arXiv:2301.11033v1 [math.AC] 26 Jan 2023

多项式环的几何子环中的高效生成与幺模元素

SOURJYA BANERJEE、CHANDAN BHAUMIK 和 HUSNEY PARVEZ SARWAR

摘要。设 R 是维数为 d 的交换诺特环。首先，我们定义维数为 $d+1$ 的多项式环 $R[T]$ 的“几何子环” A （几何子环的定义更一般，见 (1.2)）。然后证明，每个高度为 $d+1$ 的局部完全交理想都是完全交理想。由此改进了 Mohan Kumar [16] 关于任意维数为 $d+1$ 的环的普遍界。随后，我们推导出每个秩为 $d+1$ 的有限生成射影 A-模都分裂出一个秩一自由直和项。这改进了 Serre [26] 关于任意环的普遍界。最后，我们给出了关于几何环 A 中理想的集合论生成及其多项式扩张 $A[X]$ 的应用。

1. Introduction

设 R 是一个（Krull）维数为 d的交换诺特环。Serre [26] 的一个经典结果断言，每个秩为 d 的有限生成投射 R-模 P 都分裂出一个秩一的自由直和项。一般而言，这是可能得到的最佳结果，实代数球面上的切丛便证明了这一点。因此，如果 $rank(P) \leq d$，那么关于 P 分裂出一个自由直和项的问题就变得微妙而关键。在$rank(P) =$ 维数为 dim(A) 的情形下，其中 A 是代数闭域上的光滑仿射代数，存在一种成熟的障碍理论，该理论归功于 Murthy [20, 定理 3.7]。Murthy [20] 的关键步骤之一，是 Mohan Kumar [17]提出的以下优美定理。

定理 1.1。设 A 是一个维数为 $d \geq 2$的代数闭域上的仿射代数。设 P 是一个秩为 d 的有限生成投射 A-模，并且 $\phi \in \mathrm{Hom}_A(P, A)$，其像理想 $\phi(P)$ 的高度为 d。那么，当且仅当 $\phi(P)$ 由 d 个元素生成时， P 分裂出一个秩一的自由直和项。

现在我们来定义环 R 中理想 I 的有效生成，这与完全交理想有明显的联系（见注 3.4）。如果 $\mu(I/I^2) = \mu(I)$，则称理想 I 有效生成，其中 $\mu(*)$ 是 $*$ 作为 R/I （分别为 R）模的最小生成元个数。在 [15], 中，Mohan Kumar 证明了 $\mu(I/I^2) \leq \mu(I) \leq \mu(I/I^2) + 1$。此外，他在 [16], 中证明，只要 $\mu(I/I^2) \geq d+1$， I 就是有效生成的。众所周知，实 n-球面上存在一个实极大理想，它不能由 n 个元素生成。这表明，前文提到的理想有效生成的界一般来说是最佳的。因此，当 $\mu(I/I^2) =$ dim(R) 时，理想 I 的有效生成问题便显得有趣。在多项式环 $R[T]$ 中，根据 Sathaye 的结果 [25] （针对无限域上的仿射整环）以及 Mohan Kumar 的结果[16], , 我们知道，任何满足性质 $\mu(K/K^2) = d+1$ 的理想 $K \subset R[T]$ 都是有效

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 13C10；次要分类 19A15。
Key words and phrases. 有效生成、投射模、幺模元素、集合论生成、欧拉类群。

生成的，只要 ht(K) ≥ 1。这是他们解决关于有限模生成元个数的 Eisenbud-Evans 猜想时所采取的关键步骤之一。

Befo在陈述我们关于有效生成的结果之前，我们先给出以下定义。

定义 1.2. 设 R 是一个维数为 $d \geq 1$ 的交换诺特环。设 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $f \in R[T]$ 是非零因子。若环 A 满足以下条件，则称其为 $R[T, f^n]$ 的几何子环：

(1) A 是一个维数为 $d+1$ 的诺特环，且 $R \subset A \subset R[T, f^n]$；(2) 存在一个非零因子 $s \in R$，使得 $A_s = R_s[T, f^n]$。

注 1.3. 我们称 A 为几何子环，是因为我们的主要例子是 Rees 代数 $R[It]$ 和类 Rees 代数 $R[It, t^n]$ ($n \in \mathbb{Z}$)。在沿子簇对簇进行爆破时，这些代数会自然地出现在代数几何中。另一类例子是诺特符号 Rees 代数。

对于 $R[T, f^n]$ 的几何子环 A，我们有如下关于在 A 中有效生成理想的结果（证明见定理 3.6）。设 A 是满足 (1.2) 的环（不必是诺特环）。设 $I \subset A$ 是一个理想，使得 ht(I) ≥ 2，且 $\mu(I) < \infty$。此外，假设 $I =< f_0, \ldots, f_d > +I^2$。那么存在 $F_i \in I$，使得$I =< F_0, \ldots, F_d >$，且 $F_i - f_i \in I^2$ $(i = 0, \ldots, d)$。

