$ 的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M; \mathscr{E} \otimes_{\Omega^1/2}, \mathscr{F} \otimes \Omega^1/2)$ 在 $(x_0, \xi^0) \in \dot{\mathrm{T}}^*M$ 处属于实主类型，如果存在符号 $\tilde{p} \in S^0(\mathrm{U}$，使得 $(\pi^*$同态$(\mathscr{E}, \mathscr{F}))_{\mathcal{U}})$，满足 [45, 定义 3.1]

$$(\tilde{p} \circ p)(x,\xi) = q\, \mathbb{1}_{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})_{(x,\xi)}} \tag{2.113}$$

对于 $(x, \xi)$，其中 $(x_0, \xi^0)$ 的一个开锥邻域 U 中的任意点， $q$ 是某个标量实主类型算子 $Q \in \Psi\mathrm{DO}^m(M; \Omega^1/2)$ 的主符号。若 $P$ 在 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中的每个 $(x_0, \xi^0) \in \dot{\mathrm{T}}^*M$ 处都具有实主类型，则称其在 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中属于实主类型。

波前集的欧几里得表述（2.24）在丛框架中的推广十分直接：

$$\forall u \in \mathcal{D}'(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}) : \mathrm{WF}\, u := \bigcap_{\substack{P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}) \\ Pu \in C^\infty(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2})}} \mathrm{Char}\, P \tag{2.114}$$

除了对 Char 的刻画 $P$ 在（2.24）中的使用需要推广如下。

定义 2.3.7. 按照定义 2.3.2 和 2.3.3 中的术语，设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2, \mathscr{F} \otimes \Omega^1/2)$，其主符号记为 $p$。若对于某点 $(x_0, \xi^0) \in \dot{\mathrm{T}}^*M$，存在 $\tilde{p} \in S^m(\mathrm{U}, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})_{\mathcal{U}})$，使得 $p \circ \tilde{p} - \mathbb{1} \in S^{-1}(\mathrm{U}, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{F})_{\mathcal{U}})$ 在点 $(x_0, \xi^0)$ 的某个锥形邻域 U 中成立，则称算子 $P$ 在该点是非特征的。$P$ 的所有特征点构成的集合记为 $\mathrm{Char}\, P$（参见例如 [76, 定义 18.1.25], [89, 第 8 节4]）。

该定义意味着，微局部椭圆性条件等价于

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{U} : \det p(x, \xi) \neq 0. \tag{2.115}$$

同样可以推出

$$\mathrm{WF}\, u = \bigcup_{r=1,\ldots,\mathrm{rk}\,\mathscr{E}} \mathrm{WF}(u^r) \tag{2.116}$$

其中，$u^r \in \mathrm{D}'(U)$ 是相对于在 $U \subset M$上的 $\mathscr{E}$ 平凡化、针对所选半密度的 $u$ 的一个分量。

为说明这些概念，我们以波算子为例（标量情形见 [39,命题 4.2-4.4]，以及 [91,命题 2.1], [92,第 2]节）。

例 2.3.8. 设 $\Box$ 是定义在整体双曲时空（见定义 3.1.3）$(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 上的正规双曲算子。根据定义，其主符号由余切丛 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 上的时空度量 $\mathrm{g}^{-1}$ 与恒等端 omorphism 的乘积给出。因此，在 $\mathscr{E}$ 上成为实主类型微分算子的条件显然得到满足，因为 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的标量波算子（见例 3.2.2）是实主类型的。$\Box$ 的特征集是（余）光锥丛（见第 3.1.1 节）$\mathrm{Char}\,\Box = \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \to \mathscr{M}$，位于 $\mathscr{M}$ 之上；而由哈密顿量 $\mathrm{g}^{-1}$ 生成的向量场 $X_{\mathrm{g}}$ 的积分曲线，是去心余切丛 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 中的测地条带，其在 $\mathscr{M}$ 上的投影是测地线。

## 2.3.3 拉格朗日分布

向量丛上的拉格朗日分布、其主符号及其复合，是本论文所涉及的一些不可或缺的概念。定义 2.2.12以一种直接明了的方式推广到向量丛的半密度值截面，为了完备性起见，仍在此给出。

定义 2.3.9. 设 $\mathscr{E}$、$\Omega^1/2$、$\dot{\mathrm{T}}^*M \to M$ 分别为 $d$ 维流形 $M$ 上的向量丛、半密度丛和去心余切丛，并设 $\Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*M$ 为一个闭锥拉格朗日子流形（见定义 A.1.5）。则 $I^m(M, \Lambda; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$ 表示 $\mathscr{E}$ 的、阶（至多为）$m \in \mathbb{R}$ 的半密度值拉格朗日分布截面空间，其定义为所有满足 $P_1 \ldots P_N u \in {}^{\infty}H^{-m-d/4}\mathrm{loc}\,(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$ 的半密度值分布 $u \in \mathrm{D}'(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$ 的集合，其中对所有 $N \in \mathbb{N}_0$ 以及所有在 $\Lambda$ 上主符号为零的适当支撑的 $P_i \in \Psi\mathrm{DO}^1(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$，${}^{\infty}H^{-m-d/4}\mathrm{loc}\,(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$ 表示 Besov空间（第 2.3.2 节）[23, 定义 25.1.1]。

设 $\mathscr{F}$, $\Omega^{1/2}N \to N$ 是流形$N$上的向量丛和半密度丛。在定义 2.2.12 之后所提到的替换之外，为了定义从 $\mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N$ 到 $\mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M$ 的傅里叶积分算子，我们还必须将 $\mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M \to M$ 替换为 $(\mathscr{E} \boxtimes \mathscr{F}^*) \otimes \Omega^{1/2}(M \times N) \to M \times N$。这里利用自然丛同构

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \cong \mathscr{E} \boxtimes \mathscr{F}^* \to M \times N, \tag{2.117}$$

其中，同态丛 $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \to M \times N$是这样的向量丛：其纤维 $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E})_{(x,y)} = \operatorname{Hom}(\mathscr{F}_y, \mathscr{E}_x)$ 位于 $(x, y) \in M \times N$之上，是从向量空间 $\mathscr{F}_y$ 到向量空间 $\mathscr{E}_x$的 $\mathbb{C}$-线性映射。

定义 2.3.10. 设 $\mathscr{E}, \Omega^{1/2}M, \dot{\mathrm{T}}^*M \to M$（分别为 $\mathscr{F}, \Omega^{1/2}N, \dot{\mathrm{T}}^*N \to N$）是定义在 $d_M$（分别为 $d_N$）维流形 $M$（分别为 $N$）上的一个向量丛、半密度丛和去心余切丛，并且 $C$ 有一个从 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 的 $M$齐次典范关系（见定义 A.1.12），它在 $\dot{\mathrm{T}}^*(M \times N)$ 中是闭的。一个线性连续算子 [23, 定义 25.2.1]

$$A : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(N; \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N) \to \mathcal{D}'(M; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M), \; v \mapsto (Av)(x) := \int_N \mathsf{A}(x, y)\, v(y) \tag{2.118}$$

其施瓦茨核 A 是拉格朗日分布 $I^m\big(M \times N, C'; \operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \otimes \Omega^{1/2}(M \times N)\big)$ 被称为从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{E}$ 的**傅里叶积分算子**，其**阶**（至多）为 $m \in \mathbb{R}$，并与**典范关系** $C$相关。我们将所有此类算子的集合记为 $\mathrm{FIO}^m(\mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N \to N, \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M \to M; C')$。

流形上拉格朗日分布的局部化（引理 2.2.14）在丛情形下同样成立 [23, 引理 25.1。2]。按照第 2.3.1 节中的论证，可以明显看出，$\mathsf{A} \in I^m\big(M \times N, C'; \operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \otimes \Omega^{1/2}(M \times N)\big)$ 可以写成相应欧几里得空间上的标量拉格朗日分布矩阵

$$\mathsf{A} \leftrightarrow (\mathsf{A}_k^r)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E} \times \mathrm{rk}\,\mathscr{F}} \in \Big(I^m\big(\kappa_\alpha(U_\alpha) \times \rho_\beta(V_\beta); C'_\varphi\big)\Big)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E} \times \mathrm{rk}\,\mathscr{F}} \tag{2.119}$$

其中$C'_\varphi := C'_{\alpha,\beta} :=$ （2.87）由相位函数 $\varphi := \varphi_{\alpha,\beta}$ 其超额为$e := e_{\alpha,\beta}$ 如第2.2节所述。一个$\mathsf{A}_k^r$ 具有（2.89） [23,命题 25.1.5']

$$\mathsf{A}_k^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-(d_M + d_N + 2n - 2e)/4} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \theta)} \mathsf{a}_k^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \theta)\, \mathrm{d}\theta \mod C^{\infty}\big(\kappa_\alpha(U_\alpha) \times \rho_\beta(V_\beta)\big) \tag{2.120}$$

其中$\mathsf{a}_k^r \in S^{m + (d_M + d_N - 2n - 2e)/4}\big(\mathbb{R}^{d_M} \times \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^n\big)$ 的支集包含于纤维临界流形（2.86）的一个充分小的锥形邻域的内部，该流形属于 $\varphi$ 的定义域内，且 $\varphi$。

**定义 2.3.11**。 按照定义 2.3.10中的术语，令 $\widetilde{\text{同态}}(\mathscr{F}, \mathscr{E}), \Omega^{1/2}C, \mathbb{M} \to C$为同态$(\mathscr{F}, \mathscr{E})$在 $\mathrm{T}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$限制到 $C$上的拉回（见（B.20））、半密度丛（见附录A.1.6）以及 Keller-Maslov 丛（见定义 A.1.19）

$C$，分别，并且 $S^{m+(d_M+d_N)/4-[1]}\big(C;\ \mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C\otimes\widetilde{\text{同态}}(\mathscr{F},\ \mathscr{E})\big)$空间（见（B.14））， 即$_{\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C\otimes\widetilde{\text{同态}}}(\mathscr{F},\ \mathscr{E})$-值符号在 $C$上的空间。于是，拉格朗日分布的**主符号**由同构定义为 [23,命题 25.1.5']）

$$\sigma : I^{m-[1]}\big(M\times N, C'; \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1/2}(M\times N)\big) \to S^{m+\frac{d_M+d_N}{4}-[1]}\big(C; \mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C\otimes\widetilde{\operatorname{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big), \tag{2.121}$$

其中 $I^{m-[1]} := I^m/I^{m-1}$。前一个映射局部表示为

$$\begin{aligned}[\mathrm{A}] \mapsto \sigma_{[\mathrm{A}]}(x,\xi;y,\eta) \quad := \quad & \left(\int_{\mathfrak{C}} \mathrm{d}\theta'' a_k^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\theta',\theta'')\right)_{\mathrm{rk}\,\mathscr{E}\times\mathrm{rk}\,\mathscr{F}} \mathbb{m}(x,\xi;y,\eta)\otimes \\ & \sqrt{|\mathrm{d}v_C(x,\xi;y,\eta)|} \mod S^{m+\frac{d_M+d_N}{4}-1}(\cdot),\end{aligned} \tag{2.122}$$

其中 $a_k^r$ 是一个$_k^r$ 在（2.120）中的最高阶齐次项，且所有其他符号均与定义2.1.9相同。

## 2.3.4 傅里叶积分算子的伴随

为了描述傅里叶积分算子的伴随算子，我们先回顾一些线性代数中的标准概念。设 $\mathscr{U}$和 $\mathscr{V}$为 $\mathbb{C}$-向量空间。那么，由 $\mathbb{C}$-线性映射 $T\colon\ \mathscr{U}\to\mathscr{V}$构成的集合 $\operatorname{Hom}(\mathscr{U},\mathscr{V})$是一个向量空间，而 $\operatorname{End}\mathscr{V}:=\operatorname{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{V})$在自同态的复合运算下构成一个 $\mathbb{C}$ 上的含单位元代数。若 $\mathscr{V}^* := \operatorname{Hom}(\mathscr{V},\mathbb{C})$是 $\mathscr{V}$的代数对偶，则代数对偶映射的集合 $T^*\in\operatorname{Hom}(\mathscr{V}^*,\mathscr{U}^*)$定义为 $(T^*\psi)\,(u) = \psi(Tu)$，对任意 $\psi\in\mathscr{V}^*, u\in\mathscr{U}$ 均成立。 $\mathscr{V}$ 的共轭是复向量空间 $\bar{\mathscr{V}}:=\{\bar{v}\,|\,v\in\mathscr{V}\}$，并带有一个反线性同构 $\mathsf{C}\colon\ \mathscr{V}\ni v\mapsto\bar{v}\in\bar{\mathscr{V}}$；对于任意给定的 $v\in\mathscr{V}$，$\mathrm{V}^*\ni\psi\mapsto\bar{v}(\psi):=\overline{\psi(v)}\in\mathbb{C}$。换言之， $\bar{\mathscr{V}}$ 作为集合与 $\mathscr{V}^* := \operatorname{Iso}(\mathscr{V}^*,\mathbb{C})$ 相同，但作为向量空间并不相同，因为后者采用标量乘法 $\lambda\bullet v := \bar{\lambda}v$，而前者对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$采用 $\lambda\cdot v := \lambda v$。若 $\mathscr{V}$配备了双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，则交织算子 $\mathrm{B}\in\operatorname{Hom}(\mathscr{V},\bar{\mathscr{V}}^*)$由 $(\mathrm{B}v)\,(u) := \langle v,u\rangle$ 确定，对任意 $u\in\mathscr{V}$均成立。类似地，对于 $\mathscr{V}$上的给定半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，另一个交织算子 $\mathrm{A}:=\mathrm{B}\circ\mathsf{C}\colon\ \mathscr{V}\to\bar{\mathscr{V}}^*$由 $(\mathrm{A}v)\,(\bar{u}) :=(u|v)$刻画。可得$\bar{\bar{\mathscr{V}}}^* = \mathscr{V}^* = \bar{\mathscr{V}}^*$ 和 $\mathscr{V} = \bar{\bar{\mathscr{V}}}$。如下识别：$(\mathscr{V})^*$

由于 $\mathscr{E}$是一个向量丛，上述描述可逐纤维地应用 $\mathscr{E}_x$，从而有$\bar{\mathscr{E}}^*$（反）对偶（$\mathscr{E}^* := \sqcup_{x\in M}\mathscr{E}_x^*\to M$）$\bar{\mathscr{E}}^* := \sqcup_{x\in M}\mathscr{E}_x^*\to M$流形上的丛 $M$（例如参见 [72, 第 22]页）。傅里叶积分算子（参见（2.39））

$$A : C_{\mathrm{c}}^\infty(N;\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N)\to C^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M) \tag{2.123}$$

与典范关系 $C$相关联的算子，在以下意义下具有唯一的形式伴随算子。如果 $C^{-1}$ 表示通过交换 $\mathrm{T}^*M$ 和 $\mathrm{T}^*N$而从 $C$ 得到的逆关系，那么存在唯一的傅里叶积分算子

$$\bar{A}^* : C_{\mathrm{c}}^\infty(M;\bar{\mathscr{E}}^*\otimes\Omega^{1/2}M)\to C^\infty(N;\bar{\mathscr{F}}^*\otimes\Omega^{1/2}N) \tag{2.124}$$

与之相关联 $C^{-1}$ 使得 [23, 定理 25.2。2]

$$\int_N (\bar{A}^*\phi)(y)\, v(y) := \int_M (Av)(x)\, \phi(x) \Leftrightarrow \bar{\mathsf{A}}^*(v \boxtimes \phi) := \mathsf{A}(\phi \boxtimes v) \tag{2.125}$$

对于任意 $\phi \in C_c^\infty(M;\ \bar{\mathscr{E}}^* \otimes \Omega^{1/2}M)$ 以及任意 $v \in C_c^\infty(N;\ \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N)$。其施瓦茨核和主符号为

$$\bar{\mathsf{A}}^* \in I^m\big(N \times M, C^{-1\prime}; \mathrm{Hom}(\bar{\mathscr{E}}^*, \bar{\mathscr{F}}^*) \otimes \Omega^{1/2}(N \times M)\big), \tag{2.126a}$$

$$\sigma_{[\bar{\mathsf{A}}^*]} = \mathsf{s}^*(\overline{\sigma_{[\mathsf{A}]}}^*) \in S^{m+\frac{d_M+d_N}{4}-[1]}\big(C^{-1}; \Omega^{1/2}C^{-1} \otimes \mathbb{M}C^{-1} \otimes \widetilde{\mathrm{Hom}}(\bar{\mathscr{E}}^*, \bar{\mathscr{F}}^*)\big), \tag{2.126b}$$

其中 $\mathsf{s}$: $N \times M \to M \times N$ 是交换（施瓦茨）映射，而 $\mathbb{M}C^{-1} \to C^{-1}$ 是 $C^{-1}$ 上的 Keller-Maslov 丛。

¯局部地，$\mathsf{A}^*(y,\ x)$ 给出为

$$\mathsf{A}_r^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \equiv (2\pi)^{-(d_M+d_N+2n-2e)/4} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})} \bar{\mathsf{a}}_r^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, \tag{2.127a}$$

$$\sigma_{\mathsf{A}_r^k}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|} \int_{\mathsf{s}(\mathfrak{C}_{\xi,\ \eta})} \bar{\mathsf{a}}_r^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}',\boldsymbol{\theta}'') \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}'}\,\varphi)}}{\sqrt{|\det(\mathrm{Hess}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}'}\,\varphi)|}} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}'' \tag{2.127b}$$

只要$\mathsf{A}$ 由（2.120）给出，并且$\mathsf{s}$（$\mathsf{C}_{\xi,\ \eta}$）定义为在（2.48）中交换 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 。

### 2.3.5 傅里叶积分算子代数

要使两个傅里叶积分算子 [93,的乘积（复合）有定义，一个必要条件是第一个算子必须是适当支撑的。然而，这样定义的复合仍可能不是傅里叶积分算子。例如，两个典范关系的复合不一定具备定义另一个傅里叶积分算子所需的性质。为了确保乘积有定义且仍是傅里叶积分算子，我们必须假设它们的施瓦茨核（拉格朗日分布）是适当支撑的，并且典范关系的复合是洁净的、真（见定义 A.1.18），且连通的 1], [10, 第 4 节。4]定理 5. $\mathscr{G} \to O$ 设 $O$ 在流形 $\mathscr{E} \to M$ 上的一个向量丛，以及 $\mathscr{F} \to N$，若 $\mathsf{A} \in I^m\big(M \times O, C';$ 同态$(\mathscr{G},\mathscr{E}) \otimes \Omega^1\!/_2(M \times O)\big)$和 $\mathsf{B} \in I^{m'}\big(O \times N, \Lambda';$ 同态$(\mathscr{F},\mathscr{G}) \otimes \Omega^1\!/_2(O \times N)\big)$满足所需的限制，则 [23,定理 25.2.3]

$$\mathsf{AB} := \mathsf{A} \circ \mathsf{B} \in I^{m+m'+e/2}\big(M \times N, (C \circ \Lambda)'; \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) \otimes \Omega^{1/2}(M \times N)\big), \tag{2.128}$$

其中 $e$ 是超额（见定义 A.1.18 和（A.41））的洁净复合 $C \circ_e \Lambda$，其主符号为

$$\sigma_{\mathsf{AB}} = \sigma_A \diamond_e \sigma_B. \tag{2.129}$$

该方程右端的确切含义需要一些新的术语，这些术语在附录A.2.3中有详细说明。

除非典范关系是对称且传递的，否则傅里叶积分算子的空间不是代数 [94, 例 1 及其后续页面中的相关注释]。若典范关系自身的复合 $C$ 是超额为零、真且连通的洁净复合，则傅里叶积分算子的空间$(\text{傅里叶积分算子}^\bullet(\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2}\to M;\ C'),\ \circ)$是一个结合分次代数，其基域为 $\mathbb{C}$。主符号的代数（2.129）仅在标量情形下是交换代数，一般情况下则是非交换的。我们注意到，乘积公式（2.129）在2.156）所示的情况下会变得更简单：当二者 $C$ 和 $\Lambda$ 都是局部典范图时，乘积总是有定义的，详见第2.3.6节。

**例 2.3.12**。设 $\mathscr{E}$，$\Omega^{1}\!/_{2}M\to M$ 分别为流形 $M$上的一个向量丛和半密度丛，且 $\iota_\Sigma\colon \Sigma\hookrightarrow M$ 为一个浸入子流形。给定一个纤维逐点同构 $\hat{}\iota_\Sigma\colon \mathscr{E}_{\Sigma_{x'}}\cong\mathscr{E}_{\iota_\Sigma(x')}$，**限制映射**

$$\iota_\Sigma^*\colon C_{\mathrm{c}}^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M)\to C^\infty(\Sigma;\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}M_\Sigma) \tag{2.130}$$

由态射 $(\iota_\Sigma,\hat{}\iota_\Sigma)$ 的拉回定义。将 $\mathscr{E}$ 平凡化后，这归结为例 2.2.16，因此其施瓦茨核 $\mathrm{R}_\Sigma$ 是一个阶为 $\operatorname{codim}\Sigma/4$、与式 (2.95b) 中定义的典范关系 $\Lambda'_\Sigma$ 相关联的拉格朗日分布。正如例 2.2.16 后所述，可以看出 $\Lambda_\Sigma\subset \mathrm{T}^*M_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*M$ 不是齐次典范关系，因为无法保证 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中所有元素限制到 $\Sigma$ 后都非零。几何上说，这一复杂性源于余法丛的元素（见例 A.1.7） $\Sigma^{\perp *}\subset \mathrm{T}^*M$。为避开这一困难，暂时在 $\Sigma^{\perp *}$ 上引入截断函数 $\chi$，并令 [90, 第 5.2] 节

$$\mathrm{R}_\chi(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}):=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_\Sigma}\big(1-\chi(y,\eta)\big)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{(2\pi)^d},\quad \varphi_\Sigma:=(\iota_\Sigma(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\eta} \tag{2.131}$$

因此，这类元素不会出现在 $1-\chi$的支集中。相应的算子$\iota_\chi^*$则是一个齐次傅里叶积分算子，其阶为余维 $\Sigma/4$，并与齐次典范关系 $\Lambda_\chi\subset\dot{\mathrm{T}}^*M_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*M$相关。综上：

$$\mathrm{R}_\chi\in I^{\operatorname{codim}\Sigma/4}\big(\Sigma\times M,\Lambda'_\chi;\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E}_\Sigma)\otimes\Omega^{1/2}(M_\Sigma\times M)\big), \tag{2.132a}$$

$$\Lambda'_\chi:=\{(x',\xi';x,\xi)\in\dot{\mathrm{T}}^*M_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*M\mid x=\iota_\Sigma(x'),\xi'=\xi\restriction \mathrm{T}_{x'}M_\Sigma\}, \tag{2.132b}$$

$$\sigma_{\mathrm{R}_\chi}|_{\operatorname{supp}(1-\chi)}(x',\xi';x,-\xi):=\frac{\sqrt{|\mathrm{dv}_\Lambda(x',\xi';x,-\xi)|}}{(2\pi)^{\operatorname{codim}\Sigma/4}}\,\mathbb{1}_{\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E}_\Sigma)\otimes\Omega^{1/2}(M_\Sigma\times M)}\otimes\mathbb{l}(x',\xi';x,-\xi), \tag{2.132c}$$

其中 $|\mathrm{dv}_\Lambda|$ 是 $\Lambda_\chi$ 上的密度，而 $\mathbb{l}$ 是 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{L}\to\Lambda_\chi$ 的一个截面，如例 2.2.16所示。

等价地，可以说 $\iota_\Sigma^*$ 不是齐次傅里叶积分算子，这是由于其典范关系中可能出现 $\Sigma^{\perp *}$ 中的元素；而上面的截断函数可以通过与 $P \in \Psi\mathrm{DO}^0(M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M)$（其中 ES $P \cap \dot{\Sigma}^{\perp *} = \emptyset$）复合来模拟。 $\mathsf{R}_\Sigma$的主符号于是为 $(2\pi)^{-\operatorname{codim}\Sigma/4}\,\mathbb{1} \otimes |\mathrm{dv}_\Lambda|^{1/2} \otimes \mathbb{1}$在 WF $P$上的截面（标量版本见 [27,引理 8。3] ）。

当分布的波前集与$\Sigma^{\perp *}$不相交时， $\mathscr{E}$ 上的任意分布都可以限制到 $\mathscr{E}_\Sigma$ 上。特别地，如果 $\Lambda$满足：每个 $u \in I^m$（$M$，$\Lambda$；$\mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}M$）的波前集都与 $\Sigma \subset \mathscr{M}$ 的余法丛 $\Sigma^{\perp *}$ 不相交，那么限制算子可以扩展为一个序列连续线性算子

$$\begin{aligned} &\iota_\chi^* : I^m(M,\Lambda;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M) \to I^{m+\operatorname{codim}\Sigma/4}(\Sigma,\Lambda|_{\mathrm{T}M_\Sigma};\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma),\ u\mapsto \iota_\chi^* u,\\ &\sigma_{\iota_\chi^* u}(x',\xi') \asymp (2\pi)^{-\operatorname{codim}\Sigma/4}\sigma_u(x',\xi'), \end{aligned} \tag{2.133a}$$

其中，最后一个等式是在模去 Keller-Maslov贡献的意义下成立的。

**主符号消失的算子乘积**

到目前为止，我们已经学会了在已知各个拉格朗日分布的主符号时，计算这些拉格朗日分布乘积的主符号。在这一背景下，一个自然的问题是：如果其中某个主符号恒等于零，会发生什么？我们将讨论这一情形的一个特殊情况：当伪微分算子的主符号消失时，该算子与拉格朗日分布之间的乘积。这是因为该结果可直接应用于本文后面的某些部分。事实证明，李导数在这方面发挥着关键作用，因此我们列出几个基本公式。

$$\begin{array}{ccc} \pi^*\mathscr{E} & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{T}^*M & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathrm{T}^*M;\pi^*\mathscr{E}) & \xrightarrow{\nabla_{X_p}^{\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E},\pi^*\mathscr{E})}} & C^\infty(\mathrm{T}^*M;\pi^*\mathscr{E}) \\ \pi^* \uparrow & & \downarrow (\pi^*)^{-1} \\ C^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) & \xrightarrow{\nabla_X^{\mathscr{E}}} & C^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) \end{array}$$

图 2.4：通过典范投影 $\pi$ 将向量丛 $\mathscr{E} \to M$ 拉回到 ${}^*M \to M$，以及 $P$ 在 $\mathscr{E}$ 上的相容联络。

设 $(\mathscr{E} \to M, \nabla_X^{\mathscr{E}})$ 是流形 $M$ 上的一个向量丛，配备了关于 $M$ 上的某个向量场 $X$ 的协变导数 $\nabla_X^{\mathscr{E}}$，并设 $\Xi_s : M \to M$ 是 $X$ 的流。该协变导数诱导出一个平行移动映射

$$\hat{\Xi}_s(x) : \mathscr{E}_x \to \mathscr{E}_{\Xi_s(x)} \tag{2.134}$$

沿着经过 $x \in M$ 的 $X$ 的积分曲线 $c_x(s) = \Xi_s(x)$。于是，沿 $X$ 定义**李导数**$\pounds_X$ 为

$$\pounds_X u := \lim_{s\to 0} \frac{\hat{\Xi}_{-s}\Big(u\big(\Xi_s(x)\big)\Big) - u(x)}{s} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \Xi_s^* u, \tag{2.135}$$

其中，由 $\Xi_s$ 和线性同构 $\hat{}\,\Xi_s$ 诱导的 $\mathscr{E}$ 上的拉回映射为

$$\Xi_s^* : C^\infty(M;\mathscr{E}) \to C^\infty(M;\mathscr{E}),\ u \mapsto \Xi_s^* u := \hat{\Xi}_{-s} \circ u \circ \Xi_s. \tag{2.136}$$

为方便起见，我们设

$$\mathrm{L}_X := -\mathrm{i}\pounds_X : C^\infty(M;\mathscr{E}) \to C^\infty(M;\mathscr{E}) \tag{2.137}$$

并将这个一阶微分也称为李导数。局部地，$X = X^i\partial/\partial x^i$ 和 $C^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) \ni u = u^r \mathrm{E}_r \otimes \sqrt{|\mathrm{d}x|}$。因此，Leibniz法则推出（例如参见 [95,p.130], [23, (25.2.11)], [84, (2.60)（p. 377）]）

$$\pounds_X u = \left(X^i \frac{\partial u^r}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\operatorname{div}(X)\, u^r\right)\mathrm{E}_r \otimes \sqrt{|\mathrm{d}x|} + u^r \pounds_X(\mathrm{E}_r) \otimes \sqrt{|\mathrm{d}x|}. \tag{2.138}$$

在下文中，我们考虑具有标量主符号 $p$ 和次主符号 $\sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 的 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$。设 $X_p$ 为由 $p$ 生成的哈密顿向量场（参见 (A.3)），$\gamma$ 为其在余切丛 $\pi : \mathrm{T}^*M \to M$ 上的积分曲线（参见定义 2.2.9）。这些数据使我们能够以几何方式定义一个自然的协变导数，详见第 3.3.2 节。所谓的“$P$-兼容协变导数”（参见定义 3.3.6）$\nabla^{\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E},\pi^*\mathscr{E})}{}_{X_p}$ 是定义在 $\mathrm{T}^*M$ 上、沿 $\gamma$ 的同态丛 $\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E},\pi^*\mathscr{E}) \to \mathrm{T}^*M$ 上的一个协变导数。$\gamma$ 在 $M$ 上的投影 $c$ 是由 $X_p$ 诱导的向量场 $X := \mathrm{d}\pi(X_p)$ 在 $M$ 上的积分曲线，其中 $\mathrm{d}\pi : \mathrm{T}(\mathrm{T}^*M) \to \mathrm{T}M$ 是 $\pi$ 的切映射。因此，我们有一个沿 $c$、定义在 $\mathscr{E}$ 上的协变导数 $\nabla^{\mathscr{E}}_X$，如图 2.4 所示。

以下结果与 [26,定理 5。9]密切相关。

定理 *2.3.13*。按照定义 *2.3.10*中的术语，设 $A \in I^m(M\times N, C'; \mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1/2}(M\times N))$且 $a$为 $A$ 的主符号。假设 $P \in \Psi DO^{m'}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M)$ 是适当支撑的，具有标量主符号 $p$ 和次主符号 $\sigma_P^{\mathrm{sub}}$，并且 $p$ $C$ $\dot{}^*M$ $P$ $\in I^{m+m'-1}(M\times$在 $T$ 中的投影 $N$ $C'$ $\mathscr{F}$ $\mathscr{E}$ $\otimes\Omega^{1\,2}$ $M\times N$ 上恒等为零。那么，$A$，；$\mathscr{H}om(\ ,\ )/(\ )$，其主符号为

$$\sigma_{PA} = \left(\mathrm{L}_{X_p} + \sigma_P^{\mathrm{sub}}\right) a, \tag{2.139}$$

其中，$\mathrm{L}^{X_p}$ 是沿 $X_p$ 的哈密顿向量场对 $p$的李导数乘以i，并将其提升为 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$上的函数，因此 $X_p$ 与 $C$相切。

证明。由于主符号是局部定义的，我们的策略是利用单位分解，将这些陈述归结为标量算子矩阵层面的陈述，如第 2.3.2、2.3.3 节所示，然后采用该陈述的标量版本 [35, 定理 5.3。1]（另见，例如 [23, 定理 25.2。4], [84, 第 451 页及以下454]）。标量版本与丛版本证明之间的差异本质上只是一些记账工作，但为确保完备，我们仍提供详细证明。局部而言，

$\mathbb{M}$ 的过渡函数是常数（见 A.1.4 节），因此在计算李导数时可以忽略 Maslov因子。此外，$a$ 是 $C'$上的矩阵值密度（定义 2.3.11），因此 (2.138) 中的最后一项没有贡献。总可以在 $(x,\xi;\ y,\eta)$ 附近选取局部坐标 $(x^i,\xi_i;\ y^j,\eta_j) \in \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$，使得（见 (A.35)–(A.37)）$x^i\xi_i + y^j\eta_j - H$是 $C$的一个非退化相位函数，其中 $H$是一个光滑的正齐次 $\mathbb{R}$值函数，在 $(\xi,\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*_xM \times \dot{\mathrm{T}}^*_yN$的开锥邻域上具有 1 次齐次性。于是（参见 (2.120)，另见例如 [23, 引理 25.2.5]），

$$\mathsf{A}^l_k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (2\pi)^{-3(d_M+d_N)/4} \int_{\mathbb{R}^{d_M+d_N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{z}-H(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}))}\, \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}, \tag{2.140}$$

其中 $\mathsf{a}^l_k \in S^{m-(d_M+d_N)/4}(\mathbb{R}^{d_M+d_N})$ 的支集包含于（$\boldsymbol{y} = \partial H/\partial\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{z} = \partial H/\partial\boldsymbol{\zeta}$）的一个锥形邻域内。对于任意 $v \in C^\infty_{\mathrm{c}}(N;\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N)$，根据傅里叶变换的定义：

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{F}(A^l_k v^k)\big)(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^{d_M}} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} (A^l_k v^k)(\boldsymbol{y}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d_M}} \mathrm{d}\boldsymbol{y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} \int_{\mathbb{R}^{d_N}} \mathsf{A}^l_k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\, v^k(\boldsymbol{z})\, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \\
&= (2\pi)^{-3(d_M+d_N)/4} \int_{\mathbb{R}^{d_M}} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \int_{\mathbb{R}^{d_N}} \mathrm{d}\boldsymbol{z} \int_{\mathbb{R}^{d_M+d_N}} \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} \\
&\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})+\mathrm{i}\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\zeta}-\mathrm{i}H(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})}\, \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta})\, v^k(\boldsymbol{z}) \\
&= (2\pi)^{d_M-\frac{3}{4}(d_M+d_N)} \int_{\mathbb{R}^{d_N}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})} \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})\, (\mathcal{F}v^k)(-\boldsymbol{\zeta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta},
\end{aligned} \tag{2.141}$$

其中我们使用了振荡积分的Fubini定理 [77, (1.2.4)]。由于 $P$ 是适当支撑的，应用定理 2.1.3 可得

$$(P^r_l A^l_k v^k)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{4}(d_M+d_N)}} \int_{\mathbb{R}^{d_M}} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \int_{\mathbb{R}^{d_N}} \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}-\mathrm{i}H(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta})} (\sigma^{\mathrm{tot}}_P)^r_l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\, \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) (\mathcal{F}v^k)(-\boldsymbol{\zeta}), \tag{2.142}$$

其中 $(\sigma^{\mathrm{tot}}_P)^r_l$ 是 $P$ 在所选坐标图和丛图中的全符号。由前述方程可知，$PA$ 的施瓦茨核为

$$(P^r_l \mathsf{A}^l_k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{3}{4}(d_M+d_N)} \int_{\mathbb{R}^{d_M}} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \int_{\mathbb{R}^{d_N}} \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\eta}-H)} (\sigma^{\mathrm{tot}}_P)^r_l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\, \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}). \tag{2.143}$$

可以将 $(\sigma^{\mathrm{tot}}_P)^r_l = p^r_l + \tilde{\mathsf{p}}^r_l$ 分解为其主部 $p^r_l$ 和余项 $\tilde{\mathsf{p}}^r_l$的组合（参见定义 B.1.6）。我们假设 $p = 0$ 在 $C$ 于 $\dot{\mathrm{T}}^*M$上的投影上。利用泰勒级数可写为

$$p^r_l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \left(\boldsymbol{x}^i - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}_i}\right) f^r_{l,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\eta}-H)}{\partial\boldsymbol{\xi}_i} f^r_{l,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \tag{2.144}$$

其中 $f^r_{l,i}$关于 $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 是 $m'$ 度齐次的，由中值定理可得：

$$f^r_{l,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \int_0^1 \frac{\partial p^r_l}{\partial \boldsymbol{x}^i}\left(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}\right) \mathrm{d}\lambda. \tag{2.145}$$

特别地，$f^r_{l,i}\restriction_C = (\partial_{\boldsymbol{x}} p^r_l)(\partial_{\boldsymbol{\xi}} H, \boldsymbol{\xi})$。总可以假设 a 在 0 的某个邻域内为零，然后通过分部积分可得 $P\mathrm{A}$:

$$\begin{aligned} P^r_l \mathsf{A}^l_k &= (2\pi)^{-\frac{3}{4}(d_M+d_N)} \int_{\mathbb{R}^{d_M+d_N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\eta}-H)} (\tilde{\mathsf{p}}^r_l + p^r_l)\mathsf{a}^l_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{4}(d_M+d_N)} \int_{\mathbb{R}^{d_M+d_N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\eta}-H)} \Big(\tilde{\mathsf{p}}^r_l \mathsf{a}^l_k - \mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(f^r_{l,i}\mathsf{a}^l_k)\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \tag{2.146}$$

由于 $a^l_k = \mathsf{a}^l_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\sqrt{|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|}$ 是 A 的主符号，因此

$$\begin{aligned} (\sigma_{P\mathrm{A}})^r_k &= \Big(\tilde{\mathsf{p}}^r_l a^l_k - \mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(f^r_{l,i}a^l_k)\Big)_{\boldsymbol{x}=\partial H/\partial\boldsymbol{\xi}} \sqrt{|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|} \\ &= \Big(\tilde{\mathsf{p}}^r_l a^l_k - \mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(f^r_{l,i})a^l_k - f^r_{l,i}\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(a^l_k)\Big)_{\boldsymbol{x}=\partial H/\partial\boldsymbol{\xi}} \sqrt{|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|} \end{aligned} \tag{2.147}$$

只要将 $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 作为 $C$ 上的坐标。下文将省略丛指标，因为不会产生混淆。

根据定义，$X_p = \partial p/\partial\boldsymbol{\xi}_i\partial/\partial\boldsymbol{x}^i - \partial p/\partial\boldsymbol{x}^i\partial/\partial\boldsymbol{\xi}_i$。因此，Char $P$ 在 $(x,\xi)$ 附近是一个超曲面，而 $X_p$ 张成其切空间在 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中的辛正交补。现在，我们通过投影算子 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N \to \dot{\mathrm{T}}^*M$ 将 $p(x,\xi)$ 拉回，并将其视为 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 上的函数 $p(x,\xi;\,y,\eta)$。该函数 $p(x,\xi;\,y,\eta)$ 在 $C'$ 上的限制仅是 $(\xi,\eta)$ 的函数，因为 $x^i = \partial H/\partial\xi_i$ 且 $y^j = \partial H/\partial\eta_j$ 在 $C'$ 上。因此，$X_p$ 在 $C$ 上必定具有如下形式

$$-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}^i}\big(p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\big)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i} = -f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}, \quad \boldsymbol{x} = \frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.148}$$

in o我们所选取的参数化，并且它在每一点都与 $C$ 相切。我们计算

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{X_p} a &= -f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\frac{\partial a}{\mathrm{i}\,\partial\boldsymbol{\xi}_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial\boldsymbol{\xi}_i}\Big(f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\Big)a \\ &= -f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(a) - (\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}f_i)\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a \\ &\quad +(\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}f_i)\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\Big(f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\Big)a \\ &= -f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(a) - (\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}f_i)\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a \\ &\quad -\mathrm{i}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{\xi}_i\partial\boldsymbol{\xi}_j}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}^j}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a \\ &= -f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(a) - (\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}f_i)\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a \\ &\quad -\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big) - \frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{\xi}_i\partial\boldsymbol{\xi}_j}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}^j}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\Big)a \\ &= -f_i\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}(a) - (\mathrm{D}_{\boldsymbol{\xi}_i}f_i)\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\Big)a - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial\boldsymbol{x}^j\partial\boldsymbol{\xi}_j}\Big(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi}\Big) \end{aligned} \tag{2.149}$$

并将其代入 $\sigma_{PA}$ 的最后一个表达式中，以实现我们的目标：

$$\sigma_{PA}=\left(\mathrm{L}_{X_p}+\mathsf{p}_{m'-1}\left(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{\xi}_j}\left(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi}\right)\right)a+\ldots=(\mathrm{L}_{X_p}+\sigma_P^{\mathrm{sub}})a\mod S^{m+m'-2}(\ldots). \tag{2.150}$$

这里 $\mathsf{p}_{m'-1}$ 是 $P$ 从 $C'$ 的全符号渐近表达式中的次领阶项的拉回，并且我们结合定义 2.3.4 使用了

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{\xi}_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{\xi}_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})-\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{\xi}_j\partial\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}^j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+\left(\boldsymbol{x}^i-\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\right)\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}^j\partial\boldsymbol{\xi}_j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \tag{2.151}$$

在 $\boldsymbol{x}=\partial H/\partial\boldsymbol{\xi}$ 处取值时。 ■

## 2.3.6 由辛同胚定义的拉格朗日分布

最简单的典范关系 $\Gamma'\subset\dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N$ 是齐次辛同胚 $\Gamma'$的扭曲图 $\Gamma'$，该齐次辛同胚（见（A.1）和（A.7））从 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$，并满足 $d:=\dim M=\dim N$（见例 A.1.10）。在这种情况下，总可以在某个局部坐标图下选择 $y_0\in N$ 的像上的坐标（$\boldsymbol{y}_0^i$），使得（例如见命题 25.3.3]）

$$\Gamma_\varphi=\{(\boldsymbol{x}_0,\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}_0}\varphi;\operatorname{grad}_{\boldsymbol{\eta}^0}\varphi,\boldsymbol{\eta}^0)\},\qquad\det\frac{\partial^2\varphi}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\eta}^0)\neq 0 \tag{2.152}$$

在（$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\xi}^0$；$\boldsymbol{y}_0$，$\boldsymbol{\eta}^0$）的一个开锥邻域中，$\in(\mathbb{R}^d\times\dot{\mathbb{R}}^d)\times(\mathbb{R}^d\times\dot{\mathbb{R}}^d)$，利用定义在（$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\eta}^0$）的一个开锥邻域上的非退化 $\mathbb{R}$值相位函数 $\varphi$（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{\eta}$）。

这类拉格朗日子流形通过相应的拉格朗日分布空间 A，；Hom(，)/()，产生了最简单的一类傅里叶积分算子 $\in I^m(M\times,$ $N\ \Gamma'$ $\mathscr{F}\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1\,2}\ M\times N\ )$ [77, 其欧几里得代表的形式见第 169-173] 页（例如见 [23, （25.3.2）′], [96, （65.25）]）。

$$\mathsf{A}_k^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\equiv\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\eta})}\mathsf{a}_k^r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{\eta})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}}{(2\pi)^d}, \tag{2.153}$$

其中，全符号 $\mathsf{a}_k^r$ 是 $m$次齐次的，其支集包含于（$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\eta}^0$）的一个小型锥形邻域的内部，该邻域包含在 $\varphi$的定义域内。

为了描述主符号 $\sigma_{\mathsf{A}}$ 的A，注意到自然的半密度 $\mathrm{d}v_\Gamma$（见（A.71））在 $\Gamma$上可以从 $\sigma_{\mathsf{A}}(x,\ \xi;\ \ y,\ \eta)\in S^{m+(d+d)/4}\big(\Gamma$中提出因子 $\mathbb{M}\otimes\widetilde{\ \ }$同态$(\mathscr{F},\ \mathscr{E})\otimes\Omega^{1}/^{2}\Gamma\big)$，因此半密度值主符号的阶 $m+(d+d)/4$ 降为 $m$，而 $\Omega^{1}/^{2}\Gamma$的阶为 $d/2$。因此，主符号映射

$$\sigma:I^{m-[1]}\big(M\times N,\Gamma';\Omega^{1/2}(M\times N)\otimes\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)\to S^{m-[1]}\big(\Gamma;\mathbb{M}\otimes\widetilde{\operatorname{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big) \tag{2.154}$$

局部可表示为（例如参见 [23,第 27]页）

$$\sigma_{A_k^r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) := a_k^r\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}};\boldsymbol{\eta}\right)\left|\det\frac{\partial^2\varphi}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{\eta}}\right|^{-1/2}\ \mathbb{m}\quad \text{mod } S^{m-1}(\cdot), \tag{2.155}$$

wh此处 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{M}$ 由式（中的相位函数平凡化2.153）.

我们注意到，AB 的复合 $\in I^{m+m'}\big(M\times N,(\Gamma\circ\Lambda)';\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times N)\big)$介于 A $\in I^{m}\big(M\times O,\Gamma',\operatorname{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times O)\big)$与一个适当支撑的 B $\in I^{m'}\big(O\times N\ \Lambda'\quad \mathscr{F}\ \mathscr{G}\ \otimes\Omega^{1\,2}\ O\times N\ \big)\quad \Gamma\quad\Lambda\quad,;$

Hom( , ) / ( ) 总是定义良好的，其中 ∘ 是辛同胚复合的图 $\dot{\mathrm{T}}^*N\ni(y,\eta)\mapsto(z,\zeta)\mapsto(x,\xi)\in\dot{\mathrm{T}}^*M$。此外， $\sigma_{\mathsf{AB}}$ 的表达式相较于（2.129）大为简化，并由同态的标准复合给出 [77, p. 180]（另请参见，例如 [96,定理 65.7], [84, （6.11）（第 465 页）]）

$$\sigma_{\mathsf{AB}}(x,\xi;y,\eta)=\sum_{(z,\zeta)\,|\,(x,\xi;z,\zeta)\in\Gamma,(z,\zeta;y,\eta)\in\Lambda}\sigma_{\mathsf{A}}(x,\xi;z,\zeta)\,\big(\sigma_{\mathsf{B}}(z,\zeta;y,\eta)\big). \tag{2.156}$$

如果相应的向量丛是厄米的，那么拉格朗日分布的代数就是一个 $*$-代数。

### 参数子与椭圆算子

现在我们将介绍椭圆性 [35, p 的概念。 186] 对于一个傅里叶积分算子，我们将证明此类算子总是存在一个近似逆。

定义2.3.14。按照定义2.3.10和定义2.3.11以及（2.154）中的术语，设 $\Gamma$ 是从 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$的齐次辛同胚的图。那么，如果一个拉格朗日分布 A $\in I^{m}\big(M\times N,\Gamma';$ 同态$(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times N)\big)$ 在 $(x_0,\xi^0;\ y_0,\eta^0)\in\Gamma$ 处的主符号在 $(x_0,\xi^0;\ y_0,\eta^0)$ 的一个锥形邻域内具有逆 $\in S^{-m}\big(\Gamma;\ \mathbb{M}^{-1}\otimes\widetilde{\ }\text{同态}(\mathscr{E},\mathscr{F})\big)$，则称其在该点为非特征的。若拉格朗日分布 A 在 $\Gamma$的每一点都是非特征的，则称其为椭圆的。非特征点的补集称为 A 的特征集 Char A [23, 定义。25.3.4]

我们注意到 (2.153) 和 (2.155) 表明，非特征点属于 WF′A。若 $\Gamma^{-1}$ 也是一个图，且 A $\in I^{m}\big(M\times N,\Gamma';$ $\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times N)\big)$是椭圆的且适当支撑的，那么 A 有一个**唯一的拟逆** E $\in I^{-m}\big(N\times M,\Gamma^{-1\prime};\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})\otimes\Omega^{1\,2}\ N\times M\big)$。换言之，

$$EA-I_{\mathscr{F}}\in\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(N;\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N),\qquad AE-I_{\mathscr{E}}\in\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}M). \tag{2.157}$$

在提出一种拉格朗日分布的变体、放宽对拉格朗日子流形的闭性假设后，我们将很快给出这一断言的微局部版本的证明。

定义 2.3.15。按照定义 2.3.9 中的术语，设 $C \subset \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 是一个齐次典范关系，它在 $\dot{\mathrm{T}}^*(M \times N)$ 中不一定是闭的，并设 $\mathrm{K} \subset C$ 是一个在 $\dot{\mathrm{T}}^*(M\times N)$ 中闭的锥子集。记 $I^m\big(M\times N,\ \mathrm{K}';\ \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) \otimes \Omega^{1}\!/_{2}(\ M\times N)\big)$ 为满足以下条件的所有矩阵的集合：其元素如 (2.120) 所示，并且还满足附加条件：对于 (2.89) 中的每个 $\alpha,\beta$，将一个 $_{\alpha}{}^{r}{}_{,\beta;k}$ 限制到 $\mathbb{R}^{d_M} \times \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{n_\alpha,\beta}$ 中某个锥形邻域内，该邻域包含通过拉格朗日纤维化（见 (A.34)）$_J : \mathscr{C}_{\alpha,\beta} :=$ (2.86) $\to C'_{\alpha,\beta} :=$ (2.87) 对 $C \setminus \mathrm{K}$ 的拉回，则所得对象属于类 $S^{-\infty}(\cdot)$。

按照定义 2.3.11 中的术语，$S^m\big(\mathrm{K},\ \mathbb{M} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}C \otimes \widetilde{\ \ \ }\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)$ 表示所有满足 $a \in S^{-\infty}\big(C\setminus\setminus \mathrm{K},\ \mathbb{M} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}C \otimes \widetilde{\ \ \ }\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)$ [35, p. 187] 的 $a \in S^m\big(C、\ \mathbb{M} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}C \otimes \widetilde{\ \ \ }\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)$ 的集合。

注意，该定义同时取决于 $\mathcal{K}$ 和 $C$，但为简化表述而省略了后者。主符号同构（定义 2.3.11）的类似表述为 [35, p. 187]

$$I^{m-[1]}\big(M\times N,\mathcal{K}';\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1/2}(M\times N)\big)\cong S^{m+\frac{d_M+d_N}{4}-[1]}\big(\mathcal{K},\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}C\otimes\widetilde{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big). \tag{2.158}$$

定理*2.3.16*。按照定义 *2.3.10* 和 *2.3.15* 中的术语，设 $\Gamma$ 是从开锥子集 $V \subset \dot{T}^*N$ 到 $\dot{T}^*M$ 的齐次辛同胚 $\varkappa$ 的图，并且 $K \subset \Gamma$ 是在 $\dot{T}^*(M \times N)$ 中闭的锥子集。那么，对于任意满足 $U \subset V$ 且 $U$（相应地，$\varkappa(U)$）在 $\dot{T}^*N$（相应地，$\dot{T}^*M$）中闭的锥子集 $U$，若 $A \in I^m\big(M \times N,\ K';\ Hom(\mathscr{F},\mathscr{E}) \otimes \Omega^{1}\!/_{2}(M \times N)\big)$ 在 $\{(\varkappa(U), U)\} \subset \Gamma$ 上是非特征的，则存在椭圆的 $E \in I^{-m}\big(N \times M,\ K^{-1\prime};\ Hom(\mathscr{E},\mathscr{F}) \otimes \Omega^{1}\!/_{2}(N \times M)\big)$，使得

$$\mathrm{ES}(EA - I_{\mathscr{F}}) \cap \mathcal{U} = \emptyset, \qquad \mathrm{ES}(AE - I_{\mathscr{E}}) \cap \varkappa(\mathcal{U}) = \emptyset, \tag{2.159}$$

其中 $I_{\mathscr{E}} \in \Psi\mathrm{DO}^0(M;\mathscr{E} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}M)$和 $I_{\mathscr{F}} \in \Psi\mathrm{DO}^0(N;\mathscr{F} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}N)$是恒等算子。拟逆 E 是唯一的，其含义是：对于 A 的任意其他拟逆E′，都有 $(\mathcal{U},\varkappa(\mathcal{U})) \not\subset \mathrm{WF}'(\mathrm{E} - \mathrm{E}')$。

证明。 用于证明标量版本 [35, 命题 5.1。2]（另见例如 [83, 定理 4.2。5]）的论证同样适用于丛情形，不过这里仍给出完整证明。设 $a$是 A 在（2.158）意义下的主符号。根据假设，存在一个 $b(\cdot) \in S^{-m}\big(\mathrm{K},\ \mathbb{M}^{-1} \otimes \Omega^{1}\!/^{2}C \otimes \widetilde{\ \ \ }\text{同态}(\mathscr{E},\ \mathscr{F})\big)$，使得 $ba = \sigma_{I_{\mathscr{F}}}$ 在 $\Delta$U 的一个锥形邻域内成立。通过使用从属于 U（分别从属于 $\varkappa$(U)）的适当微局部单位分割[3] $\Psi$（分别为 $\Phi$），可以选择 $b = 0$，使其位于 $\{(\varkappa(\mathrm{U}),\ \mathrm{U})\}$ 的某个充分小的锥形邻域之外，其中 U 通过投影与 $\Delta$U 相识别。然后我们

[3]按照定义 2.3.2 中的术语，$\Psi_\alpha \in \Psi\mathrm{DO}^0(M;\mathscr{E} \otimes \Omega^{1}\!/_{2})$ 的族 $\{\Psi_\alpha\}_\alpha$ 被称为微局部单位分解，如果 $\Psi_\alpha$ 的施瓦茨核的支集是局部有限的，$\mathrm{WF}(\Psi_\alpha) \subset \mathrm{U}_\alpha$ 以及 $\sum \Psi_\alpha = I$。这里，$(\mathrm{U}_\alpha)_\alpha$ 是余球丛 $\mathbb{S}^*M$ 的一个开覆盖，使得 $M$ 在其投影上的 $\Omega^{1}\!/_{2}$ 和 $\mathscr{E}$ 都可以进行平凡化。微局部单位分解总是存在的（例如参见 [97, 引理 6.10、6.11]，标量版本）。

得到一个适当支撑的 $\mathrm{B}_0 \in I^{-m}\big(N\times M、\mathrm{K}^{-1\prime};\ 同态(\mathscr{E},\mathscr{F})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(N\times M)\big)$，其主符号为 $\sigma_\Psi b\sigma_\Phi \equiv b$。根据拉格朗日分布的复合（（2.128）和（2.129））， 存在一个适当支撑的 $R \in \Psi\mathrm{DO}^{-1}(N;\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1}\!/_{2}N)$，使得$B_0A = I_{\mathscr{F}} - R$。接下来，我们希望利用诺伊曼级数将 $I_{\mathscr{F}} - R$ 求逆：$(I_{\mathscr{F}} - R)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} R^k$。令 $\mathrm{B}_k := R^k\mathrm{B}_0 \in I^{-m-k}\big(N\times M、\mathrm{K}^{-1\prime};\ 同态(\mathscr{E},\mathscr{F})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(N\times M)\big)$，然后

$$I_{\mathscr{F}} = (I_{\mathscr{F}} - R)\sum_{k=0}^{\infty} R^k = \sum_{k=0}^{N-1} R^k(I_{\mathscr{F}} - R) + \sum_{k=N}^{\infty} R^k(I_{\mathscr{F}} - R) = \sum_{k=0}^{N-1} B_kA + R^N. \tag{2.160}$$

令 E 由渐近求和定义：$\mathrm{E} :\sim \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\mathrm{B}_k$，代入上一个方程可得

$$EA - I_{\mathscr{F}} = \left(E - \sum_{k=0}^{N-1} B_k\right)A - R^N \sim \sum_{k=N}^{\infty} B_kA - R^N \in \Psi\mathrm{DO}^{-N}(N;\mathscr{F}\otimes\Omega^{1/2}N) \tag{2.161}$$

对于每个 $N\in\mathbb{N}$，这也证明了定理的第一部分，因为右参数子可以用类似方法构造。

为证明唯一性，假设 $\mathrm{E}'$ 是 A 的另一个右参数子。那么

$$\big\{(\mathcal{U},\varkappa(\mathcal{U}))\big\} \not\subset \mathrm{WF}'\,\mathrm{E} = \mathrm{WF}'(\mathrm{EAE}') = \mathrm{WF}'\,\mathrm{E}' \tag{2.162}$$

左参数子同理。 ■

**埃戈罗夫定理**

现在我们将介绍一个关于微局部化的关键定理（参见定理3.3.10），该定理与本节介绍的构造有关。

定理 *2.3.17*（埃戈罗夫定理）。按照定义 *2.3.10* 中的术语，设 $\Gamma$ 是齐次辛同胚 $\varkappa : \dot{T}^*N \to \dot{T}^*M$ 的图。设 $A \in I^m\big(M\times N,\Gamma';\ 同态(\mathscr{F},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times N)\big)$，$B \in I^{-m}\big(N\times M,\Gamma^{-1\prime};\ 同态(\mathscr{E},\mathscr{F})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(N\times M)\big)$，且 $P \in \Psi DO^{m'}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2}M)$ 具有标量主符号 $\sigma_P$。那么，$BPA \in \Psi DO^{m'}(N;\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1}\!/_{2}N)$ 是适当支撑的，其主符号为

$$\sigma_{\mathrm{BPA}} = \sigma_{\mathrm{BA}}(\varkappa^*\sigma_P), \tag{2.163}$$

其中 $\varkappa^*:\ \ C^\infty\big(\dot{\mathrm{T}}^*M、同态(\mathscr{E},\mathscr{E})\big)\to C^\infty\big(\dot{\mathrm{T}}^*N、同态(\mathscr{F},\mathscr{F})\big)$ 是经由 $\varkappa$ 的拉回映射。

证明。 我们将采用证明标量版本 [23, 定理 25.3.5]时所用的相同策略。通过反复应用拉格朗日分布的复合，我们得到 $P\mathrm{A} \in I^{m+m'}\big(M\times N,\ \Gamma';\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\ \mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times N)\big)$以及 $\mathrm{BPA} \in \Psi\mathrm{DO}^{m'}(N;\ \mathscr{F}\otimes\Omega^{1}\!/_{2}N)$。为了计算 $\sigma_{\mathrm{PA}}$，我们通过投影算子 $\dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N\to\dot{\mathrm{T}}^*M$ 的拉回将 $\sigma_P$ 提升至 $\Gamma$，然后再通过嵌入 $\Gamma\hookrightarrow\dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N$。于是 $\sigma_{\mathrm{PA}} = \sigma_P\sigma_{\mathrm{A}}$。等价地，

可以通过投影算子 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N \to \dot{\mathrm{T}}^*N$ 将 $\varkappa^*\sigma_P$ 提升至 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$，然后像之前那样将其视为 $\Gamma$ 上的同态。因此，如果 $R \in \Psi\mathrm{DO}^{m'}(N; \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N)$ 的主符号为 $\varkappa^*\sigma_P$，则 $P\mathrm{A} - \mathrm{A}$ $R \in I^{m+m'-1}\big(M \times N, \Gamma'; \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E}) \otimes \Omega^{1/2}(M \times N)\big)$。由于 $\sigma_P$ 是标量，因此 $BP\mathrm{A} - \mathrm{BA}$ $R \in \Psi\mathrm{DO}^{m'-1}(N; \mathscr{F} \otimes \Omega^{1/2}N)$，由此得证。■

## 2.4 文献

从历史上看，伪微分算子理论是从 Joseph J. KOHN 和 Louis NIRENBERG [98] 的奇异积分算子理论发展而来的，尤其得益于 Lars HÖRMANDER [73]的丰富和完善。

傅里叶积分算子是伪微分算子的巨大推广，起源于 Peter LAX [99] 对双曲型微分方程解的奇点的研究，以及 Victor MASLOV [100, 在几何光学和量子力学背景下对渐近分析的研究，见第 8]章。其具有一定局部性的表述后来在 Lars HÖRMANDER [77] 以及 Johannes J. DUISTERMAAT 和 Lars HÖRMANDER [35] 的两篇奠基性文章中得到了系统发展并实现了整体化；关于标量算子的丛版本，可参见 Hörmander 专著的第四卷 [23]。

埃戈罗夫定理以尤·V·EGOROV [101] 的名字命名，他最初证明了该定理。此后，这一结果的各种推广偶有报道，例如 [45], [102,定理 3。2], [103, 定理 1。7], [104, 定理 6。1], [105, 命题 3。3], [58, 命题 A。3]。定理 2.3.17 据我们所知，较现有文献中的表述略为一般。

例如，我们可以参考专著 [8, 76, 84, 106] 以及讲解性讲义 [86, 89, 97] ，以深入了解伪微分算子和微局部分析。关于傅里叶积分算子，相关细节可参阅教材 [11, 83, 84] 。

# 第3章

# 费曼传播子

本章的主题是在整体双曲时空上，为正规双曲算子和狄拉克型算子构造费曼传播子的微局部构造。通过构造费曼参数子并运用适定的柯西问题，证明了这些结果。为了给出费曼参数子的微局部构造，本文实现了对实主类型伪微分算子的微局部化的向量丛推广。

## 3.1 洛伦兹流形

所谓洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$，是指一个豪斯多夫、第二可数、连通且光滑的 $d \geq 2$ 维流形 $\mathscr{M}$，它配备了一个符号差为 $(+, -, \ldots, -)$ 的光滑洛伦兹度量 g。洛伦兹度量的全局存在性取决于 $\mathscr{M}$ 的拓扑：任意非紧致 $\mathscr{M}$ 上总是存在洛伦兹度量，而紧致 $\mathscr{M}$ 上存在洛伦兹度量，当且仅当其欧拉示性数为零。豪斯多夫条件与洛伦兹度量的存在性共同推出 $\mathscr{M}$ 是仿紧的。

由于 g 是一个（对称的）非退化双线性映射 $\mathrm{g}: C^{\infty}(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M}) \times C^{\infty}(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M}) \to C^{\infty}(\mathscr{M}, \mathbb{R})$，它诱导出唯一的向量丛（线性）同构 $C^{\infty}(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M}) \ni X \mapsto X^{\flat} \in C^{\infty}(\mathscr{M}; \mathrm{T}^{*}\mathscr{M})$，该同构在每一点上定义为 $X_x^{\flat}(\cdot) := \mathrm{g}_x(X_x, \cdot)$，其中 $x \in \mathscr{M}$ 为任意元素。此外，它还在 $\mathrm{T}^{*}\mathscr{M}$ 上诱导出另一个唯一的对称、非退化、不定双线性形式 $\mathrm{g}^{-1}$，在每一点上定义为 $\mathrm{g}_x^{-1}(\xi_x, \eta_x) := \mathrm{g}_x(\xi_x^{\sharp}, \eta_x^{\sharp})$，其中 $\sharp: C^{\infty}(\mathscr{M}, \mathrm{T}^{*}\mathscr{M}) \to C^{\infty}(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M})$ 是 $\flat$ 的逆映射。

### 3.1.1 因果结构

因果结构是洛伦兹流形与黎曼流形之间显著的差异之一。g 的符号差使我们能够进行如下分类。

**定义 3.1.1**。 洛伦兹流形中任意点 $x$ 处的余切向量 $\xi \in \mathrm{T}^*_x\mathscr{M}$ 称为**类时**，如果 $\mathrm{g}^{-1}_x(\xi,\ \xi) > 0$；称为**类空**，如果 $\mathrm{g}^{-1}_x(\xi,\ \xi) < 0$ 或 $\xi = 0$；称为**类光**，如果对于 $\xi \neq 0$，$\mathrm{g}^{-1}_x(\xi,\ \xi) = 0$；称为**因果**，如果 $\xi$ 或者是类时的，或者是类光的。