更一般地，我们证明如下结果。

定理 1.4.（定理 3.2）设 A 是满足 (1.2) 的环。设 L 是秩为一的有限生成射影 A-模。设 $I \subset A$ 是一个理想，使得 ht(I) $=$ dim(A)。进一步，假设存在一个满射 $\omega_I : (L/IL) \oplus (A/I)^d \twoheadrightarrow I/I^2$。那么存在一个满射 $\phi : L \oplus A \twoheadrightarrow I$，使得 $\phi \otimes A/I = \omega_I$。特别地，$(d+1)$-次欧拉类群 $E^{d+1}(A, L)$ 是平凡的。

多项式环的有效生成问题由 Mohan Ku- mar 解决，Laurent 多项式环的有效生成问题由 Mandal 解决，而多项式环的上环的有效生成问题由 Das–Zinna 解决。

作为一个有趣的应用，我们首先从定理 1.4 推导出以下结果。每个秩为 $d+1$ 的有限生成射影 A模都能分裂出一个秩一自由直和项（定理 3.5）。对于 Rees 代数，这一结果由 Rao– Sarwar 证明。对于符号 Rees 代数（不一定是诺特环），该结果见 [6]。正如我们在第一段中指出的，在秩 $=$ 维的情形下，分裂出一个自由直和项存在障碍。例如，参见 [20]；关于何时有限生成射影模能分裂出一个秩一自由直和项，更全面的障碍理论可参见 [3],[4]。然而，当环 B “良好”时，即使 rank(P) $\leq$ dim(B)，每个有限生成射影 B模 P仍能分裂出一个秩一自由直和项。这类环的例子包括多项式环 $B = R[X_1, \ldots, X_n]$（参见 [21], [5]）、Laurent 多项式环 $B = R[X_1, \ldots, X_n, Y_1^{\pm 1}, \ldots, Y_m^{\pm 1}]$（参见 [18], [2]）以及幺半群环 $R[M]$；其中 M 是属于某类交换消去无挠幺半群的幺半群（参见 [13], [14]）。

交换环 R 中的理想 I 若其根基等于由 $f_1, \ldots, f_n$ 生成的理想的根基，即 $\sqrt{I} = \sqrt{< f_1, \ldots, f_n >} =:$ 则称该理想可由 $f_1, \ldots, f_n \in R$ 集合论意义下生成。在第 4 节中，我们证明，A 中（不必是诺特环）的每个有限生成、高度为 ≥ 2 的理想，都可由 $d+1$ 个元素集合论意义下生成（定理 4.2）。在第 5 节中，我们将第 4 节的结果推广到多项式扩张$A[X]$ 中（定理 5.1）。

Acknowledgment

H.P. Sarwar 感谢印度科学与工程研究委员会提供的资助 SRG/2020/000272。本项目是在他作为访问科学家于 I.S.I. Kolkata 工作期间构思的。他谨向

研究所致谢，感谢其提供的支持。S. Banerjee 感谢 Mrinal Kanti Das 教授慷慨分享见解，这些见解帮助他解决了本文探讨的若干问题。他还感谢 Md. Ali Zinna 博士为他解答了有关集合论完全交理想的一些疑问。

2. Recollection of basic definitions and results

2.1. 记号。我们假设所有环都是带乘法单位元 1 的交换环，且所有模都是有限生成的。此外，我们假设投射模具有常秩函数。设 R 是一个环，I、J 是 R 的两个理想。对于任意元素 $x \in R$，$< I$、$x >$（分别是 $< I$、$J >$）表示由 I 和 x（分别由 I 和 J）生成的理想。令 $\sqrt{I}$ 表示理想 I 的根基，即 $\sqrt{I} = \{x \in R \,|\, x^n \in I\}$。令 ht(I) 表示理想 I 的高度。设 P 是一个投射 R-模。在本文中，P^* 均表示 R-模 $\mathrm{Hom}_R(P, R)$。令 Aut(P) 表示 P 的所有自同构构成的群。

我们先给出以下引理。它源自 Mohan Kumar 的一个引理 [15, Lemma], ，这里稍作改写以满足我们的需要。为完整起见，我们给出证明。

引理 2.1. 设 R 是一个交换诺特环，I 是 R的一个理想。设 J, K是 A 的理想，且包含于 I，满足 $K \subset I^2$ 和 $I = J + K$。那么存在 $e \in K$使得 $e(1-e) \in J$ 且 $I =< J, e >$.

证明. 注意到 $(I/J)^2 = (I^2 + J)/J = I/J$（因为 $K \subset I^2$且 $I = J + K$）。因此，I/J 是诺特环 R/J中的幂等理想。用上横线表示模理想 J取商。由于 K的像满射到 I/J，我们得到 $\overline{KI} = \overline{I}$。由中山引理，存在 $e \in K$ 使得$(\overline{1} - \overline{e})\overline{I} = \overline{0}$。因此，$(1-e)I = J$，也就是说，$I + eI = J$。于是模 e 取商可得 $I = J$，从而 $J + < e >= I$。由于 $e \in K \subset I$且$(1-e)I = J$，我们得到 $e(1-e) \in J$。□

以下结果是引理 2.1 的一个应用，是证明主定理所必需的。

引理 2.2. 设 R 是一个交换诺特环。设 I、$J \subset R$ 是两个理想。假设存在 $e \in I^2$，使得 $I =< J$、$e >$。此外，假设 $e \in \sqrt{J}$。那么 $J = I$。

证明. 由局部-整体原理，只需证明对于所有 $\mathfrak{p} \in \in$ 谱（R），都有 $J_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$。由于 $J \subset I$，我们有 V（I）$= \{\mathfrak{p} \in$ 谱（R）：$I \subset \mathfrak{p}\} \subset V$（$J$）。令 $\mathfrak{p} \in V$（J）。由于 $e \in \sqrt{J}$，我们有 $e \in \mathfrak{p}$。因此，$\mathfrak{p} \in V$（I），因为 $I =< J$、$e >$。于是我们有 V（I）$= V$（J）。

设 $\mathfrak{p} \in$ Spec (R)。若 $\mathfrak{p} \notin V(I) = V(J)$，则 $J_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$. 现在假设 $\mathfrak{p} \in V(I)$。在局部环 $R_{\mathfrak{p}}$ 中，我们有 $I_{\mathfrak{p}} =< J, e > A_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}} + I_{\mathfrak{p}}^2$，因为 $e \in I^2$。利用引理 2.1，存在 $s \in I_{\mathfrak{p}}^2$，使得 $I_{\mathfrak{p}} =< J, s > R_{\mathfrak{p}}$ 且 $s(1-s) \in J_{\mathfrak{p}}$。现在，由于 $s \in I_{\mathfrak{p}}^2 \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 且 $R_{\mathfrak{p}}$ 是局部环，元素 $1-s$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的单位。因此我们有 $s \in J_{\mathfrak{p}}$。于是得到 $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$。证明完毕。□

以下结果是 Eisenbud-Evans 的一个定理 [12] 的推论。关于该结果的证明，可参见 [3, 推论 2.8]。

定理 2.3. 设 R 是一个交换环，且 P 是秩为 n 的射影 R-模。设 $(\alpha, a) \in (P^* \oplus R)$。则存在一个元素 $\beta \in P^*$，使得 ht($\mathrm{I_a}$) $\geq$n，其中$I = (\alpha + a\beta)(P)$。

下一个引理的“自由版本”出自 Mohan Kumar [16, 推论 3]。

引理 2.4. 设 R 是维数为 d的交换诺特环。设 L 是秩一射影 R-模。设 $I \subset R$ 是一个理想。假设给定一个满射 $\omega : (L/IL) \oplus (R/I)^d \twoheadrightarrow I/I^2$。则存在一个满射 $\Omega : L \oplus R^d \twoheadrightarrow I$，使得 $\Omega \otimes R/I = \omega$。

证明。设 $\alpha : L \oplus R^d \to I$ 是 ω的一个提升（可能不是满射）。设 $J = \alpha(L \oplus R^d)$。注意到 $I = J + I^2$。因此，根据引理 2.1，存在 $e \in I^2$ 使得 $I =< J、e >$，并且 $e(1-e) \in J$。利用定理 2.3，存在 $\beta \in (L \oplus R^d)^*$，使得 $\mathrm{ht}(J')_e \geq d + 1 > \dim(R)$，其中 $J' = \alpha'(L \oplus R^d)$ 且 $\alpha' = \alpha + e\beta$。注意，我们有 $I =< J、e >=< J'、e >$。由于 $\dim(R) = d$，可得 $J'_e = R_e$。这意味着 $e \in \sqrt{J'}$。因此，利用引理 2.2 可得 $I = J'$。引理的证明至此完成。□

2.2. 欧拉类群简介。本部分旨在简要回顾 [4] 中欧拉类理论的一些基本定义和术语。在介绍欧拉类理论之前，我们先回顾以下定义。

定义 2.5. 设 R 是一个环，P 是一个射影 R-模。若存在一个 R-线性映射 $\phi : P \to R$，使得$\phi(p) = 1$，则称元素 $p \in P$ 是 P 的一个幺模元素。注意，P 有幺模元素，当且仅当 P 分裂出一个秩一自由直和项。

定义 2.6. 设 R 是一个环。设 P 是一个射影 R-模，且 P 或 P^* 有幺模元素。取 $\phi \in P^*(=\text{同态集}_R(P, R))$ 和 $p \in P$，使得$\phi(p) = 0$。定义自同态 ϕ_p 为复合映射 $\phi_p : P \to R \to P$，其中 $R \to P$ 是将 $1 \to p$. 送到的映射。于是，初等变换是指 P 的一个自同构，其形式为 $1 + \phi_p$，其中 $\phi \in \mathrm{Um}(P^*)$ 或 $p \in \mathrm{Um}(P)$。令 $\mathrm{E}(P)$ 表示由所有初等变换生成的 $\mathrm{Aut}(P)$ 的子群。