根据这种分类对任意余向量进行的归类称为其因果特征。 $\dot{\mathrm{T}}^*_{0,\ x}\mathscr{M} \subset \dot{\mathrm{T}}^*_x\mathscr{M}$ 处所有类光余向量的集合称为 $x \in \mathscr{M}$ 处的**光锥**，它是一个内积空间。可以看出，若 $\xi,\ \eta \in \dot{\mathrm{T}}^*_x\mathscr{M}$ 是类时的，则 $\mathrm{g}^{-1}_x(\xi,\ \eta) \lesseqgtr 0$。因此，在每个 $x \in \mathscr{M}$处，余切向量空间 $\dot{\mathrm{T}}^*_x\mathscr{M}$都有两个可能的、由类时余向量构成的开凸锥，其边界由类光余向量构成。尽管出于某些目的，区分这两个锥至关重要，但并没有内在的方法将二者区分开来。如果对其中一个锥作出选择（称为未来），则称 $\dot{\mathrm{T}}^*_x\mathscr{M}$ 是**时间定向的**；另一个锥则称为过去。当 $x$ 在$\mathscr{M}$ 上变化时，能否连续地对未来锥和过去锥作出这样的区分，决定了（$\mathscr{M}$，g）的时间可定向性；这在逻辑上独立于 $\mathscr{M}$的拓扑定向。如果 t 是 $\mathscr{M}$ 上的一个光滑函数，它为每个 $x \in \mathscr{M}$指定一个未来锥（或等价地，一个过去锥），则称其为（$\mathscr{M}$，g）的**时间定向**。如果 $\mathscr{M}$存在时间定向，则称（$\mathscr{M}$，g）是时间可定向的。

**定义 3.1.2**。 定向且具有时间定向的洛伦兹流形称为**时空** ($\mathscr{M}$，g)。

注意，当且仅当洛伦兹流形具有一个光滑的（高度不唯一的）全局类时向量场 $X$时，它才是时间可定向的。我们选定一个时间定向，使得 $X$ 在所有点处均为未来指向的；于是，任意因果 $\xi \in \dot{\mathrm{T}}^*_x\mathscr{M}$ 是未来指向的，当且仅当 $\mathrm{g}^{-1}_x(\xi,\ X^\flat) > 0$。因此，我们对时空中任意一点的未来和过去都有了一致的概念。更准确地说，若可微曲线 $c:\ \mathbb{I} \to \mathscr{M}$ 的切向量 $\mathrm{d}c/\mathrm{d}s$ 是类空的（分别为未来指向的/过去指向的因果向量），则称该曲线为类空的（分别为未来指向的/过去指向的因果曲线），其中 $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $s \in \mathbb{I}$。

现在我们引入时空 ($\mathscr{M}$，g) 的因果结构。如果 $x,\ y \in \mathscr{M}$，则

- $x \rhd y$ 表示在 $\mathscr{M}$ 中存在一条从 $x$ 到 $y$的未来指向类时曲线；
- $x \trianglerighteq y$ 表示在 $\mathscr{M}$ 中存在一条从 $x$ 到 $y$的未来指向因果曲线，或者 $x = y$。

点 $x \in \mathscr{M}$的**因果未来** $J^+(x) := \{y \in \mathscr{M} \mid x \trianglerighteq y\}$定义为这样一个点集：其中所有点都可以由从 $x$出发、位于 $\mathscr{M}$ 中的未来指向因果曲线到达，并且包括 $x$ 自身。类似地，$J^-(x) := \{y \in \mathscr{M} \mid y \trianglerighteq x\}$。于是，集合 $K \subset \mathscr{M}$ 的因果未来（过去）定义为

$$J^\pm(K) := \bigcup_{x \in K} J^\pm(x) \tag{3.1}$$

此外，还使用如下记号

$$J(K) := J^+(K) \cup J^-(K). \tag{3.2}$$

如果用类时曲线替代因果曲线，则得到**按时序的**未来/过去。

### 3.1.2 整体双曲时空

一般时空过于宽泛，不适合直接研究，因为其中可能包含病态的数学和物理性质。例如，在任意时空上，波动方程的初值问题并非适定。此外，还可能存在促成“祖父悖论”的闭合因果曲线。因此，我们将寻找一个时空子集，排除所有此类不理想的可能性，具体如下所述。

**定义 3.1.3**。 若且唯若一个时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 具有因果性，且对于所有 $x, y \in \mathscr{M}$，菱形 $J^+(x) \cap J^-(y)$ 都是紧致的，则称其为**整体双曲** 。

下文中，任何整体双曲时空都具有特定的全局正交分裂。这种刻画对于我们的论文至关重要；为表述这一刻画，我们引入以下术语。

**定义 3.1.4**。 洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 中的**柯西超曲面** $\Sigma$ 是一个子集 $\Sigma \subset \mathscr{M}$，每条不可延拓类时曲线都恰好与其相交一次。

**定义 3.1.5**。 时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的任意 $\mathrm{t} \in C^\infty(\mathscr{M}, \mathbb{R})$ 都称为

- **t时间函数** 当且仅当 t 沿所有未来指向因果曲线严格递增时 ;
- **时态函数** 当 t 光滑且具有未来指向的类时梯度时 t;

若时间函数（和/或时态函数）的等值集 $\Sigma_t := \mathrm{t}^{-1}(t)$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$都是柯西超曲面，则称其为**柯西** 函数。

现在，我们按照综述文章 [107,定理 3.78]. 来描述整体双曲时空的全局正交分裂。

**定理 3.1.6** (Geroch [108]-Bernal-Sánchez [109] 分裂定理)。 设$(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 为一个时空。它整体双曲，当且仅当它存在一个光滑的类空柯西超曲面 $\Sigma$。

在这种情况下，它存在一个柯西时间函数t ，因此与光滑乘积流形等距微分同胚

$$(\mathscr{M}, \mathrm{g}) \cong (\mathbb{R} \times \Sigma, \beta\, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{h}_t), \tag{3.3}$$

其中， $\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}_+)$ 是切片函数， $t \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R})$ 是自然投影， $\Sigma_t$ 的每个等值集 $t = \mathrm{cst}$ 都是类空柯西超曲面，而$\mathrm{h}_t$ 是每个 $\Sigma_t$上的黎曼度量，并随 $t$光滑变化。

此外，如果 Σ 是给定的拓扑柯西超曲面，则存在一个光滑的柯西函数t ，使得 Σ 是其某个等值集（$\Sigma = \Sigma_0$）。此外，如果 Σ 是

- 非因果时t 变为光滑的柯西时间函数；

- 类空时，可以修改t，从而在 $\mathscr{M}$ 使得$\Sigma = t^{-1}(0)$ 的条件下获得一个柯西时间函数。

此外，如果 $S \subset \mathscr{M}$ 是紧致非因果集，则可以将其延拓为柯西超曲面。此外，如果 $S$ 是非因果的、带边界的光滑类空子流形，则可以将其延拓为类空柯西超曲面 $\Sigma \supset S$。

**注3.1.7.** 整体双曲时空（$\mathscr{M}$，g）总可以按柯西超曲面 $\Sigma$进行叶状分解，但这种叶状分解并不唯一。必然， $\Sigma$ 是一个闭子集，并且是余维数为1的嵌入拓扑子流形。

例3.1.8. 设 $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$为开集，且$(\Sigma, h)$是一个连通黎曼流形。那么，$(\mathscr{M} := \mathbb{I}\times\Sigma, g := dt^2 - f^2 h)$是整体双曲时空，当且仅当$(\Sigma, h)$是完备的，其中 $f \in C^\infty(\mathbb{I}, \mathbb{R}_+)$（例如参见 [110, 引理 A.5.14]）。

从物理学角度而言，目前我们对物理宇宙的理解，最好可以由“ΛCDM模型”加以解释，其中时空几何由罗伯逊–沃克时空给出（例如参见 [111, 第5节3], [88, 定义7，第 343]页）。这个所谓的宇宙学标准模型相当准确地描述了宇宙微波背景、宇宙膨胀以及宇宙学红移等现象（例如参见 [112]）。不过，宇宙学标准模型存在一些局限，而de Sitter时空（例如参见 [111, 第5节2], [88, 第 229]页）为其中一些尚未解决的问题提供了一种解决方案。例3.1.8将这两类时空以及当然还有闵可夫斯基时空统一包括在内。此外，爱因斯坦方程的一些黑洞解是整体双曲的，例如Schwarzschild时空的内部和外部、Reissner–Nordström时空的部分区域，以及克尔时空的部分区域。当然，也存在完全不是整体双曲的爱因斯坦方程解。其中一个在超弦理论背景下受到广泛关注的时空是反德西特解（例如参见 [111, 第5节2], [88, 第 229]页）。粗略地说，整体双曲时空之所以有趣，是因为它们能够根据某一时刻的条件，预测（或回溯推断）宇宙未来（或过去）的全部历史。

**注记 3.1.9**。 如果（$\mathscr{M}$，g）是一个整体双曲时空，那么 $\dot{T}^*_0\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 上的光锥（类光测地线）集合具有光滑丛结构（例如参见 [91]）。

## 3.2 正规双曲算子与参数式 s

### 3.2.1 正规双曲算子（NHOs）

**定义 3.2.1.** 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$是洛伦兹流形（$\mathscr{M}, g$）上的一个向量丛。作用于 $\mathscr{E}$ 半密度值光滑截面上的二阶线性微分算子（参见例如 [113, 定义 3.1], [110, 第 1 节.5]）

$$\Box : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \tag{3.4}$$

若其主符号由余切丛 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 上的时空度量 $\mathrm{g}^{-1}$ 给出，则称其为**正规双曲算子**

$$\sigma_{\Box}(x,\xi) := \mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\xi)\ \mathbb{1}_{(\mathrm{End}\,\mathscr{E})_x} \tag{3.5}$$

对于所有（$x$，$\xi$）$\in C^\infty$（$\mathscr{M}$；$\mathrm{T}^*\mathscr{M}$）。

在 $\mathscr{M}$ 的局部坐标图 $\big(U,\ (x^i)\big)$ 中，对 $\mathscr{E}$ 作平凡化后，$\Box$ 可表示为

$$\Box \restriction U = -\mathrm{g}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \mathrm{A}^i\frac{\partial}{\mathrm{i}\,\partial x^i} + \mathrm{B},\quad i,j = 1,\dots,d, \tag{3.6}$$

其中 $\mathrm{A}^i \in C^\infty$（$U$；$\mathrm{T}U \otimes \mathrm{End}\ \mathscr{E}_U$），$\mathrm{B} \in C^\infty$（$U$，$\mathrm{End}\ \mathscr{E}_U$）。

正规双曲算子自然产生于弯曲时空中的几何分析和量子场论背景下，下面列举几个例子。

**例 3.2.2**。设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是一个平凡$\mathbb{C}$线丛，即其截面只是 $\mathbb{C}$值的光滑函数 $C^\infty$（$\mathscr{M}$），定义在（$\mathscr{M}$，g）上。**协变克莱因-戈尔登算子** 定义为（参见例如 [113,第 3.1 节，例 1], [110,1.5。1]）

$$\Box := -\operatorname{div}\circ\operatorname{grad} - \mathrm{m}^2 - \lambda\,\mathrm{ric} : C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M}), \tag{3.7}$$

其中 $\mathrm{m}^2 \in \mathbb{R}_+$ 是一个参数，在适当情况下可将其物理解释为线性克莱因-戈尔登场的质量平方；$\lambda$ 是一个耦合常数，ric 是 $\mathscr{M}$的里奇标量，grad $f$:=(d $f$)$^\sharp$是函数 $f \in C(\mathscr{M})$ 的梯度，而 div($X$) :=tr($\nabla^{\mathrm{LC}}X$) 是向量场 $X \in C(\mathscr{M};\mathrm{T}\mathscr{M})$ 的散度。这里，$\nabla^{\mathrm{LC}}$是 $\mathscr{M}$的 Levi-Civita联络，而**端同态迹**

$$\mathrm{tr} : \mathrm{End}\,\mathscr{E} \to \mathbb{C} \tag{3.8}$$

是任意一般流形 $M$上的向量丛 $\mathscr{E} \to M$ 在纤维 $\mathscr{E}_x$ 上的有限维迹，其定义为典范同构的复合End($\mathscr{E}_x$) $\cong \mathscr{E}_x^* \otimes \mathscr{E}_x$再接上缩并映射$\mathscr{E}_x^* \otimes \mathscr{E}_x \to \mathbb{C}$。

当 $\mathrm{m},\lambda = 0$ 时，前述 $\Box$ 表达式的特殊情形称为**达朗贝尔算子**或**相对论波算子**，其局部形式为

$$\Box = -\mathrm{g}^{ij}\nabla_i^{\mathrm{LC}}\nabla_j^{\mathrm{LC}},\quad i,j = 1,\dots,d. \tag{3.9}$$

若 ($\mathscr{M}$，g)：=($\mathbb{R}\times\Sigma$，d$t^2$ − h) 是一个超静态流形，则

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{3.10}$$

被称为黎曼流形的**波算子**（$\Sigma$，h），其中 $t$是 $\mathbb{R}$上的自然坐标，$\Delta$是采用几何学家约定的（$\Sigma$，h）的拉普拉斯-贝尔特拉米算子：

$$\Delta := -\operatorname{div}_{\mathrm{h}}\circ\operatorname{grad} = -\frac{1}{\sqrt{\det \mathrm{h}}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathrm{h}^{ij}\sqrt{\det \mathrm{h}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),\quad i,j = 2,\dots,d. \tag{3.11}$$

**例 3.2.3**。 假设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是平凡的$\mathbb{C}$线丛，其定义在一个 $d \geq 3$维洛伦兹流形上，$(\mathscr{M}, g)$ 并且 $\Box$ 分别是（，g）的达朗贝尔算子和里奇标量。亚马贝算子定义为（例如参见 [113, 第 3.1 节，例2], [110,定义 3.5。9]）

$$\mathrm{Y} := \Box + \frac{d-2}{4(d-1)}\,\mathrm{ric} : C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M}). \tag{3.12}$$

**例 3.2.4**。 设 $\mathscr{E} := \wedge^k \mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 是定向洛伦兹流形（$\mathscr{M}$，g）上的 $k$-形式丛。**霍奇-达朗贝尔算子** 定义为（参见例如 [113, 第 3.1 节，例 3], [110, 例 1.5。3]）

$$\Box := \mathrm{d}^* \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \mathrm{d}^* : C^\infty\big(\mathscr{M}; \wedge^k \mathrm{T}^*\mathscr{M}\big) \to C^\infty\big(\mathscr{M}; \wedge^k \mathrm{T}^*\mathscr{M}\big), \tag{3.13}$$

其中，d 和 $\mathrm{d}^*$ 分别是外微分和余外微分。

**例 3.2.5**。 设（$\mathscr{E} \to \mathscr{M}$，$\nabla^{\mathscr{E}}$）是配备了联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$的向量丛，且（$\mathrm{T}^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$，$\nabla^{\mathrm{LC}}$）是赋予 Levi-Civita联络$\nabla^{\mathrm{LC}}$的余切丛，它们定义在洛伦兹流形（$\mathscr{M}$，g）上。于是，我们得到一个诱导联络

$$\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} := \nabla^{\mathrm{LC}} \otimes \mathbb{1}_{\mathscr{E}} + \mathbb{1}_{\mathrm{T}^*\mathscr{M}} \otimes \nabla^{\mathscr{E}} \tag{3.14}$$

在 $\mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}$ 上。**联络达朗贝尔算子** 定义为以下三个映射的复合（参见例如 [110,例 1.5。2]）

$$C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \xrightarrow{\nabla^{\mathscr{E}}} C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}) \xrightarrow{\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}}} C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}) \xrightarrow{\mathrm{tr}_g \otimes I} C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}), \tag{3.15}$$

其中 $\mathrm{tr}_g$：$C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathrm{T}^*\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M}, \mathbb{R})$ 表示**度量迹**：

$$\mathrm{tr}_g\big((x,\xi) \otimes (x,\eta)\big) := \mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\eta) \tag{3.16}$$

对于所有 $\xi$，$\eta \in \mathrm{T}^*_x\mathscr{M}$。联络达朗贝尔算子的负算子，

$$\Box := -\,\mathrm{tr}_g\big(\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} \circ \nabla^{\mathscr{E}}\big) \tag{3.17}$$

是一个正规双曲算子。

人们注意到，标量达朗贝尔算子（3.9） $-\mathrm{tr}_g$（$\nabla^{\mathrm{LC}} \circ \mathrm{d}u$）是联络达朗贝尔算子的一种特殊情形，其中 $u$ 是任意平凡 $\mathbb{C}$线丛的一个截面。注意，（3.15）的前两个复合

$$\mathrm{Hess} := \nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} \circ \nabla^{\mathscr{E}} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}) \tag{3.18}$$

称为**海森矩阵**，相应的微分算子 $\mathrm{Hessian}_{X,\,Y} = \nabla^{\mathscr{E}}_X \nabla^{\mathscr{E}}_Y - \nabla^{\mathscr{E}}_{\nabla^{\mathrm{LC}}_X Y}$称为**二阶协变导数**定义在 $\mathscr{E}$ 上，其中 $X$，$Y$ 是$\mathscr{M}$ 上的任意切向量（例如参见 [114, 第 66]页）。

**例 3.2.6**。设$(\mathscr{E} \to \mathscr{M},\ (\cdot|\cdot),\ \nabla^{\mathscr{E}})$是洛伦兹流形$(\mathscr{M},\ \mathrm{g})$上的向量丛，其中$(\cdot|\cdot)$和$\nabla^{\mathscr{E}}$分别是$\mathscr{E}$上的半双线性型和联络。博赫纳-达朗贝尔算子（例如参见 [114, 定义 2。4]）

$$\Box := \nabla^{\mathscr{E}*} \circ \nabla^{\mathscr{E}} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}), \tag{3.19}$$

其中$\nabla^{\mathscr{E}*}$是由$\nabla^{\mathscr{E}}$在对偶丛（第2.3.4节）上诱导的联络$\mathscr{E}^*$，它作用于$\mathscr{E}$，与相应的联络达朗贝尔算子仅相差一个负号：$\nabla^{\mathscr{E}*} \circ \nabla^{\mathscr{E}} = -\operatorname{迹}_{\mathrm{g}} (\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} \circ \nabla^{\mathscr{E}})$。在$\mathrm{T}\mathscr{M}$的任意正交标架$\{e_i\}$中，它表示为

$$\Box = -\mathrm{g}^{ij} \left( \nabla^{\mathscr{E}}_{e_i} \nabla^{\mathscr{E}}_{e_j} - \Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij} \nabla^{\mathscr{E}}_{e_k} \right), \quad i, j, k = 1, \ldots, d := \dim \mathscr{M}, \tag{3.20}$$

wh其中$\Gamma^{\mathrm{LC}}$是关于$e_i$的列维-奇维塔联络1-形式：$\nabla^{\mathrm{LC}}_{e_i} e_j = \Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij} e_k$。

有一些算子并非正规双曲算子，但可以通过附加约束与一个正规双曲算子联系起来。

**例 3.2.7**。作用于洛伦兹流形（$\mathscr{M}$，g）上光滑余向量场空间的**普罗卡算子**定义为

$$\mathrm{P} := \mathrm{d}^* \circ \mathrm{d} + \mathrm{m}^2 : C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M}), \quad \mathrm{m} \in \dot{\mathbb{R}}, \tag{3.21}$$

它并非正规双曲。不过，只要施加**洛伦兹规范约束** $\mathrm{d}^*\xi = 0$，它就等价于正规双曲算子 $\mathrm{d}^* \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \mathrm{d} + \mathrm{m}^2$。

从前面的例子可以明显看出，$\Box$与某个达朗贝尔算子仅相差一个光滑项。事实上，这在一般情况下也成立。

**注3.2.8**。根据魏岑伯克公式，对于任意洛伦兹流形$\Box$上的任意向量丛$\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$，给定一个正规双曲算子，存在唯一的丛联络$\nabla^{\mathscr{E}}$，称为**魏岑伯克联络**，以及唯一的势$V \in C^\infty(\mathscr{M};\ \mathrm{End}\ \mathscr{E})$使得（例如参见 [113, 命题 3.1], [110, 引理 1.5.5, 1.5.6]）：

$$\Box = -\operatorname{tr}_{\mathrm{g}} \left( \nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} \circ \nabla^{\mathscr{E}} \right) + V. \tag{3.22}$$

因此，在一个正交切标架$\{\partial_i := \partial/\partial x^i\}$和一个丛标架$\{\mathrm{E}_r\}$中，利用（3.20）和$\nabla^{\mathscr{E}}_i = \partial_i + \Gamma_i$，$\Gamma$为相对于$\partial_i$：$\nabla^{\mathscr{E}}_i \mathrm{E}_r = \Gamma^{r'}_{ir} \mathrm{E}_{r'}$的魏岑伯克联络1-形式，经直接计算可得

$$(\Box u)^r = \mathrm{g}^{ij} \left( -\frac{\partial^2 u^r}{\partial x^i \partial x^j} - 2\Gamma^r_{ir'} \frac{\partial u^{r'}}{\partial x^j} + \Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij} \frac{\partial u^r}{\partial x^k} - \left( \frac{\partial \Gamma^r_{jr'}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ir''} \Gamma^{r''}_{jr'} + \Gamma^{\mathrm{LC},k}_{ij} \Gamma^r_{kr'} \right) u^{r'} \right) + V u^r, \tag{3.23}$$

其中$i,\ j,\ k = 1,\ \ldots\ldots,\ d :=$维$\mathscr{M}$且$r,\ r',\ r'' = 1,\ \ldots\ldots,$秩为$\mathscr{E}$，$\Gamma^{\mathrm{LC}}$是关于$\partial_i$的列维-奇维塔联络1-形式。因此，任意正规双曲

算子的次主符号为

$$\begin{aligned}\sigma_{\Box}^{\mathrm{sub}}(x,\xi) &\overset{(2.81)}{=} -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{g}^{ij}\Gamma_i\xi_j + \mathrm{i}\,\mathrm{g}^{ij}\Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij}\xi_k + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{g}^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu)}{\partial x^i\partial\xi_i} + \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma^{\mathrm{LC}\,j}_{ji}\frac{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu}{\partial\xi_i}\\ &= -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{g}^{ij}\Gamma_i\xi_j + \mathrm{i}\left(\mathrm{g}^{ij}\Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij} + \frac{\partial \mathrm{g}^{ik}}{\partial x^i} + \Gamma^{\mathrm{LC}\,j}_{ji}\mathrm{g}^{ik}\right)\xi_k\\ &= -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{g}^{ij}\Gamma_i\xi_j, \end{aligned} \tag{3.24}$$

由于这些恒等式（例如参见 [115, (3.4.9)]）

$$\mathrm{g}^{ij}\Gamma^{\mathrm{LC}\,k}_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|\det \mathrm{g}|}}\frac{\partial(\sqrt{|\det \mathrm{g}|}\mathrm{g}^{ik})}{\partial x^i}, \quad \Gamma^{\mathrm{LC}\,j}_{ji} = \frac{1}{2}\frac{1}{|\det \mathrm{g}|}\frac{\partial|\det \mathrm{g}|}{\partial x^i}. \tag{3.25}$$

若 $\mathscr{E}$ 具有丛度量 $(\cdot|\cdot)$，使得 $\Box$ 是对称的，那么 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 也与 $(\cdot|\cdot)$ 相容。不过，除非另有说明，我们不作此假设。

### 3.2.2 格林算子

**定义 3.2.9.** 令 $\mathscr{E}\to\mathscr{M}$ 为时间定向洛伦兹流形 $(\mathscr{M},\ \mathrm{g})$ 上的向量丛，且 $L$ 为 $\mathscr{E}$ 上的微分算子。对于 $L$，**格林算子** $G^\times$ 是一个线性映射（参见例如 [110, 定义 3.4.1]）

$$G^\times : C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \mid L\circ G^\times = I,\ G^\times\circ(L\restriction C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E})) = I. \tag{3.26}$$

格林算子称为

- **推迟** $G\mathrm{ret}$ if $\mathrm{supp}(G\mathrm{ret}u) \subset J^+(\mathrm{supp}\ u)$ and
- **超前** $G\mathrm{adv}$ if $\mathrm{supp}(G\mathrm{adv}u) \subset J^-(\mathrm{supp}\ u)$,

其中 $J^\pm(K) :=$ (3.2) 表示集合 $K\subset\mathscr{M}$ 的因果未来/过去。

**Jordan-Lichnerowicz-Pauli** 或 **因果** 格林算子定义为反对称组合

$$G := G^{\mathrm{ret}} - G^{\mathrm{adv}}. \tag{3.27}$$

在物理学中，格林算子通常被称为**传播子**，我们也将采用这一术语。传播子与基本解的概念密切相关。

**定义 3.2.10**。按照定义 3.2.9中的术语，一个 **基本解**是 $L$ 在 $x\in\mathscr{M}$ 处的一个 $\mathscr{E}_x^*$值分布，定义在 $\mathscr{E}$ 上，满足（例如参见 [110, 定义 2.1。1], [72,定义 3。1]）

$$F_x^\times : C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}^*) \to \mathscr{E}_x^*,\ \phi\mapsto F_x^\times(L^*\phi) = \phi(x), \tag{3.28}$$

其中，$L^*$ 是 $L$的形式伴随算子。换言之，存在 $F_x^\times\in\mathcal{D}'\left(\mathscr{M};\ \mathscr{E};\ \mathscr{E}_x^*\right)$ 使得

$$LF_x^\times = \delta_x. \tag{3.29}$$

基本解称为**推迟** $F^{\mathrm{ret}}$，如果 $\mathrm{supp}\ F_x^{\mathrm{ret}}\subset J^+(x)$；如果 $\mathrm{supp}\ F_x^{\mathrm{adv}}\subset J^-(x)$，则称为**超前** $F^{\mathrm{adv}}$。前述二者的反对称组合定义了**Jordan-Lichnerowicz-Pauli** 基本解，或**因果** 基本解 $F := F^{\mathrm{ret}} - F^{\mathrm{adv}}$。

为了解释这些概念，让我们来看看最简单的非平凡微分算子——偏导数。

**例 3.2.11**。 设 $x \in \mathbb{R}^d$ 并将其写成 $x = (x^1, x')$ 其中 $x^1 \in \mathbb{R}$ 且 $x' = (x^2, \ldots\ldots, x^d)$ 。由于 Heaviside阶跃函数的分布导数[1] $\Theta_{x_0}$ 是集中于 $\delta_{x_0}$ 处的狄拉克δ分布 $x_0$, D 的超前、推迟和因果基本解$_1$ : $= -\mathrm{i}\, \partial/\partial x^1$ 分别为

$$F_1^{\mathrm{adv}}(x) = -\mathrm{i}\Theta(-x^1) \otimes \delta(x'), \tag{3.30a}$$
$$F_1^{\mathrm{ret}}(x) = -\mathrm{i}\Theta(x^1) \otimes \delta(x'), \tag{3.30b}$$
$$F_1(x') = -\mathrm{i}\,\delta(x'). \tag{3.30c}$$

它们的施瓦茨核由下式给出

$$\mathsf{F}_1^{\mathrm{adv}}(x-y) = -\mathrm{i}\Theta(y^1 - x^1) \otimes \delta(x' - y'), \tag{3.31a}$$
$$\mathsf{F}_1^{\mathrm{ret}}(x-y) = -\mathrm{i}\Theta(x^1 - y^1) \otimes \delta(x' - y'), \tag{3.31b}$$
$$\mathsf{F}_1(x'-y') = -\mathrm{i}\,\delta(x'-y') = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^2-y^2)\theta_2 + \ldots + \mathrm{i}(x^d - y^d)\theta_d}\, \mathrm{d}\theta_2 \ldots \mathrm{d}\theta_d. \tag{3.31c}$$

从前述基本解的傅里叶积分表示中可以直接得到以下事实。

**命题 3.2.12**。 按照例 *3.2.11* 中的术语，设 $\chi$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的一个在对角线附近为零的光滑函数。则 *[35,* 命题 *6.1*。*2]* （另见 *[23,* 命题 *26.1*。*2]*）

$$\mathrm{WF}'\, \mathsf{F}_1^{\mathrm{adv,ret}} = \Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d \bigcup C_1^{\mathrm{adv,ret}}, \tag{3.32}$$
$$C_1^{\mathrm{adv,ret}} := \{(x,\xi;y,\eta) \in C_1 \,|\, x^1 \lesseqgtr y^1\}, \tag{3.33}$$
$$C_1 := \{(x,\xi;y,\eta) \in \mathrm{T}^*\mathbb{R}^d \times \mathrm{T}^*\mathbb{R}^d \,|\, x' = y', \xi' = \eta' \neq 0, \xi_1 = 0 = \eta_1\}, \tag{3.34}$$
$$\mathsf{F}_1, \chi \mathsf{F}_1^{\mathrm{adv,ret}} \in I^{-1/2}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, C_1'), \tag{3.35}$$

其中 $\Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$ 是 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$ 中的对角线，且 $I^{-1/2}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, C_1')$ 是拉格朗日分布（定义 *2.1.8*），定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上，并与典范关系 $C_1$相关。

设 $F^{\mathrm{ret}}_{,x}{}^{\mathrm{adv}}$是正规双曲算子 $\Box$ 在时间定向的洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$上的向量丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$上的伴随算子 $\Box^*$ 的一族推迟和超前基本解，并且 $F^{\mathrm{ret}}_{,x}{}^{\mathrm{adv}}$关于$x \in \mathscr{M}$光滑依赖，即对任意 $\phi \in C_c^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}^*)$， $x \mapsto F^{\mathrm{ret}}_{,x}{}^{\mathrm{adv}}(\phi)$ 是光滑的。若其满足微分方程 $\Box(F^{\mathrm{ret}}_{,}{}^{\mathrm{adv}}\phi) = \phi$ ，则（参见例如 [110, 命题 3.4.2]）

$$(G^{\mathrm{adv,ret}}\phi)(x) := F_x^{\mathrm{ret,adv}}(\phi) \tag{3.36}$$

为 $\Box$定义超前和推迟格林算子。

[1] We recall that it is defined as $\Theta_{x_0}(x) := 1$ for $x > x_0$ and $\Theta_{x_0}(x) := 0$ for $x < x_0$.

**注记 3.2.13**。 经典结果表明，任意正规双曲算子 $\Box$ 作用于向量丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 上，该向量丛定义在整体双曲时空 $(\mathscr{M}, g)$ 都具有 唯一的推迟 和超前 格林算子（参见例如 [110,推论 3.4。3], [72,命题 4.1，注记 4.3 b]）：

$$G^{\mathrm{adv,ret}} : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C_{\mathrm{sc}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}), \tag{3.37}$$

其中 $C_{\mathrm{sc}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 是 $\mathscr{E}$ 的空间紧支光滑截面空间（第 1.4 节）。

此外，形式伴随算子的格林算子 $(G^{\mathrm{adv}}, G^{\mathrm{ret}})^{*}$ 与 $\Box^{*}$ 的形式伴随算子 $\Box$ 相关，$G^{\mathrm{adv}}, G^{\mathrm{ret}}$ 其关系为（例如参见 [110, 引理 3.4。4]）

$$\big((G^{\mathrm{adv,ret}})^{*}\phi\big)(u) = \phi\big(G^{\mathrm{ret,adv}}u\big) \tag{3.38}$$

对于任意 $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}^{*})$ 和 $u \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，因果传播子

$$G := G^{\mathrm{ret}} - G^{\mathrm{adv}} : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C_{\mathrm{sc}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \tag{3.39}$$

满足 $(G^{*}\phi)(u) = -\phi(Gu)$。

在此背景下，一个自然的问题是：给定 $\Box$，是否存在更多的格林算子？下文的答案将引出一种特殊的传播子，它们不是像超前传播子和推迟传播子那样由支集刻画，而是由其波前集唯一刻画。

### 3.2.3 参数子

为了探究前面的问题，引入格林算子的一个较弱概念很有用，定义如下。

**定义 3.2.14**。 设 $\mathscr{E}$，$\Omega^{1/2} \to M$ 分别为流形 $M$ 上的 $P$ 向量丛和半密度丛，且 $P$ 是作用于 $\mathscr{E}$-值截面上的适当支撑的伪微分算子（定义2.3.2和 2.1.1）。$\mathscr{E}$的**右参数子** 是一个连续算子

$$E_{\mathrm{R}} : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) \to C^{\infty}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) \quad | \quad PE_{\mathrm{R}} = I + R, \tag{3.40}$$

其中 $I$ 是恒等伪微分算子，$R$ 是平滑算子。类似地，**左参数子** 定义为 $E_{\mathrm{L}}P = I + L$，其中 $L$ 是平滑算子。若 $E$ 同时是右参数子和左参数子，则称其为 $P$ 的**拟逆**。

现在，设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是定义在整体双曲时空 $(\mathscr{M}, g)$ 上的向量丛，并设 $E$ 是 $\mathscr{E}$ 上的正规双曲算子 $\Box$ 的拟逆：

$$\Box E \equiv I, \quad E\big(\Box \restriction C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E})\big) \equiv I, \tag{3.41}$$

其中 $\equiv$ 表示模去平滑算子。注记3.2.13 表明 $\Box$ 至少有两个参数子：超前参数子 $E^{\mathrm{adv}}$ 和推迟参数子 $E^{\mathrm{ret}}$。我们希望知道是否还存在更多参数子。Duistermaat 和 Hörmander 已对这一问题进行了非常详细的研究 [35, 第6.5节，第6条。6] 针对任意实主类型的标量伪微分算子（定义 2.2.10）。为了将他们的分析转用于当前情形，我们重新考察例2.3.8并考虑如下关系。

定义3.2.15。设 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是整体双曲时空（$\mathscr{M}$，g）上的类光余向量丛。测地关系 $C$ 定义为乘积流形 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 中所有位于 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ [35,上的同一条测地线上的余向量对的集合（6.5.2）]（另见 [23，（26.1.8）]）：

$$C := \left\{(x,\xi;y,\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \,|\, \exists! s \in \mathbb{R} : (x,\xi) = \Phi_s(y,\eta)\right\}. \tag{3.42}$$

将**前向**（分别为**后向测地关系**）$C^{\pm}$ 定义为所有满足以下条件的（$x$，$\xi$；$y$，$\eta$）的集合：（$x$，$\xi$）在一条测地线上位于（$y$，$\eta$）之后（分别之前）：

$$C^{\pm} := \left\{(x,\xi;y,\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \,|\, \exists! s \in \mathbb{R}_{\gtrless 0} : (x,\xi) = \Phi_s(y,\eta)\right\}. \tag{3.43}$$

其中，$\Phi_s$ 是余切丛上的测地流，$s \in \mathbb{R}$ 是流参数。

**注记 3.2.16**。测地关系是一个锥拉格朗日子流形（见定义 A.1.5），它在 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$中是闭的，$\dot{\mathrm{T}}^*_0(\mathscr{M} \times \mathscr{M})$ 因而是一个从 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ [35, 的齐次典范关系（见定义 2]A.1.12；另见命题 26.1。13]）。

有了这些术语，$G^{\mathrm{adv}}$的施瓦茨核 $\mathrm{E}^{\mathrm{adv}}$，$\mathrm{E}^{\mathrm{ret}}$的波前集 $G^{\mathrm{ret}}$ 可表示为

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{E}^{\mathrm{adv}} \subset \Delta\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \cup C^{\mathrm{adv}}, \quad C^{\mathrm{adv}} := \{(x,\xi,y,\eta) \in C \,|\, x \in J^-(y)\}, \tag{3.44}$$

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{E}^{\mathrm{ret}} \subset \Delta\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \cup C^{\mathrm{ret}}, \quad C^{\mathrm{ret}} := \left\{(x,\xi,y,\eta) \in C \,|\, x \in J^+(y)\right\}. \tag{3.45}$$

Duistermaat-Hörmander 的 [35, 第 218] 页开创性分析表明，若 $d \geq 3$，则还存在另外两个 $\Box$ 的参数子，其波前集在非对角线上分别由前向和后向测地关系给出。在纯数学中，这些参数子被称为**特殊参数子**，而在理论物理学文献中则称为**费曼参数子**。

**定义 3.2.17**。设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是整体双曲时空（$\mathscr{M}$，g）上的一个向量丛，$\Box$ 是 $\mathscr{E}$上的正规双曲算子。$\Box$ 的**费曼** $E^{\mathrm{Fyn}}$ 参数子和**反费曼** $E^{\mathrm{aFyn}}$ 参数子，是指 $\Box$ 的那些参数子，其施瓦茨核满足 [35, 第 229]页。

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{E}^{\mathrm{Fyn}} \subset \Delta\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \cup C^{+}, \qquad \mathrm{WF}'\,\mathrm{E}^{\mathrm{aFyn}} \subset \Delta\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \cup C^{-}, \tag{3.46}$$

其中，$\Delta\,\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 是去点余切流形 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 的对角线，而 $C^{\pm}$是向前（分别为向后）的测地关系。

因此，给定 $\Box$ 在 $d \geq 3$上，至多有 4 个相互独立的参数子 $E^{\mathrm{adv}}$，$E^{\mathrm{ret}}$,$E^{\mathrm{Fyn}}$，$E^{\mathrm{aFyn}}$。显然，最后两个参数子由其波前集而非支集表征。

**注记 3.2.18**。$\Box$ 中有 16 个参数子，这是因为 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 有 4 个连通分支，而 $\dot{\mathrm{T}}^*_{0,\,\pm}\mathscr{M}$ 是 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 在 $d \geq 3$ 中的两个连通分支。

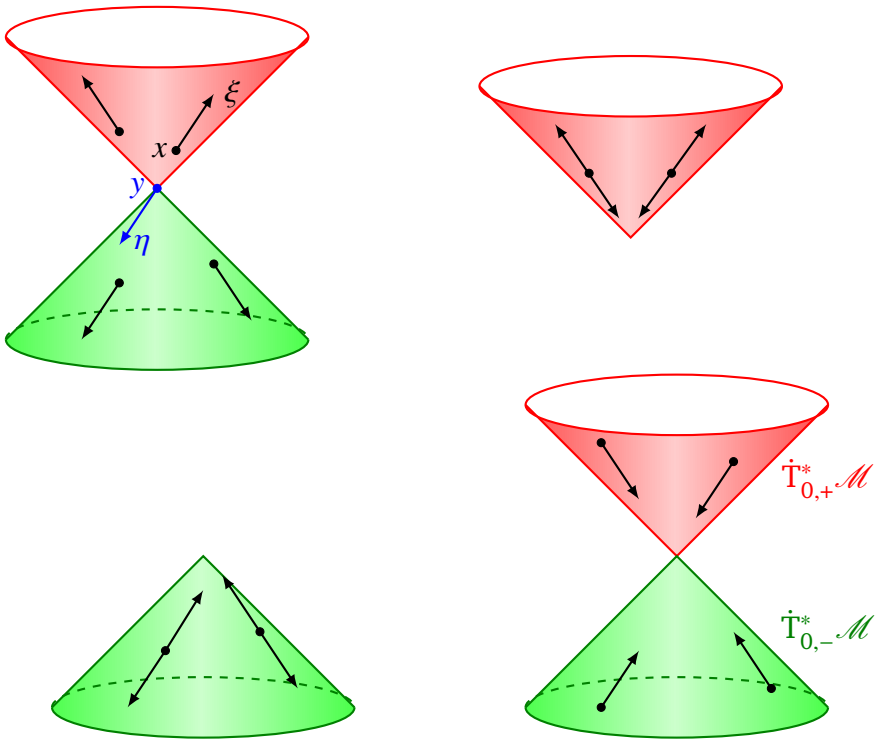


图3.1：时空维数 $C^+$、$C^{\mathrm{ret}}$、$C^{\mathrm{adv}}$和 $C^-$ 的示意图。 $d \geq 3$在这些图中， $y$ 固定在锥体的顶点处，仅显示 $\xi$ 的方向，而 $\eta$ 的方向为简洁起见未予显示，左上角的图除外（根据 [39, 图 1]重新绘制）。

## 3.3 正常双曲算子的费曼传播子

### 3.3.1 主要结果

首先，我们给出 Duistermaat-Hörmander[35, 定理 6.5。3]（另见 [23, 定理 26.1。14]）关于正规双曲算子的 Feynman 参数子存在性与唯一性的经典结果的丛版本。回顾一下，$H^s\mathrm{loc}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 是 $\Omega^{1}\!/_{2}$值截面的空间，这些截面相对于任意光滑坐标图和任意光滑丛图，局部属于 Sobolev空间 $H^s$ 。 $H^s\mathrm{loc}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 中的紧支集截面空间记为 $H^s_{\mathrm{c}}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 。通常， $H^s\mathrm{loc}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 赋予关于在 $H^s(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 中局部收敛的局部凸拓扑。空间 $H^s_{\mathrm{c}}(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 是 $\bigcup_{K\Subset M} H^s_{\mathrm{c}}(K;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}\!/_{2})$ 的并集，并赋予归纳极限拓扑，其中并集遍历 $M$的所有紧子集 $K$ 。详细内容可参见，例如 [76,附录 B1]。

**定理 3.3.1** （费曼参数子的存在性与唯一性）。 设 $\mathscr{E}\to\mathscr{M}$ 是整体双曲时空 （$\mathscr{M}$、g）上的一个向量丛，且 $\Box$ 是一个正规双曲算子，作于

$\mathscr{E}$上。则存在唯一的[2] 费曼 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 和反费曼 $E^{\mathrm{aFyn}}$ 参数子（由 （3.95）给出），属于 $\square$。此外，对于每个 $k \in \mathbb{R}$、 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 和 $E_{\mathrm{aFyn}}$，它们都延拓为从 $H^k{}_{\mathrm{c}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 到 $H^{k+1}{}_{\mathrm{loc}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 的连续映射，并且其施瓦茨核之差

$$\mathsf{E}^{\mathrm{Fyn}} - \mathsf{E}^{\mathrm{aFyn}} \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C'; \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big), \tag{3.47}$$

其中 $I^{-3/2}(\ldots)$ 是与测地关系相关联的拉格朗日分布空间（定义 *2.3.9*） $C$ （定义 *3.2.15*）。此外，$\mathsf{E}^{\mathrm{Fyn}} - \mathsf{E}^{\mathrm{aFyn}}$ 在 $C$的每一点处均为非特征的（定义 *2.3.14*）。

这一结果针对有质量克莱因-戈尔登算子（例 3.2.2）的一个特殊情形，由 Radzikowski 给出 [39, 命题 4.2-4。4] ，这是 [35, 定理 6.5。3]的直接推论。借助傅里叶积分算子的特选全局相位函数方法， [116], Capoferri 等 [69, 定理 5。2] 构造了这些参数子，适用于空间紧致的全局双曲超静态时空中具有时间无关光滑势的标量波算子。最近，Lewandowski [40, 命题 3。5]发表了一种针对实向量丛的直接构造方法，该方法利用 Hadamard 级数展开，并同时给出了 [110]。与这些文献不同，我们的证明完全采用微局部方法，与原始处理方式 [35, 定理 6.5。3]类似。此方法只需采用丛版本的微局部化，相关理论将在后文发展（定理 3.3.10和 3.3.13），其思路与 Dencker 关于偏振集传播的 [45] 证明一致，不过我们的论述更具几何性。

费曼拟基本解 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 可以转化为格林算子 $G^{\mathrm{Fyn}}$ ——对于 $\square$的费曼传播子。如附录 C所阐明的，费曼传播子与量子态密切相关，因此，只要满足某种正性[3] 性质（如下所述），这就等价于构造一个 Hadamard 二点分布。Duistermaat-Hörmander 首次在 [35, 定理 6.6 中2]观察到了这一显著性质，即对于标量算子，可以对 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 施加一个平滑算子 $R$ 使得

$$\hat{W} + R := -\mathrm{i}(E^{\mathrm{Fyn}} - G^{\mathrm{adv}}) + R \tag{3.48}$$

在如下意义下是非负的：对于任意 $u \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M})$，$(\hat{}\mathrm{W} + \mathrm{R})(\bar{u} \otimes u) \geq 0$。当然，这意味着存在一个具有该性质且满足 $R = 0$ 的费曼拟基本解。因此，存在一个在上述意义下满足 $\hat{}W \geq 0$ 的费曼拟基本解。不同于函数，除非向量丛具有厄米型，否则向量丛上不存在正算子的概念。因此，我们赋予 $\mathscr{E}$ 一个厄米型，并将这一正性性质推广到向量丛的情形。

**命题 3.3.2.** 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是定义在整体双曲时空$(\mathscr{M}, \mathrm{g})$上的向量丛，且 $\square$ 是作用于 $\mathscr{E}$上的正规双曲算子。我们假设 $\mathscr{E}$赋有一个$^{-}$（非退化）半双线性型 $(\cdot|\cdot) \in C^{\infty}(\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{E})$，使得 $\square$是对称的。那么，

[2]在参数子的意义下，即模去平滑算子。[3]这与量子场论中 Wightman 分布的正性有关。

存在一个费曼拟基本解 $E^{\mathrm{Fyn}}$，它是 $\Box$ 的拟逆，使得 $\hat{}W := -\mathrm{i}(E^{\mathrm{Fyn}} - G^{\mathrm{adv}})$ 是对称的，其中 $G^{\mathrm{adv}}$ 是 $\Box$的超前传播子。此外，如果 $(\cdot|\cdot)$ 是厄米的（正定），那么 $\hat{}W$ 可以选为非负的。

Duistermaat-Hörmander 通过对标量伪微分算子进行精细的微局部化，证明了他们的版本 [35, 引理 6.6。4]。我们为通常双曲算子提供这种微局部化（3.102）。

最后，我们利用整体双曲时空上 $\Box$ 的柯西问题的适定性，将费曼拟基本解 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 转化为费曼传播子 $G^{\mathrm{Fyn}}$，这进一步给出了 $\Box$ 的 Hadamard 双解的存在性。

定理 *3.3.3*（费曼传播子的存在性）。如命题 *3.3.2* 的设置所示，存在作用于 $\big(\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 上的 $\Box$ 的费曼传播子 $G^{\mathrm{Fyn}}$，$(\cdot|\cdot)\big)$，使得 $W := -i(G^{\mathrm{Fyn}} - G^{\mathrm{adv}})$ 关于半双线性型 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的。此外，如果 $(\cdot|\cdot)$ 是厄米的，则可以选择 $G^{\mathrm{Fyn}}$，使得对于任意 $u \in C_c^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$，$W(\bar{u}^* \otimes u) \geq 0$。因此，$W$ 定义了一个 *Hadamard* 态。这里，$C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \ni u \mapsto \bar{u}^* \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}^*)$ 是由 $(\cdot|\cdot)$ 诱导的逐纤维线性映射。

由于 Duistermaat-Hörmander [35, p. 229] 研究了范围广得多的一类算子——实主类型的标量伪微分算子，然而，从相应的参数子构造费曼传播子所需的关键步骤，即确定适当的平滑算子，却仍未解决。即使在缺少类时 Killing向量场的情况下，这一不确定性在某些特殊时空中也能以多种方式消除。微局部分析文献中已有此类构造。例如，Gell-Redman 等人 [44, 定理 3.6] 研究了具有非俘获洛伦兹散射矩阵的空间中的标量波算子。Vasy 通过对全局动力学作出假设，构造了费曼传播子，适用于以下情形：(i) 闭流形上主符号为实的标量对称算子 [67, 定理 1]，；(ii) Melrose 的 b-伪微分代数框架中，洛伦兹散射矩阵空间上的波算子 [67, 定理 7]；以及 (iii) Melrose 的散射伪微分代数形式中的克莱因-戈尔登算子 [67, 定理 10, 12]。他的思路是找出这些算子可逆的适当空间，然后将满足所需性质的这些算子的逆定义为费曼传播子——这是对费曼原始“$\pm \mathrm{i}\,\epsilon$”处方的推广（见例 C.3.2 及其后的评注）。因此，他还为费曼参数子建立了相应的正性性质 [67, 推论 5, 9, 11, 13]。对于静态时空上与静态电磁势作最小耦合的克莱因-戈尔登算子，定理 3.3.3 的一个特殊情形已由 Derezi´nski 和 Siemssen [68, 定理 7.7] 证明。秉承极限吸收原理的思路，他们证明了费曼传播子可视为克莱因 - 戈尔登算子的预解式在边界处的取值。借助命题 3.3.2 以及 [58, 第 3.3], 节中的思想，Lewandowski [40, 定理 4.3]最近在黎曼向量丛上构造了 Hadamard 态。

为证明这些断言，我们需要先作一些准备，相关内容将在接下来的两个小节中介绍。以下各节中的部分结果在更广泛的背景下也很有意义，因此为提高一般性，我们将在一般流形 $M$ 上的向量丛 $\mathscr{E} \to M$ 上进行讨论，之后再回到整体双曲时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 的背景中。

### 3.3.2 联络 1-形式与次主符号

设 $\mathscr{E}$、$\Omega^{1}\!/\!2 \to M$ 分别为流形 $M$ 上的向量丛和半密度丛。已有观察表明，具有标量主符号 $p$ 的 $\sigma^{\mathrm{sub}}_{P}$ $P \in \Psi$狄拉克算子$^{m}(M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^{1}\!/\!2)$ 的次主符号（定义 2.3.4）$m \in \mathbb{R}$ 在丛坐标图变换下表现得如同一个部分[4]-联络1-形式（例如参见 [105, 命题 3.1]）。鉴于次主符号作为输运方程中的常数项出现，这或许并不令人意外。由输运方程自然定义的联络，最早出现在 Dencker 关于偏振集传播的工作中。在数学物理学文献中，它们通常被称为 Dencker联络 [45, 第 365 页-366] 。对于麦克斯韦系统，Dencker 发现该联络等于 Levi-Civita联络。对于自旋狄拉克算子（见例 3.4.4），例如在 [56] 中已验证，Dencker联络确实是自旋联络。在本节中，我们将系统地解释 $\mathscr{E}$ 上几何定义的联络与由 $\sigma^{\mathrm{sub}}_{P}$ 诱导的平行传输算子之间的精确关系。正如备注 2.3.5 中已经指出的，$\sigma^{\mathrm{sub}}_{P}$ 取决于 $\mathscr{E}$ 和 $\Omega^{1}\!/\!2$ 的平凡化选择。下面我们将看到，在丛标架变换下，该矩阵将沿着向量丛 $\pi^{*}\mathscr{E} \to \dot{\mathrm{T}}^{*}M$ 中的哈密顿向量场 $X_{p}$ 表现得如同一个联络1-形式，其中 $\pi : \dot{\mathrm{T}}^{*}M \to M$ 是 $M$ 的去心余切丛。

首先，我们总结一下次主符号的变换性质。在 $P$ 具有标量主符号 $p$ 且 $Q \in \Psi\mathrm{DO}^{m'}(M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^{1}\!/\!2)$，$m' \in \mathbb{R}$是主符号为 $q$的适当支撑算子时，我们有如下乘法公式 [10, (1.4)]（另见例如 [24,命题 2.1。13]）

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathrm{sub}}_{PQ} &= \sigma^{\mathrm{sub}}_{\sum_l P^r_l Q^l_k} = \sum_l \sigma^{\mathrm{sub}}_{P^r_l Q^l_k} \overset{[10,\,(1.4)]}{=} \sum_l \sigma^{\mathrm{sub}}_{P^r_l} q^l_k + p^r_l \sigma^{\mathrm{sub}}_{Q^l_k} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\{p^r_l, q^l_k\} \\ &= \sigma^{\mathrm{sub}}_{P}\, q + p\, \sigma^{\mathrm{sub}}_{Q} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\{p, q\}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

其中我们在第二行使用了 $\sigma^{\mathrm{sub}}$ 的线性性，并且$\{\cdot,\cdot\}$ 是泊松括号（见（A.5））。因此，我们还有 [10, （1.3）]

$$\sigma^{\mathrm{sub}}_{P^k} = k\, p^{k-1}\, \sigma^{\mathrm{sub}}_{P} \tag{3.50}$$

[4]我们回顾一下，向量丛 $\mathscr{E} \to M$ 在流形 $M$ 上相对于 $M$ 的叶状分解的<> $\nabla^{\mathscr{E}}$ 部分联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 由协变导数 $\nabla^{\mathscr{E}}_{X}$ 定义，并且对 $N$ 上的任意向量场 $X$ 满足标准性质（例如参见 [117, 第 24]页）。请注意，并非所有部分联络都可由某个“完整”联络的限制得到，例如流形上任意对合分布所关联的 Bott 联络。

对于任意 $k \in \mathbb{N}$。此外，如果 $P$ 是椭圆的（定义2.3.7），且 $E$ 是3.2.14定义中的 $P$ 的拟逆，那么

$$\sigma_E^{\mathrm{sub}} = -p^{-2}\,\sigma_P^{\mathrm{sub}}, \tag{3.51}$$

因此，从这个意义上说，上述公式对任意负整数 $k$ 也成立。

现在我们将证明，在从坐标图发生变换时，次主符号确实具有所声称的变换性质。事实上，我们将证明这一陈述的一个微局部版本（另见 [118]）。

命题 *3.3.4*。设 $\Omega^{1/2} \to M$ 是流形 $M$ 上的半密度丛，且 $m$、$m' \in \mathbb{R}$、$N \in \mathbb{N}$。假设 $P \in \Psi DO^m(M, \mathbb{C}^{N\times N} \otimes \Omega^{1/2})$ 具有标量主符号 $p$。设 $Q \in \Psi DO^{m'}(M, \mathbb{C}^{N\times N} \otimes \Omega^{1/2})$ 在某个 $(x_0, \xi^0) \in \dot{T}^*M$ 处是非特征的，并且 $E$ 是 $Q$ 在 $(x_0, \xi^0)$ 的某个开锥邻域 $U$ 中的微局部拟逆。那么，$EPQ$ 的次主符号为

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{U} : \sigma_{EPQ}^{\mathrm{sub}}(x,\xi) = (q^{-1}\sigma_P^{\mathrm{sub}} q)(x,\xi) - \mathrm{i}\left(q^{-1} X_p(q)\right)(x,\xi), \tag{3.52}$$

其中 $q$ 是 $t$ *he* $Q$ 的主符号，而 $X_p$ 是由 $p$生成的哈密顿向量场。

证明。由于 $P$ 具有标量主符号，交换子 $[P,Q]_-$ 的阶为$m+m'-1$，而 $EPQ$ 的主符号在微局部意义下就是 $P$的主符号。这些结果表明，$E[P,Q]_-$的阶为 $m-1$，且 $(x_0, \xi^0) \notin \mathrm{ES}(EPQ - P - E[P,Q]_-)$。因此，利用其阶，

$$\sigma_{EPQ}^{\mathrm{sub}} = \sigma_P^{\mathrm{sub}} + \sigma_{E[P,Q]_-} \tag{3.53}$$

在 U 上。下面只需计算 $[P,Q]_-$的主符号。由于 $P$ 的主符号取标量值，我们得到交换子关系（例如参见 [105, (14)]）

$$\sigma_{[P,Q]_-} = -\mathrm{i}\{p,q\} + [\sigma_P^{\mathrm{sub}}, q]_-, \tag{3.54}$$

由乘法公式（3.49）可知。因此，在 $\mathcal{U}$ 上，我们得到 $\sigma_{Q^{-1}[P,Q]_-} = q^{-1}\sigma_{[P,Q]_-} = -\mathrm{i}\, q^{-1}\{p, q\} + q^{-1}\sigma_P^{\mathrm{sub}} q - \sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 结果得证。■

作为上述乘积公式的一个简单推论，我们还有

**命题 3.3.5**。沿用命题 *3.3.4*中的术语，设 $Q$ 具有标量主符号 $q$ 且次主符号为零。若 $P$ 具有标量主符号 $p$ 且次主符号为 $\sigma_P^{\mathrm{sub}}$，则

$$\sigma_{QPQ}^{\mathrm{sub}} = q^2 \sigma_P^{\mathrm{sub}}. \tag{3.55}$$

在完成上述准备后，我们引入如下概念：由伪微分算子的次主符号诱导的联络1-形式。

**定义 3.3.6**。 设 $(\mathscr{E},\ \mathscr{F} \to M;\ \nabla^{\mathscr{E}},\ \nabla^{\mathscr{F}})$ 是流形 $M$ 上的两个向量丛，并配备联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$, $\nabla^{\mathscr{F}}$，且设 $\Omega^{1}/^{2} \to M$ 为半密度丛。张量积丛 $\mathscr{E} \otimes \mathscr{F} \to M$ 上的联络 $\nabla^{\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}}$ 称为 $P \in \Psi\mathrm{DO}^{m}(M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^{1}/_{2},\ \mathscr{F} \otimes \Omega^{1}/_{2})$**-相容的**，当且仅当

$$\forall (x,\xi) \in \operatorname{Char} P : \Gamma\big((\mathrm{d}_x\pi)X_p\big)(x,\xi) = \mathrm{i}\,\sigma_P^{\mathrm{sub}}(x,\xi), \tag{3.56}$$

其中，$\sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 分别表示 $P$ 的次主符号和特征集，$\Gamma$是 $\nabla^{\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}}$ 的联络1-形式，而 $\pi:\ \dot{\mathrm{T}}^{*}M \to M$ 是去心余切丛。换言之，$\nabla^{\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}}$ 表示协变导数

$$\nabla^{\pi^{*}\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})}_{X_p} = X_p + \Gamma\big((\mathrm{d}\pi)X_p\big) \tag{3.57}$$

沿由 $P$的主符号 $p$ 生成的哈密顿向量场 $X_p$，作用于丛 $\pi^{*}\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F}) \to \dot{\mathrm{T}}^{*}M$ 上。

该定义是有意义的，因为 $\Gamma$ 和 $\sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 在丛标架变换下具有相同的变换律。因此，$X_p + \mathrm{i}\,\sigma_P^{\mathrm{sub}}$ 具有不变的意义。

**命题 3.3.7**。 设 $\mathscr{E}$、$\Omega^{1}/^{2} \to M$ 分别为流形 $M$上的向量丛和半密度丛，且 $m$、$m' \in \mathbb{R}$、$N \in \mathbb{N}$。假设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^{m}(M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^{1}/_{2})$具有标量主符号 $p$，并且 $\mathscr{E}$ 具有一个 $P$-相容联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$。假设$Q \in \Psi\mathrm{DO}^{m'}(M、\ \mathbb{C}^{N\times N} \otimes \Omega^{1}/_{2})$具有标量主符号 $q$且次主符号为零。那么 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 是 $QPQ$-相容的。

证明。 我们固定任意一个丛标架来验证这一点。然后 $X_{qpq} = \{qpq,\ \cdot\} = \{q^2p,\ \cdot\} = q^2\{p,\ \cdot\} + 2pq\{q,\ \cdot\}$. 限制在特征集 $P$ 上时，这等于 $q^2\{p,\ \cdot\} = q^2X_p$. 因此，在特征集 $P$ 上有

$$\nabla^{\pi^{*}\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}_{X_{qpq}} - X_{qpq} = q^2\left(\nabla^{\pi^{*}\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}_{X_p} - X_p\right) = q^2\sigma_P^{\mathrm{sub}} = \sigma^{\mathrm{sub}}_{QPQ}. \tag{3.58}$$

■

现在的主要观察是，由正规双曲算子 $\Box$ 定义的魏岑伯克联络（注记3.2.8）在上述意义下与 $\Box$ 相容。

**定理 3.3.8**。 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的一个向量丛，且$\Box$ 是作用在 $\mathscr{E}$上的正规双曲算子。若 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 是相应的魏岑伯克联络，则它与 $\Box$相容。

证明。 由于计算是局部的，我们选取 $\mathrm{T}_x\mathscr{M}$ 的一组坐标基 $\{(x^i,\ \partial_i)\}$，来计算由 $\Box$的主符号 $\mathrm{g}^{-1}$ 生成的哈密顿向量场 $X_{\mathrm{g}}$：

$$X_{\mathrm{g}}(x,\xi) = \frac{\partial(\mathrm{g}^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu)}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial(\mathrm{g}^{\mu\nu}\xi_\mu\xi_\nu)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial\xi_i} = 2g^{ij}\xi_j\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}{\partial x^i}\xi_\mu\xi_\nu\frac{\partial}{\partial\xi_i}. \tag{3.59}$$

因此，$(\mathrm{d}_x\pi)\,X_{\mathrm{g}} = 2g^{ij}\xi_j\partial_i$并任取一个丛标架 $\{\mathrm{E}_r\}$，我们可以看到

$$\Gamma\big((\mathrm{d}_x\pi)X_{\mathrm{g}}\big)(x,\xi) = 2g^{ij}\Gamma_i\xi_j \overset{(3.24)}{=} \mathrm{i}\,\sigma^{\mathrm{sub}}_{\Box}(x,\xi). \tag{3.60}$$

■

定理和命题 3.3.7的直接应用给出

**推论 3.3.9**。 按照定理 *3.3.8* 中的术语，设 $N \in \mathbb{N}$。假设 $Q \in \Psi\mathrm{DO}^{-1/2}(\mathscr{M}, \mathbb{C}^{N\times N})$具有标量主符号且次主符号为零。那么 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 是 $Q\square Q$-相容的，即魏岑伯克联络与一阶算子相容 $Q\square Q$。

### 3.3.3 正常双曲算子的微局部共轭算子

如果两个伪微分算子在余切空间中经过适当局部化后，可以通过一个椭圆傅里叶积分算子彼此共轭，则称它们是微局部共轭的。关键在于，在某些自然假设下，任意一阶伪微分算子都可以微局部共轭为一个向量场。这最初归功于 Duistermat-Hörmander [35, 命题 6.1。4]对于实主类型的标量算子（定义 2.2.10），Dencker 将其推广到了向量丛 [45]，并提出了局部实主类型的经典伪微分算子系统的微局部共轭（定义 2.3.6）。更准确地说，Dencker 通过与一组椭圆伪微分算子进行共轭，将该算子系统变换为一个标量伪微分算子 $P$ （模去平滑算子），且其次主符号为零。随后，他通过与辛同胚的图相关联的适当椭圆傅里叶积分算子，描述了 $P$ 与 $\mathrm{D}_1 := -\mathrm{i}\,\mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}\,\partial_1$ 之间的微局部共轭；该辛同胚在局部将 Char $P$映至 Char $\mathrm{D}_1$。

本节将以内蕴的几何语言阐释微局部化，并以稍具一般性的形式表述 Dencker 的结果。我们将证明，任何实主类型且主符号为标量的一阶伪微分算子 $P$ 在 $\mathscr{E}$ 上都微局部共轭于 $\mathrm{D}_1$，其意义如下面定理中的（3.62c）所述。

**定理 3.3.10** （微局部化）。 设 $\mathscr{E}, \Omega^{1}/^{2} \to M$ 分别是秩为 $k$ 的向量丛和半密度丛，它们定义在 $d$ 维流形 $M$ 上。设$P \in \Psi\mathrm{DO}^{1}$（$M$；$\mathscr{E} \otimes \Omega^{1}/_{2}$）是$\mathscr{E}$ 上的一个适当支撑的一阶伪微分算子，其实标量主符号为 $p$，且满足

(a) $p(x_0, \xi^0) = 0$ 对于去心余切丛 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中的某个元素 $(x_0, \xi^0)$ $M$;

(b) $p$ 的哈密顿向量场 $X_p$ 与径向方向在$(x_0, \xi^0)$处线性无关。

那么对于任意 $m \in \mathbb{R}$，存在

(i) 一个齐次辛同胚 $\varkappa$，它从 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$ 中的开锥邻域 $\mathcal{U}$ （以 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$ 为中心）映射到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 中的开锥坐标图 $(\mathcal{U}, (x^i, \xi_i))$ （以 $(x_0, \xi^0)$ 为中心），使得

$$\varkappa^* p = \xi_1 \mathbb{1}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}; \tag{3.61}$$