设 R 是一个维数为 $d \geq 2$ 的交换诺特环。设 $I \subset R$ 是一个理想，满足 $\mu(I/I^2) = \mathrm{ht(I)} = \mathrm{d}$。设 L 是一个秩一投射 R-模。设 $\alpha、\beta : (L/IL) \oplus (R/I)^{d-1} \twoheadrightarrow I/I^2$ 是两个满射。若存在 $\sigma \in \mathrm{E}((L/IL) \oplus (R/I)^{d-1})$ 使得 $\alpha\sigma = \beta$，则称 α 与 β 相关。这在所有满射 $(L/IL) \oplus (R/I)^{d-1} \twoheadrightarrow I/I^2$ 的集合上定义了一个等价关系。用 $[\alpha]$ 表示 α 的等价类。我们称 $[\alpha]$ 为相对于 L 的 I 的“局部定向”。有时我们会滥用记号，称 α 为相对于 L 的 I 的局部定向，而不称其为相对于 $[\alpha]$ 的局部定向。若存在一个满射 $\Gamma : L \oplus R^{n-1} \twoheadrightarrow I$ 使得 $\Gamma \otimes R/I = \alpha$，则称局部定向 $[\alpha]$ 为相对于 L 的 I 的“全局定向”。在这种情况下，我们称 Γ 为 α 的满射提升。注意，由于典范映射 $\mathrm{E}(L \oplus R^{d-1}) \twoheadrightarrow \mathrm{E}((L/IL) \oplus (R/I)^{d-1})$ 是满射，若 α 有满射提升，则任何与 α 等价的 β 也有满射提升。每当 $L \cong R$ 时，我们将称其为 I 的局部定向（分别为全局定向），而不称其为相对于 R 的 I 的局部定向（分别为全局定向）。

令 G 为由集合 B 构成的自由阿贝尔群，其中元素为形如 (I, ω_I) 的有序对：

(1) $I \subset R$ 是一个理想，满足 $\mu(I/I^2) = \mathrm{ht(I)} = \mathrm{d}$；(2) $\mathrm{Spec}\,(R/I)$ 是连通的；
(3) $\omega_I : (L/IL) \oplus (R/I)^{d-1} \twoheadrightarrow I/I^2$ 是相对于 L的 I的局部定向的一个等价类。

令 H 为由集合 S 中的各对 (J, ω_J) 生成的 G 的子群，其中 ω_J 是相对于 L 的 J 的全局定向等价类。则商群 G/H 称为相对于 L 的 R 的“d 阶欧拉类群”，记作 $E^d(R, L)$。当 $L \cong R$ 时，我们将用 $E^d(R)$ 代替 $E^d(R, R)$。

设 P 是秩为 d、行列式为 L 的射影 R-模。设 $\chi\colon \wedge^d(L\oplus R^{d-1}) \xrightarrow{\sim}\wedge^d(P)$ 是一个同构。设 $\lambda\colon P\twoheadrightarrow I$ 是一个满射，其中 I 是 R 中高度为 d 的理想。用“上横线”表示模 I。我们得到一个诱导满射 $\lambda\otimes(R/I):P/IP \twoheadrightarrow I/I^2$。注意，由于 P 的行列式为 L 且 $\dim(R/I) = 0$，我们有$P/IP \cong (L/IL)\oplus(R/I)^{d-1}$。我们选取一个同构 $\phi:(L/IL)\oplus(R/I)^{d-1} \xrightarrow{\sim} P/IP$，使得 $\wedge^d\phi = \chi\otimes R/I$。令 ω_I 为满射 $(\lambda\otimes R/I)\circ\phi:(L/IL)\oplus(R/I)^{d-1}\twoheadrightarrow I/I^2$。我们称 (I,ω_I) 是由三元组 (P,λ,χ) 诱导的“欧拉循环”。

只要欧拉循环不依赖于 λ 的选择，也就是说，如果 (J,ω_J) 是由三元组 (P,λ',χ) 诱导的另一个欧拉循环，对某个 $\lambda'\in P^*$，那么在$E^d(R,L)$ 中，$(I,\omega_I) = (J,\omega_J)$；在这种情况下，我们称 (I,ω_I) 在欧拉类群$E^d(R,L)$ 中的类为有序对 (P,χ) 的“欧拉类”，记作 $e(P,\chi)$。[4],证明了，只要该环包含一个无限域，并且 R 光滑或 $\frac{1}{d!}\in R$，那么这样的有序对 (P,χ) 的欧拉类就是良定义的。

以下定理归功于 Bhatwadekar-Sridharan [4, 定理 4.2]。在证明我们的主定理的过程中，这一定理得到了关键且频繁的应用。

定理 2.7. 设 R 是维数为 $d\geq 2$的交换诺特环。设 L 是秩为一的投射 R-模。设 $(I,\omega_I)\in E^d(R,L)$。那么，$(I,\omega_I) = 0$属于 $E^d(R,L)$ 当且仅当 ω_I 是关于 L的 I 的全局定向。

3. Efficient generation and triviality of the Euler class group

下面的引理是对 Bhatwadekar-Sridharan [4,引理 5.6], 所获结果的改进，并且对我们的主定理至关重要。证明时，我们将沿用他们的论证，并作必要的修改。

引理 3.1. 设 R 是维数为 $d\geq 2$的交换诺特环。设 L 是秩为一的投射 R-模。设 $(I,\omega_I)\in E^d(R,L)$，且 $(I,\omega_I)\neq 0$ 属于 $E^d(R,L)$。此外，假设存在一个非零因子 $s\in R$，使得以下条件成立：

(1) $\dim(R_s) = d$; (2) 高度$(I_s) =d$; (3) $(I,\omega_I)_s = 0$属于 $E^d(R_s,L_s)$,
其中 $(I,\omega_I)_s:=(I_s,\omega_I\otimes(R/I)_s)$。

那么 t 存在 $(J,\omega_J)\in E^d(R,L)$，使得 $(I,\omega_I) = (J,\omega_J)$ 属于 $E^d(R,L)$，并且 $s\in\sqrt{J}$.

证明。我们定义 $B:=\frac{R}{sR\cap I^2}$。令 ‘bar’ 表示模理想 $sR\cap I^2$ 取商。由于 s 是非零因子，我们有 $\dim(B)\leq d-1$。因此，在环 B 中，我们有

$$\overline{\omega_I}:(\overline{L}/\overline{IL})\oplus(B^{d-1})\twoheadrightarrow\overline{I}/\overline{I}^2.$$

利用引理 2.4，我们得到一个满射 $\overline{\Gamma_I}$: $\overline{L}\oplus B^{d-1}\twoheadrightarrow\overline{I}$，使得 $\overline{\Gamma_I}\otimes B/\overline{I} = \overline{\omega}_I$。令 Γ_I: $L\oplus R^{d-1}\to I$ 为 $\overline{\Gamma_I}$ 的一个提升，它事先不一定是满射。于是我们得到$I = J_{\Gamma_I}+I^2\cap sR$，其中 $J_{\Gamma_I} = \Gamma_I(L\oplus R^{d-1})$。利用引理 2.1，存在 $e\in I^2\cap sR$，使得 $I =< J_{\Gamma_I}, e >$，且 $e(1-e)\in J_{\Gamma_I}$。此外，利用定理 2.3，将 Γ_I 替换为 $\Gamma_I+e\Gamma_I'$，对于某个适当选取的 $\Gamma_I'\in(L\oplus R^{d-1})^*$，我们有高度$((J_{\Gamma_I})_e)\geq d$，也就是说，$(J_{\Gamma_I})_e = R_e$，或者高度$((J_{\Gamma_I})_e) = d$。若 $(J_{\Gamma_I})_e = R_e$，则 $e\in\sqrt{(J_{\Gamma_I})}$。因此，利用引理 2.2，我们有 $J_{\Gamma_I} = I$。这给出 $\Gamma_I\colon L\oplus R^{d-1}\twoheadrightarrow I$ 是 ω_I 的一个满射提升。因此，利用定理 2.7，我们有 $(I,\omega_I) = 0$ 属于 $E^d(R,L)$，这与假设矛盾。

因此，我们可以假设 $\mathrm{ht}((J_{\Gamma_I})_e) = d$。令 $I_1 =< J_{\Gamma_I}, 1-e >$。注意，我们有如下结论：

(a) $\Gamma_I\colon L\oplus R^{d-1}\twoheadrightarrow I\cap I_1 = J_{\Gamma_I}$是满射；(b)
$I_1+eR = I_1+sR = I_1+I = R$; (c) $\mathrm{ht}(I_1) = d$。

由于 $I_1+I=R$，利用中国剩余定理，我们有 $R/(I\cap I_1)\cong R/I\oplus R/I_1$。因此， Γ_I 诱导出相对于 L的 I 和 I_1 的局部定向。由于 Γ_I 是 ω_I的提升，由 Γ_I诱导出的相对于 L的 I的任意局部定向，都与$E^d(R,L)$中的 (I,ω_I) 相匹配。设 Γ_I诱导出相对于 L的 I_1的一个局部定向。于是由 (a) 可得

$$(I,\omega_I)+(I_1,\omega_1')=0. \tag{3.1}$$

由于 $I_1+sR=R$ 且 ht(I$_1$) = d，我们得到 ht((I$_1$)$_s$) = d。这表明类 $(I_1,\omega_1')_s$ 属于 $E^d(R_s, L_s)$。由于我们有 $(I,\omega_I)_s=0$ 属于 $E^d(R_s,L_s)$，由 3.1 可得 $(I_1,\omega_1')_s=0$ 属于 $E^d(R_s,L_s)$。因此，利用定理 2.7，我们得到一个满射提升

$$\tau' : L_s\oplus {R_s}^{d-1}\twoheadrightarrow (I_1)_s$$

$\omega_1'\otimes(R/I_1)_s$。

由于 L 是有限生成的，存在一个整数 $k\geq 1$，使得 $(s^{2k}\tau')(L_s\oplus {R_s}^{d-1})\subset I_1$。令 $\tau=(s^{2k}\tau')\circ i$：$L\oplus R^{d-1}\to I_1$，其中 i：$L\oplus R^{d-1}\to L_s\oplus {R_s}^{d-1}$是由局部化映射诱导的典范映射。由于 s 模 I_1是一个单位，映射 $\tau\otimes R/I_1 : (L/I_1L)\oplus(R/I_1)^{d-1}\twoheadrightarrow I_1/I_1^2$是满射。也就是说，$\tau\otimes R/I_1$ 是 I_1 相对于 L的一个局部定向。令 $\omega_1''=\tau\otimes R/I_1$。根据 τ的构造，我们有 $(I_1,\omega_1')=(I_1,u^2\omega_1'')$，其中某个 $u\in(R/I_1)^*$（这里 u将是 s的某个幂）。利用 [4,引理 5.4]，我们得到 $(I_1,u^2\omega_1'')=(I_1,\omega_1'')$，这意味着 $(I_1,\omega_1')=(I_1,\omega_1'')$。因此，由 3.1 可得

$$(I,\omega_1)+(I_1,\omega_1'')=0. \tag{3.2}$$

现在调整 [4,引理 5.6 的证明，段落 2],，我们得到 $(J,\omega_J)\in E^d(R,L)$，使得以下结论成立：

(1) $(J)_s=R_s$；(2) $I_1+J=R$；(3)
$(I_1,\omega_1'')+(J,\omega_J)=0$属于 $E^d(R,L)$。