*(ii)* 真支撑拉格朗日分布 $\mathsf{B}\in I^{m}\big(M\times\mathbb{R}^{d},\varGamma';\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{k},\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}{}_{/2}(M\times\mathbb{R}^{d})\big)$和 $\tilde{\mathsf{B}}\in I^{-m}\big(\mathbb{R}^{d}\times M,\varGamma^{-1\prime};\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathbb{C}^{k})\otimes\Omega^{1}{}_{/2}(\mathbb{R}^{d}\times M)\big)$，使得 $B\tilde{B},\tilde{B}B$二者均为零阶伪微分算子，并且

$$\mathrm{WF}'\,\mathsf{B}\subset\mathcal{U}_{(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)},\qquad \mathrm{WF}'\,\tilde{\mathsf{B}}\subset\tilde{\mathcal{U}}_{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1;x_0,\xi^0)},\tag{3.62a}$$

$$(x_0,\xi^0)\notin\mathrm{ES}(B\tilde{B}-I_{\mathscr{E}}),\qquad (0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\notin\mathrm{ES}(\tilde{B}B-I),\tag{3.62b}$$

$$(x_0,\xi^0)\notin\mathrm{ES}(B\mathrm{D}_1\tilde{B}-P),\qquad (0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\notin\mathrm{ES}(\tilde{B}PB-\mathrm{D}_1),\tag{3.62c}$$

其中，$\varGamma$是 $\varkappa$的图，$D_1:=-i\,\mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}\,\partial/\partial y^1\colon\ C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}^{k})\to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}^{k})$，而 $U_{(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)}$ 分别为 $(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\in\dot{T}^{*}M\times\dot{T}^{*}\mathbb{R}^{d}$ 的较小锥形邻域，$\tilde{U}_{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1;x_0,\xi^0)}$ 是 $(0,\eta_1\mathrm{d}y^1;x_0,\xi^0)\in\dot{T}^{*}\mathbb{R}^{d}\times\dot{T}^{*}M$的较小锥形邻域。

此外，如果 $\mathscr{E}$上存在更多结构，则傅里叶积分算子 $B$、$\tilde{B}$ 可以进一步简化如下。

（*A*）如果 $\mathscr{E}\to M$ 赋有一个半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，并且相对于该半双线性型，$P$ 是对称的，那么，只要 $\mathbb{C}^{k}$ 赋有一个与 $(\cdot|\cdot)$ 具有相同符号差的标准半双线性型，就可以将 $\tilde{B}$ 选为 $B$ 的形式伴随算子。

*(B)* 若 $\mathscr{E}\to M$ 配备了与 $P$相容的联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$，则$\mathsf{B}$和 $\tilde{\mathsf{B}}$的主符号可分别在$\mathbb{1}$ 附近$(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)$和$(0,\eta_1\mathrm{d}y^1;x_0,\xi^0)$处选取，所相对于的标架沿 $X_p$平行。

*(C)* 在向量丛 $\big(\mathscr{E}\to M$上，$(\cdot|\cdot)$，$\nabla^{\mathscr{E}}\big)$其中 $\nabla^{\mathscr{E}}$是与 $P$相容的联络，且$P$ 相对于半双线性型$(\cdot|\cdot)$是对称的；我们可以选取$\mathsf{B}$，使其主符号在$\mathbb{1}$ 附近$(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)$处等于$1$，所相对于的标架是$\tilde{}$酉的，且沿 $X_p$平行；并且$\mathsf{B}=\mathsf{B}^{*}$。

这一概念的示意图见图3.2。

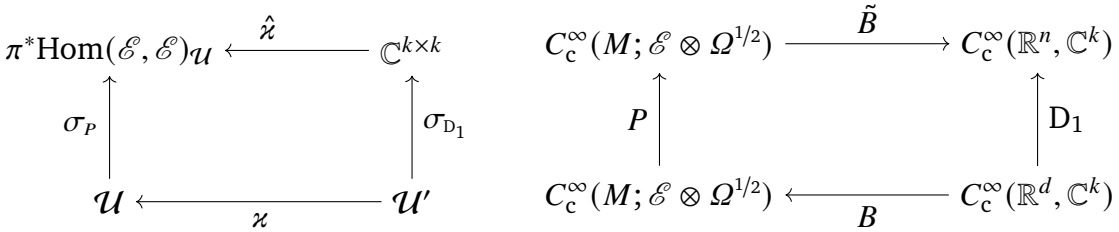


图3.2：微局部化示意图。右侧图示在微局部意义下交换（3.62c），而映射 $\hat{}\varkappa$ 由 $\hat{}\varkappa(\cdot)=\sigma_{\mathsf{B}}(\cdot)\sigma_{\tilde{\mathsf{B}}}$ 定义；其余符号的定义均见定理 3.3.10。

证明。我们将仿照标量版本 [35,命题6.1.4、引理6.64]（另见 [23, 命题26.13]）中所采用的策略证明该命题。存在 $\varkappa$ 满足（3.61）的对象，这是由齐次达布定理 A.1.4保证的，该定理的前提正是我们的假设 （a）和（b）。假设 $b\in S^{m}\big(\varGamma;\ \mathbb{M}\otimes\overbrace{\quad}$同态（$\mathbb{C}^{k}$，$\mathscr{E}$）$\big)$在

$(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\in\Gamma$的一个锥形邻域内具有逆。因此，根据第 2.3.6 节中的构造，我们可以得到一个支集为真且适当地支撑的 $\mathrm{B}_1\in I^m\left(M\times\mathbb{R}^d,\Gamma';\ \text{同态}(\mathbb{C}^k,\mathscr{E})\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(M\times\mathbb{R}^d)\right)$，使得 $\mathrm{WF}'\mathrm{B}_1\subset\mathrm{U}_{(x_0,\xi^0;\ 0,\eta_1\mathrm{d}y^1)}$，并且 $\mathrm{B}_1$ 在$(x_0,\xi^0;\ 0,\eta_1\mathrm{d}y^1)$处是非特征的（定义2.3.14）。

根据定理2.3.16，存在唯一的微局部拟逆 $\tilde{\mathrm{B}}_1\in I^{-m}\left(\mathbb{R}^d\times M,\Gamma^{-1\prime};\text{同态}(\mathscr{E},\mathbb{C}^k)\otimes\Omega^{1}\!/_{2}(\mathbb{R}^d\times M)\right)$，使得 (3.62b) 成立。由于在 $\mathrm{U}_{(x_0,\xi^0;0,\eta_1\mathrm{d}y^1)}$ 上，$\mathrm{B}_1$和 $\tilde{\mathrm{B}}_1$的主符号互为倒数，根据 (3.61) 和埃戈罗夫定理2.3.17，$\tilde{B}_1PB_1$在 $\mathrm{U}'$ 上具有主符号 $\eta_1\,\mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}$。此外

$$(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\notin\mathrm{ES}(\tilde{B}_1PB_1-\mathrm{D}_1-Q) \tag{3.63}$$

对于某个 $Q\in\Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k})$。

为了找到具有所述性质的算子 $B$ 和 $\tilde{B}$，我们构造适当支撑的椭圆 $B_2,\tilde{B}_2\in\Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k})$，使得

$$\tilde{B}_2B_2\equiv I\Leftrightarrow\tilde{B}_2B_2=I\mod\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k}), \tag{3.64}$$

$$\tilde{B}_2(\mathrm{D}_1+Q)B_2\equiv\mathrm{D}_1\Leftrightarrow\tilde{B}_2(\mathrm{D}_1+Q)B_2=\mathrm{D}_1\mod\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k}), \tag{3.65}$$

并令 $B:=B_1B_2$ 并令 $\tilde{B}:=\tilde{B}_2\tilde{B}_1$。则（3.64）、（3.65）和（3.63）推出

$$(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\notin\mathrm{ES}\left(\tilde{B}_2(\tilde{B}_1B_1-I)B_2\right)=\mathrm{ES}(\tilde{B}B-I), \tag{3.66}$$

$$(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\notin\mathrm{ES}\left(\tilde{B}_2(\tilde{B}_1PB_1-\mathrm{D}_1-Q)B_2\right)=\mathrm{ES}(\tilde{B}PB-\mathrm{D}_1), \tag{3.67}$$

这就证明了（3.62b）和（3.62c）的后半部分；而在左侧和右侧分别乘以 $B$ 和 $\tilde{B}$ 后，前半部分立即可得。

因此，剩下的任务是构造 $B_2$ 和 $\tilde{B}_2$，使得（3.64）和（3.65）成立。由拟逆的存在性（例如参见 [76, 定理 18.1.24]），对于每个椭圆的 $B_2\in\Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k})$，都存在 $\tilde{B}_2\in\Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k})$，使得 $\tilde{B}_2B_2-I$和 $B_2\tilde{B}_2-I$光滑。在（3.65）的左侧乘以 $B_2$，便得到（3.65）的等价条件：

$$[\mathrm{D}_1,B_2]_-+QB_2\equiv0 \tag{3.65′}$$

对于某个椭圆的 $B_2$。

我们现在将从主符号开始，逐阶构造方程（3.65′）的一个解。方程（3.65′）的主符号在以下条件成立时为零

$$-\mathrm{i}\left\{\sigma_{\mathrm{D}_1},\sigma_{B_2}\right\}+\sigma_Q\sigma_{B_2}=0, \tag{3.68}$$

作为 D 的次主符号$_1$ 消失；参见（3.54）。若 $q$ 是$Q$的主符号，则由前面的方程可得

$$\frac{\partial b_0}{\partial y^1}=-\mathrm{i}\,qb_0 \tag{3.69}$$

对于 $B_2$ 的主符号 $b_0$ 。这是一个一阶微分方程，因此给定初始条件 $b_0(y^1 = 0, \cdot) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}$ 后，存在唯一解，且该解关于 $q$ 光滑。由构造可知， $b_0(y, \eta)$ 是零次齐次的，且 $\det(b_0(y, \eta))$ 不为零。因此 $b_0^{-1}$ 存在，且它是零次齐次的。定义一个适当支撑的 $B_{2,0} \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{k\times k})$，其齐次主符号为 $b_0$，现在依次构造 $B_{2,l} \in \Psi\mathrm{DO}^{-l}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{k\times k})$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$:

$$[\mathrm{D}_1, B_{2,0} + \ldots + B_{2,n}]_- + Q(B_{2,0} + \ldots + B_{2,n}) = R_{n+1} \in \Psi\mathrm{DO}^{-(n+1)}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{k\times k}). \tag{3.70}$$

这等价于相应的主符号 $b_n$ of $B_{2,n}$ and $r_n$ of $R_n$ of degree–$n$ 满足

$$-\mathrm{i}\frac{\partial b_n}{\partial y^1} + q b_n = -r_n. \tag{3.71}$$

该方程可通过杜哈梅尔原理求解，其解为

$$b_n(y,\eta) = -\mathrm{i}\, b_0(y,\eta) \int_0^{y^1} b_0^{-1}(t, y^2, \ldots, y^d; \eta)\, r_n(t, y^2, \ldots, y^d; \eta)\, \mathrm{d}t. \tag{3.72}$$

然后，利用渐近求和（见定义B.1.4）对 $B_{2、n}$ 的符号，现在可以构造一个算子 $B_2$，使其满足（3.65′）。

**$P$ 对称的情形：**

现在我们将证明，在 $B$ 和 $\tilde{B}$ 的情形下，如果 $P$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 对称，则可以将它们选为微局部酉算子。我们赋予空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$ 一个与 $(\cdot|\cdot)$ 具有相同符号差的标准半双线性标量积。算子 $\mathrm{D}_1$ 因而是对称的。此外，我们作出选择

$$m = 0 \qquad \in I^0(M \times 。从左侧$$

$\mathbb{R}^d$ $\Gamma'$ $\mathbb{C}^k$ $\mathscr{E}$ $\otimes\Omega^{1\,2}$ $M\times\mathbb{R}^d$ 3 62
作用于 B，；同态(，)/()于（.c）上，得到等价的微局部共轭关系

$$(x_0, \xi^0; 0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{WF}'(P\mathrm{B} - \mathrm{BD}_1) \tag{3.73}$$

在 $P$和 $\mathrm{D}_1$ 之间。取其伴随算子可得 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1;\ x_0, \xi^0) \notin \mathrm{WF}'(\mathrm{B}^* P - \mathrm{D}_1 \mathrm{B}^*)$，其中 $\mathrm{B}^* \in I^0\big(\mathbb{R}^d \times M, \Gamma^{-1\prime};$ 同态$(\mathscr{E}^*, \mathbb{C}^k) \otimes \Omega^{1/2}(\mathbb{R}^d \times M)\big)$，因此

$$(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(B^* P B - \mathrm{D}_1 B^* B), \tag{3.74a}$$

$$(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(B^* P B - B^* B \mathrm{D}_1). \tag{3.74b}$$

因此，$(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}\ [B^* B, \mathrm{D}_1]_-$，并且 $B^* B$ 在 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$ 处是非特征的。由于 $B^* B$是一个伪微分算子，而 $\mathrm{i}\,\mathrm{D}_1$ 表示关于 $y^1$的微分，交换子 $[B^* B, \mathrm{D}_1]_-$ 的全符号就是 $-\mathrm{i}$ 乘以全符号关于 $y^1$的导数。因此，在符号层面上，上述结论意味着， $B^* B$的全符号是一个与 $y^1$ 无关的项和一个在 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$ 的锥形邻域 U′ 中快速衰减的项之和。由于 $B^* B$ 在那里具有椭圆性，它在 U′ 上有下界。根据命题 3.3.11（将在本证明之后立即给出），可以找到

一个适当支撑的对称 $\Psi \in \Psi\mathrm{DO}^0(U',\ \mathbb{C}^{k\times k})$，其主符号与 $B^*B$ 的主符号相同，并且满足

$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \operatorname{Char}\Psi, \tag{3.75a}$$
$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\Psi^*\Psi - B^*B), \tag{3.75b}$$
$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}\,[\Psi, \mathrm{D}_1]_-, \tag{3.75c}$$

其中 $U'$ 是 $\mathcal{U}'$ 在 $\mathbb{R}^d$上的投影。注意，命题 3.3.11 （针对作用于同一丛上的算子陈述）只能在 $\mathscr{E}$的一个局部平凡化中使用，即通过一个正交归一标架将 $\mathscr{E}$的纤维与 $\mathbb{C}^k$ 相识别，并且使半双线性型彼此对应。正是在这一阶段，我们必须要求 半双线性型具有相同的符号差。

这里，最后一个性质源于以下事实：在命题 $\Psi$ 中构造 3.3.11 的全符号时，只涉及符号的乘法和渐近求和。符号可表示为两项之和这一性质，其中一项与 $y_1$无关，另一项在 $\mathcal{U}'$的一个锥形邻域内快速衰减，在这些运算下保持不变。因此， $\Psi$ 的全符号也具有这种形式。

椭圆性（3.75a）意味着存在唯一的微局部拟逆 $\Phi$对于 $\Psi$。换言之，存在一个适当支撑的 $\Phi \in \Psi\mathrm{DO}^0(U', \mathbb{C}^{k\times k})$使得

$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \operatorname{Char}\Phi, \tag{3.76a}$$
$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\Phi\Psi - I) \Leftrightarrow (0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\Psi\Phi - I). \tag{3.76b}$$

注意，（3.76a）、（3.75b）、以及（3.75c）可推出

$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\Phi^*\Psi^*\Psi\Phi - \Phi^*B^*B\Phi), \tag{3.77a}$$
$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\Phi[\Psi, \mathrm{D}_1]_-\Phi). \tag{3.77b}$$

计及这一点，（3.76b）可推出

$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}\left(I - (B\Phi)^*B\Phi\right), \tag{3.78a}$$
$$(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}[\Phi, \mathrm{D}_1]_-, \tag{3.78b}$$

由此证明完成，因为（$x_0,\xi^0;\ 0,\eta_1\mathrm{d}y^1$） $\notin \mathrm{WF}'(\mathrm{B}[\mathrm{D}1,\Phi]_-)$，因此对于 $\mathrm{B}` := \mathrm{B}\Phi$，我们有（$x_0$, $\xi^0;\ 0,\eta_1\mathrm{d}y^1$） $\notin \mathrm{WF}'(P\mathrm{B}` - \mathrm{B}`\mathrm{D}_1)$。

**联络 P-相容性的情形：**
我们假设 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 与 $P$相容。由于B和 ˜B的符号构造是局部的，我们可以固定一个局部标架和局部坐标。我们将把一般情形化为 $P$ 的次主符号在$(x_0,\xi^0)$附近消失的情形。

(i) 次主符号消失的情形：我们假设 $P$ 是相对于某个丛标架、用局部坐标给出的，并且在该标架下， $\sigma_P^{\mathrm{sub}} = 0$在$(x_0, \xi^0)$附近。设 $\tilde{P}$ 为一个主符号为 $p$ 且次主符号消失的标量算子。使用维尔量子化（例如参见 [76, 第18.5]节），可以构造 $B_1$ 和 $\tilde{B}_1$，使埃戈罗夫定理在次主符号层面成立 [119, 定理 1]。我们可以选择这些算子，使其主符号恒为1，并且 $\tilde{B}_1 \tilde{P} B_1$（分别为 $B_1 \mathrm{D}_1 \tilde{B}_1$）的次主符号在$(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$（分别在$(x_0, \xi^0)$）附近消失。现在，我们将从 $B_1$ 和 $\tilde{B}_1$开始，采用与之前相同的构造。于是，余项 $Q$ 的主符号 $q$ 消失。接着，对 $B_2$ 和 $\tilde{B}_2$ 的构造会得到全符号为标量、且主符号恒等于1的算子。由此可知，若 $P$ 的次主符号在$(x_0, \xi^0)$附近消失，则 $B$和 $\tilde{B}$可以选为标量算子。其主符号沿着 $X_p$ 和 $X_{\sigma_{\mathrm{D}_1}}$的流线保持不变。

(ii) 次主符号非零的情形：我们将对 $P$ 进行微局部变换，使其成为标量伪微分算子 $\tilde{P}$。具体而言，对于任意适当支撑的$\tilde{P} \in \Psi$微分算子$^1(M;\ \Omega^1/2)$，我们希望找到一个 $\hat{B} \in \Psi$ 微分算子$^0(\ M;\ \mathscr{E} \otimes \Omega^1/2)$，使得 $\hat{B}$在 $(x_0, \xi^0)$ 和 $(x_0, \xi^0)$ 处非特征，且 $\notin \mathrm{ES}(P \hat{B} - \hat{B}\tilde{P} I)$。我们在局部构造这个算子，因此固定 $x_0$ 点附近 $\mathscr{E}$ 的一个局部标架。在拉回丛 $\pi^*\mathscr{E} \to \dot{\mathrm{T}}^*M$ 中，其中 $\pi\colon \dot{\mathrm{T}}^*M \to M$，我们也可以构造一个相对于 $\nabla^{\pi^*\mathscr{E}}_{X_p}$ 沿 $X_p$ 平行的局部标架。构造这个局部平行标架时，先选取一个与 $X_p$ 横截的局部横截面，并在该横截面上使用原标架。随后沿 $X_p$ 的流线进行平行移动，即可得到所需的标架。从原标架到平行标架的标架变换矩阵，是 $b\mathrm{T}^*M$ 上 $\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{E}, \pi^*\mathscr{E})$ 的一个局部截面 $\to$ 。根据构造，该标架是 0 次齐次的。现在选取一个椭圆零阶伪微分算子 $\hat{B}$，其主符号 $\sigma_{\hat{B}}$ 在 U 上等于 $b$。令 $\check{B}$ 为 $\hat{B}$ 的一个拟逆。由 (3.54) 可知，$\check{B}P\hat{B}$ 的次主符号在 U 上等于 $-\mathrm{i}\, X_p \sigma_{\hat{B}} + [\sigma_P^{\mathrm{sub}}, \sigma_{\hat{B}}]_-$。根据 $P$-兼容性，这恰好是平行局部丛标架中的联络 1-形式公式，因此它为零。命题 3.3.4 表明，这正是 $\check{B}P\hat{B}$ 在 U 上的次主符号公式，因此，$\tilde{P} \equiv \check{B}P\hat{B}$ 在 U 上的次主符号为零。

> 这将问题化归为末段中讨论的次主符号消失的情形，并令 $B_3$ 和 $\tilde{B}_3$ 为相应的标量傅里叶积分算子。这意味着 $B$ 和 $\tilde{B}$ 具有如下形式： $B := \hat{B}B_3$ 以及 $\tilde{B} := \tilde{B}_3\check{B}$。由于 $\hat{\mathrm{B}}$ 的主符号是到平行标架的过渡函数，且 $\check{B}_3$ 是一个标量算子，因此可以选择 B 和 B 的主符号，使其相对于沿 $X_p$ 的平行标架 $\mathbb{1}$。

**对称的 $P$ 与联络 $P$-相容的情形：**
最后，假设 $P$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的，并且 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 与 $P$ 相容。

上述构造 $\hat{}B$ 可以使用 $\mathscr{E}$ 的一个正交标架，以及 $\pi^*\mathscr{E}$ 的另一个沿 $X_p$ 平行的正交标架来重复进行。相对于这个平行正交标架，可以得到一个在 $(x_0,\ \xi^0)$ 附近主符号为 $\mathbb{1}$ 的算子。现在按照之前的方式再次构造 $\Psi$，并注意到可以通过这种方式使主符号保持为 $\mathbb{1}$，从而将 $B$ 变为一个微局部酉算子，即 $\tilde{B}=B^*$，并具有所需的性质。■

作为前述证明的补充，我们给出 Hörmander 平方根构造的一个变体 [77, 命题 2.2。2]适用于向量丛。

**命题 3.3.11**。 设 $(\mathscr{E}\to M$ 是流形 $M$ 上的一个向量丛，$(\cdot|\cdot)\ )$ 是其上的一个非退化半双线性型，且 $\Omega^{1}{}_{/2}\to M$ 是 $M$ 上的半密度丛。假设 $P\in\Psi\mathrm{DO}^m\ (M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1}{}_{/2})$ 是一个阶为 $m\in\mathbb{R}_+$ 的适当支撑的伪微分算子，它关于 $(\cdot|\cdot)$ 对称，在去心余切丛 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 的 $M$ 中的锥形邻域 $\mathcal{U}$ 内是椭圆的，其中 $(x_0,\xi^0)\ \notin\mathrm{ES}\,P$，并且其主符号为

$$p=q^*q \tag{3.79}$$

对于某个 $q\in C^\infty(\mathcal{U},\mathrm{End}\ \mathscr{E})$。于是，可以找到一个适当支撑的、关于$(\cdot|\cdot)$对称的 $Q\in\Psi\mathrm{DO}^{m/2}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}{}_{/2})$，使得

$$(x_0,\xi^0)\notin\mathrm{ES}(P-Q^*Q),\qquad (x_0,\xi^0)\notin\mathrm{ES}\,Q, \tag{3.80}$$

其中 $U$ 是$\mathcal{U}$的底投影。

证明。 关于 $p$ 的假设 $q$ 意味着其为 $m/2$ 次齐次，这又意味着 $q\in S^{m/2}(\mathcal{U},\mathrm{End}\ \mathscr{E})$；参见定义 B.1.6 和附录 B.3。我们定义一个适当支撑的 $Q_0\in\Psi\mathrm{DO}^{m/2}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}{}_{/2})$，其主符号为 $q$。不失一般性，$Q_0$ 可取为对称的；否则，只需将 $Q_0$ 替换为 $(Q_0+Q_0^*)/2$，而不改变主符号。于是 $P-Q_0^*Q_0\in\Psi\mathrm{DO}^{m-1}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}{}_{/2})$。

现在我们只需估计低阶项，并将证明，对于所有$k\in\mathbb{N}$，总能得到适当支撑且对称的 $Q_k\in\Psi\mathrm{DO}^{m/2-k}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1}{}_{/2})$，使得

$$R_k:=P-(Q_0+\ldots+Q_k)^*(Q_0+\ldots+Q_k)\in\Psi\mathrm{DO}^{m-1-k}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}). \tag{3.81}$$

我们进行归纳。显然，$k=1$ 已得到验证。注意，若相应地选取了 $Q_k$s，则

$$P-|Q_0+\ldots+Q_k|^2=R_k-(Q_k^*Q_0+Q_0^*Q_k)-Q_k^*Q_k+\ldots\in\Psi\mathrm{DO}^{m-1-k}(U;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}). \tag{3.82}$$

由于 $R_k$是对称的，$R_k-R_k^*$的主符号模 $S^{m-2-k}(\mathrm{U},\mathrm{End}\mathscr{E})$等于2 i $\mathfrak{I}(\sigma_{R_k})$。于是，令

$$\forall(x,\xi)\in\mathcal{U}:\sigma_{R_k}(x,\xi)=\sigma_{Q_k}^*\circ q\,(x,\xi)+q^*\circ\sigma_{Q_k}\,(x,\xi), \tag{3.83}$$

也就是说，在 $q(x,\ \hat{}\xi)$ 在 $\mathrm{End}\ \mathscr{E}_x$ 中对每个 $x\in U$ 以及 $\hat{}\,\xi:=\xi/\|\xi\|\in\mathbb{S}^{\mathrm{rk}(\mathscr{E})-1}$ 都可逆的区域内。最后，通过按照渐近求和的意义构造 $Q$ 的全符号，可以得到该结果；换言之：$Q:\sim\sum_{k=0}^\infty Q_k$。■

**备注 3.3.12**。 前一定理的假设对于任意 $Q$ 实主类型的伪微分算子都由备注 2.2.11得到满足，因此定理 3.3.10通过重新定义 $Q$ 也适用于 $B$。

现在我们将说明正规双曲算子的微局部化 $\Box$，这是通过将一般流形替换为前述结果的推论 $M$ 一个洛伦兹（不一定是整体双曲）时空$(\mathscr{M}, \mathrm{g})$。特别是，定理 $P$ 中的特征点 3.3.10 (a) 将由 $\mathscr{M}$ 上的任意类光余向量取代，因此， $p$ 的双特征曲线实际上是 $\mathrm{T}^{*}\mathscr{M}$中的类光测地线。

定理 *3.3.13.* 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是秩为 $k$、定义在 $d$维洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, g)$ 上的向量丛，且 $\Box: C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 是一个正规双曲算子。记 $\nabla^{\mathscr{E}}$为与 $\Box$ 相关联的魏岑伯克联络，记 $\Gamma$为从 $\dot{T}^{*}\mathbb{R}^{d}$ 中 $(0, \eta_1 dy^1)$ 的一个开锥邻域 $U'$ 到以 $x_0, \xi^0$ 在 $\mathscr{M}$ 上的任意类光余向量为中心的开锥坐标图 $(U, (x^i, \xi_i))$ 的齐次辛同胚的图。那么，对于任意 $m \in \mathbb{R}$，都可以找到真支撑拉格朗日分布 $A \in I^{-1/2+m}\big(\mathscr{M} \times \mathbb{R}^d, \Gamma'; Hom(\mathbb{C}^k, \mathscr{E})\big)$ 和 $\tilde{A} \in I^{-1/2-m}\big(\mathbb{R}^d \times \mathscr{M}, \Gamma^{-1\prime}; Hom(\mathscr{E}, \mathbb{C}^k)\big)$，使得 $A\tilde{A}, \tilde{A}A$ 都是阶为 $-1$ 的伪微分算子，并且

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{A} \subset \mathcal{U}_{(x_0,\xi^0;0,\eta_1 \mathrm{d}y^1)}, \qquad \mathrm{WF}'\,\tilde{\mathrm{A}} \subset \mathcal{U}'_{(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1;x_0,\xi^0)}, \tag{3.84a}$$

$$(x_0, \xi^0) \notin \mathrm{ES}(A\tilde{A} - I_{\mathscr{E}}), \qquad (0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\tilde{A}A - I), \tag{3.84b}$$

$$(x_0, \xi^0) \notin \mathrm{ES}(A\mathrm{D}_1\tilde{A} - \Box), \qquad (0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{ES}(\tilde{A}\Box A - \mathrm{D}_1). \tag{3.84c}$$

此处 $D_1 = -i\, \mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}\, \partial/\partial y^1 : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$ 以及 $U_{(x_0,\xi^0;0,\eta_1 dy^1)}$ 分别是 $(x_0, \xi^0; 0, \eta_1 dy^1) \in \dot{T}^{*}\mathscr{M} \times \dot{T}^{*}\mathbb{R}^n$ 和 $(0, \eta_1 dy^1; x_0, \xi^0) \in \dot{T}^{*}\mathbb{R}^n \times \dot{T}^{*}\mathscr{M}$ 的小锥形邻域。

此外，如果 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 配备了一个半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，且关于该半双线性型 $\Box$ 是对称的，那么，如果 $\mathbb{C}^k$ 配备了一个与 $(\cdot|\cdot)$ 具有相同符号差的标准半双线性型，则可以选择 $A$，使其相对于一个沿测地线流平行且在微局部意义下 $A = \tilde{A}^{*}$ 的酉丛标架为标量算子。

证明。通常的策略是将 $\Box$ 化为一阶算子，从而可以应用定理 3.3.10。为此，取一个在 $\mathscr{E}$上的、阶为 $-1/2$ 的适当支撑的椭圆对称伪微分算子 $L$，使其具有标量主符号 $l$ 且次主符号为零。这样的算子总是存在，因为可以先在局部构造，再利用适当的单位分解将其拼接为全局算子。于是， $L\Box L$是一阶伪微分算子，其主符号 $l^2(x,\xi)\,\mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\xi)\,1\mathrm{End}_{\mathscr{E}}$ 在 $(x_0, \xi^0)$ 上消失。根据定理 3.3.8 和推论 3.3.9， $\nabla^E$ 分别与 $\Box$和 $L\Box L$相容。因此，定理 3.3.10 的假设均得到满足，并且通过令 $\mathrm{A} := L\mathrm{B}$，$\mathrm{A} := \mathrm{B}L$，可得到其 $\tilde{\mathrm{A}}$ $\tilde{\mathrm{B}}$结论，其中 B、$\tilde{\mathrm{B}}$ 是定理 3.3.10 中构造的拉格朗日分布。如果 $\Box$ 是对称的，则我们也选择 $L$ 为对称的。■

**注记 3.3.14**。 在前面的定理中，我们已经在一个类光余向量附近将 $\Box$ 微局部共轭为 $\mathrm{D}_1$。也可以按如下方式细化这一构造。设 $\mathbb{I}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个紧区间，并且 $\gamma\colon \mathbb{I}\to \dot{\mathrm{T}}^*M$ 是 $X_p$的一条积分曲线:

$$p\circ\gamma = 0. \tag{3.85}$$

如果 $\gamma$ 与投影 $\dot{\mathrm{T}}^*M \to \dot{\mathrm{T}}^*M/\mathbb{R}_+$ 的复合是单射的，那么可以找到 $\mathbb{I}\times\{(0,\eta_1 \mathrm{d}y^1)\}$的一个锥形邻域 $\mathrm{V}'$，以及一个光滑齐次辛同胚 $\varrho$，它将 $\mathrm{V}'$ 映射到 $\gamma(\mathbb{I})$ 的一个开锥邻域 $\varrho(\mathrm{V}') \subset \dot{\mathrm{T}}^*M$，使得 [23,命题 26.1。6]

$$\varrho\big(\mathbb{I}\times\{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\}\big) = \gamma(\mathbb{I}), \qquad \varrho^* p = \xi_1\, \mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathscr{E}}. \tag{3.86}$$

仿照定理 3.3.10 的证明，可以将 $P$ 微局部化到 $\mathrm{D}_1$ 上 $\gamma(\mathbb{I})$（参见 [23,命题 26.1。3′] 标量版本）。

因此，如果 $\Gamma$ 是从 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$ 中 $\mathbb{I}\times\{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\}$的一个锥形邻域到 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$中类光测地线 $\gamma(\mathbb{I})$ 的一个锥形邻域的齐次辛同胚的图，那么定理 3.3.13 的证明表明，对于任意 $m\in\mathbb{R}$，存在拉格朗日分布 $\mathrm{A}\in I^{-1/2+m}\big(\mathscr{M}\times\mathbb{R}^d,\Gamma';\ \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\mathscr{E})\big)$和 $\tilde{\mathrm{A}}\in I^{-1/2-m}\big(\mathbb{R}^n\times\mathscr{M},\Gamma^{-1\prime};\ \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathbb{C}^N)\big)$，使得 $A\tilde{A}, \tilde{A}A$二者都是阶为 $-1$的伪微分算子，并且

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{A}\subset\mathcal{V}_\Gamma, \qquad \mathrm{WF}'\,\tilde{\mathrm{A}}\subset\mathcal{V}'_{\Gamma^{-1}}, \tag{3.87a}$$

$$\gamma(\mathbb{I})\cap\mathrm{ES}(A\tilde{A}-I_{\mathscr{E}})=\emptyset, \qquad \mathbb{I}\times\{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\}\cap\mathrm{ES}(\tilde{A}A-I)=\emptyset, \tag{3.87b}$$

$$\gamma(\mathbb{I})\cap\mathrm{ES}(A\mathrm{D}_1\tilde{A}-\Box)=\emptyset, \qquad \mathbb{I}\times\{(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\}\cap\mathrm{ES}(\tilde{A}\Box A-\mathrm{D}_1)=\emptyset, \tag{3.87c}$$

其中，$\mathrm{V}_\Gamma$，$\mathrm{V}'_{\Gamma^{-1}}$ 分别是限制在 $\gamma(\mathbb{I})$及其逆映射上的 $\Gamma$ 的小锥形邻域。

我们通过定理3.3.10的一个简单应用来结束本节，从而推导出Hörmander奇性传播定理的丛版本 [78], [35, 定理 6.1.1']。由于

$$C^\infty(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}), \tag{3.88}$$

这种对通常的（光滑）波前集概念的细化，可以通过Sobolev波前集来刻画。

**定义 3.3.15**。设 $\mathscr{E}$，$\Omega^{1/2}\to M$ 分别为流形 $M$ 上的向量丛和半密度丛，并且 $s\in\mathbb{R}$。相对于Sobolev空间 $H^s\mathrm{loc}\,(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$，分布$u\in\mathrm{D}'(M;\ \mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$的**Sobolev波前集**$\mathrm{WF}^s u$ 定义为 [35,p. 201]

$$\mathrm{WF}\,u := \bigcap_{\substack{P\in\Psi\mathrm{DO}^0(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})\\ Pu\in H^s_{\mathrm{loc}}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})}} \mathrm{Char}\,P = \bigcap_{\substack{P\in\Psi\mathrm{DO}^s(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})\\ Pu\in L^2_{\mathrm{loc}}(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})}} \mathrm{Char}\,P, \tag{3.89}$$

其中，$\mathrm{Char}\,P$ 是 $P$ 的特征集，交集遍历所有具有真支集的 $P$。

局部而言，这意味着对于任意开集 $U \subset \mathbb{R}^d$，当且仅当存在一个在 $U$ 上的紧支集截面 $f$，其在 $x_0 \in U$ 处不为零，并且加权傅里叶变换 $(1+|\xi|^2)^s |\mathrm{F}(fu)(\xi)|^2$ 在 $\xi^0$ 的某个锥形邻域内可积时，$(x_0,\xi^0) \notin \mathrm{WF}^s u$ 不属于分布 $u \in \mathrm{D}'(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$的Sobolev波前集。关于这一更精细波前集的重要性质汇总，可参见例如 [120,附录 B]。

Hörmander 定理已由 Taylor 推广到伪微分算子系统 [106, 定理 4.1 （第 135 页），2.2 （第 154 页）] （关于 Sobolev波前集），并由 Dencker [45, 定理 4.2]（关于极化集）进行了推广。如下所述，我们的结果与 Taylor 的结果相似，但采用几何方式表述，并通过运用定理 3.3.10中发展的向量丛上的微局部化，以不同方式加以证明。

定理 *3.3.16*（索博列夫正则性的传播）。设 $\mathscr{E}$、$\Omega^{1/2} \to M$ 分别为流形 $M$ 上的向量丛和半密度丛，且 $u \in D'(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$。假设对于某个 $m \in \mathbb{R}$，$\Psi \in \Psi DO^m(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$ 满足定理 *3.3.10* 的假设 $(a)$ 和 $(b)$，并且 $I$ 是由 $\Psi$ 的主符号生成的哈密顿向量场的一条积分曲线上的区间，使得 $I \cap WF^s(\Psi u) = \emptyset$。那么，要么 $I \cap WF^{s+m-1} u = \emptyset$，要么 $I \subset WF^{s+m-1} u$。

证明。一旦我们得到定理 3.3.10，证明的其余部分就与其标量版本 [35, 定理 6.1.1’]（另见 [23, 定理 26.1.4]）相同。为完整起见，我们在此给出详细证明。通过用适当的傅里叶积分算子进行共轭，我们将论断归约到情形 $m = 1$。换言之，只需考虑定理 3.3.10 中的 $P$，而不是 $\Psi$，即可利用伪微分算子（例如见 [76, 第 92]页）和傅里叶积分算子（例如见 [23, 推论 25.3.2]）的索博列夫连续性，从而得出结论。通过微局部化（定理 3.3.10），进一步可将分析归结为：通过选取定理 3.3.10 中傅里叶积分算子 $B$ 的阶等于 $-s$，得到 $P = \mathrm{D}1$、$s = 0$ 以及 $(x_0, \xi^0) = (0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$。然后，根据 $\mathrm{D}_1$ 的超前和推迟基本解（例 3.2.11）的形式，以及它们将 $L^2_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$ 映射到 $L^2$局部 $(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$（参见命题 3.2.12），即可得到该结论。■

根据注记3.3.12，前述定理可改述为

定理 *3.3.17*。设 $\mathscr{E}$ 是流形 $M$ 上的向量丛，$\Omega^{1/2} \to M$ 是半密度丛，且 $u \in D'(M;\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2})$。假设 $P$ 是 $\mathscr{E}\otimes\Omega^{1/2}$ 上的一个 $m \in \mathbb{R}$ 阶实主类型伪微分算子，并且 $I$ 是由 $q$ 生成的哈密顿向量场的一条积分曲线上的区间，如定义 *2.3.6* 中所述，满足 $I \cap WF^s(Pu) = \emptyset$。那么，要么 $I \cap WF^{s+m-1} u = \emptyset$，要么 $I \subset WF^{s+m-1} u$。

## 3.3.4 定理3.3.1的证明

首先，我们证明费曼拟基本解（如果存在）是唯一的。

**费曼拟基本解的唯一性**

假设 $E_{\mathrm{L}}$ （分别地， $E_{\mathrm{R}}$）是 $\Box$的左（分别地，右）费曼拟基本解，即，$\mathrm{WF}'(E_{\mathrm{L}}, E_{\mathrm{R}})$的非对角线部分由 $C^{+}$给出；参见定义 3.2.17。为了证明$E_{\mathrm{L}} - E_{\mathrm{R}}$ 是平滑算子，我们希望论证 $E_{\mathrm{L}}\Box E_{\mathrm{R}}$ 模平滑算子同余于 $E_{\mathrm{L}}$，也同余于 $E_{\mathrm{R}}$。然而， $E_{\mathrm{L}}$ 和 $E_{\mathrm{R}}$ 并非适当支撑的，这使得该任务并非易事。为绕过这一困难，我们利用这样一个事实：当 $Q$ 是一个伪微分算子，且其施瓦茨核在 $\mathscr{M}\times\mathscr{M}$中具有紧支集时， $E_{\mathrm{L}}QE_{\mathrm{R}}$ 有定义；于是 $Q\colon \mathrm{D}'(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to \mathrm{E}'(\mathscr{M};\mathscr{E})$。

如果 $(x,\xi;\, y,\eta) \in \mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}Q\mathrm{E_R})$，但 $(x,\xi)$、$(y,\eta)$ 位于 $\mathrm{ES}\,Q$ 的补集中，那么 $(x,\xi;\, z,\zeta)$、$(z,\zeta;\, y,\eta) \in C^{+}$ 对于某个 $(z,\zeta) \in \mathrm{ES}\ Q$ 成立。这可由核复合下波前集的行为（例如 [75, 定理 8.210],）以及 $\mathrm{WF}'\mathrm{Q} \subset \Delta\, \dot{\mathrm{T}}^{*}\mathscr{M}$ 这一事实得出。这意味着 $(x,\xi)$、$(y,\eta)$ 和 $(z,\zeta)$ 位于同一条类光测地线（条带） $\gamma(s)$ 上，且 $(z,\zeta)$ 位于另外两点之间。

由于假设 $\mathscr{M}$ 是整体双曲的，对于任意紧致的 $K \subset \mathscr{M}$ [111, Corollary of Prop. 6.6, $J(K) :=$ (3.2) 都是紧致的。因此，如果 $\gamma$ 的端点在 $\mathscr{M}$ 上的投影属于 $K$，那么 $\gamma(s)$ 在 $\mathscr{M}$ 上的投影 $c(s)$ 将始终位于 $J(K)$ 之上，即 $c(s) \in J(K)$，如图 3.3 所示。 consequently，如果 singsupp $Q \cap J(K) = \emptyset$，那么 $\mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}Q\mathrm{E_R})$ 不可能在 $K\times K$ 之上包含任何点。令 $\chi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，使得 $\chi$ 在 $J(K)$ 上恒等于 1，并定义 $\mathrm{M}\chi$ 为相应的乘法算子。我们注意到， $[\mathrm{M}\chi, \Box]_{-}$ 在 $J(K)$ 上恒等为零。因此，$\mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}[\mathrm{M}\chi, \Box]_{-}\mathrm{E_R})$ 在 $K\times K$ 之上不包含任何点，所以对于

$$\begin{aligned}(\dot{\mathrm{T}}^{*}K\times\dot{\mathrm{T}}^{*}K)\cap\mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}-\mathrm{E_R}) &= (\dot{\mathrm{T}}^{*}K\times\dot{\mathrm{T}}^{*}K)\cap\mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}\mathrm{M}_{\chi}\Box\mathrm{E_R}-\mathrm{E_L}\Box\mathrm{M}_{\chi}\mathrm{E_R})\\ &= (\dot{\mathrm{T}}^{*}K\times\dot{\mathrm{T}}^{*}K)\cap\mathrm{WF}'(\mathrm{E_L}[\mathrm{M}_{\chi},\Box]_{-}\mathrm{E_R})\\ &= \emptyset. \qquad (3.90)\end{aligned}$$

由于 $K$ 是任意的，我们得出 $E_{\mathrm{L}} - E_{\mathrm{R}}$ 是一个平滑算子；对于反费曼参数子，同样如此。

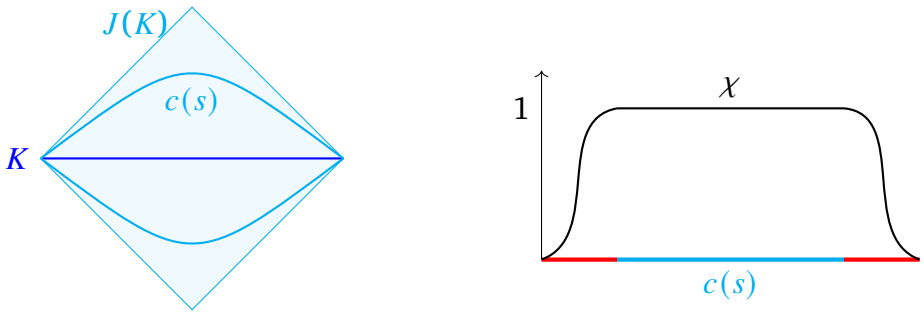


图 3.3：时空整体双曲性所产生的一个结果的示意图。此处时间从左向右流动。

**费曼拟基本解的构造**

注意到 $\Box E_{\mathrm{R}} = I + R$ 等价于 $(E_{\mathrm{R}})^{*}\Box^{*} = I + R^{*}$，并且由于 $\Box$ 的伴随算子 $\Box^{*}$ 也是正规双曲的，根据 $\Box$ 的右参数子存在性，本定理中所列性质的左拟逆的存在性也随之得到。因此，只需构造具有所需正则性的 $\Box$ 的右参数子。

引理 *3.3.18.* 按照定理 *3.3.13* 中的术语： $\Box$ 与 $D_1$ 在微局部意义下彼此共轭，$A$、$A$ 是共轭的拉格朗日分布，且 $m = 0$，$U$ 是 $\mathscr{M}$ 上任意类光余向量 $(x_0, \xi^0)$ 的锥形邻域。假设 $F_1^{\text{ret adv}}$ 是 $D_1$ 的推迟基本解和超前基本解的施瓦茨核，并且 $\chi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 在对角线的某个邻域内恒等于 *1*，并在对角线的另一个充分小的邻域外为 *0*。若 $T \in \Psi DO^{0}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$，其中 $ES\ T \subset U$，且 $F^{\pm} := A(\chi F_1^{\text{ret adv}}, )\ \tilde{}\ AT$，则

$$\mathrm{WF}'\,\mathrm{F}^{\pm} \subset \Delta \dot{\mathrm{T}}^{*}\mathscr{M} \cup C^{\pm}, \tag{3.91a}$$

$$\Box \mathrm{F}^{\pm} = T + \mathrm{R}^{\pm}, \quad \mathrm{R}^{\pm} \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big), \tag{3.91b}$$

$$\mathrm{F}^{+} - \mathrm{F}^{-} \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C'; \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big). \tag{3.91c}$$

证明。性质（3.32）和（3.35）立即推出（3.91a）和（3.91c）。为证明（3.91b），根据定义：

$$\Box \mathrm{F}^{\pm} = (\Box \mathrm{A} - \mathrm{AD}_1)(\chi \mathrm{F}_1^{\mathrm{ret,adv}})\tilde{\mathrm{A}}T + \mathrm{AD}_1(\chi \mathrm{F}_1^{\mathrm{ret,adv}})\tilde{\mathrm{A}}T. \tag{3.92}$$

由于 $\Box$an d $\mathrm{D}_1$ 互为微局部共轭，（3.84c）可改写为

$$(x_0, \xi^0; 0, \eta_1 \mathrm{d}y^1) \notin \mathrm{WF}'(\Box \mathrm{A} - \mathrm{AD}_1). \tag{3.84c′}$$

于是，存在点 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$ 的一个锥形邻域 V，使得对于任意 $v \in \mathrm{D}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$，当 WF $v \subset$ V 时，$(\Box \mathrm{A} - \mathrm{AD}_1)v$ 是光滑的。由于通过选择 $\chi$ 的支集使其靠近 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 中的对角线，可以使 $\mathrm{WF}'(\chi \mathrm{F}_1^{\text{ret adv}}, )$ 任意接近 $\dot{\mathrm{T}}^{*}\mathbb{R}^d \times \dot{\mathrm{T}}^{*}\mathbb{R}^d$ 中的对角线，因此我们可以选取适当的 $\chi$ 以及点 $(0, \eta_1 \mathrm{d}y^1)$ 的一个锥形邻域 W，使得当 WF $v \subset$ W 时，WF $((\chi \mathrm{F}_1^{\text{ret adv}}, )v) \subset$ V。若 ES $T \subset \varkappa$ (W)，则（3.92）右端的第一项是光滑的，我们只需考虑该式的最后一项。根据定义：$\mathrm{D}_1(\chi \mathrm{F}_1^{\text{ret adv}}, ) = I + \tilde{\mathrm{R}}^{\pm}$，其中 $\tilde{\mathrm{R}}^{\pm} := \mathrm{D}_{x^1}\big(\chi(x, y)\big)\mathrm{F}^{\mathrm{adv}}{}_{,1}^{\ \mathrm{ret}} \in I^{-1/2}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, C_1'; \mathbb{C}^{k\times k})\tilde{}$（参见命题 3.2.12）。由于只要 ES $T$ 足够接近 $(x_0, \xi^0)$，$\mathrm{AA}T - T = (\mathrm{AA} - I)T$ 就是光滑的，因此可得 $\Box \mathrm{F}^{\pm} - T = \mathrm{R}^{\pm}$，其中 $\mathrm{R}^{\pm} - \mathrm{A}\tilde{}\mathrm{R}^{\pm}\tilde{}\mathrm{A}T$ 是光滑的，证毕。■

为完成定理 3.3.1的证明，我们选取一个局部有限覆盖 $\{\mathscr{U}_\alpha\}$，覆盖 $\dot{\mathrm{T}}^{*}\mathscr{M}$，其由开锥组成 $\mathscr{U}_\alpha$，使得引理 3.3.18 在 $\mathrm{ES}\,T_\alpha \subset \mathscr{U}_\alpha$时适用。记 $\mathscr{U}_\alpha$ 在 $\mathscr{M}$ 上的投影为 $U_\alpha$，并选取 $\mathscr{U}_\alpha$ 使得 $U_\alpha$ 也构成局部有限覆盖，我们令

$$I = \sum_{\alpha} T_\alpha, \quad \mathrm{ES}\,T_\alpha \subset \mathscr{U}_\alpha, \quad \mathrm{supp}\,\mathrm{T}_\alpha \subset U_\alpha \times U_\alpha. \tag{3.93}$$

于是对于每个 $\alpha$，$\mathsf{A}(\chi \mathsf{F}_1^{\text{ret adv}}, ) \tilde{}\mathsf{A}T_\alpha$均可根据引理 3.3.18 with supp $(\mathsf{A}(\chi \mathsf{F}_1^{\text{ret adv}}, ) \tilde{}\mathsf{A}T_\alpha) \subset U_\alpha \times U_\alpha$ 进行选取，因此该和式

$$\mathsf{F}^{\pm} := \sum_\alpha \mathsf{A}(\chi \mathsf{F}_1^{\text{ret,adv}}) \tilde{\mathsf{A}} T_\alpha \tag{3.94}$$

该对象定义良好，并满足定理 3.3.1陈述中的性质 (3.46) 和 (3.47)。注意，如果将 $\chi$ 视为 $y - z$ 的函数，那么 $\chi \mathsf{F}_1^{\text{ret adv}}$ 是关于紧支撑测度的卷积，因此它将 $H^s_{\text{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$ 连续映射到 $H^s_{\text{c}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^k)$。根据伪微分算子和傅里叶积分算子的映射性质，[77, 定理 4.3.1]（另见 [23, 推论 25.3.2]），因子 $A$、$\tilde{A}$、$T_\alpha$ 是从 $H^s_{\text{c}}$ 到 $H^s_{\text{c}}$ 的连续映射。由于核的和是局部有限的，这表明对于所有 $s \in \mathbb{R}$，$E^{\text{Fyn}}$、$^{\text{aFyn}}$ 将 $H^s_{\text{c}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 连续映射到 $H^s\text{loc}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$。

到目前为止，我们只证明了 $\Box \mathsf{F}^{\pm} = I + \mathsf{R}^{\pm}$。根据引理 3.3.19（该引理在当前证明进行过程中紧接着陈述并证明），我们可以选取$\mathsf{G}^{\pm} \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \text{同态}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big)$，使得$\Box \mathsf{G}^{\pm} - \mathsf{R}^{\pm}$是光滑的。此外，对于每个 $s \in \mathbb{R}$，$G^{\pm}$可延拓为从$H^s_{\text{c}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$到$H^s\,\text{loc}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$的连续映射。这是由傅里叶积分算子的映射性质得出的，例如，参见 [23], 中的定理25.3.8；注意，辛形式 $\sigma_\Gamma$（见（A.71））在 $\Gamma$ 上的余秩为二。由于局部而言，从上的傅里叶积分算子是由标量傅里叶积分算子组成的矩阵（第 2.3.3 节），因此该定理可直接应用于此处。因此，

$$E^{\text{Fyn,aFyn}} := F^{\pm} - G^{\pm} \tag{3.95}$$

是一个具有这一连续性性质的右参数子。

此外，该构造表明 $\mathsf{F}^{+}$–$\mathsf{F}^{-}$，从而 $\mathsf{E}^{\text{Fyn}}$–$\mathsf{E}^{\text{aFyn}}$ 在 $\Delta \dot{\mathsf{T}}^*_0\mathscr{M}$ 上是非特征的，这可以从 $F_1$ 的积分表示（例 3.2.11）以及 $\mathsf{A}$，$\tilde{}\mathsf{A}$ 的波前集性质看出。由于 $\Box(\mathsf{E}^{\text{Fyn}} - \mathsf{E}^{\text{aFyn}})$ 是光滑的，根据定理 2.3.13 和注记 3.2.8，可知其主符号沿着类光测地条带满足一阶齐次微分方程。因此，$\mathsf{E}^{\text{Fyn}}$ –$\mathsf{E}^{\text{aFyn}}$ 处处都是非特征的：$\mathsf{WF}'(\mathsf{E}^{\text{Fyn}} - \mathsf{E}^{\text{aFyn}}) = C$，进而由于 $\mathsf{WF}'\mathsf{E}^{\text{Fyn}, \text{aFyn}} \subset \Delta \dot{\mathsf{T}}^*\mathscr{M} \cup C^{\pm}$，可以得出 $\mathsf{WF}'\mathsf{E}^{\text{Fyn}, \text{aFyn}} \supset C^{\pm}$。最后，事实

$$\Delta \dot{\mathsf{T}}^*\mathscr{M} = \mathsf{WF}'\,\mathsf{I} = \mathsf{WF}'(\Box \mathsf{E}^{\text{Fyn,aFyn}}) \subset \mathsf{WF}'\,\mathsf{E}^{\text{Fyn,aFyn}} \tag{3.96}$$

以及引理 3.3.19完备证明。

**引理 3.3.19**。令 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 为洛伦兹流形$(\mathscr{M}, \mathsf{g})$ 上的一个向量丛，并令 $\Box$为作用在 $\mathscr{E}$上的正规双曲算子。设 $C^{\pm}$ 为正向/反向测地关系。若$\mathsf{B} \in I^m\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \text{同态}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big)$，则可以找到一个适当支撑的$\mathsf{A} \in I^m\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \text{同态}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big)$，使得 $\Box \mathsf{A} - \mathsf{B}$ 是光滑化算子。

证明。 对于标量伪微分算子，这一断言已在 [35, 定理 5.3。2] （另见 [23, 引理 26.1。16]）中得到证明；我们将其调整为适用于正规双曲算子的情形。令$A_0$ 为一个阶数为 $m$ 的适当支撑拉格朗日分布，定义在 $\mathscr{M}\times\mathscr{M}$ 上，其主符号为$a_0$ ，而B 的主符号为b。由于 $\Box$ 的主符号在类光余向量上消失，定理2.3.13 推出 $\Box A_0 - B$ 在 $m-1$ 阶，在 $\mathscr{M}$上的类光余向量处成立，条件是

$$\left(-\mathrm{i}\,\pounds_{X_g}+\sigma_{\Box}^{\mathrm{sub}}\right)a_0=b \tag{3.97}$$

成立。根据注记 2.2.1(d)，将半密度视为函数，并利用 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{M}$ 是平凡复向量丛这一事实（见定义A.1.19），我们写作（参见（B.10））$a_0=a_0\mathbb{m}$ 以及$b=b\mathbb{m}$，其中$\mathbb{m}$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个处处非零截面，而 $a_0$，$b$ 是阶为 $m$的标量符号。于是，上述方程由（（$-\mathrm{i}\,X_g+\sigma_{\Box}^{\mathrm{sub}}$）$a_0=b$）变为2.138。换言之，代入（3.59）和（3.24）可得

$$\left(-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^i}\xi_\mu\xi_\nu\frac{\partial}{\partial\xi_i}+2g^{ij}\xi_j\frac{\partial}{\partial x^i}+2g^{ij}\Gamma^i_j\xi_j\right)a_0=b. \tag{3.98}$$

对于给定的初始条件，该方程具有唯一解，并且解的本质支集包含于 $b$ 的本质支集，即 $\mathrm{WF}'A_0\subset C^{\pm}$。现在，通过反复应用该论证，构造阶为 $m-k$ 的拉格朗日分布 $A_k$，使得 $\Box(A_0+\ldots+A_k)-B\in I^{m-k-1}\left(\mathscr{M}\times\mathscr{M},\ C^{\pm\prime};\ \text{同态}\ \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\right)$，并令 $A:\sim A_0+\ldots+A_k+\ldots$。■

## 3.3.5 命题3.3.2的证明

取费曼拟基本解 $E^{\mathrm{Fyn}}$ 的伴随算子 $E^{\mathrm{Fyn}*}\Box\equiv I$，由定义 3.2.17 可得 $\mathrm{WF}'E^{\mathrm{Fyn}*}\subset\Delta\ \dot{T}^*\mathscr{M}\cup C^-$。因此 $E^{\mathrm{Fyn}*}-E^{\mathrm{aFyn}}$ 是光滑的，$(E^{\mathrm{Fyn}}-G^{\mathrm{adv}})\,(E^{\mathrm{Fyn}}-G^{\mathrm{adv}})^*$ 也同样光滑。由于 $\mathrm{WF}'\left(-\mathrm{i}(E^{\mathrm{Fyn}}-G^{\mathrm{adv}})\right)\cap\mathrm{WF}'\left(\mathrm{i}(E^{\mathrm{Fyn}}-G^{\mathrm{adv}})^*\right)=\emptyset$，它们各自都属于 $C^\infty\left(\mathscr{M}\times\mathscr{M};\ \text{同态}(\mathscr{E},\mathscr{E})\right)$。因此，可以对 $-\mathrm{i}(E^{\mathrm{Fyn}}-G^{\mathrm{adv}})$ 进行归一化，使其具有对称性。

为处理正性，首先考虑算子 $D_1$，如截面 3.3.3 中所述，并注意到 $\mathrm{i}F_1$ 是正的，这一点从例 3.2.11中显然可见：

$$\mathrm{i}F_1(\bar{u}^*\otimes u)\geq 0. \tag{3.99}$$

为说明 $\hat{W}$ 注意到定理 3.3.13 中的拉格朗日分布 A 和 $A^*$ 保持波前集，因此，由拟逆算子差可得到 $(x_0,\xi^0;0,\eta_1 dy^1)\notin\mathrm{WF}'(\hat{W}-AF_1A^*)$。但要在 $\dot{T}^*\mathscr{M}\times\dot{T}^*\mathscr{M}$ 中某点在 $C$ 的邻域的逆像的锥邻域上构造正的 $\hat{W}$ 还不够。这促使我们采用微局部化的精细版本，从而得到相应的齐次达布定理。

类光（未参数化）测地条带的空间是一个 $2d-3$ 维光滑锥流形，可以自然地与任意柯西超曲面 $\Sigma$ 的余切单位球丛$\mathbb{S}^*\Sigma$ 相识别，其中度量 h 是相对于 $\Sigma$ [92] 上的诱导度量。我们选择 $L$，这是一个阶为 $-1/2$、具有标量主符号且次主符号为零的椭圆对称算子，如定理 3.3.13 所述。总可以选择 $L$ 的主符号，使得 $X_{L\Box L}$ 是一个完备向量场 [35，（定理 6.4.3，第 234] 页；另见 [23, 引理 26.1.11、26.1.12] 以及 [27, 命题 2.1]）。由于前向/后向类光余向量丛 $\dot{\mathrm{T}}^*_{0_\pm}\mathscr{M}$ 是光锥丛 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 的连通分支，存在一个齐次微分同胚 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}\to(\mathbb{S}^*\Sigma\oplus\mathbb{S}^*\Sigma)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$，使得 $X_{L\Box L}$ 在变量记为 $(\cdot,s,\cdot)$ 的情况下被映射到向量场 $\partial/\partial s$。在此情形下，精细的达布定理表明，对于 $\mathscr{M}$ 上的每个类光余向量 $(x_0,\xi^0)$，存在一个开锥坐标图 $(\mathrm{U},(x^i,\xi_i))$ 以及一个齐次辛同胚

$$\kappa:\mathcal{U}\to\mathcal{U}',\ (x,\xi)\mapsto\kappa(x,\xi):=\big(y^1(x,\xi),\dots,y^d(x,\xi);\eta_1(x,\xi),\dots,\eta_d(x,\xi)\big),\tag{3.100}$$

将 U 双射映射到 $\kappa(x_0,\xi^0)$ 的开锥邻域 U′：$(0,\eta_1\mathrm{d}y^1)\,\mathrm{in}\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$，使得

$$\big(\kappa^{-1}\big)^*p=\xi_1\ \mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathscr{E}},\tag{3.101}$$

$\mathrm{Char}\,\mathrm{D}_1:=\{(y,\eta)\in\mathbb{R}^d\times\dot{\mathbb{R}}^d\,|\,y^1=0\}$ 关于平面 $y^1=0$ 对称，并且沿 $y^1$-轴方向凸；$\mathrm{U}'\cap\mathrm{Char}\,\mathrm{D}_1$ 在沿 $y^1$-轴的平移下保持不变。由于 $\mathrm{d}\kappa^{-1}(X_{L^*\Box L})=\mathbb{1}_{\mathbb{C}^{k\times k}}\partial/\partial y^1$，可知 $\mathrm{U}\cap\mathrm{Char}\,\Box$ 在 $X_\Box$ [35,Lem. 6.6.3] 下保持不变。

设 $\mathrm{V}_1$,$\mathrm{V}_2$ 是 $(x_0,\xi^0)$ 的闭锥形邻域，满足 $\mathrm{V}_1\subset\mathrm{U}$ 且 $\mathrm{V}_2\subset\mathrm{int}(\mathrm{V}_1)$，同时 $\mathrm{V}_\iota\cap\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$，$\iota=1,2$ 在测地流下保持不变，并且 $\mathrm{V}'_\iota:=\kappa(\mathrm{V}_\iota)$ 沿 $y^1$-方向凸且关于平面 $y^1=0$ 对称。注记 3.3.14 随即表明，存在一个适当支撑的拉格朗日分布 $\mathrm{A}\in I^{-1/2}\big(\mathscr{M}\times\mathbb{R}^d,\Gamma'_1;\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\mathscr{E})\big)$，使得 $A^*A$ 和 $AA^*$ 都是阶为 $-1$ 的伪微分算子，并且

$$\text{特征集 A}\cap\Gamma'_2=\emptyset,\tag{3.102a}$$
$$\mathrm{ES}(A^*A-I)\cap\mathcal{V}'_2=\emptyset\Leftrightarrow\mathrm{ES}(AA^*-I_{\mathscr{E}})\cap\mathcal{V}_2=\emptyset,\tag{3.102b}$$
$$\mathrm{WF}'(\Box\mathrm{A}-\mathrm{AD}_1)\cap\Gamma_2=\emptyset,\tag{3.102c}$$

其中 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 分别是 $\kappa$ 限制在 $\mathrm{V}_1$ 和 $\mathrm{V}_2$, 上的图 .