由于 $(J)_s=R_s$，我们有 $s\in\sqrt{J}$。现在结合 (3.2) 和 (3)，得到 $(I,\omega_I)=(J,\omega_J)$ 属于 $E^d(R,L)$。证明至此完成。□

定理 3.2. 设 A 是 (1.2) 中的环。设 L 是一个秩为一的有限生成射影A-模。设 $I\subset A$ 是一个理想，满足 ht(I) = dim(A) = d + 1。此外，假设存在一个满射 $\omega_I : (L/IL)\oplus(A/I)^d\twoheadrightarrow I/I^2$。那么存在一个满射 ϕ：$L\oplus A\twoheadrightarrow I$，使得 $\phi\otimes A/I=\omega_I$。特别地，($d+1$) 阶欧拉类群 $E^{d+1}(A,L)$是平凡的。

证明。令 S 为 R 中由所有非零因子组成的乘法封闭子集。容易验证， $S^{-1}(R)$ 是一个阿廷环，且 $S^{-1}A\cong S^{-1}R[T,f^n]$。为了证明 $S^{-1}L$ 是自由模，我们可以假设 $S^{-1}R[T,f^n]$ 是约化的。但此时 $S^{-1}R$ 是域的直积，因此 $S^{-1}R[T,f^n]$ 是主理想整环的直积。所以我们得出结论： $S^{-1}L$ 是秩一的自由 $S^{-1}A$-模。

由于 L 是有限生成的，存在 $s_1\in S$，使得 L_{s_1} 是秩一的自由 A_{s_1}-模。由于 A 是几何环，存在一个非零因子 $s_2\in R$，使得 $A_{s_2}=R_{s_2}[T,f^n]$。令 $s=s_1s_2$。注意， $s\in R$ 是一个非零因子，且满足 $L_s\cong A_s$ 和 $A_s=R_s[T,f^n]$。现在我们分以下两步证明该定理。

步骤 1. 在这一步中，我们将证明可以假设 $s\in\sqrt{I}$。

步骤 1 的证明。注意，dim(A_s) $\leq$ dim(A) $=d+1$。因此，要么 dim(A_s) $=d+1$，要么 $\leq d$。我们将分别处理这两种情形。

情形 1. 假设 dim(A_s) $=d+1$。

回顾一下， A_s 的素理想与环 A中不包含 s的素理想之间存在一一对应。因此，对于任意素理想 $\mathfrak{p}\subset A$,

$s \notin \mathfrak{p}$ 意味着 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_s) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$。设 $\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$，其中 $\mathfrak{p}_i$是环 A的素理想。由于 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(\sqrt{I}) = d+1$ 且 $\dim(A) = d+1$, 我们有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = d+1$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$均成立。因此，我们要么有 $\mathrm{ht}(I_s) = d+1$，要么有 $I_s = A_s$。现在，若 $I_s = A_s$，则$s \in \sqrt{I}$。因此，我们已经得到了步骤 1 的结论。

因此，我们假设 $\mathrm{ht}(I_s) = d+1$。注意， A_s 是多项式环 $R[T]$的一个扩环。我们有 $\mathrm{ht}(I) = d+1$，且 $\mathrm{ht}(I_s) = d+1 \geq 2$。因此，利用 [11, 定理 3.2],，我们得到 $(I_s, \omega_I \otimes (A/I)_s) = 0$ 属于 $E^{d+1}(A_s)$。注意，若 $(I, \omega_I) = 0$属于 $E^{d+1}(A, L)$，则利用定理 2.7 可得， ω_I 是 I 关于 L的全局定向。因此定理得证。于是，不失一般性，我们可以假设 $(I, \omega_I) \neq 0$ 属于 $E^{d+1}(A, L)$。因此，根据前面的化简，我们可以假设三元组 $(A, (I, \omega_I)\ s)$ 满足引理 3.1 的所有假设。应用引理 3.1，我们得到 $(J, \omega_J) \in E^{d+1}(A, L)$，使得 $(I, \omega_I) = (J, \omega_J)$ 且 $s \in \sqrt{J}$。注意，根据定理 2.7，要证明该定理，只需证明 $(J, \omega_J) = 0$ 属于 $E^{d+1}(A, L)$。因此，用 (J, ω_J) 替换 (I, ω_I) 后，我们可以假设 $s \in \sqrt{I}$。这就完成了 $\dim(A_s) = d+1$ 时步骤 1 的证明。