由定理 3.3.1 和（3.102）可知，我们可以将 $\hat{}\mathrm{W}$ 微局部共轭为 $\mathrm{iF}_1$（标量版本见 [35，第 237] 页）：

$$\mathrm{WF}'(\hat{\mathrm{W}}-\mathrm{A}\,\mathrm{i}\mathrm{F}_1\mathrm{A}^*)\cap(\mathcal{V}_2\times\mathcal{V}_2)=\emptyset,\quad\mathcal{V}_2\cap\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}\subset\{\dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M}\}.\tag{3.103}$$

**引理 3.3.20**。 对于正规双曲算子 $\Box$ （如命题 *3.3.2*中所述）以及由（3.102）给出的拉格朗日分布 A，令 $\Psi \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$，使得 $\mathrm{ES}\ [\Psi,\Box]_- \cap \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} = \emptyset$，$\mathrm{ES}\,\Psi \subset \mathcal{V}_2$ 且 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \cap \mathcal{V}_2 \subset \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\ \pm}\mathscr{M}$。那么

$$\hat{\mathrm{W}}\Psi\Psi^* \equiv \Psi\mathrm{A}\,\mathrm{i}\,\mathrm{F}_1\mathrm{A}^*\Psi^* \Leftrightarrow \hat{\mathrm{W}}\Psi\Psi^* = \Psi\mathrm{A}\,\mathrm{i}\,\mathrm{F}_1\mathrm{A}^*\Psi^* \mod C^\infty\big(\mathscr{M}\times\mathscr{M};\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big). \tag{3.104}$$

证明。 证明的思路是利用微局部化，将问题化为特殊情形 $\mathrm{D}_1$。为得出结论，我们的主要任务是计算相关的换位子；这一步很直接，并且与标量对应项 [35, 引理 6.6。5]完全类似。因此，为了说明完备性，我们只概述主要步骤。椭圆性（3.102a）使我们能够将任意适当支撑的 $\Psi \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$和 $\Psi' \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k})$与 $\mathrm{ES}\,\Psi \subset \mathcal{V}_2$ 和 $\mathrm{ES}\,\Psi' \subset \mathcal{V}_2'$ 联系起来，方法是：

$$\Psi' = A^*\Psi A \mod \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{k\times k}), \quad \Psi = A\Psi' A^* \mod \Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}). \tag{3.105}$$

直接计算表明 $\mathrm{ES}\ [\Psi',\mathrm{D}_1]_- \cap$特征集 $\mathrm{D}_1 = \emptyset$，这意味着 $\Psi'$的符号关于 $y^1$ 的导数在特征集 $\mathrm{D}_1$的某个邻域内是 $-\infty$ 阶的。将与（$h$，0，……，0）处的狄拉克测度的卷积记为 $\tau_h$，我们可以将 $\mathrm{F}_1$重写为 $\mathrm{F}_1 = \int \tau_h \mathrm{d}h$，并注意到 $\tau_h\Psi' - \Psi'\tau_h$在特征集 $\mathrm{D}_1$的某个锥形邻域内是 $-\infty$ 阶的。由于特征集 $\mathrm{D}_1$ 在 $y^1$ 方向的平移下保持不变，因此有

$$\forall v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^k) : \mathrm{WF}([\tau_h,\Psi']_- v) \cap \mathrm{Char}\,\mathrm{D}_1 = \emptyset. \tag{3.106}$$

对 $h$ 进行积分并经过几步直接的代数运算后即可得到该结果。■

由 (3.99) 可知， $\Psi\mathrm{A}\,\mathrm{i}\,\mathrm{F}_1\mathrm{A}^*\Psi^*$是非负的，因为相对于 $\mathscr{E}$上的厄米型， $AA^*$是非负的。因此，要得出命题 3.3.2，剩下的唯一工作就是证明：只要引理 3.3.20 的前提得到满足，恒等算子就可以表示为引理 3.3.20 中所讨论的形如 $\Psi\Psi^*$的算子之和。为此，我们考虑任意类光余向量 $(x_0,\xi^0)$ 的一个闭锥形邻域 $\mathrm{V}_3$，其中 $\mathrm{V}_3 \subset \mathrm{int}(\mathrm{V}_2)$，且 $\mathrm{V}_3 \cap \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$在测地流下保持不变。可以证明，存在 $\Psi \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$，其满足 $\mathrm{ES}\,\Psi \subset \mathrm{V}_2$，使得 $\Psi$具有非负的主符号，并且在 $\mathrm{V}_3$ 上等于 1，同时 $\mathrm{ES}\ [\Psi,\Box]_- \cap \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} = \emptyset$ [35, Lem. 6.6.6]。换言之，对于 $\Psi$，引理 3.3.20 中的假设可以得到满足。对$\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$取一个适当的覆盖后，可以利用这些算子构造出一族算子 $\Psi_\alpha \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$，满足

$$\mathrm{ES}\,\Psi_\alpha \bigcap \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \subset \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M}, \tag{3.107a}$$

$$\mathrm{ES}\left(I - \sum_\alpha \Psi_\alpha\Psi_\alpha^*\right) \bigcap \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M} = \emptyset, \tag{3.107b}$$

$$\mathrm{ES}\,[\Box,\Psi_\alpha]_- \bigcap \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} = \emptyset. \tag{3.107c}$$

这种能够提供微局部单位分解的算子族的构造（关于这一概念，参见定理 2.3.6 证明中的脚注 2.3.16 ）在 [35, 第 238]页中有详细说明。证明遵循通常的策略：将这些算子求和，并从左侧和右侧乘以一个拟逆的平方根。可以验证，引理3.3.20中的假设在这一构造下仍然成立。为了完成命题3.3.2的证明，我们只需写出

$$\hat{W} = \sum_{\alpha} \hat{W}\Psi_\alpha \Psi_\alpha^* \equiv \sum_{\alpha} \Psi_\alpha A_\alpha \, i F_1 A_\alpha^* \Psi_\alpha^*, \tag{3.108}$$

这完成了证明，因为（3.108）右端的每一项相对于 $\mathscr{E}$ 上的厄米型都是非负的。

### 3.3.6 由费曼参数子得到费曼传播子

我们将定理 3.3.3 的证明推迟，以便先作出以下观察。记 $\mathscr{M}$中的一点为 $(t,x) \in \mathbb{R}\times\Sigma$。于是我们可以定义分布 $f_1\otimes\delta_\Sigma, f_0\otimes\delta'_\Sigma \in \mathcal{E}'(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 如下：

$$f_1 \otimes \delta_\Sigma(\phi) := \int_\Sigma \phi(x)\, f_1(x)\, \mathrm{dv_h}(x), \quad f_0 \otimes \delta'_\Sigma(\phi) := \int_\Sigma (\partial_N \phi)(x)\, f_0(x)\, \mathrm{dv_h}(x), \tag{3.109}$$

其中 $\phi \in C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)$，N 是 $\mathscr{M}$沿 $\Sigma$的未来指向单位法向量场，$\mathrm{dv_h}$ 是黎曼体积形式。我们将 $W_\Sigma \subset E'(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 记为由此类分布构成的集合的张成空间。通过对偶性论证，推迟Green算子和超前Green算子都可扩展为连续映射 $E'(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to D'(\mathscr{M};\mathscr{E})$；若 $G$是因果传播子，且 $f := f_0\otimes\delta'_\Sigma + f_1\otimes\delta_\Sigma$，则 $u = G(f)$ 是 $\Box u = 0$的光滑解，其在 $\Sigma$ 上的柯西数据为 $(f_0, f_1)$（参见例如 [110, 引理 3.2.2], [121, 定理 3.20]）。

假设对于任意双分布 $w \in D'(\mathscr{M}\times\mathscr{M};\mathscr{E}\boxtimes\mathscr{E}^*)$，$w\Box$和 $\Box^* w$ 都是光滑的。我们将 $E'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 记作支集为紧致集且波前集包含于余法丛中的分布集合（见例 A.1.7） $\Sigma^{\perp *}$ of $\Sigma$。该空间赋予自然的局部凸拓扑 [77, p。在此拓扑下，$C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 在 $E'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 中序贯稠密（详情参见例如 [75, 定理 8.2.3] 或说明 [79, 第 4.3 节 1] ）。双分布 w 可以定义为 $E'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 上的序贯连续双线性形式。由于 $W_\Sigma \subset E'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，因此双线性形式 w 也定义在 $W_\Sigma$ 上。

引理 *3.3.21.* 设 $(\mathscr{E}\to\mathscr{M}, (\cdot|\cdot))$ 是整体双曲流形 $(M,g)$ 上的厄米向量丛，其柯西超曲面为 $\Sigma$。假设 $\Box$ 是作用在 $\mathscr{E}$ 上的正规双曲算子，并且 $w \in D'(\mathscr{M}\times\mathscr{M}, \mathscr{E}\boxtimes\mathscr{E}^*)$ 是 $\Box$ 的双解。那么，当且仅当对于任意 $f \in W_\Sigma$，$w(f^*\otimes f) \geq 0$，$w$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 为非负，其中 $W_\Sigma$ 是 $\Box$ 的分布柯西数据 *(3.109)* 所张成的空间。

证明。我们从以下事实开始：由于 w 是双解，它可延拓为 $\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)\times\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 上分别序列连续的双¯线性形式；我们仍用同一个字母表示该延拓¯。由于该形式是双解，它在 $\bar{\square}^* C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)\times C_{\mathrm{c}}^\infty\mathscr{M}(\mathscr{E};\bar{})$ 以及 $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)\times\square C_{\mathrm{c}}^\infty\mathscr{M}(\mathscr{E};C_{\mathrm{c}}^\infty)$ 上为零。根据 ¯ ¯′ $_{\Sigma^{\perp *}}$ 在 $\mathrm{E}\,\bar{\square}^*$ 中的序列连续性和序列稠密性，可知 w 在 $\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)\times\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 上为零，并且在 $\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E}^*)\times\square\,\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 上也为零。我们将证明，任意 $u\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 都可以写成 $u=f+\square\phi$，其中某个 $f\in\mathrm{W}_\Sigma$ 和某个 $\phi\in\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，并且对于共轭对偶丛及共轭对偶正规双曲算子，相应结论同样成立。这显然蕴含所述结论。

为说明确实如此，注意到 $\square(Gu)=0$，因此，如果 $(f_0,\ f_1)$ 是 $G(u)$ 在 $\Sigma$ 上的柯西数据，而 $f$ 是 $\mathrm{W}_\Sigma$ 中的相应元素，那么我们有 $G(u)=G(f)$。这意味着

$$G(u-f)=0\Leftrightarrow G^{\mathrm{ret}}(u-f)=G^{\mathrm{adv}}(u-f). \tag{3.110}$$

因此，$\phi:=G^{\mathrm{ret}}(u-f)$ 必须是紧支集分布，因为 supp $\phi$ =supp $\big(G^{\mathrm{ret}}(u-f)\big)\cap$s upp $\big(G^{\mathrm{adv}}(u-f)\big)\subset J^+\big(\mathrm{supp}(u-f)\big)\cap J^-\big(\mathrm{supp}(u-f)\big)$ 由于 $\mathscr{M}$ 的整体双曲性（定义 3.1.3）而是紧致的。根据奇性传播（定理 3.3.16），该分布必然再次属于 $\mathrm{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，并且我们有 $u-f=\square\phi$。¯ 对于 $\mathscr{E}^*$ 上的正规双曲算子 $\bar{\square}^*$，同样的证明也成立。■

最后，我们已经准备好证明 □的费曼传播子的存在性。此外，如果 $\mathscr{E}$ 上存在厄米型，则可选取关于该厄米型非负的费曼传播子，从而可推出对应于 Hadamard 态的二点双分布存在。

定理 3.3.3 的证明。令ˆ$W$ 为命题 3.3.2 中构造的 □ 的拟逆。由于ˆW的波前集与 $\Sigma^{\perp *}$ 中任意柯西超曲面 $\Sigma$ 的余法丛不相交，我们固定一个 $\Sigma$，并将ˆW及其法向导数限制到该超曲面上，从而在 $\Sigma\times\Sigma$上构造分布性柯西数据。设 $\mathscr{E}$赋有一个厄米型$(\cdot|\cdot)$，使得ˆW关于$(\cdot|\cdot)$非负。于是，ˆW在 $\Sigma$上的限制ˆ$\mathrm{W}_\Sigma$ ¯同样是非负的。接下来，我们利用 □ 的解算子构造W $\in\mathrm{D}'(\mathscr{M}\times\mathscr{M};\mathscr{E}\boxtimes\mathscr{E}^*)$，使其在 $\Sigma\times\Sigma$上具有与ˆW相同的分布性柯西数据。这将是 □的双解，并具有如下性质

$$\big(\forall u\in\mathcal{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M};\mathscr{E}):\mathrm{W}(\bar{u}^*\otimes u)\geq 0\big)\Leftrightarrow W\geq 0, \tag{3.111}$$

由 $C_{\mathrm{c}}^\infty$（$\Sigma$； $\mathscr{E}_\Sigma$）在$\mathcal{E}'_{\Sigma^{\perp *}}$（$\mathscr{M}$； $\mathscr{E}$）中的序列稠密性以及引理3.3.21可知。注意到R = W − ˆW 是光滑的，因为它满足具有零柯西数据的非齐次问题，这意味着

$$G^{\mathrm{Fyn}}:=E^{\mathrm{Fyn}}+\mathrm{i}\,R \tag{3.112}$$

是具有所需正性 性质的费曼传播子 。 ■

### 3.3.7 因果传播子

在本节中，我们将把整体双曲时空上向量丛 $G :=$ (3.39)上的正规双曲算子 $\Box$ 的因果传播子 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 表示为傅里叶积分算子。Duistermaat-Hörmander [35,定理 6.6。1]已经证明了任意实主类型标量伪微分算子的这一结果，但对于丛版本，要找到系统的推导并不容易。

注记3.3.22。在测地关系 $C$ 上存在自然密度$\mathrm{dv}_C$ ，因而在正向/反向测地关系 $C^{\pm}$上也存在自然密度；这最初归功于 Duistermaat 和 Hörmander [35, p. 230] 对于一般流形 $M$，而对于整体双曲时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$，该密度大大简化，如 Strohmaier 和 Zelditch [27, (52)，注记7.1]所述。根据定义3.2.15：对于每个 $(x,\xi;\, y,\eta) \in C$，存在唯一的 $s \in \mathbb{R}$，使得 $(x,\xi) = \Phi_s(y,\eta)$，因此 $C$ 可以识别为 $\mathbb{R} \times \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$的一个开子集，其中$\Phi_s$ 是 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 上的测地流，而 $s \in \mathbb{R}$ 是流参数。 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 是一个锥形接触流形，其哈密顿量

$$H_{\mathrm{g}} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M}) \to \mathbb{R},\ (x,\xi) \mapsto H_{\mathrm{g}}(x,\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\xi) \tag{3.113}$$

由时空度量 g 诱导的度量恒等为零，其哈密顿约化是 **缩放类光测地线** $\mathscr{N}$ [122, 第 10-12], [123, 定理 2。1]按照 Strohmaier-Zelditch 的做法，我们在前述定义中使用了前因子 1/2，从而使 相对论哈密顿流 与 完全 一致于 测地流。记$\tilde{s}$为 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$上的膨胀参数，则 $C$ 上的自然半密度为

$$\sqrt{|\mathrm{dv}_C|} := \sqrt{|\mathrm{d}s|} \otimes \sqrt{|\mathrm{d}\tilde{s}|} \otimes \sqrt{|\mathrm{dv}_{\mathscr{N}}|}. \tag{3.114}$$

注意，这个密度与 Duistermaat-Hörmander 所定义的密度相差一个 2 的因子，这是因为他们使用 $\mathrm{g}^{-1}$ 的哈密顿流来参数化 $\mathscr{N}$，而不是使用由 $H_{\mathrm{g}}$生成的哈密顿向量场 $X_{\mathrm{g}/2}$ 的流。此外，

$$\pounds_{X_{\mathrm{g}}} \mathrm{dv}_C = 0. \tag{3.115}$$

在 $C^{\pm}$ 上的密度源于以下事实： $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} = \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\,+}\mathscr{M} \sqcup \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\,-}\mathscr{M}$ 在 $d \geq 3$ 中的情形，以及 $d = 2$ 的情形，正如注记 3.2.18中所述。

运用定理 3.3.1 和 2.3.13、定义3.3.6和注记 3.3.22，我们仿照标量版本 [35, 定理 6.6。1], , 得到

**定理 3.3.23.** 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 分别为 $\pi :$ $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 上的向量丛和整体双曲时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的去心余切丛，且 $\Box$ 是 $\mathscr{E}$ 上的正规双曲算子，其主符号是$\mathrm{T}^*\mathscr{M}$上的时空度量 $\mathrm{g}^{-1}$ 。那么， $\Box$ 的因果传播子的施瓦茨核G 是拉格朗日分布

$$\mathsf{G} \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M} \times \mathscr{M}, C'; \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big), \tag{3.116a}$$

$$\sigma_{\mathsf{G}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2\pi|\mathrm{dv}_C|} \otimes \mathbb{m}w, \tag{3.116b}$$

$$\mathrm{Char}\,\mathsf{G} \cap C = \emptyset, \tag{3.116c}$$

其中 $\mathrm{dv}_C$ 是测地关系 $C$上的自然体积形式， $\mathbb{m}$ 是*Keller-Maslov*丛 $\mathbb{M} \to C$ 的一个截面（构造见 *[35,* 第 *231-232]*页），而 $w$ 是 $C^\infty\big(C$中唯一满足以下条件的元素： $\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})_C\big)$在对角线上为恒等端*omorphism*，在非对角线上协变常数

$$\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}_{X_{\mathrm{g}/2}} w = 0 \tag{3.117}$$

相对于 $\square$-相容的 *Weitzenböck*协变导数 $\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})} X_{\mathrm{g}/2}$沿测地线向量场 $X_{\mathrm{g}/2}$。

注记 3.3.24. 根据定义 3.3.6， $X_{\mathrm{g}}$作用于 $C^\infty(\mathrm{T}^*\mathscr{M}$； $\pi^*$同态$(\mathscr{E},\mathscr{E}))$。因此，(3.117) 必须理解为：由 $(\mathrm{T}^*\mathscr{M}\times\mathrm{T}^*\mathscr{M})$ 上的向量场 $(X_{\mathrm{g}}, 0)$ 在 $C$ 上诱导的哈密顿向量场， [35, 参见第 1 条，第 216] 页（另见 [23, 参见第 1 条，第 69] 页）。

# 3.4 狄拉克算子的费曼传播子

本节将把我们对 Dirac 型算子的分析加以拓展。这些算子是一阶微分算子，其平方是正规双曲的；在著名的 Atiyah-Singer指标定理所研究的几何分析背景下，它们可以说是最基本的一阶算子。

## 3.4.1 Dirac 型算子

**定义 3.4.1**。 设 $\mathscr{E}\to\mathscr{M}$是洛伦兹流形（$\mathscr{M}$，g）上的一个向量丛。作用于 $\mathscr{E}$的半密度值光滑截面的**狄拉克型算子** 是一个一阶微分算子

$$D : C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \tag{3.118}$$

其 主符号 $\sigma_D$ 满足 Clifford关系（例如参见 [124,定义 2.18]）

$$\sigma_D(x,\xi)^2 = \mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\xi)\,\mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathscr{E}_x} \tag{3.119}$$

对所有（$x$， $\xi$） $\in C^\infty$（$\mathscr{M}$； $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$）均成立。

换句话说， $D^2$ 是一个正规双曲算子，并且根据极化恒等式（例如参见 [124, 注 2.19]）

$$[\sigma_D(x,\xi),\sigma_D(x,\eta)]_+ = 2\,\mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\eta)\;\mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathscr{E}_x} \tag{3.120}$$

对于任意 $(x,\ \xi)$、$(x,\ \eta)\ \in C^\infty(\mathscr{M}$； $\mathrm{T}^*\mathscr{M})$，其中 $[\cdot,\cdot]_+$是反对易子括号。主符号 $\sigma_D$ 通过以下方式定义了 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{E}$上的 Clifford作用

$$\forall f \in C^\infty(\mathscr{M}) : \sigma_D(\mathrm{d}f) := \mathrm{i}\,[D,f]_-, \tag{3.121}$$

该定义与所选取的任意元素 $f \in C^\infty(\mathscr{M})$ 无关。这使得 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 成为 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \sigma_D)$ 上的 Clifford 模丛，其中 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$。此外，最后一个方程给出了 $D$ 的 Leibniz 法则：

$$D(fu) = \sigma_D(\mathrm{d}f)(u) + fD(u) \tag{3.122}$$

任意 $f \in C^\infty(\mathscr{M})$ 以及任意 $u \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$。Clifford映射（3.120）定义了（逐点的）克利福德乘法

$$\mathsf{c} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}),\ (x,\xi) \otimes u \mapsto \mathsf{c}\big((x,\xi) \otimes u\big) := \sigma_D(x,\xi)(u). \tag{3.123}$$

**假设3.4.2。** 我们在洛伦兹流形 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 上的向量丛 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 赋予一个半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，使得 $D$ 是对称的。

给定任意 $D$，存在唯一的与 $(\cdot|\cdot)$ 相容的魏岑伯克联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 在 $\mathscr{E}$ 上，以及唯一的势 $V \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{End}\ \mathscr{E})$，使得

$$D^2 = -\operatorname{tr}_{\mathrm{g}}(\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}} \circ \nabla^{\mathscr{E}}) + V, \tag{3.124}$$

根据 Weitzenböck公式（注记3.2.8），其中$\operatorname{tr}_{\mathrm{g}} :=$（3.16）是度量迹 .

Clifford 模丛 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, (\cdot|\cdot), \sigma_D)$上的最一般 Dirac 型算子与以下两个映射的复合仅相差一个

$$C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \xrightarrow{\nabla^{\mathscr{E}}} C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}^*\mathscr{M} \otimes \mathscr{E}) \xrightarrow{\mathsf{c}} C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \tag{3.125}$$

零阶项，即

$$D = -\mathrm{i}\,\mathsf{c} \circ \nabla^{\mathscr{E}} + U, \tag{3.126}$$

其中势项 $U \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{End}\ \mathscr{E})$ 由前述方程定义。注意，假设 3.4.2 意味着 $U$ 和 $-\mathrm{i}\nabla^{\mathscr{E}}_X$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的， $X$ 前提是其散度为零。

魏岑伯克联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$在向量丛 $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathscr{M}$上诱导出一个联络 $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$，其定义为

$$\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}_X\big(\sigma_D(x,\xi)\big)(u) := \nabla^{\mathscr{E}}_X\big(\sigma_D(x,\xi)(u)\big) - \sigma_D(x,\xi)\big(\nabla^{\mathscr{E}}_X(u)\big) \tag{3.127}$$

对于任意 $X \in \mathrm{T}_x\mathscr{M}$以及任意 $\xi \in \mathrm{T}^*_x\mathscr{M}$，在任意 $x \in \mathscr{M}$处。一般而言， $\nabla^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$ 不是Clifford联络，因为使用 Levi-Civita联络可得

$$\begin{aligned} X\big(\mathrm{g}_x^{-1}(\xi,\eta)\big) &= \mathrm{g}_x^{-1}\big(\nabla^{\mathrm{LC}}_X\xi, \eta\big) + \mathrm{g}_x^{-1}\big(\xi, \nabla^{\mathrm{LC}}_X\eta\big) \\ &= \frac{1}{2}\big[\sigma_D\big(x, \nabla^{\mathrm{LC}}_X\xi\big), \sigma_D(x,\eta)\big]_+ + \frac{1}{2}\big[\sigma_D(x,\xi), \sigma_D\big(x, \nabla^{\mathrm{LC}}_X\eta\big)\big]_+, \end{aligned} \tag{3.128}$$

然后对（3.120）取协变导数可得

$$\big[\nabla_X^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}\big(\sigma_D(x,\xi)\big)-\sigma_D\big(x,\nabla_X^{\mathrm{LC}}\xi\big),\sigma_D(x,\eta)\big]_+=\big[\nabla_X^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}\big(\sigma_D(x,\eta)\big)-\sigma_D\big(x,\nabla_X^{\mathrm{LC}}\eta\big),\sigma_D(x,\xi)\big]_+ \tag{3.129}$$

对于所有 $\eta\in\mathrm{T}_x^*\mathscr{M}$ 以及之前的其他情形。特别地，我们总可以在局部选择一个正交标架 $\{e_i\}$ 及其余标架 $\{\varepsilon^i\}$，并在 $\mathscr{M}$ 上将其表示为

$$D=-\mathrm{i}\not{\nabla}^{\mathscr{E}}+U,\quad \not{\nabla}^{\mathscr{E}}:=\sigma_D(\varepsilon^i)\nabla^{\mathscr{E}}_{e_i}, \tag{3.130}$$

其中使用了费曼斜线记号 $/\nabla^{\mathscr{E}}$，即将 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 与克利福德乘法复合，然后对其取迹。直接计算可得

$$D^2=-\not{\nabla}^{\mathscr{E}}\not{\nabla}^{\mathscr{E}}-\mathrm{i}\not{\nabla}^{\mathscr{E}}(U)+U^2-\Big(\not{\nabla}^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}\big(\sigma_D(\varepsilon^j)\big)+\mathrm{i}U\sigma_D(\varepsilon^j)+\mathrm{i}\sigma_D(\varepsilon^j)U\Big)\nabla^{\mathscr{E}}_{e_j}. \tag{3.131}$$

But

$$\begin{aligned}
\not{\nabla}^{\mathscr{E}}\not{\nabla}^{\mathscr{E}} &= \frac{1}{2}(\not{\nabla}^{\mathscr{E}}\not{\nabla}^{\mathscr{E}}+\not{\nabla}^{\mathscr{E}}\not{\nabla}^{\mathscr{E}})\\
&= \frac{1}{2}\big(\sigma_D(\varepsilon^i)\,\sigma_D(\varepsilon^j)(\nabla^{\mathscr{E}}_{e_i}\nabla^{\mathscr{E}}_{e_j}-\Gamma^k_{ij}\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k})+\sigma_D(\varepsilon^j)\,\sigma_D(\varepsilon^i)(\nabla^{\mathscr{E}}_{e_j}\nabla^{\mathscr{E}}_{e_i}-\Gamma^k_{ji}\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k})\big)+\not{\Gamma}^k\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k}\\
&= \frac{1}{2}\big(\sigma_D(\varepsilon^i)\,\sigma_D(\varepsilon^j)\,\mathrm{Hess}^{\mathscr{E}}_{e_i,e_j}+\sigma_D(\varepsilon^j)\,\sigma_D(\varepsilon^i)\,\mathrm{Hess}^{\mathscr{E}}_{e_j,e_i}\big)+\not{\Gamma}^k\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k}\\
&= \frac{1}{2}\big(\sigma_D(\varepsilon^i)\,\sigma_D(\varepsilon^j)(\mathrm{Hess}^{\mathscr{E}}_{e_j,e_i}+\mathscr{R}_{e_ie_j})+\sigma_D(\varepsilon^j)\,\sigma_D(\varepsilon^i)\,\mathrm{Hess}^{\mathscr{E}}_{e_j,e_i}\big)+\not{\Gamma}^k\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k}\\
&= \mathrm{g}^{ij}\,\mathrm{Hess}^{\mathscr{E}}_{e_j,e_i}+\frac{1}{2}\not{\mathscr{R}}+\not{\Gamma}^k\nabla^{\mathscr{E}}_{e_k},
\end{aligned} \tag{3.132}$$

其中，$\mathscr{R}$ 分别是 $\nabla^{\mathscr{E}}$的曲率和联络1-形式。这里我们使用了 (3.20)、(3.18)、(3.120) 以及 $\mathscr{R}_{X,Y}=\mathrm{Hessian}_{X,Y}-\mathrm{Hessian}_{Y,X}$。将前一个方程代入关于 $D^2$ 的最后一个方程，得到

$$\begin{aligned}
D^2 &= -\mathrm{tr}_{\mathrm{g}}(\nabla^{\mathrm{LC}\otimes\mathscr{E}}\circ\nabla^{\mathscr{E}})+\mathfrak{R}+U^2-\mathrm{i}\not{\nabla}^{\mathscr{E}}(U)\\
&\quad-\Big(\not{\nabla}^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}\big(\sigma_D(\varepsilon^j)\big)+\not{\Gamma}^j+\mathrm{i}U\sigma_D(\varepsilon^j)+\mathrm{i}\sigma_D(\varepsilon^j)U\Big)\nabla^{\mathscr{E}}_{e_j},
\end{aligned} \tag{3.133}$$

其中

$$\mathfrak{R}:C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E})\to C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}),\ u\mapsto\mathfrak{R}u:=-\frac{1}{2}\big(\sigma_D(X^\flat)\,\sigma_D(Y^\flat)\,\mathscr{R}_{X,Y}\big)u \tag{3.134}$$

是 **魏岑伯克曲率** 的 $\nabla^{\mathscr{E}}$。由于 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 是魏岑伯克联络，将其与（3.124）比较，我们令上述 $D^2$ 方程中 $\nabla^{\mathscr{E}}_{e_j}$ 的系数为零，从而得到 $\sigma_D$的协变导数：

$$\not{\nabla}^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}\big(\sigma_D(\varepsilon^j)\big)=-\not{\Gamma}-\big[U,\sigma_D(\varepsilon^j)\big]_+,\quad j=1,\dots,d. \tag{3.135}$$

**注记 3.4.3**。 一个 Clifford联络 $\tilde{\nabla}^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$，其特征由下式给出

$$\forall (x,X)\in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathrm{T}\mathscr{M}),\forall (x,\eta)\in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathrm{T}^{*}\mathscr{M}):\left[\tilde{\nabla}_{X}^{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})},\sigma_{D}(x,\eta)\right]_{-}=\sigma_{D}\left(x,\nabla_{X}^{\mathrm{LC}}\eta\right), \tag{3.136}$$

总是存在，因此 Clifford 模丛（$\mathscr{E}\to\mathscr{M}$， $\sigma_D$， $\tilde{\nabla}^{\mathscr{E}}$）称为**狄拉克模丛**，其中最一般的 Dirac 型算子具有如下形式

$$\tilde{D}:=-\mathrm{i}\,\mathsf{c}\circ\tilde{\nabla}^{\mathscr{E}}+\tilde{U} \tag{3.137}$$

对所有 $\tilde{U}\in C^{\infty}(\mathscr{M};\ \mathrm{End}\ \mathscr{E})$ 满足（参见（3.135））

$$[\tilde{U},\sigma_{D}(\cdot)]_{-}=0. \tag{3.138}$$

算子 $\tilde{D}$ 与 $D$ 具有相同的主符号，因此二者仅相差一个光滑项。由于 $\tilde{\nabla}$ 与克利福德乘法相容（3.123）， $\tilde{D}$ 有时称为**相容的狄拉克型算子**。

例 3.4.4. 设（$\mathscr{M}$，g）为一个 $d$ 维自旋时空，即一个（$\mathscr{M}$，g）时空，其切丛具有自旋结构。这意味着存在一对（$\mathscr{P}$， $\Theta$），其中（$\mathscr{P}$，Spin0， $\mathscr{M}$）是一个主 $\mathrm{Spin}_0(1,d-1)$-丛，而 $\Theta$： $\mathscr{P}\to\mathscr{Q}$ 是丛（$\mathscr{Q}$，SO0， $\mathscr{M}$）的二重覆盖，该丛由定向且时间定向的切标架组成，并且满足下图交换（例如参见 [125, 126]）

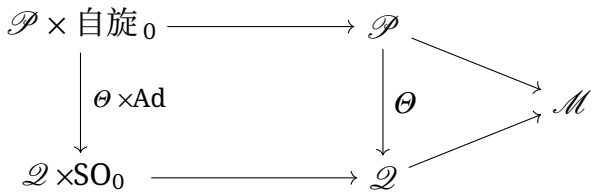


图 3.4：时空上的 Lorentz 自旋结构。水平线表示主丛上的群作用。

这里，$\mathrm{Spin}_0(1,d-1)$ 分别是洛伦兹自旋群 $\mathrm{Spin}\,(1,d-1)$ 的单位元连通分支，$\mathrm{SO}_0(1,d-1)$ 分别是特殊正交群 $\mathrm{SO}(1,d-1)$ 的单位元连通分支，而 $\mathrm{Ad}:\mathrm{Spin}_0(1,d-1)\to\mathrm{SO}_0(1,d-1)$ 是二重覆盖映射。

自旋结构总是在局部存在，但其整体存在性取决于 $\mathscr{M}$的拓扑。一个必要且充分的条件是， $\mathscr{M}$的第二 *Stieffel–Whitney* 类 [31] (黎曼度规号差)消失；关于洛伦兹情形，参见 [125, 127–130] 。在这一拓扑限制下， $\mathscr{M}$ 上不等价自旋结构的数量等于上同调 $\mathrm{H}^1(\mathscr{M};\mathbb{Z}_2)$ 中元素的数量 [31, 引理] （黎曼度规号差；关于 4 维时空，参见 [131] ）。于是，对于一个固定的自旋结构（$\mathscr{P}$， $\Theta$），**旋量丛**被定义为伴随向量丛

$$\mathscr{S}:=\mathscr{P}\times_{\tilde{\gamma}}\mathcal{S}_{d}, \tag{3.139}$$

其中 $\mathrm{S}_d$ 是复旋量模。当 $d$ 为偶数时，$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{S}_d = 2^{d/2}$，旋量模分解为 $\mathrm{S}_d = \mathrm{S}_d^+ \oplus \mathrm{S}_d^-$，成为具有正（负）手性的子模 $\mathrm{S}_d^\pm$和

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^+ \oplus \tilde{\gamma}^- : \mathrm{Spin}_0(1, d-1) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{S}_d^+ \times \mathrm{Aut}\,\mathcal{S}_d^- \subset \mathrm{Aut}\,\mathcal{S}_d \tag{3.140}$$

是旋量表示。对于一个奇数 $d$，$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_d = 2^{(d-1)/2}$ 且

$$\tilde{\gamma} : \mathrm{Spin}_0(1, d-1) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{S}_d \tag{3.141}$$

是旋量表示。旋量丛的截面称为**旋量**。换言之，对于每个 $x \in \mathscr{M}$，旋量丛 $\mathscr{S}$ 在 $x$ 上的纤维 $\mathscr{S}_x$ 由满足以下条件的等价类对 $[p, s]$ 构成：$\mathrm{Spin}_0(1,\ d-1)$ 群在 $\mathscr{P} \times \mathrm{S}_d$ 上自由作用：

$$\forall p \in \mathscr{P}, \forall u \in \mathcal{S}_d, \forall g \in \mathrm{Spin}_0(1, d-1) : g \bullet [p, u] = [pg^{-1}, \tilde{\gamma}(g)\, u]. \tag{3.142}$$

$\mathrm{Sin}^{\mathrm{ce}}\ \mathrm{T}\mathscr{M}$ 在 $\mathrm{Spin}_0(1,\ d-1)$ 内的集合，$\tilde{\gamma}$ 诱导出一个取值于 $\mathrm{End}\ \mathrm{S}_d$ 的映射 $\gamma$，定义在 $\mathrm{T}\mathscr{M}$ 上：

$$\gamma(x, X)^2 := \mathrm{g}_x(X, X)\ \mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathcal{S}_d}\,. \tag{3.143}$$

这使我们能够定义克利福德乘法

$$\mathrm{c} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M} \otimes \mathscr{S}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S}),\ \mathrm{c}\big([\Theta(p), X] \otimes [p, s]\big) := [p, \gamma(X)\, s], \tag{3.144}$$

其中，我们将 $\mathrm{T}\mathscr{M} = \mathscr{Q} \times_\rho \mathbb{R}^d$ 表示为与 $\mathscr{Q}$ 相关联的实向量丛，它由 $\mathrm{SO}_0(1,\ d-1)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的标准表示 $\rho$ 给出。

利用 Levi-Civita联络 1-形式 $\Gamma^{\mathrm{LC}}$ 在 $\mathscr{Q}$上，我们定义旋量联络 1-形式 $\Gamma^{\mathscr{S}} :\ = \mathrm{Ad}_*^{-1} \circ \Theta^*(\Gamma^{\mathrm{LC}})$ 它在 $\nabla^{\mathscr{S}}$ 上诱导出一个联络 $\mathscr{S}$。该自旋联络是一个 度量 且 *Clifford* 联络。此外，它保持正负手性分裂不变，并满足 Leibniz法则。 **有质量旋量狄拉克算子**定义为 [125, 定义 3。1]

$$D := -\mathrm{i}\,\mathrm{c} \circ \nabla^{\mathscr{S}} + \mathrm{m} : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S}), \tag{3.145}$$

其中，$\mathrm{m}$ 是一个参数，可将其解释为适当时空几何中旋量的物理质量。

**注记 3.4.5**。 如果（$\mathscr{M}$，$\mathrm{g}$）是一个四维非紧致时空，则其存在自旋结构的充分必要条件是存在一个全局正交归一四标架系 [127, 定理]。特别地，一些爱因斯坦方程的精确解，例如 Schwartzschild、Robertson-Walker、Gödel、平面波以及任何整体双曲时空，至少存在一个自旋结构 [128]。此外，旋量丛是平凡的，但可能存在不等价的自旋结构（$\mathscr{P}$，$\Theta$）（由 $\mathrm{H}^1(\mathscr{M};\ \mathbb{Z}_2)$ 中元素的数量给出），其编码于 $\Theta$ [131] 中。

### 3.4.2 格林算子

由于 $D^2$ 是正规双曲的，因此在任意整体双曲时空上都存在唯一的超前 $G^{\mathrm{adv}}$ 和推迟 $G^{\mathrm{ret}}$格林算子 （$\mathscr{M}$，g） [132, 定理 1]。因此

$$F^{\mathrm{adv,ret}} := DG^{\mathrm{adv,ret}} : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C_{\mathrm{sc}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \tag{3.146}$$

分别是 $D$ 的唯一超前格林算子和推迟格林算子。与前面一样，

$$F := F^{\mathrm{ret}} - F^{\mathrm{adv}} : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C_{\mathrm{sc}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \tag{3.147}$$

定义了泡利–约当–利希纳罗维奇格林算子，也称为因果传播子，它作用于 $D$。假设3.4.2 和注记3.2.13 可推出

$$\forall u, v \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{E}) : (F^{\mathrm{adv,ret}}u|v) = (u|F^{\mathrm{ret,adv}}v), \quad (Fu|v) = -(u|Fv). \tag{3.148}$$

**引理 3.4.6**。设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 和 $\pi$ 分别是 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$，前者为向量丛，后者为整体双曲时空上的去心余切丛 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$，并且 $D$ 是作用于 $\mathscr{E}$ 上的 *Dirac* 型算子，其主符号记为 $\sigma_D$。那么， $D$ 的因果传播子的施瓦茨核F是一个拉格朗日分布：

$$\mathsf{F} \in I^{-1/2}\big(\mathscr{M}\times\mathscr{M}, C'; \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big), \tag{3.149a}$$

$$\sigma_{\mathsf{F}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_D \circ w\sqrt{|\mathrm{dv}_C|}\otimes\mathbb{1}, \tag{3.149b}$$

其中$\mathrm{dv}_C$ 是测地关系（定义*3.3.22*）上的自然体积形式（注记 *3.2.15*） $C$，$\mathbb{1}$ 是 *Keller-Maslov* 丛的一个截面 $\mathbb{L}_C \to C$ （构造见 *[35,*第 *231–232]*页），并且 $w$ 是 $C^{\infty}(C$中唯一的元素； $\pi^*$同态$(\mathscr{E}, \mathscr{E})_C)$其在对角线上为恒等端*omorphism*，在非对角线上协变常数

$$\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}_{X_{\mathrm{g}/2}} w = 0 \tag{3.150}$$

相对于 $D^2$-相容的魏岑伯克协变导数（定义 *3.3.6*） $\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$ $X_{\mathrm{g}/2}$沿测地向量场 $X_{\mathrm{g}/2}$ （注记 *3.3.24*）。

如果（$\mathscr{E} \to \mathscr{M}$、$\sigma_D$、$\tilde{\nabla}^{\mathscr{E}}$）是一个狄拉克模丛，并具有相应的狄拉克型算子 $\tilde{D}$，那么将（3.150）中的 $\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$ 替换为由 *Clifford*联络 $\tilde{\nabla}^{\mathscr{E}}$诱导的$\tilde{D}^2$-相容联络 $\tilde{\nabla}^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})}$ 后，前述结论仍然成立。

证明。 这由定理 3.3.23 以及以下事实可得： $D$ 是一阶微分算子，特征集 $D = \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$，并且 $\mathsf{F}(x, \cdot) = D_x\mathsf{G}(x, \cdot)$。 ■

### 3.4.3 柯西问题

由于 $D^2$ 是正规双曲算子，且 $(\mathscr{M},\ \mathrm{g})$ 是整体双曲时空，故 $D$ 的柯西问题是适定的 [132, 定理 2]。换言之，对于任意但固定的柯西超曲面 $\Sigma_t \subset \mathscr{M}$，映射

$$\mathcal{R}_t : \ker D \to C^\infty_{\mathrm{c}}(\Sigma_t; \mathscr{E}_{\Sigma_t}),\ u \mapsto \mathcal{R}_t(u) := u \restriction \Sigma_t, \quad \operatorname{supp} u \subset J\big(\operatorname{supp}(u \restriction \Sigma_t)\big) \tag{3.151}$$

是一个同胚，其中 $J$ 由（3.2）定义。为了赋予 $\ker D$ 厄米内积，我们使用以下

**假设 3.4.7**。给定整体双曲时空（$\mathscr{M}$，g）上沿任意柯西超曲面 $\Sigma$ 的任意固定未来指向的单位法余向量场（$\cdot$，$\zeta$），

$$\langle \cdot | \cdot \rangle := \big(\sigma_D(\cdot, \zeta)\, \cdot \,\big|\, \cdot\big) \tag{3.152}$$

是一个纤维丛上的Clifford模 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M},\ \sigma_D,\ (\cdot|\cdot))$上的厄米型 .

厄米型 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 取决于所选的$(\cdot、\ \zeta)$。根据（定理3.1.6）的整体双曲性$\mathscr{M}$、g），存在一个全局柯西时间函数t，使得每个柯西超曲面 $\Sigma_t :=\mathrm{t}^{-1}(t)$ 都是t的水平集，其中 $t \in \mathbb{R}$。于是

$$\zeta := \frac{\mathrm{dt}}{\|\mathrm{dt}\|} \tag{3.153}$$

是沿着 $\Sigma_t$ 定义在 $\mathscr{M}$ 上的单位法余向量场，并且我们选择时间定向，使得 $\zeta$ 是未来指向的。

利用前述拓扑同构$\mathcal{R}_t$，可以在 $\ker D$ 上赋予厄米内积（例如参见 [124,引理 3.17]）：

$$\langle u | v \rangle := \int_\Sigma \Big(\mathrm{c}\big((x, \zeta) \otimes (u \restriction \Sigma)\big) \big| v \restriction \Sigma\Big)_x \, \mathrm{dv_h}(x), \tag{3.154}$$

其中 $\mathrm{dv_h}$ 是 $\Sigma$上的黎曼体积元。我们注记，$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$与所选的柯西超曲面 $\Sigma$ 无关，这是由于格林–斯托克斯公式（见（3.164））。因此，$(\mathscr{E} \to \mathscr{M}$、$\langle \cdot | \cdot \rangle)$ 是一个厄米向量丛，当然取决于所选的$(\cdot、\ \zeta)$，但与所选的 $\Sigma$无关。

由前述方程可推知，给定初始数据 $k \in C^\infty_{\mathrm{c}}$（$\Sigma$；$\mathscr{E}_\Sigma$），狄拉克方程（1.18）的任意光滑解 $u$ 都可以表示为（参见 [133, 命题 2.4（b）] 关于自旋狄拉克算子）

$$u = -\mathrm{i}\, F \circ (\iota_\Sigma^*)^{-1}\, \mathrm{c}(\zeta \otimes k), \tag{3.155}$$

其中限制算子

$$\iota_\Sigma^* : C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C^\infty_{\mathrm{c}}(\Sigma; \mathscr{E}_\Sigma) \tag{3.156}$$

已在例2.3.12中进行了详细讨论，并且我们已考虑备注3.1.7。精确复形中的所有映射

$$0 \to C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{D} C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{F} C^\infty_{\mathrm{sc}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{D} C^\infty_{\mathrm{sc}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \tag{3.157}$$

作为 $D$ 局部算子，并且由于下述正合复形是序列连续的（参见例如 [110,命题 3.4。8]）

$$0 \to C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{D^2} C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{G} C^\infty_{\mathrm{sc}}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \xrightarrow{D^2} C^\infty_{\mathrm{sc}}(\mathscr{M};\mathscr{E}). \tag{3.158}$$

### 3.4.4 主要结果

由于 $D^2$ 是一个正规双曲算子，且定理 3.3.3 中的第一个假设由假设 3.4.2满足，因此只需令 $F^{\mathrm{Fyn}}$ 为 $D$，即可立即得到费曼传播子

$$F^{\mathrm{Fyn}} := DG^{\mathrm{Fyn}}, \tag{3.159}$$

其中，$G^{\mathrm{Fyn}}$ 是 $D^2$的费曼传播子。由于 Char $D = \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$，有

$$\mathrm{WF}'(\mathrm{F}^{\mathrm{adv,ret,Fyn,aFyn}}) = \mathrm{WF}'(\mathrm{G}^{\mathrm{adv,ret,Fyn,aFyn}}) = \Delta\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \bigcup C^{\mathrm{adv,ret,+,-}}, \tag{3.160}$$

其中，典范关系定义于（3.44）和定义3.2.15中。然而，由于正定性问题，无法据此推出 Hadamard 态的存在，因为$(\cdot|\cdot)$ 不是正定的。可以考虑 $D$ 关于某个厄米型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的对称性，使得定理 3.3.3 的假设得以满足，从而可以推出 Hadamard 态的存在。时空上旋量的自然内积并非正定，而是不定的，因此无法直接应用定理 3.4.4中的定理 3.3.3来推断自旋狄拉克算子（例子 3.4.4）的费曼传播子的正性。换言之，要求关于 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的对称性，事实证明过于严格，无法涵盖整体双曲流形上的所有 Dirac 型算子（具体例子见第 3.5.5 节和第 3.5.6 节），因此我们不施加这一条件。

定理 *3.4.8.* 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是整体双曲时空 $(\mathscr{M}, g)$ 上的一个向量丛，赋有非退化半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，且 $D$ 是作用于 $\mathscr{E}$ 上的 *Dirac* 型算子，其主符号由 $\sigma_D$ 给出。假设 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \sigma_D, (\cdot|\cdot))$ 是 $(\mathscr{M}, g)$ 上的 *Clifford*模丛，并且 $D$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的。那么，存在一个关于 $D$ 的费曼传播子 $F^{\mathrm{Fyn}}$，使得 $W := -i(F^{\mathrm{Fyn}} - F^{\mathrm{adv}})$ 是对称的，其中 $F^{\mathrm{adv}}$ 是关于 $D$ 的超前传播子。此外，如果存在一个厄米型 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 作用于 $\mathscr{E}$ 上，并满足假设 *3.4.7* 的意义下的条件，那么可以选取 $F^{\mathrm{Fyn}}$，使得 $W$ 关于 $(\cdot|\cdot)$ 是非负的，因而定义了 $D$ 的 *Hadamard*双解。

证明。首先回顾，在三维或更高的时空维数[5]中，$\operatorname{Char} D^2 = \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 只有两个连通分支：未来光锥 $\dot{\mathrm{T}}^*_{0,+}\mathscr{M}$ 和后向光锥 $\dot{\mathrm{T}}^*_{0,-}\mathscr{M}$。因此，$C$ 有四种不同的定向[6] [35, p。218]（另见 [39, p. 540]）：$(C^+, C^-)$、$(C^-, C^+)$、$(C^{\mathrm{adv}}, C^{\mathrm{ret}})$、$(C^{\mathrm{ret}}, C^{\mathrm{adv}})$，分别对应于 $\{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}, \dot{\mathrm{T}}^*_{0,+}\mathscr{M}, \dot{\mathrm{T}}^*_{0,-}\mathscr{M}, \emptyset\}$。这为对 $D^2$ 的因果传播子 $G$ 进行（非唯一的）微局部分解提供了途径，即

$$\mathsf{G} \equiv \mathsf{E}^+ - \mathsf{E}^-, \tag{3.161a}$$
$$\mathsf{E}^\pm D^2 \equiv D^2 \mathsf{E}^\pm \equiv 0, \tag{3.161b}$$
$$\mathsf{E}^\pm \in I^{-3/2}\big(\mathscr{M}\times\mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big), \tag{3.161c}$$

其中 $\equiv$ 表示模去光滑化核。显然，这是定理3.3.1的一个略强版本，可以完全以相同的方式证明；参见定理3.3.23。

为了获得关于 $D$ 的上述结果的类似结论，我们记住特征集 $D$ = 特征集 $D^2$，并将 F 分解为 $\mathsf{S}^+ + \mathsf{S}^-$，其中

$$\mathsf{S}^\pm := \sum_\alpha Q^\pm_\alpha \mathsf{F} Q^\pm_\alpha \tag{3.162}$$

且 $(Q^\pm_\alpha)^* Q^\pm_\alpha$ 是微局部单位分解，使得 $DQ^\pm_\alpha \equiv Q^\pm_\alpha D$ 和 ES $Q^\pm_\alpha = \Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M}$。因此，

$$\mathsf{F} \equiv \mathsf{S}^+ + \mathsf{S}^-, \tag{3.163a}$$
$$\mathsf{S}^\pm D \equiv D\mathsf{S}^\pm \equiv 0, \tag{3.163b}$$
$$\mathsf{S}^\pm \in I^{-1/2}\big(\mathscr{M}\times\mathscr{M}, C^{\pm\prime}; \operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big), \tag{3.163c}$$

通过应用（2.128）可得。算子$Q^\pm_\alpha$ 可以通过选取任意 $\mathsf{q}^\pm_\alpha \in S^{0-[\infty]}\big(\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}, \operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big)$ 作为其左全符号来构造，使得 esssupp $\mathsf{q}^\pm_\alpha = \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M}$。换言之，对于所有 $(y,\eta)$，在 esssupp $\mathsf{q}^\pm$ 的补集内，$\mathsf{q}^\pm_\alpha$的阶为 $-\infty$，并且在 $\eta$ 的锥形邻域内也如此。此外，我们选取 supp $\mathsf{q}^\pm_\alpha$，使其略微偏离 ES $Q^\pm_\alpha$ 在 $\mathscr{M}$ 上的投影，从而使 $[D, Q^\pm_\alpha]_-$ 光滑。

**引理 3.4.9**。按照定理 *3.4.8*中的术语，设 $F$ 是关于$D$的因果传播子。那么 $\mathrm{i}F$ 关于 $(\cdot|\cdot)$是非负的。

证明。设 $u$，$v \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 具有紧致支集 $u$ ∩支集 $v$，并设 $K \subset \mathscr{M}$为一个具有光滑边界的紧致集 $\partial K$，其带有外向单位法余向量场 $\zeta$ 和体积元 $\mathrm{dv}$。于是，格林–斯托克斯公式给出（例如参见 [134,命题 9.1，（第 178 页）]），[133，（1。7）]

$$\int_{x\in K} \big((Du|v)_x - (u|Dv)_x\big)\mathrm{dv}_{\mathsf{g}}(x) = -\mathrm{i}\int_{x'\in\partial K} \big(\sigma_D(\cdot,\zeta)\, u\big|v\big)_{x'}\mathrm{dv}(x'), \tag{3.164}$$

[5]在二维情形下，$\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 有四个连通分支；参见注记 3.2.18。[6]所谓测地关系 $C$的定向，是指将 $C \setminus \Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 分裂为开集的 $C^1$，$C^2 \subset C$ 且它们互为逆关系 [35, p。 218]。

其中 $\mathrm{dvol}_g$ 是 $\mathscr{M}$ 上的洛伦兹体积（注记 2.2.1 (d)）形式。令 $u := F^{\mathrm{ret}} w$ 并令 $v := Fw$ 对于任意 $w \in C_c^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$，上述公式蕴含 $(w|\mathrm{i}\, Fw) \geq 0$，这是由于 $(F^{\mathrm{ret}} u) \subset J^+(\text{支集 } u)$ 的紧致性。■

因此，$(u|\mathrm{i}\, S^{\pm} u) \geq 0$ 由（3.163a）。注意，$C^{\pm} = C \cap (\dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*_{0,\pm}\mathscr{M})$。考察 $F^{\mathrm{Fyn}}$ 和 $F^{\mathrm{adv}}$ 的（扭曲）波前集，如命题3.3.2证明中所述，我们得到狄拉克型算子的命题3.3.2 的类似结论：

$$(u|\hat{W}u) \geq 0, \quad \hat{W} := \mathrm{i}(F^{\mathrm{adv}} - F^{\mathrm{Fyn}}). \tag{3.165}$$

如定理3.3.3的证明中所述，为了将 $\hat{\mathsf{W}}$ 转化为精确的分布性双解W，我们将利用 $D$ 在整体双曲时空 [132,定理 2]下柯西问题的适定性。对于任意 $k \in C_c^\infty(\Sigma; \mathscr{E}_\Sigma)$，我们定义分布性柯西数据 $k \otimes \delta_\Sigma$ 如下：

$$k \otimes \delta_\Sigma(\phi) := \int_{x\in\Sigma} \phi(x)\, \mathsf{c}(\zeta \otimes k)_x \, \mathrm{dv}_{\mathsf{h}}(x) \tag{3.166}$$

对于任意 $\phi \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}^*)$。记 $\mathsf{Y}_\Sigma \subset \mathsf{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 为上述形式的分布集合，其中 $\mathsf{E}'_{\Sigma^{\perp *}}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 是支集为紧致且其波前集包含于余法丛 $\Sigma^{\perp *}$ 中的分布。任何双分布 $\mathsf{W} \in \mathsf{D}'(\mathscr{M} \times \mathscr{M}; \mathscr{E} \boxtimes \mathscr{E}^*)$，只要 $\mathsf{W}D$ 和 $D\mathsf{W}$ 在分布意义下是光滑的，就可以定义为 $\mathsf{Y}_\Sigma$ 上的序列连续双线性型。

引理 *3.4.10*。按照定理 *3.4.8* 中的术语，假设 $W \in D'(\mathscr{M}\times\mathscr{M}; \mathscr{E}\boxtimes\mathscr{E}^*)$ 是 $D$ 的双解。那么 $(u|Wu) \geq 0$ 当且仅当对所有 $u \in Y_\Sigma$，$W(\bar{u}^* \otimes u) \geq 0$，其中 $Y_\Sigma$ 是 $D$ 的分布性柯西数据 *(3.166)* 的张成空间。

证明。 证明可照搬其对应引理3.3.21 ，只需将 $D^2(= \Box)$、其柯西数据（3.109）和因果传播子 $G$分别替换为 $D$、其柯西数据（3.166）和因果传播子 $F$即可。■

■

## 3.5 例子

下面列出几个在弯曲时空中的量子场论背景下出现的算子，并讨论它们如何适用于我们的框架。

### 3.5.1 协变克莱因-戈尔登算子

如示例 3.2.2所述，$C^\infty(\mathscr{M})$ 上的自然内积相对于 $\Box$ 是正定的，而后者是对称的。因此，定理3.3.3适用，并且可以使用此方法构造正的费曼传播子。

### 3.5.2 联络达朗贝尔算子

根据定理3.3.3， $\square$ （示例 3.2.5）存在费曼传播子。正定性问题取决于内积相对于 $\square$ 的正性，而后者是对称的。

### 3.5.3 霍奇-达朗贝尔算子

对于例 3.2.4 中的这个算子，根据定理 3.3.3，存在费曼传播子。由于使该算子成为对称的自然内积，除非 $k = 0$或 $k = d$，否则并非正定，因此我们无法直接得出非负性。例如，对于 $k = 1$，正如规范理论中的通常情况一样，非负性仅在某个子集上才是预期的。

### 3.5.4 普罗卡算子

按照例 3.2.7中的术语，可以通过这种方法构造一个 $\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{m}^2$ 的费曼传播子，且正定性问题与第 3.5.3节中的相同。

### 3.5.5 扭曲自旋狄拉克算子

设 $(\mathscr{S} \to \mathscr{M}, \nabla^{\mathscr{S}})$和 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \nabla^{\mathscr{E}})$分别为一个旋量丛（例 3.4.4和注 3.4.5）以及一个赋有列维-奇维塔自旋联络 $\nabla^{\mathscr{S}}$ 和丛联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$的向量丛，它们定义在一个全局双曲自旋时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$上。这两个联络诱导出另一个联络 $\nabla := \nabla^{\mathscr{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathscr{E}} + \mathbb{1}_{\mathscr{S}} \otimes \nabla^{\mathscr{E}}$，定义在扭曲旋量丛 $\mathscr{S} \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 上；而 **扭曲自旋狄拉克算子** 定义如下（例如参见 [125]）

$$\not{D} := -\mathrm{i}\gamma \circ \mathrm{g}^{-1} \circ \nabla : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S} \otimes \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}, \mathscr{S} \otimes \mathscr{E}), \tag{3.167}$$

其中 $\gamma\colon\ C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M}) \to \mathrm{End}\ \mathscr{S}$是满足下述条件的克利福德映射

$$\gamma(X)\,\gamma(Y) + \gamma(Y)\,\gamma(X) = 2\mathrm{g}_x(X, Y)\,\mathbb{1}_{\mathrm{End}\,\mathscr{S}_x} \tag{3.168}$$

对任意的 $X, Y \in \mathrm{T}_x\mathscr{M}$和 $x \in \mathscr{M}$。克利福德乘法由下式给出

$$C^\infty(\mathscr{M}; \mathrm{T}\mathscr{M} \otimes \mathscr{S} \otimes \mathscr{E}) \ni (x, X) \otimes \psi \otimes u \mapsto (\gamma(X)\psi) \otimes u \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S} \otimes \mathscr{E}). \tag{3.169}$$

薛定谔-利希内罗维奇 [135]- [136]公式蕴含（例如参见 [132, 例 1]）

$$\not{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{ric}}{4} + \mathfrak{F}, \tag{3.170}$$

其中，ric 是 $\mathscr{M}$ 的标量曲率， $\mathfrak{F}$ 是 $\nabla^{\mathscr{E}}$的克利福德乘曲率。

显然，$\not{D}^2$ 是一个正规双曲算子，因此$\not{D}$ 是 Dirac 型。该公式还表明，魏岑伯克联络 是扭曲自旋联络 $\nabla$，作用于

扭曲旋量丛（$\mathscr{S}\otimes\mathscr{E}\to\mathscr{M},\nabla$）上，因此应使用 $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}\otimes\mathscr{E},\mathscr{S}\otimes\mathscr{E})\to\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 上的诱导联络进行微局部化（定理 3.3.10）。由于$\not{D}$相对于 $\mathscr{S}\otimes\mathscr{E}$上的自然内积$(\cdot|\cdot)$是对称的，根据定理 3.3.3，$\not{D}$ 存在一个费曼传播子；然而，无法由此得出 Hadamard 态的存在性，因为除非$(\mathscr{M},\mathrm{g})$是黎曼流形，否则$(\cdot|\cdot)$并非正定。不过，$(\mathscr{M},\mathrm{g})$是整体双曲的，因此（定理 3.1.6 及（3.153）），存在光滑的类空柯西超曲面 $\Sigma$ 以及未来指向的单位向量场 N；N 在 $\mathscr{M}$ 上，并且垂直于 $\Sigma$，从而 $\gamma(\mathrm{N})\cdot$定义克利福德乘法，以得到厄米型$\langle\cdot|\cdot\rangle$（参见假设 3.4.7）。于是，定理 3.4.8 适用，并且我们得到相对于$(\cdot|\cdot)$具有所需正性的费曼传播子。

### 3.5.6 拉里塔-施温格算子

按照例 3.4.4 中的术语，令 $\mathscr{S}\to\mathscr{M}$ 为一个定义在自旋-时空 $(\mathscr{M}、\mathrm{g})$ 上的旋量丛，且克利福德乘法由 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}\otimes\mathscr{S}\ni(x,\ \xi)\otimes u\mapsto\gamma(\xi^\sharp)u\in\mathscr{S}$给出。那么，我们有表示论分解

$$\mathrm{T}^*\mathscr{M}\otimes\mathscr{S}=\iota(\mathscr{S})\oplus\mathscr{S}^{3/2},\tag{3.171}$$

其中，$\mathscr{S}^{3/2}$ 定义为克利福德乘法的核，而将 $\mathscr{S}$ 嵌入 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}\otimes\mathscr{S}$ 的映射 $\iota$局部定义为

$$\iota(u):=-\frac{1}{d}e_i\otimes\gamma(e^i)u,\tag{3.172}$$

其中，$\{e_i\}$是 $\mathrm{T}\mathscr{M}$的正交归一基。假设

$$\not{D}:=\mathrm{i}(\mathbb{1}\otimes\gamma)\circ\nabla\tag{3.173}$$

是 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}\otimes\mathscr{S}$上的扭曲狄拉克算子，那么 **拉里塔-施温格算子** 定义为 [124,定义 2。25]

$$\mathrm{R}:=(I-\iota\circ\gamma)\circ\not{D}:C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{S}^{3/2})\to C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{S}^{3/2}).\tag{3.174}$$

R 的特征集 R 与下列集合重合：$\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 维数为 $d\geq 3$（例如参见 [124, 引理 2。26]），并且 R 是一个对称的微分算子，其柯西问题是适定的，当 $(\mathscr{M},\ \mathrm{g})$ 整体双曲时，尽管 $\mathrm{R}^2$ 是并非正规双曲算子（例如参见 [124，注 2。27]）。此外，厄米型（3.152）在不存在于 $d\geq 3$ [124, 例 316]中。

最初，Rarita 和 Schwinger（在闵可夫斯基时空中）考虑了扭曲狄拉克算子 $\not{D}$，将其限制在 $\mathscr{S}^3/2$ 上，但未将其投影回 $\mathscr{S}^{3/2}$ [137, (1)]（另见 [138, 第 2], [139, 命题 2.7]，关于黎曼自旋流形，以及 [124, 注 2.28]，关于洛伦兹自旋流形），即，

$$\not{D}\restriction C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{S}^{3/2}):C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{S}^{3/2})\to C^\infty(\mathscr{M};\mathrm{T}^*\mathscr{M}\otimes\mathscr{S}),\tag{3.175}$$

为了确保自旋-3/2 域具有正确数量的传播自由度（例如参见综述 [140, 141] ，其中介绍了物理学动机以及物理学文献中采用的不同方法）。相应的拉里塔-施温格算子

$$\mathrm{Q} := (I - \iota \circ \gamma) \circ \left(\not{D} \restriction C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{S}^{3/2})\right) \tag{3.176}$$

于是这是一个超定系统，而这一受约束系统限制了时空可能具有的曲率 [142]（另见，例如 [138,第 856], [143]页）：

$$\left(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{ric}}{d}\mathrm{g}\right)^* u = 0, \tag{3.177}$$

其中，Ric 分别表示 $\mathscr{M}$ 的 Ricci张量，ric 表示 Ricci标量曲率。换言之，Q 的解（拉里塔-施温格域）仅存在于*Einstein*自旋流形中。然而，Q不 存在任何格林算子 [124,注 2.28]。

由于 R 的柯西问题在整体双曲时空上是适定的（$\mathscr{M}$，g），拉里塔-施温格算子（3.174）存在唯一的超前 $S^{\mathrm{adv}}$ 和迟延 $S^{\mathrm{ret}}$ 格林算子。此外，当 Char R $= \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$ 时，它还存在费曼 $S^{\mathrm{Fyn}}$ 和反费曼$S^{\mathrm{aFyn}}$ 格林算子（这意味着测地关系有四种可能的定向）。这些算子可以通过假设因果Green算子的构造 $S := S^{\mathrm{ret}} - S^{\mathrm{adv}}$ 并采用与 Dirac 型算子情形相同的策略（参见定理 3.4.8 的证明）来构造。然而，正定性问题尚无定论。

### 3.5.7 高自旋算子

将闵可夫斯基时空上的狄拉克算子推广到任意自旋 [144] 弯曲时空[7] 的直接尝试会带来困难（例如参见 [145, 第 324]页以了解概览，以及相关综述 [140, 141]）。Buchdahl算子（定义于黎曼流形上）的提出带来了关键进展 [146] （关于Lorentz形式，参见[124, 例2。24]其平方结果是一个正规双曲算子 [124,第 8], 页，然而，最小耦合原理似乎遭到违背，因此在Buchdahl最初的构想中，需要一个“手工”提出的方案。这些细微缺陷后来由Wünsch [147], 、Illege [148, 149]以及Illege和Schimming [145] 加以修正，针对有质量情形，在四维弯曲时空中采用了二旋量形式。特别地，Buchdahl算子的平方（经Wünsch和Illge修改后）是定义在某个扭曲丛上的正规双曲算子。相比之下，无质量情形仍存在一些未决问题 [150] （当代研究现状及物理学文献中采用的其他形式，也可参见相关综述 [140, 141]）。因此，根据定理3.3.3或定理 3.4.8，费曼传播子的存在性是显然的，但正性问题在现阶段尚无定论。

[7]不一定是整体双曲的。

## 3.6 文献

时空的洛伦兹几何 已得到相当充分的研究，并在诸多专著中进行了详尽阐述，例如 [88, 111, 115, 151, 152]。全局双曲性的概念由Jean LERAY [153] 提出，旨在确保柯西问题的适定性。后来，Roger PENROSE [154] 借助其宇宙审查猜想（例如参见 [115, 第200—209、299— 308]页），尤其在爱因斯坦广义相对论的背景下，强调了这一类时空。以柯西超曲面刻画全局双曲流形，最初归功于Robert GEROCH [108]，他证明了定理“一个拓扑版本”3.1.6。Antonio BERNAL 和Miguel SÁNCHEZ [109] 随后发表了四篇系列文章，进一步完善了其拓扑分裂定理；特别是，他们在时空度量层面实现了正交光滑分裂。详情请参阅综述文章 [107, 155]。

正规双曲算子的基本解已由 Jacques HADAMARD [156] 和 Marcel RIESZ [157] 在极其一般的情形下构造出来。现代论述例如包括 [72, 110, 158]。

费曼传播子由 Richard FEYNMAN [159] 引入。他在量子场论的背景下，通过所谓的时序乘积（参见附录 C.3），提出了 Ernst STÜCKELBERG 的观点：“粒子沿时间正向传播，而反粒子沿时间反向传播”。他的原始定义并不严谨，只有在闵可夫斯基时空中才能得到充分理解，正如例 C.3.2中所回顾的那样。其数学基础由 Johannes J. DUISTERMAAT 和 Lars HÖRMANDER [35, 第6节6]给出。事实上，标量伪微分算子的实主类型特定初始解这一概念，是在他们的奠基性文章中提出的；他们在那里确定了一种几何意义下的伪凸性，从而能够证明这类参数子的唯一性。尽管他们受到物理学发展的启发，并且当然也了解这些发展，但直到很久以后，Maciej RADZIKOWSKI [39] 才认识到：对于满足 Hadamard条件的状态，时序乘积的期望值就是费曼传播子。

自旋狄拉克算子以 Paul DIRAC [161] 命名；他在量子场论的背景下引入这一算子，用以描述电子在闵可夫斯基时空中的动力学。当时丛的语言尚未发展起来，因此直到自旋结构得到精确定义后，才有了狄拉克算子的几何表述。此后，狄拉克型算子出现在 Michael ATIYAH、Vijay PATODI 和 Isadore SINGER [162] 关于其著名指标定理的工作中。关于洛伦兹自旋几何的论述，请参阅 [125, 126]；关于黎曼狄拉克型算子的详细介绍，请参阅 [114, 163] 。

# 第4章

# Gutzwiller迹公式

本章推导了空间紧致的全局双曲定常时空上狄拉克算子核的时间流的Duistermaat-Guillemin迹公式。

## 4.1 平滑算子的迹

我们回顾一下，在 $\mathbb{C}$ 上的结合代数 $(\mathscr{A},\cdot)$ 上，**迹** 是一个线性泛函

$$\mathrm{Tr}:\mathscr{A}\to\mathbb{C}\quad \text{such that}\quad \forall A,B\in\mathscr{A}:\mathrm{Tr}([A,B]_-)=0, \tag{4.1}$$

其中 $[A,B]_-:=A\cdot B-B\cdot A$ 是由 $\mathscr{A}$ 上的乘法·结构定义的交换子。特别地，设 $\mathscr{E}_\Sigma\to\Sigma$ 是紧流形 $\Sigma$（无边界）上的一个向量丛。则 $\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\Sigma;\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma)$ 是一个平滑算子的Fréchet代数，并且

$$\mathrm{Tr}:\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\Sigma;\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma)\to\mathbb{C},\ P\mapsto\mathrm{Tr}\,P:=\int_M\mathrm{tr}\left(\mathsf{P}(x,x)\right), \tag{4.2}$$

其中 $\mathsf{P}(x,x)$ 是施瓦茨核 $\mathsf{P}$ 的 $P$ 在 $\Sigma\times\Sigma$ 对角线上的限制，tr 是由（3.8）定义的端同态迹。该迹满足迹性质是 Fubini定理的结果，并且该迹是 $\Psi\mathrm{DO}^{-\infty}(\Sigma;\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{1/2}\Sigma)$ 上的唯一迹（参见 [9,第1.1.7、4.3节。2]）

## 4.2 静态时空

**定义 4.2.1**。若一个时空（定义 3.1.2）（$\mathscr{M}$，g）被称为**静态的**（$\mathscr{M}$，g，$\Xi$），如果它具有一个全局类时Killing流 $\Xi$。

Killing流 $\Xi_s:\ \mathscr{M}\to\mathscr{M}$，其本身使时空度量 g 保持不变：

$$\Xi_s^{\mathrm{T}^*\mathscr{M}\times\mathrm{T}^*\mathscr{M}}\mathsf{g}=0\Leftrightarrow\pounds_Z\mathsf{g}=0 \tag{4.3}$$

对于任意 $s \in \mathbb{R}$，其中 $Z$ 是 $\Xi_s$的无穷小生成元，称为*Killing*向量场。换句话说，Killing流 $\Xi_s$ 是时空等距变换。在$\mathscr{M}$上的局部坐标（$x^i$）中， $Z = Z^i\partial_i$，且前述方程意味着**Killing方程**：

$$\nabla_i^{\mathrm{LC}} Z_j + \nabla_j^{\mathrm{LC}} Z_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, d, \tag{4.4}$$

其中， $\nabla_X^{\mathrm{LC}}$是（$\mathscr{M}$，g）的Levi-Civita协变导数。

**例4.2.2**。 设（$\mathscr{M}$，g） =（$\mathbb{R}^4$， η）为4维闵可夫斯基时空。 $\mathbb{R}^4$ 的所有等距变换由平移和Lorentz变换组成，并具有群结构——即*Poincaré*群。在惯性坐标（$x^i$） =（$t$， $x$， $y$， $z$）中：

- （$Z^i$） =（0，0，0，1）是生成沿 $z$方向平移的Killing向量场。
- （$Z^i$） =（0， 0， $-z$， $y$）是生成绕$x$轴旋转的Killing向量场。
- （$Z^i$） =（$x$， $t$， 0， 0）是生成沿 $x$轴boost变换的Killing向量场。

Killing流在物理上被解释为时间流，它允许对1 +（$d$ − 1）维非唯一的拓扑（分别为局部几何）分解 $\mathscr{M}$ （分别为g）。这可以通过投影形式主义 [164]（另见例如 [165, 166]）实现，也可以通过 Kaluza-Klein约化实现（例如见 [152, 第 XIV 节。2]在下文中，我们可以（并且在某些时候将会）考虑静态时空的一个稍微特殊的版本。

**定义 4.2.3**。 设 ($\Sigma$，h) 为一个黎曼流形。**标准静态时空**定义为三元组 ($\mathscr{M}$，g， $Z$)，其中（例如见 [155, (7.1)], [167, 定义 3.3]）

$$\mathscr{M} := \mathbb{R} \times \Sigma \tag{4.5}$$

是一个时空流形，具有一个完备的类时 Killing 向量场 $Z$ 以及一个局部坐标图 $(U, (t, x^i))$，使得 $Z \upharpoonright U = \partial_t$，并且其时空度量

$$\mathrm{g} \upharpoonright U := \beta^2\, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{h}_{ij}(\mathrm{d}x^i + \alpha^i\, \mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + \alpha^j\, \mathrm{d}t), \quad i, j = 2, \dots, d, \tag{4.6}$$

其中， α 是位移向量场， β 是切片函数，二者均与 $t$无关。

并非所有标准静态时空都是整体双曲的（定义 3.1.3），正如第 3.1.2 节所述，我们只关注其中整体双曲的时空。借助 Fermat度规可以得到我们所需的类别（例如参见 [155, 第 7] 节及其中的参考文献）

$$\mathrm{f} := \frac{1}{\beta^2 - \|\alpha\|_{\mathrm{h}}^2}\mathrm{h}_{ij}\alpha^i \mathrm{d}x^j + \sqrt{\frac{1}{\beta^2 - \|\alpha\|_{\mathrm{h}}^2}\mathrm{h}_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + \left(\frac{\mathrm{h}_{ij}\alpha^i \mathrm{d}x^j}{\beta^2 - \|\alpha\|_{\mathrm{h}}^2}\right)^2} \tag{4.7}$$

对于给定的分裂 (4.6)，在 $\Sigma$ 上。该度量诱导出一个（不一定对称的）距离 $d_f$，定义在 $\Sigma$ 上；进而诱导出前向闭球 $\mathbb{B}^+(x, r) := \{y \in \mathscr{M} \mid d_f(x, y) \leq r\}$ 和 ¯后向闭球 $\mathbb{B}^-(x, r) := \{y \in \mathscr{M} \mid d_f(y, x) \leq r\}$。类似地，也有前向（后向）柯西序列以及前向（后向）完备性。此外，定义与对称化距离$(d_f(x, y) + d_f(y, x))/2$ 相对应的闭对称化球 $\mathbb{B}_s(x, r)$。用这些术语来说，定理 [168, Thm. 4.3b, 4.4, Cor. 5] 的分析可概括如下

**定理 4.2.4**。 对于标准静态时空$(\mathscr{M}、g、 Z)$，以下性质彼此等价（参见例如综述 *[155, 定理 7.2], [167, 定理 3.1]*）。

- $(\mathscr{M}、g、 Z)$ 是整体双曲的。
- 与 $\mathbb{B}_s$ 相关的 *Fermat*度规的(4.7) 闭对称化球$(\mathscr{M}、g)$ 是紧致的，其中标准静态分裂可以任选一种（若一种成立，则任一种均成立）。

此外，与标准静态分裂相关的切片是柯西超曲面，当且仅当与该分裂相关的 *Fermat*度规向前和向后均完备。

一个充分条件是

**推论 4.2.5**。 设$(\mathscr{M}、g、 Z)$ 是一个标准静态时空。若h 是完备的，且$d_0$是$(\Sigma、h)$上到某个（从而也是任意）固定点 $x_0 \in \Sigma$的距离函数，并满足

$$\sup \left\{ \frac{\|\alpha\|_h}{d_0}(x), \frac{\sqrt{\beta^2 - \|\alpha\|_h^2}}{d_0}(x) \mid x \in \Sigma, d_0(x) > 1 \right\} < \infty, \tag{4.8}$$

则$(\mathscr{M}、g、 Z)$ 是整体双曲的，且所有切片 $\Sigma_t$ 都是 *Cauchy* 超曲面。

特别地，若 $\alpha$ 是次线性的：$\|\alpha\|_h < cst_1\, d_0(x) + cst_2$且 $\beta$ 是次二次的：$\beta(x) < cst_3\, d_0(x) + cst_4$ 对于某些常数成立（例如参见 *[155, 推论 7。1]*）。

**注记 4.2.6**。 按照定义4.2.1 和 4.2.3中的术语：

(a) 完备性意味着 Killing流是整体定义的

$$\Xi : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M},\ (s, x) \mapsto \Xi(s, x) =: \Xi_s(x), \quad d\Xi(s, x; \partial_s, 0) = Z\big(\Xi(s, x)\big), \tag{4.9}$$

其中 $Z$ 是全局类时Killing向量场，局部表示为 $\partial_s$。我们指出，有些作者定义静态时空时不要求完备性假设，但这一假设对论文至关重要。

（b）如果整体双曲静态时空的某个类时 Killing 向量场是完备的，那么该时空就是标准静态时空 [169,定理 2。3]。

（c）分裂（4.6）并不唯一。

(d) 全局双曲静态时空称为**空间紧致**，当且仅当其柯西超曲面是紧致的。此类时空是测地完备 [170,引理 1.1]。

(e) 在一般的 $d > 2$ 维（标准）静态时空中，Killing 向量场（$\partial_t =$）$Z$ 不与 $\Sigma_t$ 正交，因为相应的 1-形式 $Z^\flat$ 不满足超曲面正交条件：

$$Z^\flat \wedge \mathrm{d}Z^\flat \neq 0. \tag{4.10}$$

换言之，$Z$ 的正交几何分布是非闭合的。从物理上说，这意味着 $Z$ 的相邻轨道可以彼此缠绕。在 $d = 2$ 中，这种情况不会发生，也就是说，每个 Killing 向量场至少在局部都是超曲面正交的，因为没有旋转的自由度。如果要求 $\Sigma_t$ 与时空等距变换的轨道正交，那么（$\mathscr{M}$, g, $\Xi$）称为静态时空，并且存在一个典范但不唯一的全局时间坐标 $t$。在这种情况下，$\alpha$ 恒等于零，因此（4.6）中没有 $\mathrm{d}t\mathrm{d}x^i$ 型交叉项。此外，如果要求 $Z$ 的范数为常数，那么静态时空称为超静态时空。这使得 $\beta$ 成为恒等函数（例如参见 [151, 第 120-122] [115, 页（B.3.6）及附录 C.3]）。

(f) 在一个 $d$ 维洛伦兹流形上，至多存在 $d(d+1)/2$ 个线性无关的Killing向量场。在我们当前的物理宇宙中，$d = 4$。因此，它最多可以容纳 10 个Killing向量场，而这个最大对称空间被称为*de Sitter*时空。

## 4.3 狄拉克算子的Gutzwiller迹公式

为了直观理解静态时空上Dirac 型算子的Gutzwiller迹公式，我们从最简单的情形开始。

### 4.3.1 $\mathbb{S}$上的泊松求和公式

由于 $\mathrm{H}^1(\mathbb{S};\ \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$（参见例 3.4.4），圆 $\mathbb{S}$ 具有 两个不等价的 自旋结构，如下所述（另见例如 [171,第 3]节）。

- **平凡自旋结构**：使用 SO(1) $= \{1\}$ 和 Spin (1) $= \mathbb{Z}_2 = \{+1,\ -1\}$。于是，标架丛（$\mathscr{Q}$, SO(1), $\mathbb{S}$）是平凡的，自旋结构也是如此

$$\mathscr{P}_{\mathrm{triv}} = \mathbb{S} \times \mathrm{Spin}\,(1), \quad \mathscr{S}_{\mathrm{triv}} := \mathscr{P}_{\mathrm{triv}} \times \mathbb{C}, \tag{4.11}$$

其中，双覆盖 $\Theta$ 是第一个因子的投影。因此， $\mathbb{S}$ 上的旋量只是 $\mathbb{S}$ 上的（$\mathbb{C}$-值）函数，它们可视为 $\mathbb{R}$上的 $T$-周期函数：

$$C^\infty(\mathbb{S};\mathscr{S}_{\text{triv}}) = C^\infty(\mathbb{S}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall T > 0 : u(x+T) = u(x)\}. \tag{4.12}$$

$\mathbb{S}$ 上的无质量自旋Dirac算子不过就是导数算子 $\mathrm{D}_x$:

$$\not{D}_{\mathbb{S}} := -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}_x. \tag{4.13}$$

因此 Spec $/\!\!D_{\mathbb{S}}$ = Spec$\mathrm{D}_x$ ，而泊松求和公式（1.4）本质上就是 $/\!\!D_{\mathbb{S}}$ 在 $\mathbb{S}$ 上的平凡自旋结构的泊松求和公式。

- **非平凡自旋结构**：在此情况下，对于 $T > 0$,

$$\mathscr{P}_{\text{ntriv}} = \big([0,T] \times \mathrm{Spin}\,(1)\big)/\!\sim, \tag{4.14}$$

其中 $\sim$ 将 0 与 $T$ 对应，同时交换 Spin (1) 中的两个元素 $=\{+1, -1\}$。因此，$\mathscr{S}_{\text{ntriv}}$的截面不再是 $C^\infty(\mathbb{S})$，而是反周期的：

$$C^\infty(\mathbb{S};\mathscr{S}_{\text{ntriv}}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall T > 0 : u(x+T) = -u(x)\}. \tag{4.15}$$

与（1.3）相比，其谱为

$$\mathrm{Spec}\,\not{D}_{\mathbb{S}} = \{\lambda_n | n \in \mathbb{Z}\}, \quad \lambda_n := \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega, \quad \omega := \frac{2\pi}{T} \tag{4.16}$$

对应于正交归一特征旋量 $\phi_n := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n x}/\sqrt{T}$。类似地，可以得到非平凡自旋结构的泊松求和公式；它在结构上与平凡自旋结构的泊松求和公式相似，但并不完全相同。

用相对论语言来说，在 $\mathbb{S}$上的平凡自旋结构和非平凡自旋结构的泊松求和公式描述了一个精确迹公式 Tr $U_t$，其对应于 $U_t := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/D_{\mathbb{S}}}$上的乘积自旋流形 $(\mathbb{R}\times\mathbb{S}, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2)$。本论文致力于在以下意义上对这一结果进行极大推广：前述例子中的 $\mathbb{S}$ 被紧致柯西超曲面所取代， $\Sigma$而乘积度量 $\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$ 的作用则由平稳时空度量承担（参见定义4.2.1、4.2.3以及注记4.2.6(b)）。

## 4.3.2 主要结果

设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是定义在一个 $d \geq 2$ 维空间紧致的全局双曲定常时空（第 4.2 节）（$\mathscr{M}$, g, $\Xi$）上的向量丛。也就是说，时空流形$\mathscr{M}$同胚于乘积流形 $\mathbb{R}\times\Sigma$，其中 $\Sigma \subset \mathscr{M}$是一个无边界的类空紧致柯西超曲面，并且 （$\mathscr{M}$，g）具有一个 完备的 类时 Killing 向量场 $Z$，其流为 $\Xi$ （注记 4.2.6 （ a ））。

**假设 4.3.1**。 我们考虑定义在向量丛 $D$ 上的狄拉克型算子（定义 3.4.1） $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$，该向量丛定义在全局双曲定常时空 （$\mathscr{M}$，g， $\Xi$）上，并满足以下假设：

(a) $\mathscr{E}$赋有一个半双线性型 $(\cdot|\cdot)$，该型在 Killing流 $\Xi_s^*$作用下保持不变，且 $D$ 是对称的；

(b) 给定任意一个固定的未来指向的单位法余向量场 $(\cdot, \zeta)$，定义在 $\mathscr{M}$ 上，沿任意柯西超曲面 $\Sigma$，

$$\langle \cdot | \cdot \rangle := (\sigma_D(\cdot, \zeta) \cdot | \cdot) \tag{3.152}$$

是 Clifford模丛（第 3.4.1节）上的纤维厄米型$(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \ \sigma_D, \ (\cdot|\cdot))$，其中 $\sigma_D$ 是 $D$的主符号；

(c) $D$ 与 $\mathscr{E}$ 上的诱导 Killing 流 $\Xi_s^*$交换，对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均成立。

关于第二个假设，我们回顾假设 3.4.7 之后的注释。在当前情形下，我们使用 $Z$ 来确定时间定向，并注意到在静态时空上，可以为 $(\partial_t)^\flat$ （相差一个归一化因子）选择 Killing余矢场 $\zeta$ （详见注记 4.2.6 (e)）。

如前所述，Clifford 模丛 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \ \sigma_D(\cdot|\cdot))$ 自然地配备了由 $D$ 和 g 诱导的唯一魏岑伯克联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$ ((3.124))。该联络沿时空等距变换 $\Xi_s(\cdot)$诱导出平行移动映射 $\hat{} \ \Xi_s$: $\mathscr{E}_\cdot \to \mathscr{E}_{\Xi_s(\cdot)}$。随后，下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{\hat{\Xi}_s} & \Xi_s^*\mathscr{E} & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{M} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathscr{M} & \xrightarrow{\Xi_s} & \mathscr{M} \end{array}$$

图 4.1：在静态时空 $(\mathscr{M}, \ \mathrm{g}, \ \Xi)$ 上的 Clifford模丛 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}, \ \sigma_D(\cdot|\cdot))$ 通过时空等距变换 $\Xi_s$: $\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 的拉回。

令 $\pounds_Z$ 表示关于 Killing向量场 $Z$ 的李导数（由（2.135）给出），其作用于 $\mathscr{E}$，并且（参见（2.135））

$$\mathrm{L} := -\mathrm{i}\pounds_Z : C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \tag{4.17}$$

从而 在 $C^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 上，诱导的 Killing 流表示为 $\Xi_s^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\mathrm{L}}$。根据假设，

$$[\mathrm{L}, D]_- = 0. \tag{4.18}$$

因此，在 $\ker D$ 上，L 的特征截面 $\psi_n$ 是联合特征截面：

$$D\psi_n = 0, \qquad \mathrm{L}\psi_n = \lambda_n \psi_n. \tag{4.19}$$

我们赋予 $\ker D$厄米内积 $\langle \cdot \ | \cdot \rangle$，从而得到希尔伯特空间 $(\ker D, \langle \cdot \ | \ \cdot \rangle)$。

**定理 4.3.2**。 在假设 *4.3.1*下，算子 L：= (4.17) 在希尔伯特空间$\mathscr{H}$：= (ker $D$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ：= (3.154)) 上的谱是纯离散的，由无穷多个实特征值组成；这些特征值按多项式增长，并在 $\pm\infty$处聚积。

因此，我们可以将注意力完全限制在光滑截面 $C^\infty(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$ 上， $\mathscr{E}$由于椭圆正则性，且 $\operatorname{tr}_{\mathscr{H}} e^{\mathrm{i}tL}$作为分布是有意义的，并且根据（1.21）有如下识别

$$\operatorname{Tr} U_t = \operatorname{tr}_{\mathscr{H}} \Xi_t^*, \tag{4.20}$$

其中 $U_t$ 是狄拉克方程（1.18）的时间演化算子。

由于经典动力学由 $D$ 的主符号 $\sigma_D$ 控制，其特征集 Char $D$ 可被视为 ker $D$ 的经典极限，即几何量子化意义下的本征对象。因此，我们的经典相空间是光锥丛 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M} \to \mathscr{M}$，位于（$\mathscr{M}$, g, $\Xi$）之上，其中度量哈密顿量 $H_{\mathrm{g}}$ := （3.113）为零；而约化相空间则是由余切丛 [122] 中的缩放类光测地线构成的锥形辛流形 $\mathscr{N}$（另见 [123]）。作为一个整体双曲时空， $\mathscr{M}$ 不允许存在闭类时测地线。因此，周期轨道的洛伦兹类比这一概念，是通过时空等距变换 $\Xi_t$ 在 $\mathscr{N}$ 上诱导的（约化）辛流 $\Xi_t^{\mathscr{N}}$ 来定义的，其哈密顿量由 [27,Lem. 1.1] 给出。

$$H : \mathscr{N} \to \mathbb{R},\ \gamma \mapsto H(\gamma) := \mathrm{g}\Big(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}s}, Z\Big), \tag{4.21}$$

其中， $\mathbb{R} \ni s \mapsto c(s) \in \mathscr{M}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的任意类光测地线，且值 g($\mathrm{d}c/\mathrm{d}s$, $Z$)与 $c$的余切提升 $\gamma$ 无关。由于 $Z$ 是类时的，该哈密顿量为正。对于任意 E $\in \mathbb{R}_+$，我们将常值 E-能量曲面记为

$$\mathscr{N}_{\mathrm{E}} := \{\gamma \in \mathscr{N} \mid H(\gamma) = \mathrm{E}\}. \tag{4.22}$$

$\Xi_s^{\mathscr{N}}$的**周期**，即**周期类光测地线**的集合，随后由 [27, (6)]给出

$$\mathcal{P} := \{T \in \mathbb{R}_+ \mid \exists \gamma \in \mathscr{N} : \Xi_T^{\mathscr{N}}(\gamma) = \gamma\}, \tag{4.23a}$$

$$\mathcal{P}_T := \{\gamma \in \mathscr{N} \mid \Xi_T^{\mathscr{N}}(\gamma) = \gamma\}. \tag{4.23b}$$

回顾一下，将流形上所有周期测地线的长度连同其重数所组成的集合称为该流形的长度谱。我们的第一个发现是，Tr $U_t$ 按照下述意义确定了 $\mathscr{N}$的洛伦兹长度谱。

命题 *4.3.3.* 设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是空间紧致的整体双曲静态时空（$\mathscr{M}$, $g$, $\Xi$）上的一个向量丛，赋有一个半双线性型（$\cdot|\cdot$），且 $D$ 是作用于 $\mathscr{E}$上的狄拉克型算子，其主符号为 $\sigma_D$，使得 $(\mathscr{E} \to \mathscr{M}、\ \sigma_D,\ (\cdot|\cdot))$ 是（$\mathscr{M}$，$g$，$\Xi$）上的 *Clifford*模丛。若 $U_t$ 是 $D$ 的时间演化算子，则在假设 *4.3.1* 下，*Tr* $U_t$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分布，且其奇异支集

$$\operatorname{singsupp} \operatorname{Tr} U_t \subset \{0\} \cup \mathcal{P}, \tag{4.24}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是诱导的 *Killing* 流的周期集合 $\Xi_T^{\mathscr{N}}$，定义在缩放类光测地线流形上 $\mathscr{N}$，由 (4.23a)给出。

拉格朗日分布（第 2.3.3 节）为 Tr 提供了优雅的刻画 $U_t$，如下所述。

**定理 4.3.4**。 如命题 *4.3.3* 所述，迹 $U_T$ 是拉格朗日分布 $I^{d-7/4}(\mathbb{R},\ \Lambda_T)$ 其中 $d$：=维数 $\mathscr{M}$ 并且

$$\Lambda_T := \{(T,\tau) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_- \mid \exists \gamma \in \mathscr{N} : \Xi_T^{\mathscr{N}}(\gamma) = \gamma, \tau = -H(\gamma)\}, \tag{4.25}$$

是拉格朗日流形 $\Lambda_T$，其中哈密顿量 $H$ 在 $\mathscr{N}$ 上的定义为 (4.21)。此外，

$$(\operatorname{Tr} U_0)(t) = u_0(t) + v_0(t), \tag{4.26}$$

其中，$v_0$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分布，在 $t=0$ 附近光滑；$u_0$ 是一个拉格朗日分布，并在 $t=0$附近具有如下奇异性展开：

$$\begin{aligned} u_0(t) &\sim r(d-1)\frac{\operatorname{vol}(\mathscr{N}_{H\le 1})}{(2\pi)^{d-1}}\mu_{d-1}(t) + \mathrm{c}_2\,\mu_{d-2}(t) + \dots, \\ r &:= \operatorname{rk}\mathscr{E}\int_\Sigma \mathrm{g}_x^{-1}(\eta,\zeta)\,\mathrm{dv_h}(x), \\ \mu_{d-k}(t) &:= \int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}\tau^{d-1-k}\mathrm{d}\tau, \quad k=1,2,\dots. \end{aligned} \tag{4.27}$$

这里，$\mu_{d-k}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分布，由前述振荡积分给出；$\eta$ 是 $\mathscr{M}$ 上的任意类光余向量；$\zeta$ 如假设 *4.3.1* 所述，二者均限制在柯西超曲面 $\Sigma$ 上，位于 $\mathscr{M}$；$\mathrm{c}_2$ 是某个常数（狄拉克波迹不变量），而 体积 $\mathscr{N}_{H\le 1}$ 是 $\mathscr{N}_{H\le 1}$的体积。

如4.2.6 (b)中所述，$(\mathscr{M},\ \mathrm{g},\ \Xi)$ 可视为一个（整体双曲）标准静态时空，因为 $Z$ 是完备的。因此，我们可以不失一般性地使用时空度量（4.6），而 $\mathscr{N}_{H\le 1}$ 的体积为 [27，（15）]

$$\operatorname{vol}\mathscr{N}_{H\le 1} = \operatorname{vol}(\mathbb{B}^{d-1})\int_\Sigma \beta(x)\big(\beta^2(x) - \mathrm{h}_x(\alpha,\alpha)\big)^{-d/2}\mathrm{dv_h}(x), \tag{4.28}$$

其中 $\operatorname{vol}(\mathbb{B}^{d-1})$ 是单位球 $\mathbb{B}^{d-1}\subset\mathbb{R}^{d-1}$的体积，$\beta$ 和 $\alpha$ 分别是时空度量（4.6）中出现的切片函数和位移向量场。

由于 L 的特征值是离散的，我们引入其特征值计数函数[1]

$$\mathrm{N}(\lambda) := \#\{n\in\mathbb{N} \mid 0 \le \lambda_n \le \lambda\}. \tag{4.29}$$

**推论 4.3.5**（Weyl定律）。按照定理*4.3.2* 和*4.3.4*中的术语，L 的魏尔特征值计数函数满足以下渐近关系

$$\mathrm{N}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{d-1} r\ \operatorname{vol}(\mathscr{N}_{H\le 1}) + O(\lambda^{d-2}), \quad as \quad \lambda\to\infty. \tag{4.30}$$

[1]也可以用负特征值来定义。

为了描述非平凡周期 $T \neq 0$ 的 $\operatorname{Tr} U_T$，我们令 $\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})} \chi_{\mathrm{g}/2}$ 为关于丛 $\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E}) \to \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 上的测地向量场 $X_{\mathrm{g}/2}$ 的 $D^2$-相容魏岑伯克协变导数（定义 3.3.6），其中 $\pi\colon \mathrm{T}^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是余切丛。通过 $\mathrm{Hol} := C^\infty \mathrm{Hol}\big(\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}; \pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big)$，我们表示丛 $\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})$ 的所有截面的集合，这些截面在关于平行传输算子 T 的整体单值化群作用下保持不变，其中 $\nabla^{\pi^*\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})} \chi_{\mathrm{g}/2}$。

我们假设 $\mathrm{P}_\gamma$ 是周期测地线的（线性化）庞加莱映射 $\gamma$（例如参见 [95,第7节 1], [27]）。那么 $\gamma$ 称为**非退化**，如果1不是P的特征值$_\gamma$。

借助所有 这些工具，可以如下给出$\operatorname{Tr} U_{T\neq 0}$ 的精确刻画 .

**定理4.3.6**。按照命题*4.3.3* 和定理*4.3.4*中的设定：如果周期 $T$是离散的，并且集合$\mathcal{P}_T :=$ （4.23b）中的类光测地线 $\Xi_T^{\mathscr{N}}$是有限个非退化周期轨道的并集 $\gamma$，则

$$(\operatorname{Tr} U_T)(t) = \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_T} u_\gamma(t) + v_T(t), \tag{4.31}$$

其中，$v_T$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分布，在 $t = T$ 附近光滑，而$u_\gamma$（$t$）是拉格朗日分布，在 $t = T_\gamma$ 处具有如下渐近展开

$$\begin{aligned} \lim_{t\to T}(t - T_\gamma)u_\gamma(t) \quad &\sim \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{F}_{T_\gamma}} \operatorname{tr}\Big(\sigma_D(\gamma)\,\mathcal{T}_{\Xi_{T_\gamma}^{\mathscr{N}}(\gamma)}\sigma_D(x,\zeta)\Big)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mathfrak{m}(\gamma)/2}|\mathrm{d}T_\gamma|}{\sqrt{|\det(I-\mathrm{P}_\gamma)|}}\nu + \ldots, \\ \nu \quad &:= \quad \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t-T)\tau}\Big(\frac{\tau}{2\pi}\Big)^{d-2}\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中 $\mathfrak{m}$（$\gamma$）分别表示 $\gamma$ 的马斯洛夫指标和（线性化的）庞加莱映射，$\mathcal{T}^\gamma$ 是关于基点 $\gamma \in \mathscr{N}$ 处与 $D^2$ 相容的魏岑伯克联络的全纯群 $\mathrm{Hol}^\gamma$ 中的一个元素，其在 $\mathscr{M}$ 上的投影为 $x$，并且

$$\mathfrak{F}_{T_\gamma} := \Big\{\gamma \in \mathscr{N} \mid \tau = -H(\gamma), \Xi_{T_\gamma}^{\mathscr{N}}(\gamma) = \gamma\Big\} \tag{4.33}$$

是 $\Xi_{T_\gamma}^{\mathscr{N}}$ 的不动点集。

此时，我们想要评论引言（本论文的第 1.1.3 节）中提出的平行传输算子问题，并将 Sandoval 的结果 [26,定理 2。8] 作为本定理的特殊情形重现。我们令 $\alpha = 0$ 以及 $\beta = 1$ 在（4.6）中取相应值，从而超静态时空上的狄拉克方程（1.18）变为

$$-\mathrm{i}\,\partial_t u = H_D u, \quad H_D := \mathrm{c}(\mathrm{d}t)\big(\hat{D} - U\big), \tag{4.34}$$

其中 $H_D$ 是狄拉克哈密顿量，c：= （3.123）是克利福德乘法，而 $U$是（3.126）中最一般的 Dirac 型算子所允许的势。Sandoval

选择了 $U = 0$，并使用了与 $\check{\mathcal{T}}$ 相对应的平行传输算子 $\check{D}$，而没有使用$D$，因此 $\check{T}$ 连同$W$ 的“适当平均值”= $\hat{D} - \check{D}$ 在她的工作中出现在（4.32）的 tr 下。然而，在我们的公式中完全不需要此类临时选择；相反，$\mathcal{T}$ 会自然地为前述选择诱导出平行移动 $\hat{\mathcal{T}}$。

注意，马斯洛夫指标（见附录A.1.5） $\mathfrak{m}(\gamma)$ 本质上就是 $\gamma$ [172] 的Conley-Zehnder指标，而因子 $\mathrm{e}(\gamma)/2$ 通常被称为 Maslov因子。

未来，我们计划进行若干推广。例如，我们打算研究稳态黑洞上的谱渐近，并探索半经典区域。我们还希望将研究扩展到 Hodge-d’Alambertians，并与弯曲时空中相对论量子混沌方面的有趣应用建立联系。

### 4.3.3 证明策略与创新点

我们将描述分为几个步骤，以便纵览全貌。

**$U_t$ 作为傅里叶积分算子**

这一关键思想最初归功于 Duistermaat 和 Guillemin [10]，他们在静态时空（注记 4.2.6 (e)）上的标量半波算子背景下，将其推导出来（模去平滑算子）。然而，我们并未直接沿用他们的方法，而是通过阐述 Strohmaier 和 Zelditch 关于达朗贝尔算子 [27] 的工作，将 $U_t$ 表述为 Killing 流 $\Xi_t^*$ 与因果传播子 $F :=$（3.147）的形式。更确切地说，由于 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 的整体双曲性，$D$ 存在唯一的超前和推迟格林算子（第 3.4.2 节），因此 $F$ 与限制算子 $\iota_\Sigma^*$（例 2.3.12）共同为构造柯西限制算子 R 铺平了道路，具体如第 3.4.3 节所述。根据假设 4.3.1 (c)，时间流决定了柯西数据的时间演化。随后，结合这些事实，我们可以将 $U_t$ 表述为拉格朗日分布，正如引理4.7.3中所述。

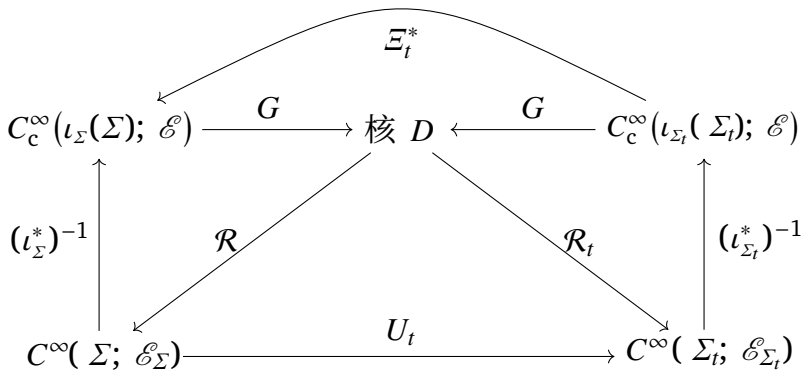


图 4.2：用因果传播子 $F$ 表示的时间演化映射 $U_t$，适用于 $D$ 和诱导的 Killing 流 $\Xi_t^*$。这里，$\mathrm{R}_t$ 表示柯西限制映射，而 $\iota_{\Sigma_t}^*$ 表示限制映射。

为了将 $U_t$ 描述为傅里叶积分算子，需要获得对 $F$ 和 $\iota_\Sigma^*$ 的这种描述。对于标量情形，这两者都是众所周知的，而对于后者，推广到丛的情形是直接的。但前者由于可能存在丛曲率，需要进行复杂的处理，这已在引理3.4.6中详细阐述。事实上，正是由此产生了这一便宜的选择（如第1.1.3节所述），其源于 Sandoval 的工作。我们在引理 $\sigma_{\mathsf{F}}$ 中，以内禀几何的方式运用了与 $D^2$相容的魏岑伯克联络，完成了计算。 ϑედეგად，它简洁地解决了相关的主阶输运方程，并由此优雅地显现出全纯群。此外，如定理4.3.6之后所述，它弥补了 Sandoval 分析中的临时性考量。

在本工作的同时期（本工作相关的 arXiv 预印本提交之后），Capoferri 和 Murro [173, 定理 1。1]利用傅里叶积分算子的全局相位函数方法，得到了 $U_t$（模平滑算子意义下）在四维空间紧致、整体双曲的自旋时空上的约化无质量Dirac方程的振荡积分表示（按其论文中定义 3.5 的意义）[116] 。这一分析的先例可追溯至 Capoferri 和 Vassiliev [174]，他们构造了 $U_t(\check{}D) = (1.15)$（模平滑算子意义下），将其表示为两个不变地定义的振荡积分之和，这些积分在空间和时间上均为全局的，并具有特定的复值相位函数；其中 $\check{}D$ 是定义在三维闭黎曼流形上的无质量自旋狄拉克算子。

值得一提的是，不能直接采用 [173, 174]中的算法来推导傅里叶积分描述（引理 4.7.3） $U_t$在我们的设定中。这主要是因为狄拉克哈密顿量

$$H_D := -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{c}(\mathrm{d}t)\big(\mathrm{h}_{ij}\mathrm{c}(\mathrm{d}x^i)\nabla^{\mathscr{E}j} + U\big) + \mathrm{h}_{ij}\alpha^i\nabla^{\mathscr{E}j}}{\beta^2 - \|\alpha\|_{\mathrm{h}}^2 - \mathrm{h}_{ij}\alpha^i\mathrm{c}(\mathrm{d}t)\mathrm{c}(\mathrm{d}x^j)} \tag{4.35}$$

在静态时空上并非Dirac 型（尽管它可以写成一阶椭圆算子），而这正是近期文献中的关键假设之一。

**Tr $U_t$ 的主符号**

若 $\mathscr{U}_t(x,\ y) :=\mathsf{U}_t(x,\ y)\mathrm{d}t \otimes \overline{\sqrt{|\mathrm{dv_h}|}}(x)| \otimes \overline{\sqrt{|\mathrm{dv_h}|}}(y)|$表示 $U_t$的施瓦茨核，则考虑经平滑处理的算子$\mathsf{U}_\rho$ （参见（1.9））

$$\mathsf{U}_\rho := \int_{\mathbb{R}} \mathsf{U}_t\,\mathcal{F}^{-1}(\rho)\,\mathrm{d}t, \quad (\mathcal{F}^{-1}\rho)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Spec}\,\mathsf{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t\lambda}\rho(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{4.36}$$

对于任意 Schwartz函数 $\rho \in \mathsf{S}(\mathbb{R})$，定义在 $\mathbb{R}$上，且 $\mathrm{supp}(\mathsf{F}^{-1}\rho)$ 为紧致集。令 $\mathsf{U}\rho(x,\ x)$ 为 $\mathsf{U}\rho(x,\ y)$ 的对角嵌入。分布迹 Tr $U_t$ 随后由下式得到

$$\mathrm{Tr}\,U_\rho := \int_\Sigma \mathrm{tr}\,\big(\mathsf{U}_\rho(x,x)\big)\,\mathrm{dv_h}(x), \tag{4.37}$$

其中 tr 表示端同态迹（3.8）。

为了计算 $\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_t}$ 我们采用 Duistermaat 和 Guillemin 的丛推广 [10]，这一思路由 Sandoval 提出 [26]。注意到映射 $\mathscr{U}_t(x,y) \mapsto \mathsf{U}_t(x,x)\,\mathrm{dv_h}(x)$ 可以看作拉回

$$\Delta^* : C_{\mathrm{c}}^{\infty}\Big(\mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma;\, \Omega\mathbb{R}\boxtimes\big(\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\Sigma,\mathscr{E}_\Sigma)\otimes\Omega^{1/2}(\Sigma\times\Sigma)\big)\Big) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}\big(\mathbb{R}\times\Sigma;\, \Omega\mathbb{R}\boxtimes(\mathrm{End}\,\mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega^{\Sigma})\big) \tag{4.38}$$

通过 $\mathscr{U}_t$ 对角嵌入

$$\Delta : \mathbb{R}\times\Sigma \to \mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma \tag{4.39}$$

以及由魏岑伯克联络 $\nabla^{\mathscr{E}}$ 限制于 $\Sigma$所诱导的纤维逐点同构 $\hat{}\Delta \in C^{\infty}\big(\Sigma;\ \mathrm{Iso}(\mathscr{E}_\Sigma,\mathscr{E}_\Sigma)\big)$。由此（参见例2.1.11）可知，$\Delta^*$ 是一个阶为$(d-1)/4$、与典范关系 $C_{\Delta^*} := \{(t,\tau;x,\xi+\eta;\ t,\tau;\ x,\xi;\ x,\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\mathrm{T}^*\mathscr{M}_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}_\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}_\Sigma\}$ [10, (1.20)] 相关的傅里叶积分算子。因此，对于固定的 $t$，$\mathrm{tr}(\Delta^*\mathscr{U}_t)$是 $\Sigma$上的密度，可以对其进行积分。在 $\Sigma$上的积分是推前（参见例如 [175, 第103-104]页）

$$\pi_* : C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}\times\Sigma;\,\Omega\mathbb{R}\boxtimes\Omega\Sigma) \to C^{\infty}(\mathbb{R};\,\Omega\mathbb{R}),\quad \mathrm{tr}(\Delta^*\mathscr{U}_t)\mapsto \pi_*\big(\mathrm{tr}(\Delta^*\mathscr{U}_t)\big) \tag{4.40}$$

笛卡尔投影的

$$\pi : \mathbb{R}\times\Sigma \to \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

它也是一个阶为 1/2–(d–1)/4 的傅里叶积分算子，与典范关系 $C_{\pi_*} := \{(t,\ \tau;\ \ t,\ \tau;\ \ x,\ 0) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\mathrm{T}^*\mathscr{M}_\Sigma\}$ [10, (1。22)] 相关。因此

$$\mathrm{Tr}\,U_t = \pi_*\circ\mathrm{tr}(\Delta^*\mathscr{U}_t). \tag{4.42}$$

或者，也可以对 $\Delta^*\mathscr{U}_t$在 $\Sigma$上进行积分，使得 $\pi_*(\Delta^*\mathscr{U}_t)$ 成为 $\mathbb{R}$上的 End $\mathscr{E}_\Sigma$-值密度，方法是将 $\pi_*$ 视为：$C_{\mathrm{c}}^{\infty}\big(\mathbb{R}\times\Sigma;\ \ \Omega\mathbb{R}\boxtimes(\mathrm{End}\ \mathscr{E}_\Sigma\otimes\Omega\Sigma)\big)\to C^{\infty}(\mathbb{R};\ \ \Omega_{\mathbb{R}}\boxtimes\mathrm{End}\ \mathscr{E}_\Sigma)$。然后取端同态迹，得到

$$\mathrm{Tr}\,U_t = \mathrm{tr}(\pi_*\circ\Delta^*\mathscr{U}_t). \tag{4.43}$$

因此，在这个意义下

$$\pi_*\circ\mathrm{tr}\circ\Delta^* = \mathrm{tr}\circ\pi_*\circ\Delta^* \tag{4.44}$$

并利用 A.1.18 中定义的 $\pi_*\circ\ \Delta^*$ 与 $\mathscr{U}_t$ 之间的干净交来计算 Tr $U_t$的主符号。

**谱理论**

尽管狄拉克方程的有限能量解并不属于 $L^2$ 的截面 $\mathscr{E}$，ker $D$仍可通过赋予其一个在 Killing流下不变的厄米型 $\langle\cdot\,|\cdot\rangle$ 而自然地获得厄米结构4.3.1 (b)。值得注意的是，$(\cdot|\cdot)$ 的不定性是任意洛伦兹自旋流形的特征：只有在黎曼情形下，才存在一个在自旋群下不变的正定$(\cdot|\cdot)$ 。

**Weyl定律**

推导Weyl定律有多种方法（例如参见综述 [28]）。其中，我们将采用傅里叶-陶伯论证 [5] （另请参见，例如 [24, 附录 B], [176] 及其中的参考文献）。关键思想是通过分布傅里叶变换（1.8）将Weyl计数函数与 Tr $U_t$ 联系起来，并计算 $\mathrm{N}/\mathrm{d}\lambda = \mathcal{F}^{-1}_{t\mapsto\lambda}(\mathrm{Tr}\, U_t)$ 的右端，其中使用了 Tr 的表达式 $U_0$。

# 4.4 静态时空上的狄拉克算子

## 4.4.1 李导数

在静态时空 $(\mathscr{M}, \mathrm{g}, \Xi)$ 上，时空等距变换的余切提升 $\mathrm{T}^*\Xi_s\Xi_s : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 自然地在余切丛 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 上诱导出一个 $\mathbb{R}$ 作用 $\mathrm{T}^*\Xi(s; y, \eta) := (\mathrm{T}^*_x\Xi_s)\eta$。此外，拉回（为清晰起见恢复密度）

$$\Xi^* : C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M}; \mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}\mathscr{M}) \to C^\infty\big(\mathbb{R} \times \mathscr{M}; \Omega\mathbb{R} \boxtimes (\mathscr{E} \otimes \Omega^{1/2}\mathscr{M})\big) \tag{4.45}$$

沿 Killing流 $\Xi : \mathbb{R}\times\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 以及纤维逐点同构 $\hat{}\Xi_s \in C^\infty\big(\mathscr{M}; \mathrm{Iso}(\mathscr{E}, \mathscr{E})\big)$如图 4.1所示，是一个傅里叶积分算子，其施瓦茨核由下式给出（参见例2.1.11）

$$\Xi \in I^{-1/4}\Big(\mathbb{R} \times \mathscr{M} \times \mathscr{M}, \Gamma'; \Omega\mathbb{R} \boxtimes \big(\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \Omega^{1/2}(\mathscr{M} \times \mathscr{M})\big)\Big), \tag{4.46a}$$

$$\Gamma := \big\{(s, \tau; x, \xi; y, -\eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R} \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M} \mid \tau = -\xi(Z), (x, \xi) = (\mathrm{T}^*_x\Xi_s)(y, \eta)\big\}, \tag{4.46b}$$

$$\sigma_\Xi := (2\pi)^{1/4}\, \mathbb{1}_{\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})} \sqrt{|\mathrm{dv}_\Gamma|} \otimes \mathbb{1}, \tag{4.46c}$$

其中，$\mathrm{dv}_\Gamma$ 是齐次典范关系 $\Gamma \subset \dot{\mathrm{T}}^*(\mathbb{R} \times \mathscr{M}) \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 上的体积形式，而 1 是 $\Gamma$ 上的 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{L}_\Gamma \to \Gamma$ 的一个截面，其构造如下。注意到，$\Gamma$ 是 $\mathrm{T}^*\Xi_s$ 的图，并且在 $s = 0$ 处，$\Gamma$ 本质上是余法向丛 $\Gamma_0 := \{(0, \tau)\} \times (\Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M})'$。由于 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 是一个辛流形（见例 A.1.2），它具有由 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 上的典范辛形式诱导的体积形式。于是，$\mathrm{dv}_{\Gamma_0}$ 通过投影算子 $\mathrm{Pr} : \Gamma_0 \to \mathbb{R} \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 的拉回得到；该投影算子在由扩展哈密顿量 $\tau + \xi(Z)$ 生成的哈密顿向量场的流 $\Psi_s$ 下保持不变，并且在参数化（4.46b）中表示为 $\mathrm{dv}_\Gamma = \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\xi$。为构造 $\mathbb{L}_\Gamma$，我们再次利用以下事实：$\Psi_s$ 从 $\{(0, \tau)\} \times (\Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*M)'$ 扫掠至 $\Gamma$，因此，$\mathbb{L}_\Gamma$ 是通过沿着 $\Psi_s$ 的轨道对 $\mathbb{L}_0$ 的截面进行平行输运而构造的，其中，$\mathbb{L}_0$ 上的 Keller-Maslov 丛（见例 A.1.21）包含一个全局常截面。

更一般地，$\Xi^*$ 可通过以下方式延拓为定义在 $I^m(\mathscr{M}, \mathscr{L}; \mathscr{E})$ 上的序列连续线性映射：

$$\Xi^* : I^m(\mathscr{M}, \mathscr{L}; \mathscr{E}) \to I^{m-1/4}(\mathbb{R} \times \mathscr{M}, \Gamma' \circ \mathscr{L}; \mathscr{E}), \qquad \sigma_{\Xi^* u} \asymp \sigma_\Xi \diamond \sigma_u \tag{4.47}$$

对任意 $u \in I^m(\mathscr{M}, \mathscr{L}; \mathscr{E})$。主符号的复合 $\diamond$ 详见附录 A.2.3 ，且关于 $\sigma_{\Xi^* u}$ 的方程是在模 Keller-Maslov部分意义下成立的。

诱导的 Killing 流 $\Xi_s^*$ 为定义李导数 $\pounds_Z$ （2.135）提供了途径，它作用于$\mathscr{E}$ 并且相对于 Killing 向量场 $Z$。注意，$\pounds_Z$ 本质上是 Lichnerowicz 旋量李导数 [136, 第 6]节的一般化，适用于不一定具有自旋结构的静态时空。

### 4.4.2 经典动力学

半经典分析的首要原则，是将相对论迹公式与其经典动力学联系起来。在非相对论力学中，余切丛 $\mathrm{T}^*\Sigma$ 模-拟经典相空间，而希尔伯特空间量子动力学则发生在 $L^2(\Sigma)$ 中。直接预期使用这一对空间，或使用 $(\mathrm{T}^*\mathscr{M}$、$L^2(\mathscr{M}; \mathscr{E}))$这一对空间，并不可行，因为前者取决于柯西超曲面 $\Sigma \subset \mathscr{M}$的选择；而对于后一对空间， $\mathscr{E}$ 上的（Killing 流不变）半双线性型（$\cdot|\cdot$）（假设 4.3.1（a））并不诱导任何 $L^2$-范数。当然，也可以任意选取一个厄米型，从而在 $\mathscr{E}$ 上得到一个 $L^2$ 空间；但是，由于 $L^2$不紧致，这个 $\mathscr{M}$ $L^2$-空间将取决于所选厄米型。为定义正确的经典动力学，注意到 Char $D$ 是光锥丛 $\dot{\mathrm{T}}_0^*\mathscr{M}$。由于 Char $D$ 与 Char $\Box$ 相同，此处的经典动力学与 Strohmaier-Zelditch 迹公式（第 1.1.5 节）中的经典动力学一致，因此我们采用他们的公式。度量哈密顿量 $H_{\mathrm{g}} :=$ (3.113) 是余切空间纤维中的二次齐次函数。将其称为膨胀，令 $\mathbb{E}$ 为欧拉向量场，即该作用的生成元。在 $\dot{\mathrm{T}}_0^*\mathscr{M}$ 上，显然 $H_{\mathrm{g}}$ 消失，并且有$[\mathbb{E}, X_{\mathrm{g}/2}]_- = X_{\mathrm{g}/2}$，其中 $X_{\mathrm{g}/2}$ 是 $H_{\mathrm{g}}$ 的哈密顿向量场。于是， $\dot{\mathrm{T}}_0^*\mathscr{M}$ 的哈密顿约化就是缩放类光测地线 $\mathscr{N}$ 的流形。也就是说，如果 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 是测地完备的，那么 $\mathscr{N}$ 就是 $\dot{\mathrm{T}}_0^*\mathscr{M}$ 对由 $X_{\mathrm{g}/2}$ 生成的 $\mathbb{R}$-群作用取商所得的空间。同样地，对 $\mathscr{N}$ 取由 $\tilde{\mathbb{E}}$ 生成的 $\mathbb{R}_+$-群作用的商，我们得到无参数类光测地线 $\mathscr{N}$ 的流形。如果 $(\mathscr{M}, \mathrm{g})$ 是空间上紧致的整体双曲时空，那么 $\mathscr{N}$ 是一个锥形紧致接触流形，其辛化是锥形辛流形 $\mathscr{N}$；该流形由锥形接触流形 $\dot{\mathrm{T}}_0^*\mathscr{M}$ [122, （第 10-12], [123,页，定理 2.1]）诱导而来。

We 注记， $\mathscr{N}$被不变地定义，并且 [27, 命题 2.1] （另见 [91, 92] ）

$$\varsigma : \mathscr{N} \to \dot{\mathrm{T}}^*\Sigma \tag{4.48}$$

是一个齐次辛同胚。此外，任意空间紧致的全局双曲时空（$\mathscr{M}$，g）上的测地流不一定完备。例如， $\mathscr{M} := (-1, 1) \times \Sigma$配备时空度量 $\mathrm{g} := \mathrm{d}t^2 - \mathrm{h}$，其中（$\Sigma$，h）是一个紧黎曼流形 [27,注 2.2]。

正如定理 4.3.4 和 4.3.6 所述，$\gamma$ 上的 $\mathscr{N}$ 周期测地线在我们的研究中发挥着至关重要的作用。利用辛同胚（4.48），这些周期测地线也可以被视为 $\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma$ 上的周期测地线，这与我们的直观预期更加吻合。然而，$\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma$ 在很大程度上取决于柯西超曲面 $\Sigma$ 的选择；正如第 4.2 节所讨论的，在（整体双曲）静态时空（$\mathscr{M}$，g，$\Xi$）上不存在 $\Sigma$ 的规范选择。因此，与 $\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma$相比，$\mathscr{N}$提供了描述经典动力学的自然且不变的流形。回忆一下，$c$ 中的测地线 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\Sigma$：$\mathscr{M}$可以表示为 $c(s) = \big(t(s),\ c_\Sigma(s)\big)$，其中 $c_\Sigma$ 是 $\varsigma\big(\gamma(s)\big)$的底投影。于是，$\mathscr{M}$ 中的周期测地线 $c$ 若周期为 $T$，则意味着

$$\forall s \in \mathbb{R} : c_\Sigma(s+T) = c_\Sigma(s). \tag{4.49}$$

我们注意到，$T$-周期曲线在 $\mathscr{N}$上的集合恰好是$(\Sigma, \mathsf{h})$对于超静态时空而言的长度谱。详情例如可参见 [177–180]。

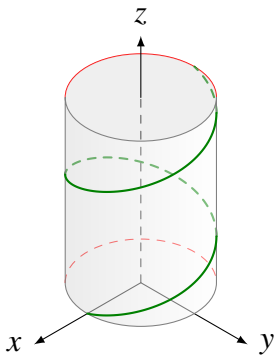


图 4.3：$(\mathbb{R}\times\mathbb{S},\ \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2)$ 上的一条周期测地线。

### 4.4.3 时间演化算子

在空间紧致的整体双曲时空上，这个映射定义为

$$U_{t',t} := \mathcal{R}_t \circ (\mathcal{R}_{t'})^{-1} : C^\infty\big(\Sigma_{t'}; \mathscr{E}_{\Sigma_{t'}}\big) \to C^\infty\big(\Sigma_t; \mathscr{E}_{\Sigma_t}\big), \tag{4.50}$$

它是一个同胚，并可扩展为酉算子（仍记作同一符号），作用于柯西超曲面上平方可积截面构成的空间，即，

$$U_{t',t} : L^2\big(\Sigma_{t'}; \mathscr{E}_{\Sigma_{t'}}\big) \to L^2\big(\Sigma_t; \mathscr{E}_{\Sigma_t}\big) \tag{4.51}$$

是一个等距映射。

## 4.5 迹公式

在本节中，我们将采用第 4.3.2 节中的设置。也就是说，$\Sigma \subset \mathscr{M}$ 是一个嵌入子流形，且 $\iota_\Sigma : \Sigma \hookrightarrow \mathscr{M}$ 是真（注记 3.1.7）。因此，$\iota_\Sigma^*: C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E}) \to C_{\mathrm{c}}^\infty(\Sigma; \mathscr{E}_\Sigma) = C^\infty(\Sigma; \mathscr{E}_\Sigma)$。

**定理 4.5.1**。 沿用定理 4.3.4中的术语，设 F 是 $D$的因果传播子的施瓦茨核。光滑化的时间演化算子 $U_\rho$ ：= （4.36） 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$：= （核 $D$， （3.154）） 上的迹类算子，其迹为

$$\operatorname{Tr} U_\rho = -\mathrm{i} \int_\Sigma \operatorname{tr} \int_{\mathbb{R}} \left(\Xi_{-t}^* \circ \mathsf{F} \circ (\iota_\Sigma^*)^{-1} \sigma_D(\cdot,\zeta)\right)(x,y)\, (\mathcal{F}^{-1}\rho)(t)\, \mathrm{d}t|_{x=y}\, \mathrm{dv_h}(x), \tag{4.52}$$

其中 $\Xi_t^*$: $C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 是诱导的 *Killing* 流（图 *4.1*），而 $\iota_\Sigma^*$:$C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to C^\infty(\Sigma;\mathscr{E}_\Sigma)$ 是限制映射。在本文中， $\Xi_t^* F$ 指的是通过 $\Xi_{-t}$ 对第一个自变量中的 $F(\cdot,)$ 进行拉回所得的结果。

证明。根据假设 4.3.1，厄米型 (3.154)、推迟 $F^{\mathrm{ret}}$ 和超前$F^{\mathrm{adv}}$ 传播子在 $\Xi_t^*$ 的作用下均保持不变。因此， $F$ 也保持不变。换句话说，如果 $u \in \ker D$ 在某个 $\Sigma$ 上具有初始数据，那么 $\Xi_t^* u \in \ker D$ 在某个 $\Sigma_t$ 上具有柯西数据，这意味着时间流 $\Xi_t$ 诱导了柯西数据的时间演化。现在任取一个固定的 $\Sigma$。这给出了 $\mathscr{M}$ 上的全局时间坐标 $t$，于是 Killing 流的生成元 $\Xi_t$ 由 $\partial_t$ 给出。因此， $U_t$ 通过诱导的 Killing 流与柯西数据的演化相对应（示意图见图 4.2）：

$$U_t = \mathcal{R} \circ \Xi_{-t}^* \circ \mathcal{R}^{-1}. \tag{4.53}$$

由$\mathcal{R}^{-1} = -\mathrm{i}\ F\circ(\iota_\Sigma^*)^{-1}\sigma_D(\cdot,\zeta)$可从（3.155）读出，并注意到，扭曲波前集（引理 3.4.6）的 F 仅包含类光余向量。因此，对 $t$积分后得到光滑的施瓦茨核 $\mathsf{U}\rho(x,y)$ 且由（$U_\rho$ 4.37）可得 Tr 的表达式。 ■

## 4.6 L 在ker $D$上的谱理论

回顾一下，**强连续单参数酉群** 是在希尔伯特空间 H 上的一族酉算子 $\{U_t | t \in \mathbb{R}\}$ $U_t$， 满足

$$\forall t, s \in \mathbb{R} : U_t U_s = U_{t+s}, \tag{4.54a}$$

$$\forall u \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathbb{R} : \lim_{h\to 0} U_{t+h} u = U_t u. \tag{4.54b}$$

特别是，这意味着

$$U_{-t} = U_t^{-1} = U_t^*. \tag{4.55}$$

根据 Stone 定理（例如参见 [181, 定理 VIII.8]）， 每个 $U_t$ 都有唯一的生成元 $A$，即$U_t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tA}$。若

$$U_\rho := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tA} (\mathcal{F}^{-1}\rho)(t)\, \mathrm{d}t \tag{4.56}$$

对于任意满足 $\operatorname{supp}(\mathsf{F}^{-1}\rho)$ 为紧致集的 $\rho \in \mathsf{S}(\mathbb{R})$，其为紧致算子，因此 $A$ 的谱是离散的，并由具有有限代数重数的特征值 $\lambda_n$ 组成$m_n$。此外，当 $U_\rho$ 为迹类算子时

$$\operatorname{Tr} U_\rho = \sum_n m_n\, \rho(\lambda_n). \tag{4.57}$$

定理 4.3.2 的证明。 由于 $D$ 与诱导的 Killing 流 $\Xi_t^*$对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均$U_t$ 是 $D$的时间演化算子，SpecL 的离散性以及特征值的多项式增长 $\lambda_n$ 源于以下事实： $\mathsf{U}\rho$ = (4.36) 是一个迹类算子，对于 $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$满足 $\operatorname{supp}(\mathcal{F}^{-1}\rho)$为紧致集。所有 $\lambda_n$均为实数，这是 L 在 ker 上自伴的结果 $D$。 ■

## 4.7 主要定理的证明

I为了实施第4.3.3节概述的策略，我们回忆， at

$$\pi_* \circ \Delta^* : C_c^\infty\big(\mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma; \operatorname{Hom}(\mathscr{E}_\Sigma, \mathscr{E}_\Sigma)\big) \to C^\infty(\mathbb{R}; \operatorname{End}\mathscr{E}_\Sigma) \tag{4.58}$$

这是一个零阶傅里叶积分算子，其施瓦茨核K 是恒等映射的核 [26, 引理 5。2]（另见 [10,引理 6.2, 6.3]）：

$$\mathsf{K} \in I^0\Big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma, C_{\pi_*\circ\Delta^*}; \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Hom}(\mathscr{E}_\Sigma,\mathscr{E}_\Sigma), \operatorname{End}\mathscr{E}_\Sigma\big)\Big), \tag{4.59a}$$

$$C_{\pi_*\circ\Delta^*} = \big(\Delta(\mathbb{R}\times\Sigma)\big)^{\perp *}, \tag{4.59b}$$

$$\sigma_{\mathsf{K}} = \Pi^*\big(|\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\xi|^{1/2}\big)\,\mathbb{1}\,. \tag{4.59c}$$

这里， $\pi_* \circ \Delta^*$的典范关系 $C_{\mathsf{K}} = \{(t,\tau;\ t,\tau;\ x,\xi;\ x,-\xi) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma\times\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma\}$ 已被认定为 $\big(\Delta(\mathbb{R}\times\Sigma)\big)^{\perp *}$ 对角线在 $\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}\times\Sigma$中的余法丛；$\Pi$是投影算子 $C_{\pi_*\Delta^*} \ni (t,\tau;\ x,\xi;\ x,-\xi;\ t,-\tau) \mapsto (t,\tau;\ x,\xi) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*\Sigma$，而 Keller-Maslov丛 $\mathbb{T} \to \big(\Delta(\mathbb{R}\times\Sigma)\big)^{\perp *}$ 是平凡的（见例 A.1.21）。

定理 4.5.1 表明，$\operatorname{Tr} U_t$ 作为分布存在于 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 中，并且可以重新表示为

$$\operatorname{Tr} U_t = \int_\Sigma \operatorname{tr}\big((\Xi_{-t}^*\mathsf{F})(x,y)\,\sigma_D(y,\zeta)\big)\big|_{x=y}\,\mathrm{dv}_{\mathsf{h}}(x). \tag{4.60}$$

由于测地关系（定义 3.2.15）与余法丛 $\Sigma^{\perp *}$不相交，因此对 $\Xi_{-t}^*\mathsf{F}$ 的限制是良定义的。于是应用（4.43），前述方程可写为

$$\operatorname{Tr} U_t = \operatorname{tr}\Big(\pi_*\circ\Delta^*\circ(\iota_x^*\boxtimes\iota_y^*)\big((\Xi_{-t}^*\mathsf{F})(x,y)\,\sigma_D(y,\zeta)\big)\Big) \tag{4.61}$$