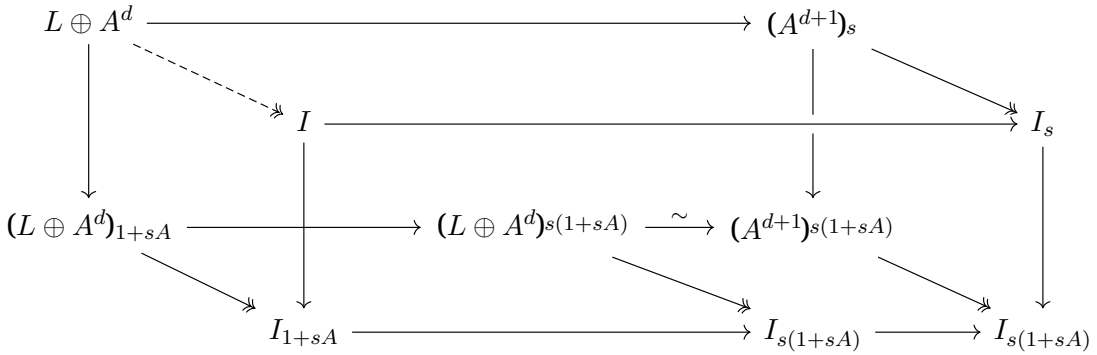
情形 2. 假设 $\dim(A_s) \leq d$。

令 $B = A/sA \cap I^2$。用 'bar' 表示模去理想 $sA \cap I^2$。由于 $\dim(A_s) < d+1$，由引理 2.4， $\overline{\omega_I}$ 是相对于 $\overline{L}$ 的 $\overline{I}$ 的全局定向。令 $\Gamma\colon L \oplus A^d \to I$ 为 $\overline{\omega_I}$ 的一个提升。于是我们有 $I = K + I^2 \cap sA$，其中 $K = \Gamma(L \oplus A^d)$。利用引理 2.1，存在 $e \in I^2 \cap < s >$ 使得 $I =< K, e >$，且 $e(1-e) \in K$。此外，利用定理 2.3，我们可以假设 $\mathrm{ht}(K'_e) \geq d+1$，其中 $K' = (\Gamma + e\lambda)(L \oplus A^d)$，对某个适当选取的 $\lambda \in (L \oplus A^d)^*$。由于我们有 $I =< K', e >$ 和 $e \in < s >$，这意味着 $\mathrm{ht}(K'_s) \geq \mathrm{ht}(K'_e) \geq d+1$。由于 $\dim(A_s) < d+1$，可得 $s \in \sqrt{K'} \subset \sqrt{I}$。这就完成了步骤 1 的证明。

步骤 2. 在这一步中，我们证明 ω_I 是关于 L的 I 的全局定向。

步骤 2 的证明。注意，根据定理 2.7，只需证明 $(I, \omega_I) = 0$属于 $E^{d+1}(A, L)$。由于 s 是非零因子，根据移动引理 [4, 推论 2.14] ，我们得到一个高度为 $d+1$ 的理想 $I' \subset A$，使得 $I' + I = I' + < s >= A$，并且存在一个满射$\beta\colon L \oplus A^d \twoheadrightarrow I \cap I'$，其中 $\beta \otimes A/I = \omega_I$。由于 $I' + < s >= A$，映射 $\omega_1 := \beta \otimes A_{1+sA}\colon L_{1+sA} \oplus (A_{1+sA})^d \twoheadrightarrow I_{1+sA} \cap I'_{1+sA} = I_{1+sA}$ 是满射。注意，$\omega_1 \otimes (A_{1+sA}/I_{1+sA}) = (\beta \otimes A/I) \otimes (A_{1+sA}/I_{1+sA}) = \omega_I \otimes (A_{1+sA}/I_{1+sA})$。

在环 A_s 中，我们有 $I_s = A_s$，因为 $s \in \sqrt{I}$。令 $\omega_2 : (A_s)^{d+1} \twoheadrightarrow I_s$，它将 e_1 映为 1，并对所有 $i > 1$ 将 e_i 映为 0。由于 $I_s = A_s$，等式 $\omega_2 \otimes (A_s/I_s) = \omega_I \otimes A_s$ 显然成立。考虑下面的纤维积图:



注意， $A_{s(1+sA)} = (R_s[T, f^n])_{1+sA} = S'^{-1}R'[T]$，其中 $R' = R_{s(1+sR)}$和 S'是 $R'[T]$的非零因子构成的某个乘法封闭子集。因此， $A_{s(1+sA)}$ 是多项式环 $R'[T]$的一个扩环。由于 $\dim(R') \leq d-1$，我们有 $\dim(A_{s(1+sA)}) \leq d$。另请注意，由于 $L_{s(1+sA)} \cong A_{s(1+sA)}$，我们得到 $(\omega_1)_s$，$(\omega_2)_{1+sA} \in \mathrm{Um}^{d+1}(A_{s(1+sA)})$。

因此，由 Rao 的定理 $[23, \text{定理 } 5.1\ (\mathrm{I})]$, , 存在 $\epsilon \in E_{d+1}(A_{s(1+sA)})$，使得 $((\omega_2)_{1+sA})$ $\epsilon = (\omega_1)_s$。由于初等矩阵与恒等矩阵同伦，利用 Quillen 的分裂定理 $[22, \text{引理 } 1]$，矩阵 ϵ 可分裂。利用纤维积的泛性质，我们得到唯一映射 $\phi\colon L \oplus A^d \to I$，使得 $\phi_{1+sA} = \omega_1$ 且$\phi_s = \omega_2$。为证明 ϕ 是 ω_I 的满射提升，只需验证其局部成立。设 $\mathfrak{m} \subset A$ 为一个极大理想。那么 $\mathfrak{m}$ 要么与 s 互素，要么与$1 + s$互素。因此，无论哪种情况，在环 $A_{\mathfrak{m}}$中，映射 ϕ 都与 ω_1 或ω_2之一相一致。证明完毕。□