对于固定但任意的 $t \in \mathbb{R}$，以及任意的 $x,\ y \in \mathscr{M}$。因此，我们的任务是计算其主符号

$$\mathsf{F}_t := (\iota_x^*\boxtimes\iota_y^*)\big((\Xi_{-t}^*\mathsf{F})(x,y)\big). \tag{4.62}$$

我们已在例 $\iota_\Sigma^*$ 2.3.12中求得，因此我们从描述 $\Xi_{-t}^*\mathsf{F}$ 作为拉格朗日分布开始。首先注意到， $w$ 在 $\sigma_{\mathsf{F}}$的表达式中出现，并满足 [35,定理 6.6。1]

$$(X_{\mathsf{g}^\pm/2} \pm \mathrm{i}\,\sigma^{\mathrm{sub}}_{D^2,\pm})w = 0, \tag{4.63}$$

根据引理 3.4.6 和定义 3.3.6，其中 $\mathsf{g}^\pm$ 分别为 $\sigma^{\mathrm{sub}}_{\Box_\pm}$，是通过将 g 分别经由 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 的第一份副本和第二份副本上的投影提升到 $\dot{\mathrm{T}}^*\mathscr{M}$ 而得到的提升。这意味着

$\mathrm{i}(2\pi)^{3/4}\sigma_D\circ w\sqrt{|\mathrm{d}t|\otimes\sqrt{|\mathrm{dv}_C|}/2}$ 是 $\Xi^*\mathsf{F}$ 在每个 $C^+$ 和 $C^-$ 上的主符号。运用（4.46）、（4.47）、引理 3.4.6和附录 A.2.3，即可直接得到

**引理 4.7.1.** 设$(\mathscr{E}\to\mathscr{M}$、$\sigma_D)$ 是定义在全局双曲平稳时空$(\mathscr{M}$、g、$\Xi)$ 上的 *Clifford*模丛，且F 是任意狄拉克型算子 $D$ 在 $\mathscr{E}$ 上的因果传播子的施瓦茨核。那么，沿 *Killing*流对F 关于第一个变量的拉回是一个拉格朗日分布

$$\Xi^*\mathsf{F}\in I^{-3/4}\big(\mathbb{R}\times\mathscr{M}\times\mathscr{M},\Gamma'\circ C;\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\big),\tag{4.64a}$$

$$\Gamma'\circ C=\big\{(t,-\xi(Z);x,\xi;y,\eta)\in\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}\times\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}\mid(x,\xi)=\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta)\big\},\tag{4.64b}$$

$$\sigma_{\Xi^*\mathsf{F}}\asymp\mathrm{i}(2\pi)^{\frac{3}{4}}\sigma_D\circ w\big(\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta),(y,\eta)\big)\,|\mathrm{d}t|^{\frac12}\otimes\big|\mathrm{dv}_C\big(\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta),(y,\eta)\big)\big|^{\frac12},\tag{4.64c}$$

其中主符号模去 *Keller-Maslov*部分，$Z$ 是$\Xi$的无穷小生成元，其他所有符号的定义均见引理 *3.4.6* 和(4.46b)。

接下来，我们通过应用例 $\Xi^*\mathsf{F}$ 在 $\Sigma_x\times\Sigma_y$ 上的限制，其中例 2.3.12。

**引理 4.7.2.** 沿用引理 *4.7.1*中的术语，设 $\Sigma$ 是$\mathscr{M}$的一个柯西超曲面。那么，分布(4.62) 是一个拉格朗日分布

$$\mathsf{F}_t\in I^{-1/4}\big(\mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma,C_t;\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\Sigma,\mathscr{E}_\Sigma)\big),\tag{4.65a}$$

$$C_t:=\big\{((t,-\xi(Z)),(x,\xi)|_{\mathrm{T}\Sigma},(y,\eta)|_{\mathrm{T}\Sigma})\in\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}\times\mathrm{T}^*\mathscr{M}_\Sigma\times\mathrm{T}^*\mathscr{M}_\Sigma\mid(x,\xi)=\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta)\big\},\tag{4.65b}$$

$$\sigma_{\mathsf{F}_t}\asymp\mathrm{i}(2\pi)^{\frac14}\sigma_D\circ w\big(\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta)|_{\mathrm{T}\Sigma},(y,\eta)|_{\mathrm{T}\Sigma}\big)\,|\mathrm{d}t|^{\frac12}\otimes\big|\mathrm{dv}_C\big(\mathrm{T}^*\Xi_t\circ\Phi_s(y,\eta)|_{\mathrm{T}\Sigma},(y,\eta)|_{\mathrm{T}\Sigma}\big)\big|^{1/2},\tag{4.65c}$$

其中主符号是在模去 *Keller-Maslov*部分的意义下理解的。

证明。前两个断言可直接由 (2.132a)、(2.132b)、(4.64a) 和 (4.64b) 得出。为计算主符号，注意到 $\mathrm{dv}_{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}}(y,\eta)$ 诱导出体积元 $\mathrm{dv}_{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma}(y,\eta):=\mathrm{dv}_{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}}/\mathrm{d}y^1$ on $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma$ when $\Sigma$ 由 $y^1=\mathrm{cst}$ 参数化时，随后在 $\mathrm{T}^*\mathscr{M}$ 上的适配坐标 $(y^1=\mathrm{cst},y',\eta_1,\eta')$ 中，$\mathrm{dv}_{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma}(y,\eta)=\mathrm{d}\eta_1\wedge\mathrm{d}y'\wedge\mathrm{d}\eta'$。最后，结论由 (2.132c)、(4.64c)、(2.132c) 以及通过测地流和 Killing流将 $(y,\eta)$ 传输到 $(x,\xi)$ 得出。■

如果复合 $C'_{\pi_*\Delta^*}\circ C_t$ 是洁净的，那么我们可以通过傅里叶积分算子的标准复合计算 $\mathrm{Tr}\,U_t$。但是，一般而言，

$$C'_{\pi_*\Delta^*}\circ C_t=\big\{(t,\tau)\in\mathbb{R}\times\dot{\mathbb{R}}\mid\tau=-\xi(Z),(x,\xi)|_{\mathrm{T}\Sigma}=\big(\mathrm{T}^*\Xi_{-t}\circ\Phi_t(y,\eta)\big)|_{\mathrm{T}\Sigma}\big\}\tag{4.66}$$

可能并非洁净（参见附录A.1.3：（A.39）、（A.45）和（A.46）中的符号 ☆ 及更多细节），因为 $C'_{\pi_*\Delta^*}\!\!\not\pitchfork C_t\to C'_{\pi_*\Delta^*}\circ C_t$ 的纤维可以与以下对象相对应：

在 $\tau \in \dot{\mathrm{T}}^*_t\mathbb{R}$上的纤维，即集合$\{\mathfrak{F}_t\} := $(4.33)所定义的周期测地线集，其中我们用到了（4.21）和（4.48）。那么，即使$\{\mathfrak{F}_t\}$ 碰巧是流形，$\dim \mathfrak{F}_t$ 对所有 $t$ 均为常数的可能性也很小；例如，如果 $\Xi_t^{\mathscr{N}}$的所有轨道都以相同的周期 $t = T$为周期，那么复合是洁净的（例如参见 [20, 第 289]页）。不过要注意，对于平凡周期（$T = 0$），这并不是问题；定理4.3.6 中关于经典动力学的假设保证了非平凡周期（$T \neq 0$）情形下的干净交。

为便于今后的计算，我们记录

$$\begin{aligned}
&\dim \mathscr{M} = d, \dim(\mathrm{T}^*\mathscr{M}) = 2d, \dim(\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}) = 2d-1,\\
&\dim \mathscr{N} = 2d-2, \dim \tilde{\mathscr{N}} = 2d-3,\\
&\dim \Sigma = d-1, \dim(\mathrm{T}^*\Sigma) = 2d-2 = \dim(\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

### 4.7.1 在 $t = 0$ 时 $\mathrm{Tr}\, U_t$ 的主符号

我们先从平凡的周期轨道开始，在这种情况下预计会出现一个较大的奇性 $U_t$ 在此情形下退化为恒等算子。为了描述$\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_0}$，引入辛剩余的概念 [182, 定义 6。1], Guillemin 引入这一概念，是为了在利用 Weyl代数对锥形辛流形进行量化的背景下推导 Weyl定律。根据构造（参见（4.21））， $H^{1-d}$ 是一个度为 $1-d$的齐次函数。于是，其辛剩余定义为

$$\mathrm{res}\, H^{1-d} := \int_{\tilde{\mathscr{N}}} \vartheta_{H^{1-d}}, \quad \vartheta := \mathbb{E} \lrcorner \mathrm{dv}_{\mathscr{N}}, \tag{4.68}$$

其中， $\lrcorner$ 表示欧拉向量场的内乘法（第4.4.2节） $\mathbb{E}$ 在$\mathscr{N}$上，而 $\vartheta_{H^{1-d}}$ 是 $H^{1-d}\vartheta$ 在 $\mathscr{N}$上的拉回。 的齐次性意味着（参见 [182, 引理 6 的证明。3]）

$$\mathrm{res}\, H^{1-d} = (d-1)\ \mathrm{vol}\, \mathscr{N}_{H\leq 1}. \tag{4.69}$$

在整体双曲标准静止时空上，体积 $\mathscr{N}_{H\leq 1}$ 已由 Strohmaier-Zelditch 计算得出 [27, （15）]，其表达式为（4.28）。

**引理 4。** **7.3.** 按照定理 *4.5.1* （因此定理 *4.3.4* 亦然）中的术语，

$$\mathsf{U}_t \in I^{-1/4}\big(\mathbb{R}\times\Sigma\times\Sigma, C_t; \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\Sigma, \mathscr{E}_\Sigma)\big) \tag{4.70}$$

是与典范关系 $C_t := $（4.65b）相关联的拉格朗日分布，其主符号是

$$\sigma_{\mathsf{U}_t}(x,\xi;y,\eta) \asymp \sigma_{\mathsf{F}_t}(x,\xi;y,\eta)\,\sigma_D(y,\eta) \tag{4.71}$$

模去 *Keller-Maslov*部分，其中 $\sigma_{\mathsf{F}_t}$ 由 （4.65c）给出。

此外，$\mathrm{Tr}\, U_t$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $d - 7/4$ 阶拉格朗日分布，与拉格朗日子流形 $\Lambda_T$ 相关联，并且其在 $T = 0$ 处的主符号为

$$\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_0}(\tau) \asymp r\frac{d-1}{(2\pi)^{d-1}}\,\mathrm{vol}(\mathscr{N}_{H\leq 1})\,|\tau|^{d-2}\sqrt{|\mathrm{d}\tau|}. \tag{4.72}$$

证明。第一个断言直接由 $\mathrm{U}_t(x,y) = \mathrm{F}_t(x,y)\ \sigma_D(y,\zeta)$ 得出。接下来，我们利用将 $\mathscr{N}$ 与 $\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma$ 相对应的同一性，从而将 $|\mathrm{dv}_{\mathscr{N}}|$ 对应为 $|\mathrm{dv}_{\dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}_\Sigma}|$。如果 E 是 $H$ 的正则值，那么 $\mathscr{N}_\mathrm{E}$ 是 $\mathscr{N}$ 的余维数为一的 $X_H|_{\mathscr{N}_\mathrm{E}}$ 不变嵌入子流形，它从 $\mathrm{dv}_{\mathscr{N}}$ 继承了自然体积形式 $\mathrm{dv}_{\mathscr{N}_\mathrm{E}}$，并且在 $X_H|_{\mathscr{N}_\mathrm{E}}$ [95, 的作用下保持不变。定理 3.4.12]:

$$\mathrm{dv}_{\mathscr{N}} = \mathrm{dv}_{\mathscr{N}_\mathrm{E}} \wedge \frac{\mathrm{d}H}{\|\operatorname{grad} H\|} \Leftrightarrow \mathrm{dv}_{\mathscr{N}_\mathrm{E}}(\ldots) = \mathrm{dv}_{\mathscr{N}}\left(\frac{\operatorname{grad} H}{\|\operatorname{grad} H\|}, \ldots\right). \tag{4.73}$$

注意到在 $T = 0$，$\mathrm{T}^*\Xi_0\big(\Phi_0(y,\eta)\big) = (y,\eta)$ 以及 $C = \Delta\ \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M}$，因此 $\mathrm{C}'_0 = \big\{(0,-\xi(Z))\big\} \times (\Delta\ \dot{\mathrm{T}}^*_0\mathscr{M})|_{\mathrm{T}\Sigma\times\mathrm{T}\Sigma}$，并且 $\big|\mathrm{dv}_C(y,\eta;\ y,\eta)\ |_{\mathrm{T}\Sigma\times\mathrm{T}\Sigma}\big|^{1/2} = |\mathrm{dv}_{\mathscr{N}}(y,\eta)\ |_\circ\ \circ\ \mathrm{C}C'_{\pi_*\Delta^*}$ 的超额为（见附录（A.44））

$$e = \dim \mathfrak{F}_0 = 2d - 3. \tag{4.74}$$

因此，根据拉格朗日分布的复合，$\mathrm{Tr}\ U_0 \in I^{d-7/4}(\mathbb{R}, \Lambda_T)$。注意到 [10, (6.6)]，由（$t - T$）定义的 $\varphi(t,\tau)$ 对于 $\tau < 0$（相应地，对于 $\tau \geq 0$ 为 0）是 $\Lambda_T$ 的一个相位函数。显然，$\varphi$ 在 $\tau = 0$ 附近并不光滑，但所需的修改只会在下文所述的振荡积分中体现为一些光滑项。为简洁起见，这些项在记号上予以省略。该拉格朗日分布中的任意元素都可以写成形如（参见（2.34））的振荡积分的标量倍数 $\mathrm{c}_1$,$\mathrm{c}_2$, .....

$$(\mathrm{Tr}\, U_0)(t) = (2\pi)^{-3/4}(2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}(\mathrm{c}_1\tau^{d-2} + \mathrm{c}_2\tau^{d-3} + \ldots)\mathrm{d}\tau, \tag{4.75}$$

因为 $\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_0}$ 必须是 $d-2$ 阶（参见定义2.1.9），这是由 $\mathrm{Tr}\, U_0$ 的阶（$d-7/4$）所蕴含的。

计算 $\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_0}$ 包含以下四个步骤，详见截面A.2.3。简而言之，首先得到张量积 $\sigma_\mathrm{K} \otimes \sigma_{\mathrm{U}_0}$，然后与对角线相交。接着我们对 $\mathfrak{F}_0$ 进行积分，并对最后一个量取 tr。将这些步骤汇总，并与 $\mathrm{Tr}\, U_0$ 的最后一个表达式进行比较，我们得到

$$\sigma_{\mathrm{Tr}\,U_0}(0,\tau) = r\frac{\operatorname{res}(H^{1-d})}{(2\pi)^{d-1}}|\tau|^{d-2}\sqrt{|\mathrm{d}\tau|}, \tag{4.76}$$

其中我们使用了引理4.7.2和3.4.6 以及恒等式

$$\mathrm{tr}\left(\sigma_D(y,\eta)\,\sigma_D(y,\zeta)\right) = \mathrm{tr}\,\frac{\sigma_D(y,\eta)\,\sigma_D(y,\zeta) + \sigma_D(y,\zeta)\,\sigma_D(y,\eta)}{2} = \mathrm{g}_y^{-1}(\eta,\zeta)\ \mathrm{rk}(\mathscr{E}) \tag{4.77}$$

利用迹的循环性以及（3.120）。 ∎

### 4.7.2 在 $t = T \in \mathcal{P}$ 处 $\operatorname{Tr} U_t$ 的主符号

这对应于非平凡周期轨道的情形：当 $C_{\pi_* \Delta^*} \circ C_T$ 是洁净的，或者等价地，固定点集 $\mathfrak{F}_T$ 是洁净的。回顾一下，$\Xi_T^{\mathcal{N}}$ 的不动点集是 $\Xi_T^{\mathcal{N}}$ 的周期轨道 $\gamma$ 的并集，而这在很大程度上取决于流形 $(\mathcal{M}, g)$；我们只关注非退化轨道，其定义简述如下（详情见 [10, 第 4]节）。令 $\sigma$ 为 $T^*\mathcal{M}$ 上的辛形式（见例 A.1.2）。诱导的 Killing 流 $\Xi_s^{\mathcal{N}}$ 保持等值集 $\{H(c) = \tau\}$，因为 $\Xi_s^{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{N}$ 上的哈密顿量 $H :=$ (4.21)流。于是，对任意 E，它在 $V := T_c\{H = E\}$ 上的限制满足 $\sigma|_{\mathcal{V}}(X_H, \cdot) = 0$；而 $\gamma$ 在 [27, p. 44] 处非退化，意指 $\sigma|_{\mathcal{V}}$ 的零空间由 $X_H$ 张成。此条件意味着 $\ker(I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{V}}) = \mathbb{R}X_H$ 和 $\operatorname{img}(I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{V}}) = V/\mathbb{R}X_H$，其中 $d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}} : V \to V$，且 $\ker(I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}})$ 应理解为 $I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}}$ 在 V 上的核。在此情形下，线性化庞加莱映射 $P_\gamma$ 定义为

$$I - P_\gamma : \mathcal{V}/\ker(I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}}) \to \mathcal{V}/\ker(I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}}) \tag{4.78}$$

由 $I - d_\gamma \Xi_s^{\mathcal{N}}$ 诱导的线性辛商映射。

**引理4.7.4**。 按照定理 *4.3.6* 中的术语，$\operatorname{Tr} U_t$ 在 $t = T \in \mathcal{P}$ 处的主符号为

$$\sigma_{\operatorname{Tr} U_T}(\tau) = \frac{\tau^{d-2}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathfrak{F}_T} \operatorname{tr}\left(\sigma_D(\gamma)\, \mathcal{T}_{\Xi_T^{\mathcal{N}}(\gamma)} \sigma_D(x, \zeta)\right) \frac{e^{-i\pi \mathfrak{m}(\gamma)/2} |dT| \otimes \sqrt{|d\tau|}}{\sqrt{|\det(I - P_\gamma)|}}. \tag{4.79}$$

证明。 首先注意到，非退化的 $\gamma$ 属于一个二维圆柱，并横截地交于能量超曲面 [95, p。 576] 这意味着可以使用 $\tau = -H(\gamma)$ 作为纤维在 $(T, \tau)$ 上的坐标。于是，在 $(T, \tau)$ 处的半密度值密度由 [10, 第60页及以下 （另见例如 [25, 定理6.1。1]）给出

$$|dT| \otimes \sqrt{\frac{|d\tau|}{|\det(I - P_\gamma)|}}, \tag{4.80}$$

其中 $|dT|$ 是由流在 $\gamma$ 上诱导的密度。

为计算 $\sigma_{\operatorname{Tr} U_T}$，我们再次使用恒等关系 $\mathcal{N} = \dot{T}^*_0 \mathcal{M}_\Sigma$、$|dv_{\mathcal{N}}| = |dv_{\dot{T}^*_0 \mathcal{M}_\Sigma}|$。对于 $T \neq 0$，$C$ 不再由 $\Delta \dot{T}^*_0 \mathcal{M}$ 给出，因此我们从引理 $\sigma_F$ 3.4.6中直接读出 $\sigma_F$ 的非对角表达式，从而得到

$$\sigma_{U_T}(x, \xi; y, \eta) \asymp (2\pi)^{\frac{1}{4}} i\, \sigma_D(x, \xi)\, w(x, \xi; y, \eta) |dt|^{\frac{1}{2}} \otimes \left|dv_C(x, \xi; y, \eta)\right|^{\frac{1}{2}} \tag{4.81}$$

模去 Keller-Maslov贡献，其中 $(x, \xi) = T^*\Xi_t \circ \Phi_s(y', \eta') |_{T\Sigma}$，$(y, \eta) = (y', \eta') |_{T\Sigma}$，对于 $(y', \eta') \in \dot{T}^*_0 \mathcal{M}$。和之前一样，$\sigma_{\operatorname{Tr} U_T}$ 通过使用（4.43）并执行引理4.7.3中使用的四个步骤来计算。这些步骤给出所声称的表达式

$$\sigma_{\operatorname{Tr} U_T}(T, \tau) \asymp \frac{\tau^{d-2}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathfrak{F}_T} \operatorname{tr}\left(\sigma_D(\gamma)\, \mathcal{T}_{\Xi_T^{\mathcal{N}}(\gamma)} \sigma_D(x, \zeta)\right) \frac{|dT| \otimes \sqrt{|d\tau|}}{\sqrt{|\det(I - P_\gamma)|}} \tag{4.82}$$

除去来自 Keller-Maslov线丛 $\mathbb{M} \to \Lambda_T$ 的贡献后。

因此，剩下需要计算的是 $\mathbb{M}$部分，该部分已在 [10, (6.16)]（另见 [172, A.1.4 节 3]）中计算。为确保完备性，我们简要概述主要步骤。首先，按照 A.1.4 节中详述的步骤，由 $\mathbb{L}_C$、$\mathbb{L}_\Gamma$和 $\mathbb{L}_\Lambda$构造 $\mathbb{L}\to\mathsf{C}_T$。设 $\varphi$（分别为 $\phi$）是 $C_{\pi_*\Delta^*}$（分别为 $\mathsf{C}_T$）的生成函数。那么 $\psi:=\varphi+\phi$局部生成 $\Lambda_T$。假设我们将 $[0,1]$ 划分为 $0=s_0<s_1<\ldots<s_N=1$，使得 $\{\mathsf{L}_\alpha\}_{k=0,\ldots,N}$是 $\Lambda_T$在 $\gamma$（$s_\alpha$）附近的锥覆盖，并且$\{\psi_\alpha\}$是相应的生成函数。然后，按照 A.1.5 节中说明的步骤，可得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mathsf{m}(\gamma)}/2$ 是 Keller-Maslov贡献。■

## 4.8 Weyl定律的证明

如定理 4.3.4和 4.3.6所示，$\operatorname{Tr} U_t$在 $t=0$、$T$处具有奇点。我们的目标只是截去 $t=0$ 奇性。为此，引入一个Schwartz函数$\chi(\lambda)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，使得（例如参见 [11,第 133], [8,21.1节—3], [183,定理7。5]）

(i) $\chi(\lambda)>0$ 对所有 $\lambda$均成立；(ii) $(\mathsf{F}\chi)(0)=1$；(iii) $(\mathsf{F}\chi)(t)=(\mathsf{F}\chi)(-t)$；(iv) $\operatorname{supp}(\mathsf{F}_{\lambda\mapsto t}\chi)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$，其中 $\varepsilon>0$ 充分小。

然后利用定理 4.3.4 中 $\operatorname{Tr} U_0$ 的表达式以及 前述 $\chi$的性质，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}_{t\mapsto\lambda}\big(\mathcal{F}_{\cdot\mapsto t}(\chi)\operatorname{Tr}U_t\big) &\approx \int \mathrm{d}\tau\,\delta(\tau-\lambda)r\frac{\operatorname{res}(H^{1-d})}{(2\pi)^{d-1}}\tau^{d-2}+\ldots\\ &= r(d-1)\frac{\operatorname{vol}(\mathcal{N}_{H\le1})}{(2\pi)^{d-1}}\lambda^{d-2}+\ldots,\end{aligned}\tag{4.83}$$

其中，$f\approx g$ 表示对于任意函数 $f(t)$，$g(t)$，$f/g\to1$ 为 $t\to0$。这意味着

$$(\chi*\mathrm{dN})(\lambda)=r(d-1)\frac{\operatorname{vol}(\mathcal{N}_{H\le1})}{(2\pi)^{d-1}}\lambda^{d-2}+O(\lambda^{d-3}),\tag{4.84}$$

其中 $*$ 表示卷积。利用

$$(\chi*\mathsf{N})(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}(\chi*\mathrm{dN})(\mu)\,\mathrm{d}\mu=r\frac{\operatorname{vol}(\mathcal{N}_{H\le1})}{(2\pi)^{d-1}}\lambda^{d-1}+O(\lambda^{d-2}).\tag{4.85}$$

Weyl定律由此推出

$$\mathsf{N}(\lambda)=(\mathsf{N}*\chi)(\lambda)-\int\big(\mathsf{N}(\lambda-\mu)-\mathsf{N}(\lambda)\big)\,\chi(\mu)\,\mathrm{d}\mu\tag{4.86}$$

连同以下事实 $\mathsf{N}(\lambda-\mu)-\mathsf{N}(\lambda)\lessapprox\langle\mu\rangle^{d-1}\langle\lambda\rangle^{d-2}$ 以及 $\int\chi(\mu)\,\mathrm{d}\mu=1$。

## 4.9 文献

渐近迹公式的思想最初由 Martin GUTZWILLER [12]在量子力学背景下提出，随后 Johannes J. DUISTERMAAT 和 Victor W. GUILLEMIN [10]为其提供了严格的数学基础。关于其中重要的历史发展阶段，请参阅前文第 1.1.2 节所提及的参考文献；此外，历史回顾可参见综述文章 [184]。

Jens BOLTE 和 Stefan KEPPELER [185, 186] 将 Gutzwiller 关于闵可夫斯基时空中自旋狄拉克算子的工作推广了（另见阐释性文章 [187,188] 及其中关于发展历程的参考文献）。与他们的报告同期，Mary R. SANDOVAL [26]将 Duistermaat-Guillemin框架推广到闭黎曼流形上的 Dirac 型算子，从而给出了严格的数学分析。她关于平凡周期的狄拉克波迹不变量的结果，与 η不变量留数的计算（ Branson 和 Gilkey [163]）以及高能极限下特征函数的行为（Jakobson 和 Strohmaier [105]）密切相关。在闭三维黎曼流形上的无质量自旋Dirac算子的特殊情形下，Capoferri和Vassiliev [174] 通过推进 Chervova等人的框架，计算了第三局部韦尔系数。 [189] （另见 Avetisyan等人的综述 [29]）介绍了一般椭圆一阶系统的渐近谱分析；关于文献概览，见 [189, 第 11] 节和 [7, 第 3] 章。Li 和 Strohmaier [30]对闭黎曼流形上厄米向量丛中的自伴拉普拉斯型算子的不同谱系数进行了深入研究。特别是，他们获得了 Dirac 型算子在更一般丛自同态下的相关系数；相比之下，Sandoval [26] 采用的是恒等端omorphism，而 Branson-Gilkey [163] 采用的是标量端omorphism；此外，他们还将 Chervova等人的结果 [189] （以及 [30]中提到的后续工作）与已知的热迹不变量联系起来。

[26, 174, 185, 186] 的主要共同要点是通过逐阶求解输运方程来确定时间演化算子（模去平滑算子）。Bolte-Keppeler还在半经典表达式中确定了负责自旋-磁相互作用和自旋-轨道相互作用的项。然而，鉴于非紧致闵可夫斯基时空导致狄拉克哈密顿量具有连续谱，他们最终通过引入能量局部化，考虑了正则化的截断时间演化算子。由于后续文献研究的是闭黎曼流形，并充分利用了傅里叶积分算子理论，这些限制在其中并不存在；相比之下，Bolte-Keppeler采用的是振荡积分。Vassiliev及其合作者 [29, 189] 的研究路线中的一个新颖特征是Weyl定律的第二项（有关更早期工作的研究，请参见这些论文所引用的文献）。Li-Strohmaier [30]采用不同的谱分析，也取得了类似结果。具体而言， [174] 采用傅里叶积分算子的全局相位函数方法，构造了（模去平滑

算子）三维闭黎曼流形上无质量自旋狄拉克算子的解算子。他们还为该算子的主符号提供了一个闭公式，并给出了计算其次主符号的算法。

Strohmaier 和 Zelditch 已开始将 Duistermaat-Guillemin-Gutzwiller 迹公式推广到广义相对论情形 [27, 33]（另请参阅综述 [34]），他们研究了整体双曲、空间紧致的定常时空上的达朗贝尔算子，正如第 1.1.5 节所述。他们的关键步骤是建立经典动力学和量子动力学的相对论描述，并据此推进著名的 Duistermaat-Guillemin [10] 框架。特别是，他们利用达朗贝尔算子的因果传播子和 Killing流表示时间演化算子，并运用基于 Duistermaat 和 Hörmander [35]关于特定初始解的经典工作所建立的傅里叶积分算子符号演算，计算其主符号。随后，他们在平凡周期处采用 Guillemin 的辛残数 [182]方法，并针对非平凡周期调整了 Duistermaat-Guillemin 的计算。因此，他们使用标准的傅里叶—Tauberian 论证，得出了光状测地线空间中的 Weyl定律。除这项研究之外，Mc- Cormick 还将他们的工作推广到了丛框架下整体双曲定常 Kaluza-Klein 时空上的达朗贝尔算子，并 [32]运用了本论文中的一些技术性结果。

# 附录 A

# 典范关系与复合

本章将首先简要回顾锥形辛几何的一些标准概念，然后介绍典范关系、它们的干净交，以及其上丛值密度的复合。

## A.1 典范关系

### A.1.1 锥辛几何预备知识

回顾一下，辛流形是一个二元组 $(\mathrm{M}, \sigma)$，其中 M 是光滑流形，而 $\sigma$ 是一个光滑、非退化的闭二形式。辛流形必为偶数维，并且总是可定向的，因为它们带有在 (2.63) 中定义的 Liouville形式 $\mathrm{dv}_{\mathrm{M}}$。若 $(\mathrm{M}, \sigma_{d_M})$、$(\mathrm{N}, \sigma_{\mathrm{N}})$ 是两个辛流形，且 $\varkappa : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ 是光滑映射（分别地，微分同胚——此时 $\dim \mathrm{M} = \dim \mathrm{N}$），满足

$$\varkappa^* \sigma_{\mathrm{M}} = \sigma_{\mathrm{N}} \tag{A.1}$$

则称 $\varkappa$ 为**辛映射**（分别地，**辛同胚**）。后者在物理学文献中称为典范变换。若 $\dim \mathrm{M} = \dim \mathrm{N}$，则任意辛映射 $\varkappa$ 都是保体积的 $\varkappa^* \mathrm{v}_{\mathrm{M}} = \mathrm{v}_{\mathrm{N}}$ 局部微分同胚。换言之，辛流形的总体积是一个全局辛不变量。根据达布定理，每个 $2d$维辛流形 $(\mathrm{M}, \sigma)$ 局部辛同胚于$(\mathbb{R}^{2d}, \sigma_0)$，其中 $\sigma_0$ 是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的标准辛形式。这意味着

$$\sigma \restriction U = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i, i = 1, \ldots, d, \quad \mathrm{v}_M \restriction U = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^d \wedge \mathrm{d}\xi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\xi_d = \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \tag{A.2}$$

在任意辛坐标图 $\left(U, (x^i, \xi_i)\right)$ 上，对于 $(\mathrm{M}, \sigma)$。

回顾一下，$\sigma$ 诱导出一个垂直向量丛同构 $\sigma^\flat : \mathrm{TM} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$，其逆映射记为 $\sigma^\sharp : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{TM}$。设 $f \in C^\infty(\mathrm{M}, \mathbb{R})$。则向量场

$$X_f := (\mathrm{d}f)^\sharp \tag{A.3}$$

称为由 $f$ 生成的**哈密顿向量场**，其局部表达式为

$$X_f(x,\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x^i}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_i}(x,\xi). \tag{A.4}$$

该**泊松括号**定义为

$$\{f,g\} := \sigma(X_f, X_g) = X_f(g) \tag{A.5}$$

对于任意 $f$，$g \in C^\infty(\mathrm{M},\ \mathbb{R})$。局部地，它写作

$$\{f,g\}(x,\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x,\xi)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,\xi)\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x,\xi). \tag{A.6}$$

**定义 A.1.1**。若存在给定的光滑映射 $\mathbb{R}_+ \times \mathrm{M} \ni (\lambda,\ x) \mapsto \mathrm{m}_\lambda(x) := \mathrm{m}(\lambda,\ x) \in \mathrm{M}$，并且对于每个 $x \in \mathrm{M}$，都存在一个开邻域 $U$，使得 $\mathrm{m}_{\mathbb{R}_+}(U) = U$，以及一个微分同胚 $\kappa\colon U \to \mathbb{U}$，满足$\lambda\kappa = \kappa\mathrm{m}_\lambda$，其中 $\mathbb{U}$ 是 $\dot{\mathbb{R}}^d$中的一个开锥，则称 $d$ 维流形 $(\mathrm{M},\ \mathrm{m}_\lambda)$ 为**锥流形**。

如果锥流形 $(\mathrm{M},\ \mathrm{m}_\lambda)$ 同时也是辛流形 $(\mathrm{M},\ \sigma)$，并具有如下性质

$$\mathrm{m}_\lambda^*\sigma = \lambda\sigma \tag{A.7}$$

则$(\mathrm{M},\ \mathrm{m},\ \sigma)$ 称为**锥形辛流形**（参见例如 [76, 定义 21.1。8]）。

由于 $\mathrm{m}_\lambda \circ \mathrm{m}_{\lambda'} = \mathrm{m}_{\lambda\lambda'}$ 在 $\dot{\mathbb{R}}^d$ 中成立，简而言之，锥流形 (M,m) 是一个赋予了 自由、真且光滑 $\mathbb{R}_+$-乘法群作用 m 的流形 M（例如参见 [83, 定义 2.1.1]）。如果 $f \in C^\infty(\mathrm{M})$，则

$$\mathscr{X}(f) := \frac{\mathrm{d}(\mathrm{m}_\lambda^* f)}{\mathrm{d}\lambda}(1) \tag{A.8}$$

称为**径向向量场**。局部而言，这意味着 $\mathscr{X} = \xi_i \partial/\partial\xi_i$。

**例 A.1.2**。如果 $M$ 是一个 $d$维流形，那么其余切空间丛 $\mathrm{T}^*M$ 自然可以视为一个辛流形，因为它带有一个典范 1-形式，也称为**Liouville 1-形式** $\theta$，其负微分是**典范辛形式** $\sigma := -\mathrm{d}\theta$，定义在 $\mathrm{T}^*M$ 上。在 $\mathrm{T}^*M$ 上的辛坐标 $(x^i, \xi_i)$ 中，

$$\theta = \xi_i\,\mathrm{d}x^i, \quad \sigma = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}\xi_i. \tag{A.9}$$

尽管 $(\mathrm{T}^*M,\ \sigma)$ 是一个辛流形，但去心余切丛 $(\dot{\mathrm{T}}^*M,\ \sigma)$ 自然是一个锥形辛流形，其中

$$\mathrm{m}_\lambda(x,\xi) := (x, \lambda\xi), \quad \kappa(x,\xi) := \big((|\xi_1| + \ldots + |\xi_d|)(x^1,\ldots,x^d), (\xi_1,\ldots,\xi_d)\big). \tag{A.10}$$

**例 A.1.3.** 设 $\mathscr{V} \to M$ 是一个秩为 $n$、定义在流形 $M$ 上的 $\mathbb{R}$-向量丛。那么，$(\dot{\mathscr{V}}, \mathsf{m}_\lambda)$ 关于乘法 $\mathsf{m}_\lambda$ 是一个锥流形，其中该乘法定义为其纤维中的所有伸缩变换：

$$\mathsf{m}_\lambda : \dot{\mathscr{V}}_x \to \dot{\mathscr{V}}_x,\ v(x) \mapsto \mathsf{m}_\lambda\big(v(x)\big) := (\lambda v)(x) \tag{A.11}$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+$。局部地 $\mathscr{V} \cong U \times \mathbb{R}^n$ 且 $\dot{\mathscr{V}} \cong U \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 对于某个开集 $U \subset M$（参见例如 [83, 第 27]页）。丛 $\mathscr{V}$ 由于是锥形的，局部可转化为

$$(x;\theta) \in U \times \dot{\mathbb{R}}^n \Rightarrow \mathsf{m}_\lambda(x;\theta) = (x;\lambda\theta) \in U \times \dot{\mathbb{R}}^n. \tag{A.12}$$

若集合 $\mathcal{U} := \{(x;\theta) \in U \times \mathbb{R}^n\}$ 在所有膨胀作用下均保持不变，则称其为 中的 $U \times \mathbb{R}^n$ 锥子集（A.12）：$(x;\theta) \mapsto (x;\lambda\theta)$。因此，正齐次函数 $a$ 的度为$s$ 在 $\mathcal{U}$ 上是指（参见定义A.1.1）

$$a(x;\lambda\theta) = \lambda^s a(x;\theta). \tag{A.13}$$

定理 *A.1.4*（齐次达布定理）。设 $(M, m_\lambda, \sigma)$ 为一个 $2d$ 维锥形辛流形。假设 $I$ 和 $J$ 是 $\{1, \ldots, d\}$ 的子集，且 $(x^i)_{i\in I}$ 和 $(\xi_j)_{j\in J}$ 是定义在任意 $(x,\xi) \in M$ 的锥形邻域上的光滑函数，其中 *[35,命题 6.1.3]*（另见 *[23,定理 21.1.9]*）

*(a)* $x^i$ 和 $\xi_j$ 分别是度为 0 和 1的齐次函数，

*(b)* 对所有 $i$、$j \in I$，$x^i$与 $x^j$泊松对易；对所有 $i$、$j \in J$，$\xi_i$也与 $\xi_j$泊松对易，同时对所有 $i \in I$以及所有 $j \in J$，$\{\xi_j$、$x^i\} = \delta^i_j$，

*(c)* 哈密顿向量场 $X_{x^i}$、$X_{\xi_j}$和径向向量场 $\mathscr{X}$在 $(x$、$\xi)$处线性无关，

*(d)* 存在任意实数 $\boldsymbol{x}^i$和 $\boldsymbol{\xi}_j$，使得 $x^i(x$、$\xi) = \boldsymbol{x}^i$以及 $\xi_j(x$、$\xi) = \boldsymbol{\xi}_j$，并假设对于某个 $k \notin I$有 $\boldsymbol{\xi}_k \neq 0$。

那么存在光滑函数 $(x^{i'})_{i'\notin I}$和 $(\xi_{j'})_{j'\notin J}$，定义在 $(x,\ \xi)$的锥形邻域内，使得 *(a)*、*(b)*、*(d)* 对从 1 到 $d$ 的指标均成立，并且如果$i' \neq k$，则 *(c)* 仍然成立$i' \neq k$。特别地，$(x^i;\ \xi_i)$ 定义了一个齐次的[1] 辛同胚

$$\varkappa : \mathcal{U} \to \varkappa(\mathcal{U}), \qquad \mathsf{m}_\lambda^*\varkappa = \lambda\varkappa \tag{A.14}$$

度为1，从$\mathcal{U}$ 所在的$(x,\xi)$ 在M 中的一个开锥邻域到 $\varkappa(\mathcal{U})$ 中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^d$的一个开锥邻域。

[1]参见（A.7）。

## A.1.2 拉格朗日子流形

**定义 A.1.5.** 设 $(M,\sigma)$ 是一个辛流形。浸入 $\iota:\Lambda\hookrightarrow M$ 称为**拉格朗日** 当且仅当 $\iota^*\sigma=0$ 且 $\dim\Lambda=\dim M/2$。

**例 A.1.6**。设 $M$ 为一个流形。那么，零余切向量以及恰当1-形式 $\xi$ 在 $M$ 上的像 $\xi(M)$ 都是 $T^*M$ 的拉格朗日子流形。

**例 A.1.7**。设 $(\Sigma,\iota)$ 是流形 $M$ 的一个子流形。商向量丛 $\Sigma^\perp:=T^{M_\Sigma}/T\Sigma$ 称为**法丛**，其代数对偶

$$\Sigma^{\perp*}:=T^*M_\Sigma/T^*\Sigma,\quad T^*M_\Sigma:=T^*M\restriction\Sigma \tag{A.15}$$

称为 **余法丛**，即 $(\Sigma,\iota)$。它是 $\mathbb{R}$-向量丛，基空间为 $\Sigma$，秩为 $\Sigma^{\perp*}=$，余维为 $\Sigma$，因此维数为 $\Sigma^{\perp*}=M$。此外，它自然同构于 $d\iota$ 在 $TM_\Sigma$ 中的湮没子；后者是 $T^*M$ 的拉格朗日子流形（参见例如 [190, 第 374] 页）。

如果我们 假设 $(\Sigma,\iota)$ 是嵌入的，那么其余法丛可表示为

$$\Sigma^{\perp*}:=\big\{(y,\eta)\in T^*M\mid y\in\Sigma,\eta\restriction T_yM_\Sigma=0\big\}. \tag{A.16}$$

注意，$\dot{\Sigma}^{\perp*}\subset\dot{T}^*M$ 是一个锥拉格朗日流形（参见例如 [83, 命题 3.7。2]）.

对于流形 $M$ 上的任意恰当1-形式 $\xi$，我们可以写成 $\xi=d\varphi$，其中 $\varphi\in C^\infty(M,\mathbb{R})$。函数 $\varphi$ 是拉格朗日子流形 $\xi(M)=d\varphi(M)$ 的所谓生成函数的一个例子。对于任意一般辛流形上的拉格朗日浸入，这是一个典型结果，因为 $\sigma$ 在 $\Lambda$ 上恒等于零，因此庞加莱引理意味着，局部地，$\sigma=d\vartheta$，其中 $\vartheta$ 是定义在 $M$ 上的某个势。再次应用这一引理，可得到一个开子集 $L\subset\Lambda$ 以及一个依赖于 $\vartheta$ 的 $\varphi\in C^\infty(L,\mathbb{R})$，使得 $(\iota^*\vartheta)\restriction L=d\varphi$。如果我们考虑余切丛 $\pi:T^*M\to M$ 的特殊拉格朗日浸入类 $\Lambda$，那么所有临界点的集合 $\Sigma(\Lambda)$

$$\Pi:\pi\circ\iota:\Lambda\to M,\ (x,\xi)\mapsto\Pi(x,\xi):=x \tag{A.17}$$

称为**奇异集**，而其在 $M$ 上的投影称为 $\Lambda$的**焦散**。该集合包含这样的点：$\Lambda$ 与余切纤维化不横截；在其补集内，$\Lambda$ 总可以局部表示为定义在 $M$的某个开子集上的恰当1-形式 $d\varphi$ 的图。我们将在下文看到，通过引入某个辅助参数 $\theta\in\mathbb{R}^n$，这一构造可以推广到所有 $\Lambda$（例如参见 [20], [190, 注记 8.8.2]）。

引入这类特定子流形的首要目的是补充傅里叶积分算子理论（第 2.1.3、2.2.3 和 2.3.3 节），在那里我们只要求 锥形拉格朗日流形 $\Lambda$。我们注意到，这样的拉格朗日流形恰好是典范1-形式 $\theta$ 恒等为零的流形，反之亦然 [77, （3.1.3）]（另见，例如 [83, 命题 3.7。1]）。

现在我们将系统地描述如何通过生成函数（也称为相位函数）对锥拉格朗日流形 $\Lambda\subset\dot{T}^*M$ 进行参数化。

**定义 A.1.8**。 设 $M$ 是一个 $d$维流形，且 $\mathcal{U} \subset M \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 是一个开锥集，其中 $n$ 不一定等于 $d$。任意 $\mathbb{R}$值光滑函数 $\varphi \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ 定义在 $\mathcal{U}$上，称为具有 **超额** $0 \le e \le n$ 的 **干净相位函数**，如果 [10, 第 7] （另见，例如 [76,定义 21.2。15], [20,定义 1]）

(a) 它关于 $\dot{\mathbb{R}}^n$-变量 $\theta$ 是 1 次正齐次的，

(b) 其微分 $\mathrm{d}\varphi \neq 0$ 不处处为零，

(c) 其**纤维临界集**

$$\mathscr{C} := (\mathrm{grad}_\theta \varphi)^{-1}(0) := \left\{(x_0;\theta^0) \in \mathcal{U} \,\middle|\, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k}\right)_{k=1,\dots,n}(x_0;\theta^0) = 0\right\} \tag{A.18}$$

是一个 $d+e$ 维光滑锥子流形，其切空间位于 $M \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 中，且其切向量 i s

$$\mathrm{T}_{(x;\theta)}\mathscr{C} := \ker\left(\mathrm{d}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k}\right)_{k=1,\dots,n}(x;\theta)\right). \tag{A.19}$$

若 $e = 0$ 则 $\varphi$ 称为**非退化相位函数**。

给定一个洁净的 $\varphi$，在 $\mathscr{C}$ 的任意一点处，微分 $\mathrm{d}(\partial\varphi/\partial\theta_k)$ 张成一个维数为 $n - e$ 的线性空间，且映射 [10, 引理 7.1]

$$\jmath_\varphi : \mathscr{C} \to \Lambda_\varphi \subset \dot{\mathrm{T}}^*M,\ (x;\theta) \mapsto \jmath(x;\theta) := (x, \mathrm{d}_x\varphi) \tag{A.20}$$

局部上是一个纤维维数为 $e$ 的齐次纤维化，其像是一个浸入的锥拉格朗日子流形 $\Lambda_\varphi$。如果 $e = 0$，则 $(\mathrm{d}(\partial\varphi/\partial\theta_1)$、…、$\mathrm{d}(\partial\varphi/\partial\theta_n))$ 在 $(x;\theta) \in \mathscr{C}$ 处线性无关，且 $\jmath_\varphi :=$ (A.20) 是一个齐次浸入 [77, p。 134] （另见例如 [20]）。

我们注意到，$\Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*M$ 是一个锥拉格朗日流形，当且仅当，对于每个 $(x, \xi) \in \Lambda$，存在一个锥形邻域 L，使得

$$\Lambda \cap \mathcal{L} = \Lambda_\varphi \Leftrightarrow \{(x,\xi)\} = \{(x, \mathrm{d}_x\varphi)\} \tag{A.21}$$

对于某个定义在 $\varphi$ L 上的非退化相位函数（参见例如 [83, 命题 3.7.3], [191, 定理，第 26] 页）。在这种情况下，我们称 $\varphi$ **局部生成** $\Lambda$ （参见例如 [190, 第 668] 页）。这样的局部生成函数总是存在，并且具有典范形式，即，每个（锥）拉格朗日子流形都可由一个非退化相位函数局部生成。对于任意的 $(x, \xi) \in \Lambda$，可在 $x \in M$ 处选取局部坐标 $(x^i)$，使得在 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 上与之对应的齐次辛坐标 $(x^i, \xi_i)$ 下，经过 $(x, \xi)$ 的拉格朗日平面 $\xi_i = \mathrm{cst}$ 与 $\Lambda$ 横截。此外，存在定义在 $M \times \dot{\mathbb{R}}^d$ 的某个开锥子集中的非退化相位函数 $\varphi$，其具有唯一形式 [77, 定理 3.1.3] （另见例如 [76, 定理 21.2.16、21.2.18], [84, 命题 1.4、推论 1.1、注记 1.1（第 418–419 页）]）

$$\varphi = x^i\xi_i - H \quad \text{so that} \quad \Lambda_\varphi = \Lambda_H = \left\{\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \xi_i\right\}, \tag{A.22}$$

其中 $H$ 是在 $\mathbb{R}$<style id='7'} 上定义的取值于 $\xi \in \dot{\mathrm{T}}^*_x M$ 的开锥邻域上的一个光滑正齐次 1 次函数。我们注意到，在这种情况下，齐次浸入（A.20）就是恒等映射。

这一引人入胜的存在性结果立即引发了

- 局部相位函数是否唯一?
- 是否可以利用相位函数实现拉格朗日流形的全局参数化?
- 如何选择纤维变量的数量 $n$ ?

第一个问题引出了相位函数等价类的概念。严格地说，设 $\tilde{\mathrm{U}} \subset M \times \dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}$ 是一个开锥集，使得存在一个微分同胚

$$\upsilon : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}, \ (x;\theta) \mapsto \upsilon(x;\theta) := (x;\tilde{\theta}), \tag{A.23}$$

其关于 $\theta$ 是 1 次齐次的，并且是保纤维的，$\mathrm{Pr} \circ \upsilon = \mathrm{Pr}$，其中 $\mathrm{Pr}$、$\tilde{\mathrm{Pr}} : \mathrm{U}$、$\tilde{\mathrm{U}} \to M$ 是投影算子，且 $\tilde{\theta}$ 是 $(x;\theta)$ 的光滑函数。那么，如果 $\varphi$ [77, p. 134]（另见例如 [191, p. 27]，则称其在 U 上与相位函数 $\tilde{\varphi}$（局部）等价。）

$$\upsilon^* \tilde{\varphi} = \varphi. \tag{A.24}$$

给定任意 $(x, \xi) \in \Lambda$，我们希望了解存在等价相位函数的必要和充分条件。设 $\varphi$ 和 $\tilde{\varphi}$ 是 $\Lambda$ 的相位函数，它们在某些开锥形子集 $U \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 和 $\tilde{U} \times \dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}$上具有相同的超额 $e$，并且$\Pi(x, \xi) \in U \subset M$。那么，对于 $U \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 和 $\tilde{U} \times \dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}$中 $(x, \xi)$ 的任意开锥邻域 U 和 $\tilde{\mathrm{U}}$，$\varphi$ 和 $\tilde{\varphi}$ 等价，当且仅当 [84, 命题 1.5（第 421 页）]（另见 [20, 命题 1]）

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_\varphi \ni (x;\theta) \mapsto (x, \mathrm{d}_x\varphi = \xi) &= (x, \mathrm{d}_x\tilde{\varphi} = \xi) \leftarrow\!\shortmid (x;\tilde{\theta}) \in \mathscr{C}_{\tilde{\varphi}}, && \text{(A.25a)}\\
n &= \tilde{n}, && \text{(A.25b)}\\
\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Hess}_\theta \varphi\,(x;\theta)\right) &= \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Hess}_{\tilde{\theta}} \varphi\,(x;\tilde{\theta})\right), && \text{(A.25c)}
\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{C}_\varphi$ 分别 $\mathscr{C}_{\tilde{\varphi}}$ 是 $\varphi$ 分别 $\tilde{\varphi}$ 的纤维临界流形，且 sgn 表示海森矩阵（(3.18)）矩阵 $\operatorname{Hess}_\theta \varphi$ 的 $\varphi$ 关于其纤维变量 $\theta \in \dot{\mathbb{R}}^n$ 的符号差。这些约束也可以从操作性角度给出。

**注 A.1.9.** 设 $\mathfrak{M}(\Lambda)$ 为 $\Lambda$的等价相位函数类。给定 $\varphi \in \mathfrak{M}(\Lambda)$，以下操作会生成 $\mathfrak{M}(\Lambda)$ [85, 第 48] (另请参见，例如 [190, 第 671])：

(i) 加法：$\tilde{\varphi} := \varphi + \lambda \in \mathfrak{M}(\Lambda)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 任意；

(ii) 复合：$\tilde{\varphi} =$(A.24) $\in \mathfrak{M}(\Lambda)$ 对于任意保纤维微分同胚（A.23）；

(iii) 悬挂：对于 $\dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}$ 上的任意非退化双线性形式 q，$\tilde{\varphi} := \mathrm{Pr}^{*}\,\mathcal{U}\,\varphi + \mathrm{Pr}^{*}_{\dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}}\,\mathrm{q}$ on $\tilde{\mathrm{U}} := U \times \dot{\mathbb{R}}^{\tilde{n}}$ 是 $\mathfrak{W}(\Lambda)$ 的一个元素。

(iv) 限制：如果 $\varphi$ 是 $M \times \dot{\mathbb{R}}^{n}$ 上的相位函数，那么 $\tilde{\varphi} := \varphi \restriction \tilde{\mathrm{U}} \in \mathfrak{W}(\Lambda)$，其中 $\tilde{\mathrm{U}} \subset M \times \dot{\mathbb{R}}^{n}$ 是一个开锥子集，包含 $J\varphi(x,\ \xi)$的原像。

这四种运算在相位函数之间生成一种等价关系，称为**稳定等价**。因此，我们得出结论：相位函数并不唯一，但在稳定等价意义下是唯一的。

通过相位函数等价类对拉格朗日子流形进行参数化 不能 在 全局上 由于 拓扑限制而完成。当 $M$为紧致时，这些障碍需要使用上同调和 $k$-理论语言来表述；这些内容在某种程度上偏离主题，因此我们不再给出那些精确公式，而是参阅 [192, 193] 以及其中所引用的早期文献。就我们所知，非紧情形仍然是一个悬而未决的问题。尽管如此，在特定情形下仍可实现全局参数化：当锥状拉格朗日子流形由齐次辛同胚的图给出时，可以使用一个等价类的 $\mathbb{C}$-值非退化相位函数 [116, 引理 1.2，1.7]。

F最后，纤维维数由下式给出下界 [84,命题 1.3（第 41 页 7)]

$$n \geq d - \mathrm{rk}(\mathrm{d}_{(x,\xi)}\Pi) + e \tag{A.26}$$

对于任意 $(x,\ \xi) \in \Lambda$，其中 dΠ 是（A.17）的微分。

如果 $(\mathrm{M},\ \sigma_{\mathrm{M}})$ 和 $(\mathrm{N},\ \sigma_{\mathrm{N}})$ 是两个辛流形，那么它们的乘积流形 M×N 可以自然地赋予辛形式

$$\sigma_{\mathrm{M}} \boxplus \sigma_{\mathrm{N}} := \mathrm{pr}^{*}_{\mathrm{M}}\,\sigma_{\mathrm{M}} + \mathrm{pr}^{*}_{\mathrm{N}}\,\sigma_{\mathrm{N}}, \quad \sigma_{\mathrm{M}} \boxminus \sigma_{\mathrm{N}} := \mathrm{pr}^{*}_{\mathrm{M}}\,\sigma_{\mathrm{M}} - \mathrm{pr}^{*}_{\mathrm{N}}\,\sigma_{\mathrm{N}}, \tag{A.27}$$

其中 $\mathrm{pr}_{\mathrm{M}},\ \mathrm{pr}_{\mathrm{N}} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M},\ \mathrm{N}$ 是笛卡尔投影。在 M ×N 的辛坐标 $(x^{i},\ \xi_{i};\ y^{j},\ \eta_{j})$ 下，这些形式分别写为 $\mathrm{d}x^{i} \wedge \mathrm{d}\xi_{i} \boxplus \mathrm{d}y^{j} \wedge \mathrm{d}\eta_{j}$ 和 $\mathrm{d}x^{i} \wedge \mathrm{d}\xi_{i} \boxminus \mathrm{d}y^{j} \wedge \mathrm{d}\eta_{j}$。

**例 A.1.10**。设 $(\mathrm{M},\ \sigma_{\mathrm{M}})$、$(\mathrm{N},\ \sigma_{\mathrm{N}})$ 是 $2d$ 维辛流形，且 $\varkappa : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ 是一个辛同胚。那么它的图

$$\Gamma = \{(\varkappa(y,\eta);(y,\eta)) \mid (y,\eta) \in \mathrm{N}\} \subset (\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \sigma_{\mathrm{M}} \boxminus \sigma_{\mathrm{N}}) \tag{A.28}$$

是一个拉格朗日子流形，而扭曲图 $\Gamma' = \{(\varkappa(y,\ \eta);(y,\ -\eta))\}$ 是关于乘积辛形式 $\sigma_{\mathrm{M}} \boxplus \sigma_{\mathrm{N}}$ 的拉格朗日子流形。注意，任意微分同胚 $\varkappa$ 当且仅当其图 $\Gamma \subset (\mathrm{M} \times \mathrm{N}, \sigma_{\mathrm{M}} \boxminus \sigma_{\mathrm{N}})$ 是一个拉格朗日子流形时，它才是一个辛同胚。

前述恒等辛同胚的一个特殊情形具有一些有趣的推论，如下所示。

**例 A.1.11.** 设 $M$ 是一个流形，其去心余切丛 $(\dot{\mathrm{T}}^*M, \sigma_M)$ 被视为锥形辛流形，如例 A.1.2 中的情形，并令 $\mathrm{id}: M \to M$ 为恒等微分同胚。则其余切提升

$$\mathrm{T}^*\,\mathrm{id} : \dot{\mathrm{T}}^*M \to \dot{\mathrm{T}}^*M,\ (x,\xi) \mapsto (\mathrm{T}^*_x \mathrm{id})(\xi)\,(X) := \xi\big(\mathrm{d}_x \mathrm{id}\,(X)\big) = \xi(X) \tag{A.29}$$

对于任意 $X \in \mathrm{T}_x M$，它是保持 Liouville 形式不变的恒等齐次辛同胚。其扭曲图

$$\Gamma' = \{(x,\ \xi;\ x,\ -\xi) \in \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*M\} = (\Delta_M M)^{\perp^*} = (\Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*M)' \subset (\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*M,\ \sigma_M \boxplus \sigma_M) \tag{A.30}$$

是一个拉格朗日子流形，它不过就是余法丛（例A.1.7）$(\Delta_M M)^{\perp^*}$ 的对角嵌入 $\Delta_M : M \to M \times M$。等价地，这是乘积去心余切丛的扭曲对角嵌入 $(\Delta\, \dot{\mathrm{T}}^*M)' \hookrightarrow \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*M \cong \dot{\mathrm{T}}^*(M \times M)$。流形 $\Gamma'$ 由非退化相位函数参数化

$$\varphi := (x^i - y^i)\xi_i \tag{A.31}$$

任意坐标 $(x^i)$（分别在 $(y^i)$附近）$x$（分别在 $y$）中，位于 $M$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d$（例如参见 [84,例 5.2、5.3（第 455–456 页）]）。

例 A.1.10 表明，将拉格朗日子流形 $\Lambda \subset (\mathrm{M} \times \mathrm{N},\ \sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{N})$ 构造为辛同胚的图这一标准方法，仅在 $\dim \mathrm{M} = \dim \mathrm{N}$ 时才有效；这一条件无法先验保证，而放宽该条件便导出了典范关系的概念。

定义 A.1.12. 如果 $(\mathrm{M}, \sigma_\mathrm{M})$ 和 $(\mathrm{N}, \sigma_\mathrm{N})$ 是两个辛流形，那么 $(\mathrm{M} \times \mathrm{N},\ \sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{N} :=$(A.27)) 的浸入拉格朗日子流形 $(C, \iota)$ 称为从 N 到 M 的典范关系。如果 M、N 以及 $C$ 都是锥形的，则称该关系为齐次关系 [77,定义 4.1.2]（另见 [76,定义 21.2.12]）。

**例 A.1.13.** 设 $(\mathrm{M},\ \sigma_\mathrm{M})$ 是一个辛流形，且 $(\mathrm{T}^*\mathbb{R} \times \mathrm{M}, \sigma_\mathbb{R} \boxplus \sigma_\mathrm{M}, H)$ 是一个含时哈密顿系统。扭曲图（详见 [190, 第 441 页 -442], [20, 第 4 节2] ）

$$\Gamma' = \{(t,\tau;x,\xi;y,-\eta) \in \mathrm{T}^*\mathbb{R} \times \mathrm{M} \times \mathrm{M} \mid (x,\xi) = \Phi_t(y,\eta),\ \tau + H(x,\xi) = 0\} \tag{A.32}$$

$H$流 $\Phi_t$ 假设为完备，它是 $\mathrm{T}^*\mathbb{R} \times \mathrm{M} \times \mathrm{M}$ 的一个典范关系。

**注 A.1.14.** 根据定义 A.1.12，$C \subset \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ 是一个关于 $\sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{N}$的拉格朗日子流形，因此，扭曲典范关系 $C' \subset \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ 是一个关于乘积辛形式 $\sigma_\mathrm{M} \boxplus \sigma_\mathrm{N}$的拉格朗日子流形。

设 $C$ 是从 $\pi_N : \dot{\mathrm{T}}^*N \to N$ 到 $\pi_M : \dot{\mathrm{T}}^*M \to M$ 的齐次典范关系。作为一个拉格朗日子流形，它也可以由定义在 $M \times N$ 的开锥子集上的相位函数 $\varphi$ 的稳定等价类 $[\varphi]$ 唯一参数化

如下所述。对于每个 $(x_0,\ \xi^0;\ y_0,\ \eta^0) \in C$，存在一个位于 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 上的齐次辛坐标邻域 $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$，以及定义在 $\pi_M(\mathrm{U}) \times \pi_N(\mathrm{V}) \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 上的洁净相位函数 $\varphi$，使得

$$\mathscr{C}_\varphi := \{(x_0, y_0; \theta^0) \in \pi_M(\mathcal{U}) \times \pi_N(\mathcal{V}) \times \dot{\mathbb{R}}^n \mid \operatorname{grad}_\theta \varphi\,(x_0, y_0; \theta^0) = 0\} \subset M \times N \times \dot{\mathbb{R}}^n \quad \text{(A.33)}$$

是某个 $d_M + d_N + e$ 维子流形。于是，$C$ 可局部表示为齐次纤维化

$$\jmath_\varphi : \mathscr{C}_\varphi \to C_\varphi,\ (x, y; \theta) \mapsto \jmath(x, y; \theta) := (x, \mathrm{d}_x\varphi; y, \mathrm{d}_y\varphi) \quad \text{(A.34)}$$

其纤维维数为 $e$。显然，可以选择 $e = 0$，使得前述映射成为齐次浸入。或者，在任意齐次辛坐标图 $(\mathrm{U} \times \mathrm{V},\ (x^i,\ \xi_i;\ y^j,\ \eta_j))$ 附近的 $\Pi(x,\ \xi;\ y,\ \eta)$ 上，都可以取一个如下形式的非退化相位函数

$$\psi := x^i\xi_i + y^j\eta_j - H \quad \text{(A.35)}$$

来参数化 $C$，其中 $H$ 是一个光滑的、正齐次的 $\mathbb{R}$ 值函数，在 $(\xi,\ \eta) \in \dot{\mathrm{T}}^*_xM \times \dot{\mathrm{T}}^*_yN$ 的某个开锥邻域上关于 $\mathbb{R}$ 齐次，次数为 1。相应的齐次浸入

$$\jmath_H : \mathscr{C}_H \to C_H,\ (x, \xi; y, \eta) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \xi_i; \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, \eta_j\right) \quad \text{(A.36)}$$

实际上就是恒等映射。根据注记A.1.14，这意味着

$$C'_\varphi = \{(x, \mathrm{d}_x\varphi; y, -\mathrm{d}_y\varphi)\} \quad \text{and} \quad C'_H = \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \xi_i; \frac{\partial H}{\partial \eta_j}, -\eta_j\right)\right\}. \quad \text{(A.37)}$$

相对于 $\sigma_M \boxplus \sigma_N$（例如参见 [76, (21.2.9)]）。

## A.1.3 洁净复合

一个关系将一个集合映射到另一个集合。因此，如果 $S$ 是辛流形 $(\mathrm{O},\ \sigma_\mathrm{O})$ 的子集，且 $C \subset (\mathrm{M} \times \mathrm{O},\ \sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{O})$ 是一个典范关系，那么 $C(S) = \{\xi \in \mathrm{M} \mid (\xi,\ \zeta) \in C,\ \text{对于某个 } \zeta \in S\}$ 可以表示为 $C(S) = \mathrm{pr}_\mathrm{M}\left(C \cap \mathrm{pr}_\mathrm{O}^{-1} \circ S\right)$，其中 $\mathrm{pr}_\mathrm{M},\ \mathrm{pr}_\mathrm{O} : \mathrm{M} \times \mathrm{O} \to \mathrm{M},\ \mathrm{O}$ 是笛卡尔投影。将 $C$ 与另一个典范关系 $\Lambda \subset (\mathrm{O} \times \mathrm{N},\ \sigma_\mathrm{O} \boxminus \sigma_\mathrm{N})$ 进行复合后，可写为（例如参见 [76, 第 290] 页）

$$C \circ \Lambda := \{(\xi, \eta) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N} \mid (\xi, \zeta) \in C, (\zeta, \eta) \in \Lambda, \text{for some } \zeta \in \mathrm{O}\} = \Pi(C \barwedge \Lambda), \quad \text{(A.38)}$$

其中我们使用了

$$C \barwedge \Lambda := (C \times \Lambda) \bigcap (\mathrm{M} \times \Delta\mathrm{O} \times \mathrm{N}) \quad \text{(A.39)}$$

以及笛卡尔投影 $\Pi : \mathrm{M} \times \Delta\mathrm{O} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$.

但是，一般而言，$C \circ \Lambda$ 并非流形，而且需要了解“如何” $C \times \Lambda$ 与 $\mathrm{M} \times \Delta\mathrm{O} \times \mathrm{N}$ 相交，因此我们引入“干净交”这一术语（例如参见 [10, 第 5]节）。

**定义 A.1.15**。 设 $S$ 与 $\Sigma$ 是流形 $M$的两个子流形。如果它们的交$S \cap \Sigma$ 是满足条件的子流形（例如参见 [76, 定义 C.3。2], [85, 定义 5。9]）

$$\forall x \in S \cap \Sigma : \mathrm{T}_x(S \cap \Sigma) = \mathrm{T}_x S \cap \mathrm{T}_x \Sigma \tag{A.40}$$

那么交 集就称为**洁净**，记作 $S \pitchfork_e \Sigma$，其**超额** $e \in \mathbb{N}_0$ 给定 b y

$$e := \operatorname{codim} S + \operatorname{codim} \Sigma - \operatorname{codim}(S \cap \Sigma). \tag{A.41}$$

若 $e = 0$，则称 $S$ 与 $\Sigma$ 横截地相交，符号表示为 $S \pitchfork \Sigma$。

在任意 $x \in S \cap \Sigma$ 处均可将 $S \pitchfork \Sigma$ 的判据重新表述为

$$\mathrm{T}_x S + \mathrm{T}_x \Sigma = \mathrm{T}_x M \Leftrightarrow S_x^\perp \cap \Sigma_x^\perp = \{0\}. \tag{A.42}$$

**例 A.1.16**。设 $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$。则 $\{z = 0\} \pitchfork \{z = x\}$ 但 $\{z = 0\} \not\pitchfork \{z = xy\}$。

直观地说， $S \pitchfork \Sigma$意味着它们以“尽可能少”的方式相交。因此， $S \cap \Sigma = \emptyset$显然是 $S \pitchfork \Sigma$。

**例 A.1.17.** $x$轴与 $y$轴在 $\mathbb{R}^3$中洁净相交，且具有 $e = 2+2-3 = 1$。在$\mathbb{R}^2$中， $x$轴与$\{y = x^2\}$并非洁净相交。

若（$C \times \Lambda$） $\pitchfork_e (\mathrm{M} \times \Delta \mathrm{O} \times \mathrm{N})$，则（例如参见 [76, 定理 21.2.14], [85, 命题 5.28]）

$$\operatorname{rk} \Pi = \frac{\dim \mathrm{M} + \dim \mathrm{N}}{2} \tag{A.43}$$

并且 $\Pi$的值域 $C \circ \Lambda$局部上是 $(\mathrm{M}\times\mathrm{N}, \sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{N})$ 的一个浸入拉格朗日子流形。此外，若 $U$ 是 $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ 中的一个开集，且 $\Pi \upharpoonright \Pi^{-1}(U)$ 是真的，那么 $\Pi(\Pi^{-1}U)$ 是 $U$ 的一个浸入闭拉格朗日子流形，而 $\Pi^{-1}U$ 是其上的一个具有紧纤维的纤维空间（例如参见 [76,注，第 291] 页）。

**定义 A.1.18**。 设 $(\mathrm{M},\ \sigma_\mathrm{M})$，$(\mathrm{O},\ \sigma_\mathrm{O})$ 和 $(\mathrm{N},\ \sigma_\mathrm{N})$ 为辛流形，且 $C \subset (\mathrm{M}\times\mathrm{O},\ \sigma_\mathrm{M} \boxminus \sigma_\mathrm{O})$ 和 $\Lambda \subset (\mathrm{O}\times\mathrm{N},\ \sigma_\mathrm{O} \boxminus \sigma_\mathrm{N})$ 为闭典范关系。则称 $C$ 和 $\Lambda$ 具有**洁净复合** $C \circ_e \Lambda$，**其超额为** $e \in \mathbb{N}_0$，如果 $C \times \Lambda$ 且 $\mathrm{M} \times \Delta \mathrm{O} \times \mathrm{N}$ 以超额 $e$洁净相交。若笛卡尔投影 $\Pi : \mathrm{M} \times \Delta \mathrm{O} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ 是真映射（参见例如 [76, 定理 21.2.14], [84, 定义 5.2（第 458 页）]），则称该复合为**真**。

我们注意到（参见例如 [25,定理 4.2.2]）

$$e = \dim \mathfrak{F}, \tag{A.44}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &:= \{\mathfrak{F}_{(\xi,\eta)} \mid (\xi,\eta) \in C \circ_e \Lambda\}, \\ \mathfrak{F}_{(\xi,\eta)} &:= \{(\xi,\zeta,\zeta,\eta) \in C \bigstar \Lambda \mid \Pi(\xi,\zeta,\zeta,\eta) = (\xi,\eta) \in C \circ_e \Lambda\} \end{aligned} \tag{A.45}$$

是光滑纤维化的紧致连通纤维$\mathfrak{F}_{\xi,\eta}$集合

$$\Pi : C \overset{\star}{\wedge} \Lambda \to C \circ_e \Lambda. \tag{A.46}$$

就生成函数而言，若 $\varphi(x,z;\ \theta)$ 和 $\phi(z,y;\vartheta)$ 分别是齐次典范关系 $C \subset \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*O$ 和 $\Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*O \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 在 $(x_0,z_0;\ \theta^0) \in M \times O \times \dot{\mathbb{R}}^{n_M}$ 和 $(z_0,y_0;\ \vartheta^0) \in O \times N \times \dot{\mathbb{R}}^{n_N}$ 的开锥邻域中的非退化相位函数，并且分别满足 $(x_0,z_0;\theta^0) \in \mathscr{C}_\varphi$ 和 $(z_0,y_0;\ \vartheta^0) \in \mathscr{C}_\phi$，且 $\mathrm{d}_z\varphi(x_0,z_0;\theta^0) + \mathrm{d}_z\phi(z_0,y_0;\ \vartheta^0) = 0$，则（参见例如 [76，命题 21.2。19]）

$$\psi(x,z,y;\theta,\vartheta) := \varphi(x,z;\theta) + \phi(z,y;\vartheta) \tag{A.47}$$

是一个超额为 $e$ 参数化 $C \circ_e \Lambda$的干净相位函数。此外，如果 $\psi$ 在 $(z';\ \theta',\vartheta')$ 中是非退化的，那么 $e$ 变量 $(z'';\ \theta'',\vartheta'')$ 参数化 $\mathfrak{F}$；分裂 $z = (z',z'')$ 的含义已在定义 2.1.9中说明。

## A.1.4 Keller-Maslov 丛

给定一个拉格朗日子流形 $\Lambda$，可以在 $\Lambda$ 上关联若干丛结构，使这些丛编码由相位函数生成的 $\Lambda$ 的局部片段如何粘合在一起的信息。

**定义 A.1.19**。设 $\dot{\mathrm{T}}^*M \to M$ 是流形 $M$上的去心余切丛，而 $\Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*M$ 是一个锥拉格朗日子流形。定义在 **Keller-Maslov 丛** $\mathbb{M} \to \Lambda$ $\Lambda$是一个复直线丛，它由某个（如下文详述的）结构群为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 的主丛得到，并且作为向量丛是平凡的 [77, p。 148]。

**注记 A.1.20.** 由于结构群是离散的， $\mathbb{M}$ 带有自然的平坦联络，其整体单值化取值于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$（参见例如 [85, 第 56] 页）。

现在我们将介绍 $\mathbb{M}$ 的构造，它是拉格朗日分布主符号（定义 2.3.11）不可或缺的一部分，因此在 Duistermaat-Guillemin-Gutzwiller 迹公式的非零周期贡献（定理 4.3.6）中发挥了关键作用。设 $\varphi$ 是 $\Lambda$的一个非退化相位函数。于是，利用 $\varphi$ 的海森矩阵，可得到整数值映射： $\mathscr{C}_\varphi \ni (x;\theta) \mapsto \operatorname{sgn}\left(\mathrm{Hessian}_\theta\, \varphi\,(x;\theta)\right) \in \mathbb{Z}$。注意，由于海森矩阵在 $\mathscr{C}_\varphi$的某些元素处可能是奇异的，该函数可能不连续。现在考虑 $\Lambda$的一个开锥形（Leray[2]-）覆盖$\{\mathrm{L}_\alpha\}$，其指标集为可数集，对应的非退化相位函数为 $\varphi_\alpha$ ，纤维临界流形为 $\mathscr{C}_\alpha$。由（A.25）可知，映射 [77, (3.2.15)] （另见例如 [20], [25,第 5 节，第 13], [190, 页至第 686-687] 页）

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{s}_{\alpha\beta} : \mathscr{C}_\alpha \cap \mathscr{C}_\beta \to \mathbb{Z},\ (x;\theta^\alpha,\theta^\beta) \mapsto \\
&\mathfrak{s}_{\alpha\beta}(x;\theta^\alpha,\theta^\beta) := \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sgn}\left(\mathrm{Hess}_\theta\, \varphi_\beta\,(x;\theta^\beta)\right) - n_\beta - \operatorname{sgn}\left(\mathrm{Hess}_\theta\, \varphi_\alpha\,(x;\theta^\alpha)\right) + n_\alpha\Big)
\end{aligned} \tag{A.48}$$

[2]这意味着，$\mathrm{L}_\alpha$的有限交集要么为空，要么与开球微分同胚。

对于所有连通交集 $\mathscr{C}_\alpha \cap \mathscr{C}_\beta$，其均为常数。因此，

$$g_{\alpha\beta} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}/2\pi\, \mathfrak{s}_{\alpha\beta} \circ J_{\alpha\beta}^{-1}} : \mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{L}_\beta \to \dot{\mathbb{C}} \tag{A.49}$$

显然满足余循环性质：$g_{\alpha\beta'} g_{\beta'\beta} = g_{\alpha\beta}$ 当 $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathrm{L}_{\beta'} \cap \mathrm{L}_\beta \neq \emptyset$ 且$|g_{\alpha\beta}| = 1$时。因此，对于所有满足 $\Lambda_\alpha$ 且 $\Lambda_\beta$ 不为不交的 $\alpha$ 和 $\beta$，由非零复数的集合 $\{g_{\alpha\beta}\}$定义我们的过渡函数，而 $\mathbb{M}$ 的整体构造则通过取不交并

$$\mathbb{M} := \bigsqcup_\alpha (\mathcal{L}_\alpha \times \mathbb{C})/\sim \tag{A.50}$$

模去等价关系

$$\big((x,\xi^\alpha), c_\alpha\big) \sim \big((x,\xi^\beta), c_\beta\big) \Leftrightarrow (x,\xi^\alpha) = (x,\xi^\beta) \in \mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{L}_\beta, c_\alpha = g_{\alpha\beta} c_\beta. \tag{A.51}$$

从 $\mathrm{L}_\alpha$ 到 $1_{\mathbb{C}}$ 的常值函数构成 $\mathbb{M}$的平坦局部截面：

$$\mathsf{e}_\alpha : \mathcal{L}_\alpha \to \mathbb{M},\ (x,\xi) \mapsto \big[\big((x,\xi), 1_{\mathbb{C}}\big)\big] \tag{A.52}$$

从而将 $\mathbb{M}$ 构造成一个在 $\Lambda$上的带平坦联络的线丛。 $\mathbb{M} \to \mathrm{L}_\alpha$ 的任意截面$\mathbb{m}$都可以写成$\mathbb{m} = \sum \mathbb{m}^\alpha \mathsf{e}_\alpha$，其中函数$\mathbb{m}^\alpha$是唯一的。

或者，也可以定义一个取值于$\sqrt[8]{1_{\mathbb{C}}}$的映射

$$\mathsf{e}_\varphi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}/4\pi\, \mathrm{sgn}(\mathrm{Hess}_\theta\, \varphi) \circ J^{-1}} : \mathcal{L}_\alpha \to \dot{\mathbb{C}} \tag{A.53}$$

并将其声明为 $\mathbb{M} \upharpoonright \mathrm{L}_\alpha$的平坦截面。随后，利用取值于结构群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\pm 1,\ \pm \mathrm{i}\}$ 中的转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 构造 $\mathbb{M}$；这些转移函数在 $\Lambda$ 的每个不相交覆盖上都是局部常数，且绝对值为 1，因此 $\mathsf{e}^{\varphi_\alpha} = g_{\alpha\beta} \mathsf{e}^{\varphi_\beta}$。

由于 $\varphi$ 仅在稳定等价意义下唯一，因此必须根据注记 A.1.9中提到的四种基本操作，对上述构造进行检验。显然，$\mathrm{sgn}(\mathrm{Hessian}_\theta\, \varphi_\alpha)$ 在除悬挂之外的所有操作下都保持不变；对于悬挂，有 $\mathrm{sgn}(\mathrm{Hessian}_\theta\, \varphi_\alpha)$ $=\mathrm{sgn}(\mathrm{Hessian}_{\tilde\theta}\, \tilde\varphi_\alpha)$ $+ \mathrm{sgn} q$ ——从而确保该构造针对的是等价类 $[\varphi_\alpha]$，而不仅仅是一个代表元 $\varphi_\alpha$。

目前为止，该构造是针对非退化相位函数给出的，但也可以很好地应用于下文所述的洁净相位函数 $\psi(x;\, \theta)$ on $U \times \dot{\mathbb{R}}^n$。设在纤维临界流形 $\mathscr{C}_\psi \ni (x_0; \theta^0)$ 上，对于某个 $0 < e \leq n$，有 $\mathrm{rk}\, \big(\mathrm{Hess}_\theta\, \psi\, (x_0; \theta^0)\big) = e$。我们可以将（参见定义 2.1.9） $\dot{\mathbb{R}}^n \ni \theta = (\theta', \theta'') \in \dot{\mathbb{R}}^{n-e} \times \dot{\mathbb{R}}^e$ 纤维变量 $\theta$ 分成两组，并对 $\theta$ 坐标作线性变换，使得对于固定的 $\theta''^0 \in \dot{\mathbb{R}}^e$，矩阵 $\mathrm{Hess}_{\theta'}\, \psi\, (x_0; \theta'^0, \theta''^0)$ 是非退化的，并且纤维化 [10]（另见例如 [25, 定理 5.8.2，第 119, 128] 页）

$$\varsigma : U \times \dot{\mathbb{R}}^n \to U \times \dot{\mathbb{R}}^e,\ (x; \theta', \theta'') \mapsto (x; \theta'') \tag{A.54}$$

产生一个非退化相位函数 $\phi(x;\theta',\ \theta''^0)$ on $U\times\dot{\mathbb{R}}^{n-e}$ for $\Lambda$:

$$\psi=\varsigma^*\phi. \tag{A.55}$$

因此，可以对 $\theta$ 变量进行约化，使得 $\mathrm{Hessian}_{\theta''}\psi\,(x_0;\theta'^0,\theta''^0)\ =0$。显然，$\mathscr{C}_\psi\ =\ \varsigma^*\mathscr{C}_\phi$ 且符号映射 $\mathrm{sgn}\ \big(\mathrm{Hessian}_\theta\psi\,(x_0;\theta^0)\big)$ 只是与 $\phi$ 相关的符号映射 $\mathscr{C}_\varphi\to\mathbb{Z}$ 的拉回。此外，浸入 $J\phi:\ \mathscr{C}_\varphi\to\Lambda$ 可提升为保纤维纤维化 $J\psi:\ \mathscr{C}_\psi\to\Lambda$，因此，通过 $\psi$ 构造 $\mathbb{M}\to\Lambda$ 的过程也类似进行。

例 A.1.21（Keller-Maslov 丛 $\mathbb{L}_0\to(\Delta M)^{\perp^*}$在余法丛（$\Delta M$）$^{\perp^*}$上）。按照例 A.1.11 中的术语，非退化相位函数 $\varphi\ :=(x^i-y^i)\xi_i$ 在全局上参数化（$\Delta M$）$^{\perp^*}$。于是 $\mathrm{Hessian}_\xi\,\varphi\ =\ 0$，因此我们由 (A.49) 得到全局过渡函数 $g_{\alpha\beta}=1$，或由 (A.53) 得到全局常截面 $\mathrm{e}_\alpha=1$。

## A.1.5 马斯洛夫指标

(A.53) 中的指数具有优美的拓扑解释。为此，我们回顾辛拓扑中的一些概念。设 $(\mathscr{V},\sigma)$ 是一个 $2d$ 维实辛向量空间，并在 $\mathscr{V}$ 上选取一个与 $\sigma$ 相容的复结构 J。选取 J 可定义复向量空间 $\mathscr{V}$ 上的正定厄米形式 $\langle\cdot\,|\cdot\rangle:=\sigma(\cdot,\mathrm{J}\cdot)\ +\mathrm{i}\ \sigma(\cdot,\cdot)$。于是，$(\mathscr{V},\sigma)$ 的所有拉格朗日子空间构成的集合 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 是一个维数为 $d(d+1)/2$ 的流形，称为 $(\mathscr{V},\sigma)$ 的拉格朗日-格拉斯曼流形。记 $\mathrm{O}(\Lambda)$ 为相对于 $\Lambda$ 上由 $\langle\cdot\,|\cdot\,\rangle$ 诱导的内积而言，给定的 $\Lambda\in\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 的等距群。由此可知，当采用恒等对应 $\mathrm{O}(\Lambda)\ =\{g\in\mathrm{U}(\mathscr{V})|g\Lambda=\Lambda\}$ 时，作为李群有 $\mathrm{O}(\Lambda)\ \subset\mathrm{U}(\mathscr{V})\ =\mathrm{U}(\mathscr{V},\langle\cdot\,|\cdot\rangle)$（例如参见 [190,命题 7.5.3/3]）。此时，映射 $\mathrm{U}(\mathscr{V})\ \ni\ g\ \mapsto\ \det g\ \in\ \mathbb{S}\ \subset\ \mathbb{C}$ values $\pm1$ 在 $\mathrm{O}(\Lambda)$ 上取值，而拉格朗日-格拉斯曼流形中的每个元素都定义了同构 $\mathrm{U}(\mathscr{V})/\mathrm{O}(\Lambda)\ \ni\ [g]\ \mapsto\ g\Lambda\ \in\ \mathscr{L}(\mathscr{V})$（例如参见 [190, 命题 7.6.1]）。因此，我们得到一个诱导映射

$$\det{}^2_\Lambda:\mathscr{L}(\mathscr{V})\to\mathbb{S}\subset\mathbb{C}. \tag{A.56}$$

定义 A.1.22. 设 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 为辛向量空间 $(\mathscr{V},\sigma)$ 的拉格朗日-格拉斯流形。闭曲线 $\gamma:\ \mathbb{S}\to\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 的马斯洛夫指标 $\mathfrak{n}(\gamma)$ 定义为映射 $\det{}^2_\Lambda\circ\gamma:\ \mathbb{S}\to\mathbb{S}$ 的度，其中 $\det{}^2_\Lambda$ 由 (A.56) [194，第 1.3-1 节 4] 定义（另见例如 [190, 定义 7.7。1]）。

**命题 A.1.23.** 马斯洛夫指标是取整数值的同伦不变量，并且与所选拉格朗日子空间或复结构无关（另见例如 *[190,* 命题 *7.7。2]*）。

为了定义拉格朗日浸入上闭曲线的这一指标，令

$$\chi:\iota^*(\mathrm{TT}^*M)\to\Lambda\times\mathbb{R}^{2d} \tag{A.57}$$

为垂直几何分布的平凡化至 $\{0\}\times\mathbb{R}^d$，即对于任意 $(x,\xi)\in\Lambda$，有 $\chi(\mathrm{T}^{\iota(x,\xi)}\mathrm{T}^*_xM)=\{0\}\times\mathbb{R}^d$。于是，$\mathrm{d}_{(x,\xi)}\iota\colon \mathrm{T}_{(x,\xi)}\Lambda\to\mathrm{T}^{\iota(x,\xi)}\mathrm{T}^*M$ 的像通过 $\chi$ 被识别为 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的一个拉格朗日子空间，从而得到如下映射（例如参见 [190, (12.6.3)]）

$$\mathfrak{l}:\Lambda\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2d}),\ (x,\xi)\mapsto\mathfrak{l}(x,\xi):=\chi\big(\mathrm{d}_{(x,\xi)}\iota\,(\mathrm{T}_{(x,\xi)}\Lambda)\big). \tag{A.58}$$

**定义 A.1.24**。设 $\Lambda$ 是一个辛流形中的拉格朗日子流形，其维数为 $2d$，且 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2d})$ 表示辛空间 $\mathbb{R}^{2d}$ 的拉格朗日-格拉斯曼流形。那么，闭曲线 $\gamma$ 在 $\Lambda$ 中的 **马斯洛夫指标** 定义为（参见例如 [190, 第 678] 页）

$$\mathfrak{m}(\gamma):=\mathfrak{n}(\mathfrak{l}\circ\gamma), \tag{A.59}$$

其中 $\mathfrak{n}$ 是 t 闭曲线 $\mathfrak{l}\circ\gamma$ 在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2d})$ 中的马斯洛夫指标 $\mathfrak{l}$ 定义为（A.58）。

事实证明，$\mathfrak{m}$ 等于所谓的“马斯洛夫交指标” [194, 定理 1.5]（另见例如 [190, 命题 12.6.6]）。交指标的形式定义（参见例如 [190, 定义 12.6.5]）及其细节与当前讨论关系不大，因此我们不作赘述，而是指出，该指标是一个取整数值的同伦不变量，其端点固定 [194, 定理 2.2]，并且可以借助相位函数计算，如下文所述。对我们的目的而言，只需考虑以下情形：$\gamma:\ [0,1]\to\Lambda$ 是一条闭曲线，其端点位于集合 $\Sigma_0(\Lambda)\subset\Lambda$ 中；该集合由微分 (A.17) 的秩为 $d$ 的点定义。设我们已按照数 $0=s_0<s_1<$、……、$<$、……、$<s_N=1$ 对 $[0,1]$ 作了划分，使得存在 $\Lambda$ 的开锥子集 $\mathrm{L}_1$,……、$\mathrm{L}_N$，满足 $\gamma([s_{\alpha-1},s_\alpha])\subset\mathrm{L}_\alpha$，且 $\mathrm{L}_\alpha\pitchfork\mathrm{L}_\beta$ 是连通的，并且浸入 $\mathrm{L}_\alpha\hookrightarrow\dot{\mathrm{T}}^*M$ 与 (A.20) 等价。那么，马斯洛夫指标为（参见例如 [20, (5)], [190, 推论 12.6.12]）

$$\mathfrak{m}(\gamma)=\sum_{\alpha=1}^{N-1}\mathfrak{s}_{\alpha\alpha+1}. \tag{A.60}$$

这表明，$\mathbb{M}\to\Lambda$ 本质上由表示 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathfrak{m}(\gamma)/2}=\mathrm{i}^{\mathfrak{m}(\gamma)}$ of$\pi_1(\Lambda)$ 定义。换言之，$\mathfrak{m}$ 是 $\mathbb{M}$ 的截面，可以视为定义在 $\Lambda$ 的万有覆盖上的函数，并满足等价关系（例如参见 [195, (1.3.3)]）

$$\mathfrak{m}\big(\gamma\cdot(x,\xi)\big)=\mathrm{i}^{-\mathfrak{m}(\gamma)}\,\mathfrak{m}(x,\xi). \tag{A.61}$$

我们以两个简单的例子结束本节，以便直观地理解这些抽象公式。

**例 A.1.25**。令 $\mathbb{R}^2$ 配备典范辛结构，并令 $(x,\ \xi)$ 为其辛坐标。设 $\Lambda:=\{x^2+\xi^2=1\}\hookrightarrow\mathbb{R}^2$，并假定其定向为顺时针。出于维数方面的原因，$\Lambda$ 是一个嵌入的拉格朗日子流形；我们考虑一条闭曲线 $\mathbb{R}\ni s\mapsto\gamma(s)$，沿顺时针方向恰好一次经过 $\Lambda$。流参数中的一个元素 $\check{}s$ 若满足 $\gamma(\check{}s)\in\Sigma(\Lambda)$，则称为 $\gamma$ 的一个交点，并且

$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\gamma(\check{s})) = 0$，其中 $-\operatorname{sgn}\frac{\partial x}{\partial \xi}$ 等于相对于 $\xi$、在 $\gamma(\check{s})$ 外部的相位函数海森矩阵的符号差。因此，在临界点 $(-1, 0)$ 处，余定向从下半平面指向上半平面；而在 $(1, 0)$ 处则相反；从而得到 $\mathfrak{m}(\gamma) = 2$。

位于 $\mathbb{R}^2$ 中的八字浸入也可以用类似的方法求出，结果发现马斯洛夫指标为零（例如参见 [190, 例 12.6。13]了解详情）。

### A.1.6 自然体积形式

设 $\varphi$ 是 $C$ 的一个非退化相位函数，其纤维临界流形为 $\mathscr{C}$。则映射

$$M \times N \times \dot{\mathbb{R}}^n \ni (x, y; \theta) \mapsto \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1}(x, y; \theta), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_n}(x, y; \theta)\right) \in \dot{\mathbb{R}}^n \tag{A.62}$$

是满射，因为

$$\forall (x, y; \theta) \in \mathscr{C} : \operatorname{rk}\left(\mathrm{d}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k}\right)(x, y; \theta)\right) = n, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{A.63}$$

根据定义 A.1.8，对于 $\mathrm{T}_{(x,y;\theta)}\mathscr{C} = \ker\left((\mathrm{d}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k})(x, y; \theta)\right)$。因此，$\mathscr{C}$可以赋予体积形式（例如参见 [83, (4。1。1)]）：

$$\mathrm{dv}_{\mathscr{C}}(X, Y)\left(\mathrm{d}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_n}\right)(Z^1, \ldots, Z^n) = (\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}\theta)(X, Y; Z) \tag{A.64}$$

对于任意向量场 $X, Y, Z = (Z^1, \ldots, Z^n)$，它们分别定义在 $M, N, \dot{\mathbb{R}}^n$ 上。换言之，

$$\mathrm{dv}_{\mathscr{C}} := \delta(\operatorname{grad}_\theta \varphi) \tag{A.65}$$

是 $M \times N \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 上的测度 $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}\theta$ 除以映射 (A.62) 下 $\dot{\mathbb{R}}^n$ 中 δ-分布 $\delta$ 的拉回所得的商。若 $(\lambda_l) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_M+d_N})$ 表示 $\lambda \in \mathscr{C}$ 的任意局部坐标，并将其延拓到 $M \times N \times \dot{\mathbb{R}}^n$ 中的一个邻域，那么 $\mathrm{dv}_{\mathscr{C}}(\lambda)$ 在局部意义下[3] 表示 [77, 第 143 页，命题 4.1。3] (例如参见 [11, 第 123] 页)

$$\mathrm{dv}_{\mathscr{C}}(\lambda) = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x^i} & \frac{\partial \lambda_l}{\partial y^j} & \frac{\partial \lambda_l}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial \theta_k} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^j \partial \theta_k} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_k \partial \theta_{k'}} \end{pmatrix}\right|^{-1} |\mathrm{d}\lambda|, \tag{A.66}$$

其中 $|\mathrm{d}\lambda|$ 是 $\mathscr{C}$ 上的勒贝格密度。该表达式与 $(\lambda_l)$ 无关，但取决于 $(x^i, y^j)$ 的选择；这一点我们暂且搁置。因此

$$\mathrm{dv}_C := \left((\mathrm{d}J)^{-1}\right)^* \mathrm{dv}_{\mathscr{C}} \tag{A.67}$$

[3]例如，参见 [75, (6.1.1)]，其中给出了分布拉回的局部定义。

这是 $C$ 上的自然测度，通过浸入 $\jmath :=$ (A.34) 传递 $\mathrm{dv}_{\mathscr{C}}$ 定义而来，因此，当 $\lambda$ 被视为 $C$ 中的一个元素时，(A.66) 可视为 $\mathrm{dv}_C(\lambda)$ 的局部表达式。由于 $\varphi$ 是非退化的，可以选取其典范形式 $\psi :=$ (A.35)，使得 $C$ 由 (A.36) 参数化，并且 $(\lambda_l) = (\xi_i = \partial\psi/\partial x^i, \eta_j = \partial\psi/\partial y^j)$ 可以选作 $C$ 上的局部坐标，从而得到

$$\mathrm{dv}_C(x,\xi;y,\eta) = \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial\xi_i} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^j\partial\eta_j} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi_i\partial\eta_j}\end{pmatrix}\right|^{-1} |\mathrm{d}\xi||\mathrm{d}\eta|. \tag{A.68}$$

如果我们坚持采用一般的 $\varphi$ 而不是典范形式 $\psi$，$C$ 将由 (A.34) 参数化。然后，可以选择自然的坐标 $(\lambda_l) = (\xi_i = \partial\varphi/\partial x^i,\ \eta_j = \partial\varphi/\partial y^j)$ 在 $C$ 上，并得到

$$\mathrm{dv}_C(x,\xi;y,\eta) = |\det(\mathrm{Hess}\,\varphi)|^{-1}|\mathrm{d}\xi||\mathrm{d}\eta|. \tag{A.69}$$

迄今为止，我们一直使用一个任意但固定的非退化相位函数 $\varphi$ 来构造 $\mathrm{dv}_C$。然而，正如前面所指出的，$\varphi$ 仅在稳定等价意义下唯一。因此，我们考虑该等价类中的另一个元素 $\tilde{\varphi} =$ (A.24)，其相应的雅可比行列式 $\mathrm{J}(\tilde{\lambda},\ \text{梯度}_{\tilde{\theta}}\tilde{\varphi};\ x,\ \tilde{\theta})$ 与 (A.66) 中的雅可比行列式相关（例如参见 [84, 第 440]页）

$$\mathrm{J}(\lambda, \mathrm{grad}_\theta\,\varphi; x, \theta) = \big(\mathrm{J}(\tilde{\theta};\theta)\big)^2\,\mathrm{J}(\tilde{\lambda}, \mathrm{grad}_{\tilde{\theta}}\,\tilde{\varphi}; x, \tilde{\theta}), \tag{A.70}$$

其中 $\tilde{\lambda}\circ\upsilon = \lambda \in \mathscr{C}_\varphi$ 对于保纤维微分同胚 $\upsilon =$ (A.23)。

当典范关系 $\Gamma$ 是从 $\dot{\mathrm{T}}^*N$ 到 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 的辛同胚的图时，情况会简单得多。在此情形下，$\Gamma$ 关于辛形式（例如参见 [23,第 25]页），是一个辛流形

$$\sigma_\Gamma := \mathrm{pr}_M^*\,\sigma_M = \mathrm{pr}_N^*\,\sigma_N \tag{A.71}$$

并且我们有相应的刘维尔体积形式 $\mathrm{v}_\Gamma :=$ （2.63）。

因此，在齐次典范关系 $C$ 上有半密度丛 $\underline{\Omega^{1/2}C} \to C$，其局部截面为 $\sqrt{|\mathrm{dv}_C|}$。

# A.2 典范关系上的密度的复合 s

## A.2.1 半密度

为了在典范关系 $C\circ_e \Lambda \subset \dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N$（定义 A.1.18）上定义半密度，给定闭锥形典范关系 $C\subset \dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*O$ 和 $\Lambda\subset\dot{\mathrm{T}}^*O\times\dot{\mathrm{T}}^*N$ 上的半密度，我们注意到 [10, 引理 5。2]（另见，例如 [25,定理 7.1.1，（7。4）], [76, 定理 21.6。7]）

$$\Omega^{1/2}_{(x,\xi;z,\zeta)}C\otimes\Omega^{1/2}_{(z,\zeta;y,\eta)}\Lambda \cong \Omega^{1/2}_{(x,\xi;z,\zeta;y,\eta)}\mathfrak{F}\otimes\Omega^{1/2}_{(x,\xi;y,\eta)}(C\circ_e\Lambda), \tag{A.72}$$

其中 $\mathfrak{F}$ 是纤维集合 $\mathfrak{F}_{(x,\xi;y,\eta)}$ ： = （A.45）纤维化 $\Pi$ ： = （A.46）。这意味着，在 $C$ 和 $\Lambda$ 上的半密度之间取张量积，随后与对角线相交，可得到 $\mathfrak{F}$ 上的半密度乘以 $C\circ_e\Lambda$ 上的半密度；因此，对纤维 $\mathfrak{F}_{(x,\xi;y,\eta)}$ 进行积分，我们便得到典范关系上半密度的所需复合 [10,p。 64]:

$$\begin{aligned}\cdot\diamond_e\cdot\ :\ & C^\infty\big(C;\Omega^{1/2}C\big)\times C^\infty\big(\Lambda;\Omega^{1/2}\Lambda\big)\to C^\infty\big(C\circ_e\Lambda;\Omega^{1/2}(C\circ_e\Lambda)\big),\\ & (\mu,\nu)\mapsto\mu\diamond_e\nu\,(x,\xi;y,\eta):=\int_{\mathfrak{F}_{(x,\xi;y,\eta)}}(\mu\otimes\nu)\big(\Pi^{-1}(x,\xi;y,\eta)\big).\end{aligned}\tag{A.73}$$

如果 $e=0$ 该同构（A.72）化简为 [77, 第 179] （另见，例如 [25, （7.3）]）

$$\Omega^{1/2}C\otimes\Omega^{1/2}\Lambda\cong\Omega^{1/2}(C\circ\Lambda)\tag{A.74}$$

并且当 式（A.73）就简单地变为逐点求值（例如见 [83,定理 4.2。2] ）

$$\mu\diamond\nu\,(x,\xi;y,\eta)=\sum_{(z,\zeta)\,|\,(x,\xi;z,\zeta)\in C,(z,\zeta;y,\eta)\in\Lambda}\mu(x,\xi;z,\zeta)\,\nu(z,\zeta;y,\eta).\tag{A.75}$$

我们将前一个方程中的成对变量（$x$, $\xi$）、（$y$, $\eta$）（分别为（$z$, $\zeta$））称为复合的输出（分别为输入）变量，术语沿用 [27, 引理 8.4]。

## A.2.2 Keller-Maslov丛值半密度

与典范关系 $C$ 相关联的标量拉格朗日分布的主符号（定义 2.2.15）是 $C$上的 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{L}\to C$ 值密度。因此，我们必须将复合 (A.73) 扩展到 $\mathbb{L}\otimes\Omega^{1/2}C$ 的截面上。于是，第一步是：给定 $\mathbb{L}\to C$ 和 $\mathbb{T}\to\Lambda$，构造 Keller-Maslov 丛 $\mathbb{M}\to C\circ_e\Lambda$ 。这是通过将相位函数 $\psi$ := (A.47) 代入 (A.53) 和 (A.49) 来实现的，因为它在 $\mathfrak{F}$ 上局部为常数。接下来，使用同构 [10, (5.7)] （另见例如 [25, (5.29)]）

$$\mathbb{L}\boxtimes\mathbb{T}:=\Pi_C^*\mathbb{L}\otimes\Pi_\Lambda^*\mathbb{T}\cong\Pi^*\mathbb{M},\tag{A.76}$$

其中 $\Pi_C$, $\Pi_\Lambda$： $C\star\Lambda\to C$, $\Lambda$ 是投影，以便作出如下识别

$$(\Pi^*\mathbb{m})(x,\xi;z,\zeta;z,\zeta;y,\eta)=(\Pi_C^*\mathbb{l}\otimes\Pi_\Lambda^*\mathbb{t})(x,\xi;z,\zeta;z,\zeta;y,\eta)\tag{A.77}$$

对于任意给定的截面$\mathbb{l}$ 分别为$\mathbb{t}$ 属于 $\mathbb{L}$ 分别为 $\mathbb{T}$ 其中有一个截面$\mathbb{m}$ 属于 $\mathbb{M}$。所需的（A.73）扩展于是为

$$C^\infty\big(C;\mathbb{L}\otimes\Omega^{\frac12}C\big)\times C^\infty\big(\Lambda;\mathbb{T}\otimes\Omega^{\frac12}\Lambda\big)\to C^\infty\big(C\circ_e\Lambda;\mathbb{M}\otimes\Omega^{\frac12}(C\circ_e\Lambda)\big),(\mathbb{l}\otimes\mu,\mathbb{t}\otimes\nu)\mapsto\mathbb{m}\otimes(\mu\diamond_e\nu).\tag{A.78}$$

### A.2.3 同态丛值半密度

最后，与第 2.3.5 节的设置一样，我们考虑任意向量丛 $\widetilde{\mathscr{E} \to M}$ $\mathscr{G} \to O$、 $\mathscr{F} \to N$，于是 $\mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{E}) \to M\times O$ 是一个同态丛；此外，$\mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{E}) \to C$ 表示将 $\mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{E})$ 拉回到 $\mathrm{T}^*(M\times O)$ 后，再限制到 $C$。然后，将（A.78）分别与 $\mathrm{Hom}(\mathscr{G},\mathscr{E})$、$\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$、$\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$ 进行张量积运算，即可得到我们的最终复合规则 [23, （25.2.10）]

$$
\begin{aligned}
&C^\infty\big(C;\mathbb{L}\otimes\Omega^{1/2}C\otimes\widetilde{\mathrm{Hom}}(\mathscr{G},\mathscr{E})\big)\times C^\infty\big(\Lambda;\mathbb{T}\otimes\Omega^{1/2}\Lambda\otimes\widetilde{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{G})\big)\\
&\qquad\qquad\to C^\infty\big(C\circ_e\Lambda;\mathbb{M}\otimes\Omega^{1/2}(C\circ_e\Lambda)\otimes\widetilde{\mathrm{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big),\\
&(\mathbb{l}\otimes a,\mathbb{t}\otimes b)\mapsto \mathbb{m}\otimes(a\diamond_e b),\\
&(a\diamond_e b)(x,\xi;y,\eta):=\int_{\mathfrak{F}_{(x,\xi;y,\eta)}}(a\boxtimes b)\big(\Pi^{-1}(x,\xi;y,\eta)\big).
\end{aligned}
\tag{A.79}
$$

如前所述，当 $e=0$ 时，最后一个表达式归结为同态的标准复合：

$$
(a\diamond b)(x,\xi;y,\eta)=\sum_{(z,\zeta)\,|\,(x,\xi;z,\zeta)\in C,(z,\zeta;y,\eta)\in\Lambda} a(x,\xi;z,\zeta)\big(b(z,\zeta;y,\eta)\big).
\tag{A.80}
$$

## A.3 文献

“马斯洛夫指标 [100, §7] ”和“拉格朗日子流形 [100, 定义 4.25] ”这两个概念最初由 Victor MASLOV 提出，他还研究了某些特殊情形下拉格朗日流形的局部生成函数 [100,定理 4.20]。Vladimir ARNOL’D 为前者奠定了现代数学基础 [194] ，而 Lars HÖRMANDER 则通过引入典范关系 [77, 定义 4.1.2] 和非退化相位函数 [77, 第 91] 页，推广了后者的思想。他系统地阐述了如何利用相位函数局部生成一般的拉格朗日流形，并给出了两个相位函数参数化同一个拉格朗日流形的充要条件 [77, 定理 3.1.16] 。此外，他进一步发展了 Keller [196] 和 Maslov [100, §10] 的工作，对*Keller-Maslov* 丛 [77, 第 3 节3]作出了完整的解析描述。他还实现了在横截相交的 典范关系上的 Keller-Maslov 丛值半密度的复合 [77, 定理 4.2.2]。随后，Johannes DUISTERMAAT 和 Victor GUILLEMIN 提出了洁净相位函数 [10, 第 71] 页，并为洁净相交的 典范关系提出了 Hörmader 的复合公式。与此同时，Alan WEINSTEIN 在一系列论文中给出了更具几何性的表述 [93, 191, 197] （另见例如 [20]）；其中，“拉格朗日对应”“（*Bott-*）*Morse* 族”和“稳定等价 ”分别被用来指称典范关系、（洁净）非退化相位函数，以及给定拉格朗日流形的相位函数等价类。关于辛几何这些方面的深入讨论，可参见教科书 [95, 190] ；有关锥辛几何的内容，则可参阅 Hörmader 的专著 [23, 76] 及相关论述 [25, 83, 84]。

# 附录 B

# 符号

我们汇集了本论文所需的关于锥流形上丛值经典符号的背景资料。

在本章中，我们始终假设 $d \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$，$n \in \mathbb{N}$，$m \in \mathbb{R}$并使用多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$，$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$ 以及偏导数的多重指标记号：

$$\partial_\theta^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\theta_1^{\alpha_1} \ldots \partial\theta_n^{\alpha_n}}, \qquad \mathrm{D}_x^\beta := (-\mathrm{i})^{|\beta|} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial(x^1)^{\beta_1} \ldots \partial(x^d)^{\beta_d}}, \tag{B.1}$$

其中 $|\alpha| := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$，对于 $|\beta|$ 依此类推。回顾一下，日式括号 定义为

$$\langle\theta\rangle := \sqrt{1 + \theta \cdot \theta}, \tag{B.2}$$

其中 $\cdot$ 表示欧几里得内积。

## B.1 欧几里得空间上的符号

定义 B.1.1. 设 $U$ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 的一个开子集。在 $U \times \mathbb{R}^n$ 上阶（至多为） $m$ 的 Kohn-Nirenberg 符号集合 $S^m_{1},0}$（$U \times \mathbb{R}^n$）定义为所有 $\mathbb{C}$ 值光滑函数 $a \in C^\infty$（$U \times \mathbb{R}^n$）的集合，这些函数定义在 $U \times \mathbb{R}^n$ 上，并且对于每个紧集 $K \subset U$，估计式（参见例如 [76, （18.1.1）′]）

$$\forall x \in K, \forall \theta \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall \beta \in \mathbb{N}_0^d : \left|(\mathrm{D}_x^\beta \partial_\theta^\alpha a)(x;\theta)\right| \leq \mathrm{cst}_{\alpha,\beta;K} \langle\theta\rangle^{m-|\alpha|} \tag{B.3}$$

对于某个常数 $\mathrm{cst}_{\alpha,\ \beta;K}$ 成立。

定义

$$S^\infty_\bullet := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m_\bullet, \quad S^{-\infty}_\bullet := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_\bullet, \quad S^{m-[k]}_\bullet := S^m_\bullet / S^{m-k}_\bullet. \tag{B.4}$$

**例 B.1.2**。 所有阶数为 的正齐次光滑函数（（A.13））在$U\times\mathbb{R}^n$ 上自动属于 $S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$。

我们赋予集合 $S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$ 以分离各点的半范数，该半范数定义为（B.3）中的最佳常数：

$$\|\cdot\|_{m,N} : S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ a\mapsto \|a\|_{m,N} := \sup_{(x;\theta)\in K\times\mathbb{R}^n}\max_{|\alpha|+|\beta|\leq N}\frac{\left|(\mathrm{D}_x^\beta\partial_\theta^\alpha a)(x;\theta)\right|}{\langle\theta\rangle^{m-|\alpha|}}, \tag{B.5}$$

由此诱导出度量

$$\mathrm{d}_m : S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)\times S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}_{\geq 0},\ (a,b)\mapsto \mathrm{d}_m(a,b) := \sum_{N\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{2^N}\frac{\|a-b\|_{m,N}}{1+\|a-b\|_{m,N}}, \tag{B.6}$$

从而得到

命题 *B.1.3.* 按照定义 *B.1.1* 的术语，$\left(S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n), d_m := (B.6)\right)$以及$\left(S^{\pm\infty}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n), d_{\pm\infty}\right)$均为 *Fréchet*空间。此外，对于所有 $m\leq m'$，$S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)\hookrightarrow S^{m'}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$ 是一个连续嵌入；如果 $m<m'$ *[77,*命题 *1.1.11]*，则该嵌入从不稠密。

上述符号类对于论文而言过于一般，事实证明，“经典符号”类——$S^m_{1,0}$ 的一个子类——足以满足我们的目的。为引入这一子类，我们回顾一个与符号空间的以下完备性相关的概念 [198, 定理 2.7]

**定义B.1.4**。 按照定义 B.1.1中的术语，假设 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\in S^{m_k}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$，其中 $m_0>m_1>\ldots$，且当 $k\to\infty$ 时 $m_k\to-\infty$；并假设 $a\in S^{\mu_0}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$，其中 $\mu_N:=\max_{k\geq N} m_k$。那么， $a$称为 $a_k$ 的**渐近求和**：

$$a\sim\sum_{k\in\mathbb{N}_0}a_k \Leftrightarrow \operatorname{supp} a\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\operatorname{supp}(a_k),\ \forall N\in\mathbb{N}:\left(a-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\right)\in S^{\mu_N}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n). \tag{B.7}$$

**注记B.1.5**。 渐近求和总是存在的。此外，除$S^{-\infty}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$模意义外，它是唯一的，并且与级数 $\sum a_k$的任何重新排列无关（例如参见 [76, 命题18.1。3]）。

现在，我们所需的符号类表述如下。

**定义B.1.6**。 设 $U$ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 的一个开子集。 $U\times\mathbb{R}^n$ 上阶（至多）为 $m$ 的**多重齐次符号** 的集合 $S^m(U\times\mathbb{R}^n)$，定义为所有可以表示为下式的 $a\in S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)$ 的集合（例如参见 [76, 定义18.1.5]）：

$$a\sim\sum_{k\in\mathbb{N}_0}a_k\chi_k, \tag{B.8}$$

其中，对于每个 $k$，当 $|\theta|>1$时， $a_k$ 是 $m-k$ 次正齐次的； $\sim$ 表示渐近求和，而当 $|\theta|\geq 1$时， $\chi_k\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$在 $\theta=0$ 附近恒等为零，并且 $\chi_k=1$。

作为一个子空间 $S^m(U\times\mathbb{R}^n)\subset S^m_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)\subset S^m_1$ 是稠密但不闭的，而剩余符号空间 $S^{-\infty}_{1,0}(U\times\mathbb{R}^n)=S^{-\infty}(U\times\mathbb{R}^n)\subset S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ 对于任意 $m$ 都是闭的。除子空间拓扑外，$S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ 还可以针对每个 $a_k$ 赋予一个半范数和一个半范数（参见（B.5）），从而确保渐近可求和性

$$\left|(\mathrm{D}_x^\beta\partial_\theta^\alpha(a-\sum_{k=0}^{N-1}a_k))(x;\theta)\right|\leq \mathrm{cst}_{\alpha,\beta;N}\langle\theta\rangle^{\mu_N-|\alpha|}. \tag{B.7'}$$

因此，$S^m(U\times\mathbb{R}^n)$ 配备了可数个半范数，并且关于由这些半范数诱导的度量（参见（B.6））（例如参见 [86, 第 2 节。16]）成为一个*Fréchet*空间。

我们注意到，$\mathrm{D}_x^\beta\partial_\theta^\alpha a_k$ 是 $m-k-|\alpha|$ 阶的，这意味着只要 $a\in C^\infty(U\times\mathbb{R}^n)$，就有 $a_k\in S^{m-k}(U\times\mathbb{R}^n)$，并且当 $x$ 较大时它会消失。因此，远离 $\theta=0$（由较大的 $\theta$ 所刻画）时，多重齐次符号本质上是带边界的光滑函数。

为了表述傅里叶积分算子的主符号（定义 2.1.9），我们不得不将符号在锥集上的概念加以扩展。

定义 B.1.7. 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 为一个开集。在锥集 $\mathrm{U}\subset U\times\mathbb{R}^n$ 上，阶（至多为）$m$ 的 Kohn-Nirenberg 符号集合 $S^m_{1,0}(\mathrm{U})$ 定义为满足以下条件的所有$a\in C^\infty(\mathrm{U})$的集合：对于每个紧致集 $\mathrm{K}\subset\mathrm{U}$，估计式 (B.3) 在 $\{(x;\lambda\theta)\,|\,(x;\theta)\in\mathrm{K}\}$ 中成立，其中 $\lambda\geq 1$（例如参见 [76, 第 83] 页）。

**注记 B.1.8**。定义 B.1.7 通过作出选择B.1.1 来重现定义$\mathcal{K}:=K\times\{\theta\,|\,|\theta|\leq 1\}$其中 $K$如后面的定义所述（例如参见 [76, 第 84] 页）。渐近可求和性也适用于 $S^m_1$，$0(\mathrm{U})$，因此我们可以类似地定义相应的多齐次类 $S^m(\mathrm{U})$ 并赋予其拓扑。此外，根据构造可得：

$$\mathrm{D}_x^\beta: S^m(U\times\mathbb{R}^n)\to S^m(U\times\mathbb{R}^n),\quad \partial_\theta^\alpha: S^m(U\times\mathbb{R}^n)\to S^{m-|\alpha|}(U\times\mathbb{R}^n). \tag{B.9}$$

## B.2 流形上的符号

作用于流形 $M$ 上的半密度丛（第 2.2.1 节）$\Omega^{1/2}\to M$的伪微分算子的主符号（定义 2.2.6）和次主符号（定义 2.2.7），如注记 2.2.5 和 2.2.8 所述，是在去心余切丛 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 上不变定义的齐次函数。此外，拉格朗日分布的主符号（定义 2.2.15）是齐次典范关系（定义 A.1.12）上的半密度 $C\subset\dot{\mathrm{T}}^*M\times\dot{\mathrm{T}}^*N$，其中 $N$ 是一个流形，其维数 $d_N$ 不一定等于 $d_M:=d$ $M$的维数。由局部情形可见，只需考虑 $\dot{\mathrm{T}}^*M$ 上对应大余向量的光滑函数。因此，基于以下事实：$\dot{\mathrm{T}}^*M$（例 A.1.2）和 $C$ 都是锥流形（定义 A.1.1）的例子，并结合注记 B.1.8，我们将描述以下这类锥流形上的符号。

定义 B.2.1. 设（$\dot{\mathcal{V}}$，$\mathrm{m}_\lambda$）是例 A.1.3 中所描述的锥流形。该锥流形上阶（至多为） $m$ 的 Kohn-Nirenberg 符号集合 $S^m_{1,0}(\dot{\mathcal{V}})$ 定义为所有 $a \in C^\infty(\dot{\mathcal{V}})$ 的集合，其中函数 $\lambda^{-m}\,\mathrm{m}_\lambda^* a$ 在 $C^\infty(\dot{\mathcal{V}})$ 中一致有界，当 $\lambda \geq 1$ 时（参见例如 [23, 第 13], [83, 页，定义 2.1.2]）。

该定义的优点之一是它非常适用于密度。特别地，如果 $\mu$ 是 $\dot{\mathcal{V}}$ 上一个具有齐次度 $m'$ 的固定正半密度（定义 A.1.1），那么每个元素 $\mathsf{a} \in S^m(\dot{\mathcal{V}}; \Omega^{1/2}\dot{\mathcal{V}})$ 都可以写成如下形式

$$\mathsf{a} = a\mu \tag{B.10}$$

对于某个标量 $a \in S^{m-m'}(\dot{\mathcal{V}})$。关于这一概念的示例，请参见示例 2.2.2 。

等价地，可以采用一种自底向上的方法：考虑一个图册$\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}_\alpha$，其中 $M$，以及一个齐次辛图册 $\mathcal{A} := \{(\mathcal{U}_\alpha, \varkappa_\alpha)\}_\alpha$，其中 $\dot{\mathrm{T}}^*M$，满足 $\varkappa_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \cong \kappa_\alpha(U_\alpha) \times \dot{\mathbb{R}}^d$，正如注记 2.2.5中所述。于是

$$S^m_{1,0}(\mathcal{U}_\alpha) = \left\{a \in C^\infty(\mathcal{U}_\alpha) \,|\, \forall (\mathcal{U}_\alpha, \varkappa_\alpha) \in \mathcal{A} : (\varkappa_\alpha^*)^{-1} a \in S^m_{1,0}\left(\kappa_\alpha(U_\alpha) \times \dot{\mathbb{R}}^d\right)\right\} \tag{B.11}$$

因此，$S^m_{1,0}(\dot{\mathrm{T}}^*M)$ 利用单位分解构造。我们注记，由于以下原因，对于一个图册满足这些要求就足够了

引理 *B.2.2.* 设 $U \subset \mathbb{R}^{d_U}$、$V \subset \mathbb{R}^{d_V}$ 为开集。假设 $U \subset U \times \dot{\mathbb{R}}^{n_U}$、$V \subset V \times \dot{\mathbb{R}}^{n_V}$ 是开锥集，并且 $\kappa : U \to V$ 是一个光滑真映射，在第二个变量中与正标量乘法交换。若 $a \in S^m(V \times \mathbb{R}^{n_V})$ 的支集包含于 $V$ 中某个具有紧基底的锥子集的内部，则 $a \circ \kappa \in S^m(U \times \mathbb{R}^{n_U})$，其中将复合在 $U$ 外定义为 $0$（参见例如 *[76,* 引理 *25.1.6], [83,* 定义 *2.1.2]*）。

渐近可求和性延续至 $S^m_{1,0}(\dot{\mathrm{T}}^*M)$（例如参见 [83, 命题 2.1.2]），因此我们类似地定义 $S^m(\dot{\mathrm{T}}^*M)$。现在，将构造推广到乘积流形 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N \cong \dot{\mathrm{T}}^*(M \times N)$ 是直接的。给定 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 的一个齐次典范关系 $(C, \iota)$，可得到

$$S^m(C) := \iota^* S^m(\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N). \tag{B.12}$$

由于任意开锥形覆盖 $\{C_{\alpha,\beta}\}$ 的 $C$ 都如 A.1.2 节所阐明的那样，在局部由A.1.2

$$\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta \xrightarrow{\ker \mathrm{grad}_{\xi,\eta}\psi} \mathscr{C}_{\alpha,\beta} \xrightarrow{(\mathrm{A.36})} C_{\alpha,\beta} \tag{B.13}$$

通过齐次辛邻域 $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{V}\beta$ 上的非退化相位函数 $\psi :=$ (A.35) 生成，其中 $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{V}\beta$ 位于 $\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$ 上；局部地，(B.12) 意味着通过对前述映射进行适当的拉回，从 $S^m(\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{V}\beta)$ 得到 $S^m(C_{\alpha,\beta})$。最后，我们只需使用 (B.10)（例如参见 [76, 定义 18.2.10]）即可纳入取值于 $\Omega^{1/2}C \otimes \mathbb{M}$ 的符号 $\mathsf{a} \in S^{m+(d_M+d_N)/4}(C; \Omega^{1/2}C \otimes \mathbb{M})$：

$$\mathsf{a} = a\,|\mathrm{dv}_C|^{1/2} \otimes \mathbb{m}, \quad a \in S^{m+(d_M+d_N-2n)/4}(C), \tag{B.14}$$

其中 $\mathrm{dv}_C$ 是定义在 $C$上的自然体积形式，如第A.1.6节所构造；而$\mathbb{m}$ 是 Keller-Maslov 丛的一个截面 $\mathbb{M} \to C$，详见第A.1.4节。前者和后者分别是齐次度为 $n$ 和 0 的齐次对象，正如例2.2.2所解释的那样。

## B.3 向量丛上的符号

本论文研究主题的主要工具之一是向量丛上的符号演算。粗略地说，这是通过在第 $\mathbb{C}$节的讨论中，将B.2 中的值光滑映射替换为丛值光滑映射来实现的；不过，我们将详细阐述相关细节，以补充向量丛上的傅里叶积分算子理论。

**定义 B.3.1**。 设 $(\dot{\mathcal{Y}},\mathrm{m}_\lambda)$ 是如例 A.1.3 所述的锥流形，且 $\mathbb{C}^{r\times k}$表示所有 $r\times k$ 矩阵在 $\mathbb{C}$ 上的集合。$S^m_{1,0}(\dot{\mathcal{Y}},\mathbb{C}^{r\times k})$ 表示所有 $\mathbb{C}^{r\times k}$-值 Kohn-Nirenberg 符号 在 $\dot{\mathcal{Y}}$ 上的、（至多） $m$ 阶的集合，其定义为所有$a\in C^\infty(\dot{\mathcal{Y}},\mathbb{C}^{r\times k})$ 的集合，其中函数 $\lambda^{-m}\mathrm{m}_\lambda^* a$在 $C^\infty(\dot{\mathcal{Y}},\mathbb{C}^{r\times k})$ 中一致有界，只要 $\lambda\geq 1$。

这意味着 也就是说，对于任意 $a\in C^\infty(\mathrm{U},\mathbb{C}^{r\times k})$ 以及每个紧集 $\mathrm{K}\subset\mathrm{U}$，估计

$$\left\|(\mathrm{D}_x^\beta\partial_\theta^\alpha a)(x;\theta)\right\|\leq \mathrm{cst}_{\alpha,\beta;\mathcal{K};\|\cdot\|}\langle\theta\rangle^{m-|\alpha|} \tag{B.15}$$

对于所有 $(x;\theta)\in\{(x;\lambda\theta)|(x;\theta)\in\mathrm{K}\}$ 均成立，其中 $\lambda\geq 1$；对于任意 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$、$\beta\in\mathbb{N}_0^d$以及某个常数 $\mathrm{cst}_{\alpha,\beta;\mathcal{K};\|\cdot\|}$ 也成立。这里 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{r\times k}$ 上的某种范数选择，而这一特定选择并不重要（例如参见 [9, (1.5.1.3)]）。

由于 $C^\infty(\mathrm{U},\mathbb{C}^{r\times k})$ 同构于元素 $C^\infty(\mathrm{U})$ 的 $r\times k$矩阵，因此对于任意 $m$ 和任意 $r,k\in\mathbb{N}$，我们有$S^m_{1,0}(\mathrm{U},\mathbb{C}^{r\times k})\cong\left(S^m_{1,0}(\mathrm{U})\right)_{r\times k}$。与标量情形一样，可以赋予 $S^m_{1,0}(\mathrm{U},\mathbb{C}^{r\times k})$ Fréchet 拓扑，并且可以证明其具有渐近完备性。因此，我们得到多重齐次符号类 $S^m(\mathrm{U},\mathbb{C}^{r\times k})$，并且（参见例如 [9, 第 1.5 节2]）

$$\forall m\in\mathbb{R},\forall r,k\in\mathbb{N}:S^m(\mathcal{U},\mathbb{C}^{r\times k})\cong\left(S^m(\mathcal{U})\right)_{r\times k}. \tag{B.16}$$

我们的典型示例是同态丛 $\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\to M\times N$（第 2.3.3 节）。给定流形 $M$（分别为 $N$）上的向量丛 $\mathscr{E}\to M$（分别为 $\mathscr{F}\to N$），其中 $r:=\mathrm{rk}\,\mathscr{E}$ 和 $k:=\mathrm{rk}\,\mathscr{F}$ 以及 $d_M$ 和 $d_N$ 不一定相等。利用典范投影 $\pi_M:\mathrm{T}^*M\to M$、$\pi_N:\mathrm{T}^*N\to N$，可得到诱导的同态丛 $(\pi_M\boxtimes\pi_N)^*\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\to\mathrm{T}^*M\times\mathrm{T}^*N$ 以及自然同构

$$C^\infty\left(\mathrm{T}^*M\times\mathrm{T}^*N,\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\right)\cong C^\infty\left(\mathrm{T}^*M\times\mathrm{T}^*N;(\pi_M\boxtimes\pi_N)^*\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\right), \tag{B.17}$$

这将在不再另作说明的情况下经常加以利用。

令 $\mathrm{A}:=\{(\mathrm{U}_\alpha,\varkappa_\alpha)\}_\alpha$ (分别地，$\mathrm{B}:=\{(\mathrm{V}_\beta,\varrho_\beta)\}_\beta$) 为 $\mathrm{T}\mathrm{T}^*M$(分别为 $\mathrm{T}^*N$) 上的齐次辛图册，使得诱导的同态丛 $(\pi_M\boxtimes\pi_N)^*\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$ 在 $\mathrm{T}^*M\times\mathrm{T}^*N$ 上容许一个图册 $\mathfrak{A}:=\{(\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{V}_\beta,\vartheta_{\alpha,\beta})\}_{\alpha,\beta}$，即，

$$\vartheta_{\alpha,\beta}:\left((\pi_M\boxtimes\pi_N)^*\,\mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\right)_{\alpha,\beta}\to\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\beta\otimes\mathbb{C}^{r\times k} \tag{B.18}$$

是 $(\pi_M \boxtimes \pi_N)^* \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$ 在 $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{V}\beta$ 上诱导的平凡化。因此

$$\begin{aligned}
&S^m\Big(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta; \big((\pi_M \boxtimes \pi_N)^* \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)_{\alpha,\beta}\Big) \\
&= \Big\{a \in C^\infty\Big(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta; \big((\pi_M \boxtimes \pi_N)^* \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big)_{\alpha,\beta}\Big) \,\Big|\, \forall (\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta, \vartheta_{\alpha,\beta}) \in \mathfrak{A} : \\
&\qquad (\vartheta^*_{\alpha,\beta})^{-1} a \in S^m\big(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta, \mathbb{C}^{r\times k}\big)\Big\} \\
&\cong \big(S^m(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta)\big)_{r\times k}.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

将这些局部部分通过单位分解拼接起来，便得到$S^m\big(\dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N,\ \text{同态}(\mathscr{F},\ \mathscr{E})\big)$。

对于典范关系 $\iota : C \to \dot{\mathrm{T}}^*M \times \dot{\mathrm{T}}^*N$，定义

$$\begin{aligned}
S^m\big(C; \widetilde{\operatorname{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big) &:= \iota^* S^m\big(\mathrm{T}^*M \times \mathrm{T}^*N, \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big), \\
\widetilde{\operatorname{Hom}}(\mathscr{F},\mathscr{E}) &:= \iota^*\big((\pi_M \boxtimes \pi_N)^* \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})\big).
\end{aligned} \tag{B.20}$$

最后，$S^m\big(C;\ \Omega^1/^2 C \otimes \mathbb{M} \otimes \widetilde{\text{同态}}(\mathscr{F},\ \mathscr{E})\big)$ 按照（B.14）构造。

## B.4 文献

符号类 $S^m_{1,0}$ 得名于 Joseph J. Kohn 和 Louis Nirenberg，他们在研究伪微分算子时引入了这一类 [98]。无论如何，这并不是最一般的可能性；例如，Hörmander 符号类 [198] 就是它的一个广泛推广，源于对常强度次椭圆[1]算子基本解的研究。有关详情，请参阅专著 [8, 9, 76] 和介绍性讲义 [86, 89]。

[1]具有光滑系数的微分算子 $P$ 称为**次椭圆的**，如果方程 $Pu = f$ 只有光滑解 $u$ 当 $f$ 光滑时。

# 附录 C

# Hadamard态

通过时序乘积对费曼传播子作最低限度的介绍，以衔接量子场论方法与微局部形式主义。

本章将讨论经典弯曲时空中的量子场论（定义 3.1.2），在物理学界也称为半经典引力。根据爱因斯坦广义相对论——迄今经受实验检验最充分的引力理论——我们的宇宙是一个四维洛伦兹流形。另一方面，量子场论在闵可夫斯基时空中已被证明在绝大多数实验结果方面极为成功。因此，半经典引力源于这样一种需求：将标准量子场论框架推广到洛伦兹流形上；用物理学的说法，就是将引力效应纳入量子场。原则上，我们应当能够通过对某种更基本的理论取适当极限来推导半经典引力；在该理论中，时空度量应按照量子物理原理处理。然而，除此之外，人们至今尚未做到这一点；现有的量子引力理论还没有发展到能够取这样一个定义明确的极限的程度，相关做法仅停留在形式化和启发式层面。

弯曲时空中的量子场论被认为能够提供一种对量子现象的准确描述，适用于时空曲率效应显著、但可以忽略量子引力效应的情形。具体而言，预计这一形式体系应适用于早期宇宙以及黑洞附近（及其内部）的量子现象学——前提是我们不试图描述那些发生得过于接近奇点、以至于曲率达到某种极端尺度且必须考虑时空度量量子性质的现象（例如参见综述 [199] 及其中的参考文献）。

量子理论有许多种定义方式，每种方法都有其优点和缺点；关于量子化方案及相关方面的汇编，请参阅综述 [199–201] 。在本论文中，我们将采用局部协变框架 [202] ，因为它为

弯曲时空中的量子场论提供了数学上精确且概念上可靠的表述。宽泛地说，其核心思想是将量子可观测量作为定义量子理论的基本对象：为时空的每个有界扩展开区域关联一个适当的代数，并满足 一般协变性、爱因斯坦因果性以及 时间片公理。这些公设以物理理由为依据，并可作如下解释。第一项要求是广义相对论的一种延伸，表明量子场应当在时空几何的任意坐标变换下以“良好”的方式变换。爱因斯坦因果性确保任何物理信息都以有限传播速度传播，而最后一项要求则赋予理论以动力学。为了精确表述所有这些概念，需要引入算子代数和洛伦兹几何中的相当多术语；这些内容超出了本论文的范围，对于理解 Hadamard态和时间序列乘积的思想也并非必不可少。因此，感兴趣的读者可参阅相关论述 [199, 201, 203] 。对我们而言，只需记住某个满足这些“公设”的单位 $*$- 代数 $\mathscr{A}$ 即可。对此类代数的具体刻画实际上定义了一种量子场论，下面将对此作简要讨论。

## C.1 量子场代数

设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是整体双曲时空上的一个向量丛（定义 3.1.3）¯（$\mathscr{M}$，g），并设 $\mathscr{E}^*$ 是 $\mathscr{E}$的共轭代数对偶丛（第 2.3.4节）。一个线性量子场是某个代数（称为**场代数**） $\mathscr{F}$（$\mathscr{M}$； $\mathscr{E}$）值分布

$$\Phi : C_c^\infty(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to \mathscr{F}(\mathscr{M};\mathscr{E}),\ u \mapsto \Phi(u), \tag{C.1}$$

其中， $\mathscr{F}(\mathscr{M}$； $\mathscr{E})$可以取为下文定义的规范对易（分别为反对易）关系代数 $\mathscr{CCR}(\mathscr{M}$； $\mathscr{E})$（分别为 $\mathscr{CAR}(\mathscr{M}$； $\mathscr{E}$）） 。代数$\mathscr{CCR}(\mathscr{M}$； $\mathscr{E})$（分别为 $\mathscr{CAR}(\mathscr{M}$； $\mathscr{E}$）） 是一个带单位的 $*$（分别为 $C^*$）代数，在 $\mathbb{C}$上由符号 $\mathbb{1}_- := \mathbb{1}_{\mathscr{CCR}}$（分别为 $\mathbb{1}_+ := \mathbb{1}_{\mathscr{CAR}}$）、 $\Phi(u)$ 及其共轭代数对偶 $\Phi^*(\phi)$生成，并满足以下关系

$$\Phi(cu) = c\,\Phi(u), \quad \bar{\Phi}^*(c\phi) = \bar{c}\,\Phi^*(\phi), \tag{C.2a}$$

$$\Phi(Lu) = 0 = \bar{\Phi}^*(\bar{L}^*\phi), \tag{C.2b}$$

$$[\Phi([u]), \bar{\Phi}^*([\phi])]_\mp = \mathrm{i}\hbar\, G([\phi] \boxtimes [u])\, \mathbb{1}_\mp \tag{C.2c}$$

对于任意 $[u] \in C_c^\infty(\mathscr{M}; \mathscr{E})/\mathrm{img}\,(L)$ 和 $[\phi] \in C_c^\infty(\mathscr{M}; \bar{\mathscr{E}}^*)/\mathrm{img}\,(\bar{L}^*)$。其中 $\hbar$ 是约化普朗克常数，并且在我们贯穿整篇论文所使用的自然单位制 中，$\hbar = 1$ 。括号 $[\cdot,\cdot]_\mp$ 分别表示**交换子** 和**反对易子**:

$$[\Phi(u), \bar{\Phi}^*(\phi)]_\mp := \Phi(u)\,\bar{\Phi}^*(\phi) \mp \bar{\Phi}^*(\phi)\,\Phi(u) \tag{C.3}$$

¯且 $G \in \mathrm{D}'(\mathscr{M} \times \mathscr{M}; \mathscr{E} \boxtimes \mathscr{E}^*)$ 是微分算子 $L$ 的因果传播子（定义 3.2.9）的施瓦茨核，该算子取决于 $\Phi$ 的具体模型，如表 C.1 所列。若 $\mathscr{F}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$ 是$\mathscr{CCR}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$（分别为 $\mathscr{CAR}(\mathscr{M}; \mathscr{E})$），则量子场分别称为玻色场（费米场）。

| 量子场的自旋 | 运动方程 | 量子化 |
|---|---|---|
| 0 | 克莱因-戈尔登（示例 3.2.2） | [204, 205] |
| 1/2 | 狄拉克（示例 3.4.4） | [37, 52, 124, 133, 206] |
| 1 | | |
| 有质量阿贝尔 | 普罗卡（示例3.2.7） | [207] |
| 无质量阿贝尔 | 麦克斯韦 | [208–210] |
| 无质量非阿贝尔 | 杨-米尔斯 | [51, 211] |
| 2 | 爱因斯坦 | |
| 3/2 | 拉里塔-施温格（第 3.5.6 节） | [143] |

表 C.1：一般协变量子场论的模型。尽管我们在本论文中没有讨论麦克斯韦方程和杨-米尔斯方程，但它们可以通过适当的“规范选择”与霍奇-达朗贝尔算子（例 3.2.4）相关联。

场代数不一定是可观测量代数，因为并非所有量子场都是观测量，例如费米场，因为它们在 $\mathscr{M}$ 中的类空分离区域上不交换。然而，它们适当的双线性组合是观测量。我们将可观测量代数记为 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$。例如，$\mathscr{CAR}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \not\subset \mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，但 $\mathscr{CCR}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$。

## C.2 量子态与 Hadamard 条件

**定义 C.2.1**。设 $\mathscr{E} \to \mathscr{M}$ 是定义在整体双曲时空上的一个向量丛，$\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$是一个量子可观测量代数。$\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$的一个**代数态** $\omega$ 是一个连续的（在适当拓扑下）线性泛函 $\omega:\ \mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E}) \to \mathbb{C}$，其满足正性条件：对于所有 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$，$\omega(A^*A) \geq 0$，以及归一化条件：$\omega(\mathbb{1}) = 1$。

物理学文献中使用的标准希尔伯特空间态，通过吉尔凡德-奈马克-塞伽尔（GNS）定理与代数态相关联——该定理指出（参见例如 [212, Thm.2]），对于任意含单位元的 $*$-代数 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 上的代数态 $\omega$，存在一个四元组 $(\mathscr{H}_\omega, \mathscr{D}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$，其中 $\mathscr{D}_\omega$ 是GNS希尔伯特空间 $(\mathscr{H}_\omega, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ 的稠密子空间，$\pi_\omega$是 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 在 $\mathscr{D}_\omega$上的含单位元代数表示，并满足性质 $\pi_\omega(A^*) \subset \big(\pi_\omega(A)\big)^\dagger$；$\dagger$ 表示相对于 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$的伴随算子，而 $\Omega_\omega$是GNS向量，使得$\mathscr{D}_\omega = \pi_\omega\big(\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})\big)\Omega_\omega$并且

$$\forall A \in \mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E}) : \omega(A) = \langle \Omega_\omega \,|\, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle\,. \tag{C.4}$$

根据定义，一个状态由一组**Wightman** $n$**点分布**指定

$$\begin{aligned} &\mathsf{W}_n : C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\mathscr{E})^{\otimes n} \otimes C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathscr{M};\bar{\mathscr{E}}^*)^{\otimes n} \to \mathbb{C},\ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes \phi_1 \otimes \ldots \phi_n \mapsto \\ &\mathsf{W}_n(u_1,\ldots,u_n,\phi_1,\ldots,\phi_n) := \omega\big(\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n)\,\bar{\Phi}^*(\phi_1)\ldots\bar{\Phi}^*(\phi_n)\big). \end{aligned} \tag{C.5}$$

根据构造，场方程（C.2b）、正则对易（分别为反对易）关系（C.2c）以及状态的正定性条件意味着

$$\mathsf{W}\big(L(u),\phi\big) = 0 = \mathsf{W}\big(u,\bar{L}^*(\phi)\big), \tag{C.6a}$$
$$\mathsf{W}(u,\phi) - \mathsf{W}(\phi,u) = \mathrm{i}\,\mathsf{G}(\phi \boxtimes u), \tag{C.6b}$$
$$\mathsf{W}(\bar{u}^*,u) \geq 0 \tag{C.6c}$$

二点 Wightman 分布。

如果 $(\mathscr{M},\ \mathrm{g})$ 存在一个非平凡的等距群 Iso $\mathscr{M}$，保持定向和时间定向，那么 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 通过元素 $\alpha_\Xi \in \mathrm{Aut}\big(\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})\big)$ 诱导出 Iso $\mathscr{M}$ 的一个表示。因此，在 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 的状态上诱导出一个自同构 $\alpha^*_\Xi$。如果状态 $\omega$ 满足 Iso $\mathscr{M}$- **不变**，则

$$\forall \alpha_\Xi \in \mathrm{Aut}\big(\mathscr{A}(\mathscr{M};\mathscr{E})\big) : \alpha^*_\Xi \omega = \omega. \tag{C.7}$$

**例 C.2.2.** 如果 $(\mathbb{R}^4,\ \eta)$ 是四维闵可夫斯基时空，那么正时向庞加莱群 $\mathbb{P}^\uparrow_0$ 就是时空等距群（例 4.2.2）。令$\mathscr{E} \to \mathbb{R}^4$ 为一个平凡的 $\mathbb{R}$线丛，并将（ $L$ C.2b）中的克莱因-戈尔登算子

$$\Box := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathrm{m}^2, \quad \mathrm{m}^2 \in \mathbb{R}_+ \tag{C.8}$$

，其质量平方项为 $\mathrm{m}^2$ （参见例 3.2.2）。在物理学中，这称为**闵可夫斯基时空上的有质量实标量量子场论**，其**动力学由克莱因-戈尔登方程**支配。由于$(\mathbb{R}^4,\ \eta)$ 是整体双曲的，因此存在唯一的推迟$\mathsf{G}^{\mathrm{ret}}$ 和超前$\mathsf{G}^{\mathrm{adv}}$ 格林函数的施瓦茨核 $\Box$ ，因此因果传播子由下式给出（例如参见 [75,定理 6.2。3], [79,第 4.3 节。4]）：

$$\mathsf{G}_{x-y} = -\mathrm{i}(\mathcal{F}\mu_+ - \mathcal{F}\mu_-)(x-y), \tag{C.9a}$$
$$\mu_\pm(\xi) := \theta(\pm\xi_1)\,\delta\big(\eta(\xi,\xi) - \mathrm{m}^2\big), \tag{C.9b}$$
$$\mathsf{G}^{\mathrm{ret,adv}}_{x-y} = \pm\theta\big(\pm(x^1-y^1)\big)\,\mathsf{G}_{x-y}, \tag{C.9c}$$
$$\mathsf{G}^{\mathrm{adv}}_{x-y} = \mathsf{G}^{\mathrm{ret}}_{-(x-y)}, \tag{C.9d}$$

其中， $\mu_\pm(\xi)$ 是定义在质量双曲面 $\{\xi \in \mathbb{R}^4 \,|\, \eta(\xi,\xi) = \mathrm{m}^2, \xi_1 \gtrless 0\}$ 上、在正时向洛伦兹群作用下保持不变的唯一（相差常数倍）测度（例如参见 [213, Thm. IX. 33, IX. 37]），而 Heaviside 阶跃函数 $\theta$ 与 G 的乘法由于 G 的波前集（见（C.12b））而定义良好。在标准物理学文献中，这些测度表示为 $\int_{\mathbb{R}^4} \delta\big(\eta(\xi,\xi) - \mathrm{m}^2\big)\,\theta(\xi_1 \gtrless 0)\,\mathrm{d}\xi/(2\pi)^4$，而前述方程则写成形式[1] 表达式（例如参见 [214,Sec. 1-3-1]）

[1]这些积分并不收敛，因此必须将其理解为施瓦茨分布的傅里叶变换。

$$\mathsf{G}^{\mathrm{ret}}_{x-y} = -\mathrm{i}\,\theta(x^1-y^1)\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{E}(x^1-y^1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{E}(x^1-y^1)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot(x'-y')}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(2\pi)^3 2\mathrm{E}}, \tag{C.10a}$$

$$\mathsf{G}^{\mathrm{adv}}_{x-y} = -\mathrm{i}\,\theta(y^1-x^1)\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{E}(y^1-x^1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{E}(y^1-x^1)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot(y'-x')}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(2\pi)^3 2\mathrm{E}}, \tag{C.10b}$$

$$\mathsf{G}_{x-y} = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{E}(x^1-y^1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{E}(x^1-y^1)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot(x'-y')}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(2\pi)^3 2\mathrm{E}}, \tag{C.10c}$$

其中我们采用了记号 $x=(x^1,\ x')$，$\xi=(\xi_1,\ \xi')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$，并且 $\mathrm{E}:=\sqrt{\xi'\cdot\xi'+\mathrm{m}^2}$ 是能量，其中 $\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里得内积。

在闵可夫斯基时空中，存在唯一的 $\mathbb{P}^{\uparrow}_0$-不变态，即 **真空态** $\omega_0$，其二点 Wightman 分布$\mathsf{W}_0$ 由下式给出（例如参见 [213, 定理 IX. 34]）

$$\mathsf{W}_0(x-y) = -\mathrm{i}(\mathcal{F}\mu)(x-y) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{E}(x^1-y^1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi'\cdot(x'-y')}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(2\pi)^3 2\mathrm{E}}. \tag{C.11}$$

显然 地，格林算子和 $\mathsf{W}_0$ 的奇点为（例如参见 [79, 第 118]页）

$$\begin{aligned}\mathrm{WF}'\,\mathsf{G}^{\mathrm{ret}}_{\mathrm{adv}} &= \left\{(x,\xi;x,\xi)\in\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\right\}\bigcup\left\{(x,\xi;y,\xi)\in\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\,|\right.\\ &\qquad \left.\eta(x-y,x-y)=0, x^1\gtrless y^1, \xi=\lambda(x-y),\lambda\in\mathbb{R}\right\}, \qquad \text{(C.12a)}\\ \mathrm{WF}'\,\mathsf{G} &= \left\{(x,\xi;y,\eta)\in\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\,|\,\eta(\xi,\xi)=0, x-y=\lambda\xi,\lambda\in\mathbb{R}\right\}, \qquad \text{(C.12b)}\\ \mathrm{WF}'\,\mathsf{W}_0 &= \left\{(x,\xi;y,\eta)\in\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\,|\,\eta(\xi,\xi)=0, x-y=\lambda\xi,\lambda\in\mathbb{R},\xi_1>0\right\}. \qquad \text{(C.12c)}\end{aligned}$$

然而，由于缺乏任何非平凡的时空对称性，在一般的整体双曲时空中不存在真空态的类似物，甚至不存在任何其他优选状态。人们曾多次尝试解决这一问题，但都受到重大限制；例如参见综述 [201]以了解总结。事实上，在少数几个自然假设下，已经证明：在整体双曲时空中，不可能为任何非平凡的局部协变量子场论找到优选状态 [215, 定理 6.13]（另见综述 [216, 定理 1]）。另一方面，一般的代数态可能过于奇异，无法执行量子场论所需的全部操作，例如定义非线性可观测量，如量子应力能量张量。因此，我们将前述例子作为指导原则，以选取物理态。

由于每个时空的切空间在局部上都是闵可夫斯基空间，且分布的奇性由“局部”决定，因此我们接受以下条件

$$\mathrm{WF}\,\mathsf{W} = \mathrm{WF}\,\mathsf{W}_0 \tag{C.13}$$

作为在任意弯曲时空中选择物理量子态的一项合理标准。

**定义 C.2.3**。 按照定义 C.2.1中的术语，状态 $\omega$ 属于 $\mathscr{A}(\mathscr{M};\ \mathscr{E})$ 称为 **Hadamard 态**，如果其二点 Wightman 分布具有以下波前集 [39]

$$\mathrm{WF}'\,\mathsf{W} = \{(x,\xi;y,\eta) \in \dot{\mathsf{T}}^*_0\mathscr{M} \times \dot{\mathsf{T}}^*_0\mathscr{M} \mid \exists! s \in \mathbb{R}_{\gtrless 0} : (x,\xi) = \Phi_s(y,\eta), \xi \rhd 0\}, \tag{C.14}$$

其中 $\dot{\mathsf{T}}^*_0\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的光锥丛，$\Phi_s$ 是余切丛上的测地流，而 $\xi \rhd 0$ 表示 $\xi$ 是未来指向的[2]。

我们注意到，Hadamard 态是 定义整体双曲时空中协变非线性量子可观测量的 必要且充分条件 [36–38, 217]（另见综述 [199, 201]）。因此，本论文只考虑 Hadamard 态。

**注记 C.2.4.** Hadamard 态从不唯一，因为我们可以自由添加适当的光滑项。

## C.3 时序乘积

为了以微扰方式构造非线性量子可观测量，需要定义经典可观测量之间的时序乘积。从几何角度来说，经典场 $\varphi$ 是 $\mathscr{E}$的光滑截面。时序乘积 $\mathsf{T}$ 是一个线性映射，它将 $\varphi$ 中的局部协变多项式表达式映射到 $\mathscr{F}(\mathscr{M};\mathscr{E})$ 值的分布，并满足若干公设。要精确刻画这些性质，需要引入若干新术语；更重要的是，理解当前讨论的主题并不需要了解这些细节。因此，我们不提供形式化定义，详情请参阅 [37]（另见综述 [199, 218]，其中介绍了早期进展）。对于我们的目的，只需注意

$$\mathsf{T}\big(\varphi(x)\otimes\bar{\varphi}^*(y)\big) = \begin{cases} \Phi_x\bar{\Phi}^*_y, & x \notin J^-(y), \\ \pm\bar{\Phi}^*_y\Phi_x, & x \notin J^+(y) \end{cases}, \tag{C.15a}$$

$$\mathsf{T}\big(L\varphi(x)\otimes\bar{\varphi}^*(y)\big) = \mathrm{i}\hbar\delta_{x,y} = \mathsf{T}\big(\varphi(x)\otimes\bar{L}^*\bar{\varphi}^*(y)\big), \tag{C.15b}$$

$$\mathsf{W}^{\mathsf{T}}_{x,y} := \omega\left(\mathsf{T}\big(\varphi(x)\otimes\bar{\varphi}^*(y)\big)\right), \tag{C.15c}$$

$$\mathrm{WF}'\,\mathsf{W}^{\mathsf{T}} = C^+, \tag{C.15d}$$

其中 $\mathsf{W}^{\mathsf{T}}$ 称为 **时间排序 2点 Wightman 分布**，$C^+$ 是前向测地关系（定义 3.2.15），而 $\pm$ 适用于玻色（分别为费米）观测量。因此，前面两个方程意味着 [39]

$$\mathsf{G}^{\mathrm{Fyn}}(u\boxtimes\phi) := -\mathrm{i}\,\mathsf{W}^{\mathsf{T}}(u\boxtimes\phi) \tag{C.16}$$

是费曼传播子（定义3.2.10 和3.2.17）。

[2]也就是说，对于任意未来指向的 $X \in \mathsf{T}_x\mathscr{M}$，$\xi(X) \geq 0$。

**注记 C.3.1**。费曼传播子取决于所选的量子状态，与推迟、超前和因果传播子不同。

为了更好地理解这个新的传播子，让我们再次考察最简单的情形：闵可夫斯基时空中的克莱因-戈尔登量子场论。

**例 C.3.2**。 在例C.2.2中引入的术语和记号下：存在唯一的费曼传播子$\mathsf{G}_0^{\mathrm{Fyn}}$ 对应于闵可夫斯基真空：

$$\mathsf{G}^{\mathrm{Fyn}}_{0,x-y} = -\mathrm{i}\left(\theta(x^1-y^1)\,(\mathcal{F}\mu_+)(x-y)+\theta(y^1-x^1)\,(\mathcal{F}\mu_-)(x-y)\right), \tag{C.17}$$

其 在标准物理学教材中由[3] （例如参见 [214, 第 1-3-1 节 ]）

$$\mathsf{G}^{\mathrm{Fyn}}_{0,x-y} = -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\theta(x^1-y^1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{E}(x^1-y^1)}+\theta(y^1-x^1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{E}(x^1-y^1)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi'\cdot(x'-y')}\frac{\mathrm{d}\xi'}{(2\pi)^3 2\mathrm{E}} \tag{C.18}$$

其奇异性结构为（例如参见 [79,第 118] 页）

$$\begin{aligned}\mathrm{WF}'\,\mathsf{G}_0^{\mathrm{Fyn}} \;=\; &\left\{(x,\xi;x,\xi)\in \dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\times\dot{\mathrm{T}}^*\mathbb{R}^4\right\}\bigcup\left\{(x,\xi;y,\xi)\in\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\times\dot{\mathbb{R}}^4\,|\right.\\ &\left.\eta(x-y,x-y)=0,\xi=\lambda(x-y),\lambda\gtrless 0\right\}.\end{aligned} \tag{C.19}$$

这些传播子具有以下物理解释：

- 推迟传播子（C.10a）将正频率（$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{E}\,(x^1-y^1)}$）和负频率（$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{E}\,(x^1-y^1)}$）向时间的未来传播，
- 超前传播子（C.10b）将正频率和负频率向时间的过去传播，
- 费曼传播子（C.18）将正频率向时间的未来传播，将负频率向时间的过去传播，

这种关于$\mathsf{G}_0^{\mathrm{Fyn}}$ 通过 lim 的傅里叶变换$_{\varepsilon\to 0}\,1/\left(\eta(\xi,\ \xi)\ -\mathrm{m}^2+\mathrm{i}\ \varepsilon\right)$的形式表达常被物理学教材用作构造费曼传播子的起点。然而，在任意整体双曲时空中，傅里叶变换和粒子的记号都无法使用。因此，在一般情形下无法采用这种方法。尽管如此，时序乘积在任何整体双曲时空中都有良好定义，因此可以用它来令人满意地定义费曼传播子。随后需要证明$\mathsf{G}_\omega^{\mathrm{Fyn}}$(参见命题 3.3.2) 的正性，以构造 Hadamard 态 $\omega$。请注意，现在费曼传播子不再唯一，因为可以添加适当的光滑项而不改变 $C^+$。换言之， $G_\omega^{\mathrm{Fyn}}$仅在模去这些的意义下唯一光滑项，也就是说，存在一个唯一的费曼拟基本解 $E^{\mathrm{Fyn}}$ ，它与任何选定的 $\omega$无关。

[3]参见脚注 C.2.2

我们也可以从相反方向看待 $\omega$ 与$\mathsf{G}_{\omega}^{\mathrm{Fyn}}$之间的一一对应。由于所有 Hadamard 态都具有相同的波前集，因此可以像定义 3.2.17 中那样，用波前集来刻画费曼传播子。采用微局部观点，是因为它提供了费曼拟基本解的内禀定义；正如第 1.2 节所述，这一定义的应用超出了量子场论的范畴。

## C.4 文献

将 *Hadamard* 态 这一类别用作闵可夫斯基真空的适当替代，并作为弯曲时空中的任何量子场论的关键结构性要素，这一思想由 Bernard KAY [219, 第 1 节。1]以及 Rudolf HAAG、Heide NARNHOFER 和 Ulrich STEIN [220]提出。Bernard KAY 和 Robert WALD [205] 首次根据二点 Wightman 分布的短距离行为，精确刻画了这些态。他们实际上定义了局部和全局 Hadamard条件。最近，Valter MORETTI [221] 发现并弥补了其全局条件中的一个技术性缺陷。微局部框架下 Hadamard 态的现代定义归功于 Maciej RADZIKOWSKI [39]。早期关于 Hadamard 态的大部分文献都针对标量量子场论，随后又发展出了向量丛推广 [49, 51, 56, 206, 222, 223]。有关详情，请参阅相关论述 [224] 。

弯曲时空中时序乘积的数学精确形式体系由 Romeo BRUNETTI 和 Klaus FREDENHAGEN [36], 发起，但他们的工作中存在一些歧义。借助量子观测量局域协变性的思想，Stefan HOLLANDS 和 Robert WALD 解决了这些问题 [37] ，并证明了标量量子场论中时序乘积的存在性 [38]。后来，Stefan HOLLANDS 将这一半经典结果扩展到量子杨-米尔斯理论 [51]。

# 参考文献

[1] M. Kac, 《能否听出鼓的形状？》, 《美国数学月刊》73, 1（1966年）。[2] A. Uribe, 《迹公式》, 载于《第一届分析与数学物理暑期学校：量子化、Segal-Bargmann变换与半经典分析》, S. Pérez-Esteva 和 C. Villegas-Blas 编（美国数学学会，墨西哥莫雷洛斯州库埃纳瓦卡，2000年），第61–90页。[3] B. M. Levitan, 《关于二阶自伴微分方程谱函数的渐近行为》, 《苏联科学院学报·数学辑》16, 325（1952年）；B. M. Levitan, 《关于谱函数的渐近行为及二阶自伴微分方程按特征函数展开。II》, 《苏联科学院学报·数学辑》19, 33（1955年）。[4] V. G. Avakumovič, 《关于闭黎曼流形上的特征函数》, 《数学杂志》65, 327（1956年）。[5] L. Hörmander, 《椭圆算子的谱函数》, 《数学学报》121, 193（1968年）。[6] V. Ivrii, 《微局部分析、精确谱渐近及其应用 I：半经典微局部分析与局部及微局部半经典渐近》（Springer，瑞士，2019年）。[7] Y.-L. Fang, 《无边界流形上一阶系统的分析：一种谱理论方法》, 博士论文，伦敦大学学院（2017年）。[8] M. Shubin, 《伪微分算子与谱理论》, 第2版（施普林格出版社，柏林-海德堡，2001年）。[9] S. Scott, 《伪微分算子的迹与行列式》, 《牛津数学专著》（牛津大学出版社，英国，2010年）。[10] J. J. Duistermaat 和 V. W. Guillemin, 《正椭圆算子的谱与周期双特征曲线》, 《数学发明》29, 39（1975年）。[11] A. Grigis 和 J. Sjöstrand, 《微局部分析与微分算子：导论》, 《LMS讲义系列》（剑桥大学出版社，1994年）。[12] M. C. Gutzwiller, 《周期轨道与经典量子化条件》, 《数学物理杂志》12, 343（1971年）。[13] M. C. Gutzwiller, 《经典与量子力学中的混沌》, 《跨学科应用数学》第1卷（施普林格出版社，纽约，1990年）。

[14] P. Muratore-Ginanneschi, 《闭合回路上的路径积分与Gutzwiller迹公式》, 《物理学报告》383, 299（2003）, arXiv:0210047 [nlin-CD].[15] Y. Colin de Verdière, 《Laplace算子的谱与周期测地线长度》I, 《数学汇刊》27, 83（1973）; Y. Colin de Verdière, 《Laplace算子的谱与周期测地线长度》II, 《数学汇刊》27, 159（1973）。[16] J. Chazarain, 《黎曼流形上的泊松公式》, 《数学发明》24, 65（1974）。[17] J. Chazarain, 《量子哈密顿量的谱与经典力学》, 《通讯：偏微分方程》5, 595（1980）。[18] S. Albeverio、P. Blanchard和R. Høegh-Krohn, 《费曼路径积分与薛定谔算子的迹公式》, 《数学物理通讯》83, 49（1982）。[19] R. Brummelhuis和A. Uribe, 《薛定谔算子的半经典迹公式》, 《数学物理通讯》136, 567（1991）。[20] E. Meinrenken, 《半经典主符号与Gutzwiller迹公式》, 《数学物理报告》31, 279（1992年）。[21] T. Paul和A. Uribe, 《半经典迹公式与波包传播》, 《泛函分析杂志》132, 192（1995）。[22] M. Combescure、J. Ralston和D. Robert, 《使用相干态分解证明Gutzwiller半经典迹公式》, 《数学物理通讯》202, 463（1999）, arXiv:9807005 [math-ph]。[23] L. Hörmander, 《线性偏微分算子的分析IV：傅里叶积分算子》, 《数学经典》（施普林格出版社, 柏林、海德堡, 2009年）。[24] Y. Safarov和D. Vassiliev, 《偏微分算子的特征值渐近分布》, 《数学专著译丛》第155卷（美国数学学会, 美国, 1997年）。[25]V. Guillemin和S. Sternberg, 《半经典分析》（波士顿国际出版社, 2013年）。[26] M. R. Sandoval, 《Dirac型算子的波迹渐近》, 《通讯：偏微分方程》24, 1903（1999）。[27] A. Strohmaier和S. Zelditch, 《静态时空的Gutzwiller迹公式》, 《数学进展》376, 107434（2021年）, arXiv:1808.08425 [math.AP]。[28] V. Ivrii, 《Weyl定律100年》, 《数学科学通报》6, 379（2016年）, arXiv:1608.03963[math.SP]。[29] Z. Avetisyan、Y.-L. Fang和D. Vassiliev, 《一阶系统的谱渐近》, 《谱理论杂志》6, 695（2016年）, arXiv:1512.06281 [math.SP]。[30] L. Li和A. Strohmaier, 《Dirac型和Laplace型算子的局部计数函数》, 《几何与物理学杂志》104, 204（2016年）, arXiv:1509.00198 [math.SP]。[31] A. Haefliger, 《关于纤维空间结构群的扩张》, 《法国科学院院报》（《巴黎科学院院报》）243, 558（1956年）;

A. Borel和F. Hirzebruch，《特征类与齐性空间》II，《美国数学杂志》81，315（1959）；J. Milnor，《流形上的自旋结构》，《数学教学》9，198（1963）；M. Karoubi，《Clifford代数与 $k$理论》，《巴黎高等师范学院科学年鉴》第四辑1，161（1968年）。[32] A. McCormick，《静态Kaluza-Klein时空上的迹公式》（2022年），arXiv:2203.16729 [math-ph]。[33]A. Strohmaier和S. Zelditch，《静态时空上的半经典质量渐近》，《数学研究》32，323（2021年），纪念Hans Duistermaat专号，arXiv:2002.01055 [math-ph]。[34] A. Strohmaier和S. Zelditch，《静态时空上的谱渐近》，《数学物理评论》33，2060007（2021年）。[35] J. J. Duistermaat和L. Hörmander，《傅里叶积分算子》II，《数学学报》128，183（1972年）。[36] R. Brunetti和K. Fredenhagen，《微局部分析与相互作用量子场论：物理背景上的重整化》，《数学物理通讯》208，623（2000），arXiv:9903028 [math-ph]。[37] S. Hollands和R. M. Wald，《弯曲时空中量子场的局部Wick多项式与时间有序乘积》，《数学物理通讯》223，289（2001），arXiv:0103074 [gr-qc]。[38] S. Hollands和R. M. Wald，《弯曲时空中量子场的局部协变时间有序乘积的存在性》，《数学物理通讯》231，309（2002年），arXiv:0111108 [gr-qc]。[39] M. J. Radzikowski，《弯曲时空量子场论中Hadamard条件的微局部方法》，《数学物理通讯》179，529（1996年）。[40] M. Le wandowski，《整体双曲时空上玻色量子场论的Hadamard态》，《数学物理杂志》63，013501（2022年），arXiv:2008.13156[math-ph]。[41]C. Bär和A. Strohmaier，《具有紧致类空Cauchy边界的洛伦兹流形上的指标定理》，《美国数学杂志》141，1421（2019年），arXiv:1506.00959 [math.DG]。[42] C. Bär和A. Strohmaier，《洛伦兹流形的局部指标理论》（2020年），arXiv:2012.01364 [math.DG]。[43] D. Shen和M. Wrochna，《具有紧致Cauchy曲面的渐近静态时空上的指标定理》（2021年），arXiv:2104.02816 [math.DG]。[44] J. Gell-Redman、N. Haber和A. Vasy，《Minkowski空间扰动上的费曼传播子》，《数学物理通讯》342，333（2016年），arXiv:1410.7113[math.AP]。[45] N. Dencker，《关于实主类型系统中偏振集的传播》，《泛函分析杂志》46，351（1982）。[46] C. Gérard和M. Wrochna，《解析Hadamard态、Calderón投影算子与

解析柯西曲面附近的Wick 旋转，《数学物理通讯》366, 29 (2019年), arXiv:1706.08942 [math-ph].[47] S. A. Fulling, M. Sweeny, and R. M. Wald，弯曲时空量子场论二点函数的奇异性结构，《数学物理通讯》63, 257 (1978年).[48] M. R. Brown，对称 Hadamard 级数，《数学物理杂志》25, 136 (1984).[49] H. Sahlmann and R. Verch，弯曲时空中向量值量子场的微局部谱条件与Hadamard 形式，Rev. Math. Phys. 13, 1203 (2001), arXiv:0008029 [math-ph].[50] P. Marecki, 背景外场上的量子电动力学，硕士论文 (2003), arXiv:0312304 [hep-th].[51] S. Hollands，弯曲时空中的重整化量子杨–米尔斯场，Rev. Math. Phys. 20, 1033 (2008年), arXiv:0705.3340 [gr-qc].[52] C. Dappiaggi, T.-P. Hack, and N. Pinamonti，狄拉克场的可观测量扩展代数及其应力-能量张量的迹反常，Rev. Math. Phys. 21, 1241 (2009年), arXiv:0904.0612 [math-ph].[53] S. A. Fulling, F. Narcowich, and R. M. Wald，弯曲时空量子场论中二点函数的奇异性结构，II，《物理学年刊》136, 243 (1981).[54]S. Murro and D. Volpe，全局双曲流形上对称双曲系统的交织算子，Ann. Glob. Anal. Geom. 59, 1 (2021年), arXiv:2004.03300 [math.DG].[55] W. Junker，弯曲时空中标量量子场的Hadamard态、绝热真空及物理态的构造，Rev. Math. Phys. 8, 1091 (1996年), 勘误：Rev. Math. Phys. 14, 511 (2002年).[56]S. Hollands，Robertson-Walker 时空中狄拉克场的Hadamard条件与绝热态，《数学物理通讯》216, 635 (2001), arXiv:0102035 [math-ph].[57]C. Gérard and M. Wrochna，通过伪微分演算构造Hadamard态，《数学物理通讯》325, 713 (2014年), arXiv:1209.2604[math-ph].[58]C. Gérard and M. Wrochna，弯曲时空上线性化杨–米尔斯方程的Hadamard态，《数学物理通讯》337, 253 (2015), arXiv:1403.7153 [math-ph].[59] C. Gérard and T. Stoskopf，渐近静态时空中狄拉克场入射态和出射态的Hadamard性质，Lett. Math. Phys. 112, 63 (2022), arXiv:2108.11955 [math.AP].[60]C. Gérard and T. Stoskopf，有界几何洛伦兹流形上量子化狄拉克场的Hadamard态，Rev. in Math. Phys. 34, 2250008 (2022), arXiv:2108.11630 [math.AP].

[61] C. Gérard, 《弯曲时空中量子场的微局部分析》, 数学与物理学讲义 (欧洲数学学会, 德国, 2019年).[62] V. Moretti, 由渐近平坦性全息诱导的量子基态: 时空对称性下的不变性、能量正性与Hadamard性质, 《数学物理通讯》279, 31 (2008年), arXiv:0610143 [gr-qc].[63] C. Dappiaggi, V. Moretti, and N. Pinamonti, 一类宇宙学时空中的特殊量子态及其Hadamard性质, 《数学物理杂志》50, 062304 (2009年), arXiv:0812.4033 [gr-qc].[64] C. Dappiaggi, V. Moretti, and N. Pinamonti, Schwarzschild时空中Unruh态的严格构造及其Hadamard性质, Adv. Theor. Math. Phys. 15, 355 (2011年), arXiv:0907.1034 [gr-qc].[65] C. Gérard and M. Wrochna, 通过特征Cauchy问题构造Hadamard态, Anal. PDE 9, 111 (2016年), arXiv:1409.6691 [math-ph].[66]C. Dappiaggi, V. Moretti, and N. Pinamonti, 来自类光超曲面的Hadamard态, Springer数学物理简报, 第25卷 (2017年) arXiv:1706.09666 [math-ph].[67] A. Vasy, 传播子差的正性, Ann. Henri Poincaré 18, 983 (2017年), arXiv:1411.7242 [math.AP].[68] J. Derezi´nski and D. Siemssen, 静态时空上的费曼传播子, Rev. Math. Phys. 30, 1850006 (2018年), arXiv:1608.06441 [math-ph].[69]M. Capoferri, C. Dappiaggi, and N. Drago, 全局双曲时空上的整体波参数解, J. Math. Anal. Appl. 490, 124316 (2020年), arXiv:2001.04164 [math.AP].[70] Z. Avetisyan and M. Capoferri, 弯曲时空中的偏微分方程与量子态, 《数学》9, 16 (2021年).[71] V. Guillemin and S. Sternberg, 几何渐近学, 数学调查与专著, 第14卷 (美国数学学会, 美国, 1977年).[72] P. Günther, 惠更斯原理与双曲型方程, 数学展望, 第5卷 (学术出版社, 美国, 1988年).[73] L. Hörmander, 伪微分算子, 《纯粹与应用数学通讯》18, 501 (1965年).[74] A. Weinstein, 分布的主符号, 《美国数学会通报》82, 548 (1976年); A. Weinstein, 分布的阶与符号, 《美国数学会汇刊》241, 1 (1978年).[75] L. Hörmander, 《线性偏微分算子的分析 I: 分布理论与傅里叶分析》, 第2版, 数学经典 (施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 2003年).[76] L. Hörmander, 《线性偏微分算子的分析 III: 伪微分算子》, 数学经典 (施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 2007年).

[77] L. Hörmander，傅里叶积分算子 I，《数学学报》127，79（1971年）。[78] L. Hörmander，线性微分算子，载于《国际数学家大会论文集》（法国尼斯，1970年），第121–133页。[79] A. Strohmaier，微局部分析，载于《曲时空量子场论》，《物理学讲义》786卷，C. Bär 和 K. Fredenhagen 编（施普林格出版社，柏林-海德堡，2009年），第85–127页。[80] C. Brouder、N. V. Dang 和 F. Hélein，波前集的平滑导论，《物理学杂志 A：数学与理论》47，443001（2014年），arXiv:1404.1778 [math-ph]。[81] J. Peetre，对论文《微分算子的抽象刻画》的勘误，《斯堪的纳维亚数学杂志》8，116（1960年）。[82] J. J. Duistermaat，振荡积分、拉格朗日浸入与奇点展开，《纯粹与应用数学通讯》27，207（1974年）。[83]J. J. Duistermaat，《傅里叶积分算子》，现代 Birkhäuser 经典著作（Birkhäuser，纽约，2011年）。[84]J.-F. Treves，《伪微分算子与傅里叶积分算子导论：傅里叶积分算子》，大学数学丛书第2卷（Plenum 出版社，纽约，1980年；1982年第二次印刷）。[85] S. Bates 和 A. Weinstein，《量子化几何讲义》，伯克利数学讲义第8卷（美国数学学会与伯克利纯粹与应用数学中心，美国，1997年）。[86] R. Melrose，《微局部分析导论》（2007年），MIT 授课用未出版讲义。[87] J. M. Lee，《光滑流形导论》，第2版，《数学研究生教程》第218卷（施普林格国际出版公司，2013年）。[88] B. O’Niell，《半黎曼几何》（学术出版社，美国，1983年）。[89] E. P. van den Ban 和 M. Crainic，《流形上的分析》（2017年），乌得勒支大学授课用未出版讲义。[90] J. A. Toth 和 S. Zelditch，量子遍历限制定理：无边界流形，《几何与泛函分析》23，715（2013年），arXiv:1104.4531 [math.SP]。[91] R. J. Low，零测地线空间的几何，《数学物理杂志》30，809（1989年）。[92] R. Low，零测地线空间，《非线性分析：理论、方法与应用》47，3005（2001年），第三届世界非线性分析学家大会论文集。[93] A. Weinstein，论马斯洛夫量子化条件，载于《傅里叶积分算子与偏微分方程》，J. Chazarain 编（施普林格柏林-海德堡，柏林、海德堡，1975年），第341–372页。[94] V. Guillemin，某些傅里叶积分算子代数的留数迹，《泛函分析杂志》115，391（1993年）。[95] R. Abraham 和 J. E. Marsden，《力学基础》，第2版，第364卷（AMS Chelsea 出版社，美国，1978年；AMS 2008年重印）。

[96] G. Eskin，《线性偏微分方程讲义》，《数学研究生教程》第123卷（美国数学学会，美国，2011年）。[97] P. Hintz，《微局部分析导论》（2019年），MIT 授课用未出版讲义。[98] J. J. Kohn 和 L. Nirenberg，伪微分算子代数，《纯粹与应用数学通讯》18，269（1965年）。[99] P. D. Lax，振荡初值问题的渐近解，《杜克数学杂志》24，627（1957年）。[100]V. P. Maslov 和 M. Fedoriuk，《量子力学中的半经典近似》，《数学物理与应用数学》（施普林格，荷兰，1981年）。[101] Y. V. Egorov，伪微分算子的典范变换，《乌斯佩欣数学科学》24，235（1969年）。[102] J. Bolte 和 R. Glaser，矩阵值算子的半经典 Egorov 定理与量子遍历性，《数学物理通讯》247，391（2004年），arXiv:0204018[quant-ph]。[103] Y. A. Kordyukov，叶状流形上横向椭圆算子的 Egorov 定理与非交换测地流，《数学物理分析与几何》8，97（2005年），arXiv:0407435 [math.DG]。[104] Y. A. Kordyukov，叶状流形上横向 Dirac 型算子的 Egorov 定理，《几何与物理学杂志》57，2345（2007年），arXiv:0708.1660 [math.DG]。[105] D. Jakobson 和 A. Strohmaier，拉普拉斯型与 Dirac 型特征函数及标架流的高能极限，《数学物理通讯》270，813（2007年），arXiv:0607616 [math.SP]。[106] M. E. Taylor，《伪微分算子》，普林斯顿数学丛书（普林斯顿大学出版社，1981年）。[107] E. Minguzzi 和 M. Sánchez，时空的因果层次，载于《伪黎曼几何新进展》，《ESI数学与物理学讲义》，D. V. Alekseevsky 和 H. Baum 编（欧洲数学学会，德国，2008 年），第 299–358 页，arXiv:0609119 [gr-qc]。[108] R. Geroch，依赖域，《数学物理杂志》11，437（1970年）。[109] A. N. Bernal 和 M. Sánchez，关于光滑柯西超曲面与 Geroch 分裂定理，《数学物理通讯》243，461（2003年），arXiv:0306108 [gr-qc]；A. N. Bernal 和 M. Sánchez，时间函数的光滑性与整体双曲时空的度量分裂，《数学物理通讯》257，43（2005年），arXiv:0401112 [gr-qc]；A. N. Bernal 和 M. Sánchez，关于柯西超曲面与柯西时间函数可光滑化的进一步结果，《数学物理通讯》77，183（2006年），arXiv:0512095 [gr-qc]；A. N. Bernal 和 M. Sánchez，整体双曲时空可定义为“因果”而非“强因果”，《经典与量子引力》24，745（2007年），arXiv:0611138 [gr-qc]。[110] C. Bär、N. Ginoux 和 F. Pfäffle，《洛伦兹流形上的波动方程与

量子化，ESI数学与物理学讲义（欧洲数学学会，德国，2007年）arXiv:0806.1036 [math.DG].[111] S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis，《时空的大尺度结构》，剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，剑桥，1973年）。[112] S. R. Green 和 R. M. Wald，《我们的宇宙在多大程度上可以由FLRW模型描述？》，Class. Quantum Grav. 31, 234003（2014年），arXiv:1407.8084 [gr-qc].[113] H. Baum 和 I. Kath，正规双曲算子、惠更斯性质与共形几何，《Ann. Glob. Anal. Geom.》14, 315（1996年）。[114] N. Berline、E. Getzler 和 M. Vergne，《热核与狄拉克算子》，第2版，Grundlehren Text Editions（施普林格出版社，柏林-海德堡，2004年）。[115]R. M. Wald，《广义相对论》（芝加哥大学出版社，美国，1984年，印度重印版2007年）。[116] A. Laptev、Y. Safarov 和 D. Vassiliev，关于拉格朗日分布的整体表示及双曲型方程的解，《Commun. Pure Appl. Math.》47, 1411（1994年）。[117] F. W. Kamber 和 P. Tondeur，《叶丛与特征类》，数学讲义，第493卷（施普林格出版社，柏林-海德堡，1975年）。[118]P. Hintz，渐近Kerr–de Sitter空间上的张量值波的共振展开，《J. Spectr. Theory》7, 519–557（2017年），arXiv:1502.03183[math.AP].[119] J. D. Silva，埃戈罗夫定理的精度改进，《Publ. Mat.》51, 77（2007年）。[120] W. Junker 和 E. Schrohe，一般时空流形上的绝热真空态：定义、构造及物理性质，《Ann. Henri Poincaré》3, 1113（2002年），arXiv:0109010 [math-ph].[121] B. Jubin 和 P. Schapira，洛伦兹流形上的层与D模，《Lett. Math. Phys.》106, 607（2016年），arXiv:1510.01499 [math.AG].[122] R. Penrose，论量子几何的本质，载于《没有魔法的魔法》，J. R. Klauder 编（W. H. Freeman，旧金山，1972年）。[123] B. Khesin 和 S. Tabachnikov，伪黎曼测地线与弹球，《Adv. Math.》221, 1364（2009年），arXiv:0608620 [math.DG].[124] C. Bär 和 N. Ginoux，洛伦兹流形上的经典场与量子场，载于《整体微分几何》，C. Bär、J. Lohkamp 和 M. Schwarz 编（Springer，柏林、海德堡，2012年），第359–400页，arXiv:1104.1158 [math-ph].[125] H. Baum，《伪黎曼流形上的自旋结构与狄拉克算子》，Teubner数学丛书（莱比锡，1981年）。[126] C. Bär、P. Gauduchon 和 A. Moroianu，半黎曼几何与旋几何中的广义圆柱，《Math. Z.》249, 545（2005年），arXiv:0303095 [math.DG].[127] R. Geroch，广义相对论中的时空旋量结构 I，《J. Math. Phys.》9, 1739（1968年）。

[128] R. Geroch，广义相对论中的时空旋量结构 II，《J. Math. Phys.》11, 343（1970年）。[129] C. J. S. Clarke，磁荷、整体单值化与特征类：相对论中拓扑方法的示例，《Gen. Relat. Gravit.》2, 43（1971年）。[130] H. R. Alagia 和 C. U. Sánchez，伪黎曼流形上的自旋结构，《Revista de la Unión Matemática Argentina》32, 64（1985年）。[131] C. J. Isham，四维时空中的旋量场，《Proc. R. Soc. Lond. A.》364, 591（1978年）。[132]R. Mühlhoff，一阶微分算子的柯西问题与格林函数及代数量子化，《J. Math. Phys.》52, 022303（2011年），arXiv:1001.4091 [math-ph].[133] J. Dimock，流形上的狄拉克量子场，《Trans. Am. Math. Soc.》269, 133（1982年）。[134] M. Taylor，《偏微分方程I：基本理论》，第2版，《应用数学科学》，第115卷（施普林格出版社，纽约，2011年）。[135] E. Schrödinger，《再版：引力场中的狄拉克电子 I》，《Gen. Relativ. Gravit.》52, 4（2020年）。[136] A. Lichnerowicz，《调和旋量》，《Comptes rendus de l'Académie des Sciences》（《C. R. Acad. Sci. Paris》）257, 7（1963年）。[137] W. Rarita 和 J. Schwinger，关于半整数自旋粒子理论，《Phys. Rev.》60, 61（1941年）。[138] Y. Homma 和 U. Semmelmann，黎曼自旋流形上拉里塔-施温格算子的核，《Commun. Math. Phys.》370, 853–871（2019年），arXiv:1804.10602 [math.DG].[139] M. Y. Wang，在度量形变下保持平行旋量，《Indiana Univ. Math. J.》40, 815（1991年）。[140] D. Sorokin，高自旋的经典理论导论，《AIP Conf. Proc.》767, 172（2005年），arXiv:0405069 [hep-th].[141] R. Rahman 和 M. Taronna，从高自旋到弦：入门读本，（2015年），arXiv:1512.07932 [hep-th].[142] G. W. Gibbons，关于引力背景中的拉里塔-施温格方程，《J. Phys. A: Math. Gen.》9, 145（1976年）。[143] T.-P. Hack 和 M. Makedonski，一般弯曲时空上自旋 3/2 场一致量子化的不可行定理，《Phys. Lett. B》718, 1465（2013年），arXiv:1106.6327 [hep-th].[144] P. A. M. Dirac，相对论性波动方程，《Proc. Royal Soc. A》155, 447（1936年）。[145] R. Illge 和 R. Schimming，弯曲时空上高自旋的一致场方程，《Ann. Phys.》8, 319（1999年）。[146] H. A. Buchdahl，黎曼空间中相对论性波动方程的相容性 II，《J. Phys. A: Mathematical and General》15, 1057（1982年）。

[147] V. Wünsch, 《相对论高自旋波动方程在任意弯曲时空中的柯西问题与惠更斯原理》, 《广义相对论与引力》17, 15（1985年）。[148] R. Illge, 《任意自旋的无质量场》, 《分析及应用》11, 25（1992年）。[149] R. Illge, 《弯曲时空中的任意自旋有质量场》, 《数学物理通讯》158, 433（1993年）。[150] J. Frauendiener 和 G. A. Sparling, 《弯曲流形上一类相容的线性高自旋方程》, 《几何与物理学杂志》30, 54（1999年）, arXiv:9511036[广义相对论与量子宇宙学]。[151] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. L. Easley, 《整体洛伦兹几何》, 第2版, Chapman & Hall/CRC纯粹与应用数学（CRC出版社, 纽约, 1996年）。[152] Y. Choquet-Bruhat, 《广义相对论与爱因斯坦方程》, 牛津数学专著（牛津大学出版社, 英国, 2008年）。[153] J. Leray, 《双曲型微分方程》（普林斯顿, 1953年, 油印讲义）。[154] R. Penrose, 《引力坍缩：广义相对论的作用》, 《新实验杂志》1, 252（1969年）。[155] M. Sánchez, 《整体双曲性概念的最新进展》, 载于《洛伦兹几何进展：柏林洛伦兹几何会议论文集》, AMS/IP高等数学研究, 第49卷, M. Plaue、A. Rendall 和 M. Scherfner 编（美国数学学会和国际出版社, 美国, 2011年）, 第105–124页, arXiv:0712.1933 [广义相对论与量子宇宙学]。[156]J. Hadamard, 《线性双曲型偏微分方程理论与柯西问题》, 《数学学报》31, 333（1908年）; J. Hadamard, 《线性偏微分方程中的柯西问题讲义》（Dover, 纽约州, 2003年）。[157] 马塞尔·里斯, 《黎曼–刘维尔积分与柯西问题》, 《数学学报》81, 1（1949年）; M. Riesz, 《偶数维时空中波动方程的几何解》, 《纯粹与应用数学通讯》13, 329（1960年）。[158] F. Friedlander, 《弯曲时空中的波动方程》, 剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社, 1975年）。[159] 理查德·费曼, 《正电子理论》, 《物理评论》76, 749（1949年）。[160] 恩斯特·施蒂克尔伯格, 《关于相对论中粒子对产生的评论》, 《瑞士物理学报》14, 588（1941年）。[161] 保罗·狄拉克, 《电子量子理论》, 《伦敦皇家学会会刊A辑》117, 610（1928年）; 保罗·狄拉克, 《电子量子理论：第二部分》, 《伦敦皇家学会会刊A辑》118, 351（1928年）。[162] 迈克尔·阿蒂亚、V. K. Patodi 和伊萨多·辛格, 《谱不对称性与黎曼几何 I》, 《剑桥哲学会数学会刊》77, 43（1975年）。[163] T. P. Branson 和 P. B. Gilkey, 《狄拉克型算子的η函数留数》, 《泛函分析杂志》108, 47（1992年）。

[164] R. Geroch, 《生成爱因斯坦方程解的一种方法》, 《数学物理杂志》12, 918（1971年）。[165]S. Harris, 《共形静止时空》, Class. Quantum Grav. 9, 1823（1992年）。[166] M. A. Javaloyes 和 M. Sánchez, 《关于共形静止时空中标准分裂存在性的一则注记》, Class. Quantum Grav. 25, 168001（2008年）, arXiv:0806.0812 [广义相对论与量子宇宙学]。[167] K. Sanders, 《静止时空中线性标量量子场的热平衡态》, Int. J. Mod. Phys. A 28, 1330010（2013年）, arXiv:1209.6068[math-ph]。[168] E. Caponio、M. A. Javaloyes 和 M. Sánchez, 《洛伦兹因果性与Randers型芬斯勒度量之间的相互作用》, Rev. Matem. Iberoam., 919（2011年）, arXiv:0903.3501 [math.DG]。[169] A. Candela、J. Flores 和 M. Sánchez, 《静止时空中作用泛函的整体双曲性与Palais–Smale条件》, 《数学进展》218, 515（2008年）, arXiv:0610175 [math.DG]。[170] M. Anderson, 《爱因斯坦方程的静止真空解》, Ann. Henri Poincaré 1, 977（2000年）, arXiv:0001091 [广义相对论与量子宇宙学]。[171] C. Bär, 《狄拉克算子的谱对旋量结构的依赖性》, Séminaires & Congrès 4, 17 （2000 年）。[172] E. Meinrenken, 《迹公式与 Conley-Zehnder 指标》, 《几何与物理学杂志》13, 1（1994年）。[173] M. Capoferri 和 S. Murro, 《狄拉克算子的整体与微局部方面：传播子与Hadamard态》（2022年）, arXiv:2201.12104 [math.AP]。[174]M. Capoferri 和 D. Vassiliev, 《无质量狄拉克算子的整体传播子与谱渐近》, Integr. Equ. Oper. Theory 94, 30（2022年）, arXiv:2004.06351 [math.AP]。[175] J. J. Duistermaat 和 J. A. Kolk, 《分布：理论与应用》, 基石丛书（Birkhäuser, 波士顿, 2010年）。[176] Y. Safarov, 《傅里叶陶伯定理及其应用》, 《泛函分析杂志》185, 111（2001年）, arXiv:0003014 [math.SP]。[177] A. Masiello, 《静止洛伦兹流形中的类时周期轨道》, 《非线性分析：理论、方法与应用》19, 531（1992年）。[178] M. Sánchez, 《静态时空中的测地线与t周期轨道》, 《非线性分析：理论、方法与应用》35, 677（1999年）。[179] M. Sánchez, 《空间紧致洛伦兹流形中的类时周期轨道》, 《美国数学会会刊》127, 3057（1999年）。[180] R. Bartolo, 《静止洛伦兹流形上的周期轨道》, 《非线性分析：理论、方法与应用》43, 883（2001年）。[181] M. Reed 和 B. Simon, 《泛函分析》, 《现代数学物理方法》第I卷（学术出版社, 美国, 1980年）。

[182] V. Guillemin，关于特征值渐近分布的Weyl公式的新证明，《数学进展》55，131（1985年）。[183] J. Wunsch，微局部分析与演化方程：2008年CMI/ETH暑期学校讲义，载于《演化方程》，Clay数学会议论文集，第17卷，D. Ellwood、I. Rodnianski、G. Staffilani和J. Wunsch编（美国数学学会，2013年），第1–72页，arXiv:0812.3181 [math.AP]。[184] Y. Colin de Verdière，拉普拉斯算子谱与周期测地线：三十年之后，傅里叶研究所年刊57，2429（2007年）。[185] J. Bolte和S. Keppeler，相对论性自旋1/2粒子的半经典时间演化与迹公式，《物理评论快报》81，1987（1998年），arXiv:9805041[quant-ph]。[186] J. Bolte和S. Keppeler，狄拉克方程的半经典方法，Ann. Phys. 274，125（1999年），arXiv:9811025 [quant-ph]。[187] J. Bolte，自旋1/2相对论性粒子的半经典期望值，Found. Phys. 31，423（2001年），arXiv:0009052 [nlin.CD]。[188] J. Bolte和R. Glaser，狄拉克方程中的抖动运动与半经典可观测量，J. Phys. A: Math. Gen. 37，6359（2004年），arXiv:0402154 [quant-ph]。[189] O. Chervova、R. Downes和D. Vassiliev，一阶椭圆系统的谱函数，J. Spectr. Theory 3，317（2013年），arXiv:1208.6015 [math.SP]。[190] G. Rudolph和M. Schmidt，《微分几何与数学物理 I：流形、李群与哈密顿系统》，理论与数学物理（Springer，荷兰，2013年）。[191] A. Weinstein，《辛流形讲义》，CBMS数学区域会议系列，第29卷（美国数学学会，美国，1977年）。[192] F. Latour，拉格朗日横截面、Bott周期性以及余切空间中拉格朗日浸入的生成形式，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 4，24，3（1991年）。[193] E. Giroux，余切空间中拉格朗日浸入的生成形式，载于《辛几何与力学：拉格朗德莫特国际研讨会，法国，1988年5月23–28日》，C. Albert编（Springer，柏林、海德堡，1990年），第139–145页。[194] V. I. Arnol’d，量子化条件中出现的特征类，Funct. Anal. Its Appl. 1，1（1967年）。[195] C. Anné，Maslov丛的拓扑定义，Cubo, a Mathematical Journal 8，第1期，第1页（2006年），arXiv:0601586 [math.DG]。[196] J. B. Keller，非可分系统的修正玻尔-索末菲量子条件，Ann. Phys. 4，180（1958年）。[197]A. Weinstein，辛流形及其拉格朗日子流形，《数学进展》6，329（1971年）。[198] L. Hörmander，伪微分算子与次椭圆方程，载于《奇异积分：纯数学专题研讨会论文集》第10卷，A. P. Calderón编（美国数学学会，美国，1967年），第138–183页。

[199] S. Hollands和R. M. Wald，弯曲时空中的量子场，《物理学报告》574，1（2015年），arXiv:1401.2026 [gr-qc]。[200] S. T. Ali和M. Engliš，量子化方法：物理学家与分析学家的指南，《数学物理评论》17，391（2005年），arXiv:0405065 [math-ph]。[201]K. Fredenhagen和K. Rejzner，弯曲时空中的量子场论：公理化框架与例子，《数学物理杂志》57，031101（2016年），arXiv:1412.5125 [math-ph]。[202] R. Brunetti、K. Fredenhagen和R. Verch，普遍协变的局域性原理——局域量子场论的新范式，《数学物理通讯》237，31（2003年），arXiv:0112041 [math-ph]。[203] C. J. Fewster和R. Verch，弯曲时空中的代数量子场论，载于《代数量子场论进展》，R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen和J. Yngvason编（施普林格国际出版公司，瑞士，2015年），第125–189页，arXiv:1504.00586 [math-ph]。[204] J. Dimock，流形上的局域观测量代数，《数学物理通讯》77，219（1980年）。[205] B. S. Kay和R. M. Wald，关于具有分叉Killing视界的时空上平稳、无奇点拟自由态的唯一性与热性质的定理，《物理学报告》207，49（1991年）。[206] K. Sanders，局域协变Dirac场，《数学物理评论》22，381（2010年），arXiv:0911.1304 [math-ph]。[207] M. Schambach和K. Sanders，弯曲时空中的Proca场及其零质量极限，Rep. Math. Phys. 82，203（2018年），arXiv:1709.01911 [math-ph]。[208] M. J. Pfenning，任意维弯曲时空中Maxwell场的量子化，Class. Quantum Grav. 26，135017（2009年），arXiv:0902.4887 [math- ph]。[209] K. Sanders、C. Dappiaggi和T.-P. Hack，电磁学、局域协变性、Aharonov–Bohm效应与高斯定律，《数学物理通讯》328，625（2014年），arXiv:1211.6420 [math-ph]。[210] F. Finster和A. Strohmaier，整体双曲时空中Maxwell场的Gupta–Bleuler量子化，Ann. Henri Poincaré 16，1837（2015年），arXiv:1307.1632 [math-ph]。[211]K. Fredenhagen和K. Rejzner，微扰代数量子场论中的Batalin-Vilkovisky形式体系，《数学物理通讯》317，697（2013年），arXiv:1110.5232 [math-ph]。[212] N. Drago和V. Moretti，观测量的概念与矩问题，适用于

∗ -代数及其 GNS表示，Lett. Math. Phys.**110**，1711（2020年），arXiv:1903.07496 [math-ph]。[213] M.Reed 和 B. Simon，《傅里叶分析》，《现代数学物理方法》第二卷（Acadmic Press，美国，1975年）。[214] C. Itzykson 和 J.-B. Zuber，《量子场论》（Dover，纽约，2005年）。

[215] C. J. Fewster 和 R. Verch，动力学局域性与协变性：是什么使物理理论在所有时空中保持相同？《Ann. Henri Poincaré》13，1613（2012年），arXiv:1106.4785 [math-ph].[216] C. J. Fewster，《状态之艺》，《现代物理学国际杂志D辑》27，1843007（2018年），arXiv:1803.06836 [gr-qc].[217] I. Khavkine 和 V. Moretti，局部协变量子场论重整化中的解析依赖性并非必要要求，《数学物理通讯》344，581（2016年），arXiv:1411.1302 [gr-qc].[218] K. Fredenhagen 和 K. Rejzner，代数量子场论模型的微扰构造，载于《代数量子场论进展》，R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason 编（施普林格国际出版公司，瑞士，2015年），第31–74页，arXiv:1503.07814 [math-ph].[219] A. Ashtekar，《广义相对论与引力：第十届广义相对论与引力国际会议特邀论文及讨论报告》，帕多瓦，1983年7月3–8日（Springer，荷兰，1984年），第D1章《量子引力与弯曲空间中的量子场论》工作组报告。[220] R. Haag、H. Narnhofer 和 U. Stein，关于引力背景中的量子场论，《数学物理通讯》94，219（1984年）。[221] V. Moretti，关于量子场论中的全局哈达玛拟基本解，以及在大于凸正规邻域的区域中定义的带符号的测地线距离平方，《Lett. Math. Phys.》111，130（2021年），arXiv:2107.04903 [gr-qc].[222] M. Koehler，弯曲时空上局部超对称量子场的应力能量张量，博士论文（1995年），arXiv:9505014 [gr-qc].[223] K. Kratzert，整体双曲时空上自由狄拉克场二点函数的奇异性结构，《物理学年刊》9，475（2000年），arXiv:0003015 [math- ph].[224] I. Khavkine 和 V. Moretti，弯曲时空中的代数QFT与准自由哈达玛态：导论，载于《代数量子场论进展》，R. Brunetti、C. Dappiaggi、K. Fredenhagen 和 J. Yngvason 编（施普林格国际出版公司，瑞士，2015年），第191–251页，arXiv:1412.5945[math-ph]。