注 3.3. 在定理 3.2 中取 $L = A$，可得：对于任意理想 $I \subset A$，若 $\mu(I/I^2)$ $=\dim(A)$ $= \mathrm{ht}(\mathrm{I})$，则 $\mu(I)$ $= \dim(A)$。此外，这说明 I/I^2 的任意一组 $d+1$ 生成元都可提升为 I 的一组 $d+1$ 生成元。这里我们想指出，只需假设 I 有限生成，即可弱化“ A 是诺特环”这一假设。具体做法如下。令 $I =< f_1, \ldots, f_k >$。由于 A 是 $R[T, f^n]$的几何子环，存在 $g_1, g_2 \in A$，使得 $\frac{g_1}{s^{m_1}} = T$ 且 $\frac{g_2}{s^{m_2}} = f^n$ 属于 $R_s[T, f^n]$。现在考虑 $B = R[f_1, \ldots, f_n, g_1, g_2]$。那么 B 是有限生成的 $R-$代数，且 $I \subset B$ 和 $B_s = A_s = R_s[T, f^n]$。现在只需证明 I 在 B 中可高效生成。

注 3.4. 设 R 是一个维数为 d 的交换诺特环， I 是 R 的一个理想，且 $\mathrm{ht}(\mathrm{I}) = \mathrm{d}$。若 $\mu(I/I^2) = d$，则易于验证， I 是一个高度为 d的局部完全交理想。因此，定理 3.2 表明，A 中每个高度为 $d+1$ 的局部完全交理想，都是一个高度为 $d+1$ 的完全交理想。

沿用定理 3.2 中的记号，在下一个定理中，我们将证明，任意秩为 $d+1$ 的投射 A-模 P 都可分裂出一个秩一自由直和项。注意，此处我们假设该环是诺特环。对于 Rees 代数或扩张 Rees 代数，这一点已在 $[24]$中得到证明。

定理 3.5. 设 A 如定理 3.2 中所述。设 P 是一个投射 A-模，满足 $\mathrm{rank}(P) = d+1$。那么，P含有一个幺模元素。

证明。我们由定理 3.2 和减法原理 $[4, \text{推论 } 3.4]$ 推导出该定理。为此，设 $L := \wedge^{d+1}P$ 且 $Q := L \oplus A^{d-1}$。于是 $\wedge^d Q = L$。设 $\chi\colon \wedge^{d+1}P \cong \wedge^{d+1}(Q \oplus A) (\cong L)$ 为一个同构。令 $(I, \omega_I) \in E^{d+1}(A, L)$ 为由三元组 (P, λ, χ) 诱导的欧拉循环，其中 $\lambda\colon P \twoheadrightarrow I$ 经过适当选取。这意味着存在一个同构 $\phi\colon (L/IL) \oplus (A/I)^d \xrightarrow{\sim} P/IP$，使得 $\wedge^{d+1}\phi = \chi \otimes A/I$，以及一个满射$\omega_I := (\lambda \otimes A/I) \circ \phi\colon (L/IL) \oplus (A/I)^d \twoheadrightarrow I/I^2$。

由定理 3.2，我们有一个满射提升 $\beta\colon L \oplus A^d \twoheadrightarrow I$，使得 $\beta \otimes A/I = \omega_I$。也就是说， $\beta \otimes A/I = (\lambda \otimes A/I) \circ \phi$。现在由 $[4, \text{推论 } 3.4]$, 可知， P有一个幺模元素。□

在下一个定理中，我们放宽了定理 3.2 中关于理想高度的一些假设。

定理 3.6. 设 A 如 (1.2) 中所述。设 $I \subset A$ 是一个理想，满足 $\mathrm{ht}(\mathrm{I}) \geq 2$ 且$\mu(I/I^2) \leq d+1$。则 $\mu(I) \leq d+1$。此外， $I =< a_0, \ldots, a_d > +I^2$ 的任意一组 $d+1$ 个生成元都可提升为 I 的一组 $d+1$ 个生成元。

证明。注意，若 $\mu(I/I^2) < d+1$，则由引理 2.1 得到 $\mu(I) \leq d+1$。因此我们可以取 $\mu(I/I^2) = d+1$。由引理 2.1，存在 $e \in I^2$，使得 $I =< a_0, \ldots, a_d, e >$，且 $e(1-e) \in < a_0, \ldots, a_d >$。此外，利用定理 2.3，我们可以假设 $\mathrm{ht}(< \mathrm{b0}, \ldots, \mathrm{b_d} >_{\mathrm{e}}) \geq \mathrm{d}+1$，其中 $b_i = a_i + e\lambda_i$ 对所有 $i = 0, \ldots, d$ 均成立。注意，对所有 $i = 0, \ldots, d$，都有 $a_i - b_i \in I^2$。令 $J =< b_0, \ldots, b_d, 1-e >$。由于 $J + < e >= A$ 且 $\mathrm{ht}(< \mathrm{b0}, \ldots, \mathrm{b_d} >_{\mathrm{e}}) \geq \mathrm{d}+1$，我们得到 $\mathrm{ht(J)} \geq \mathrm{d}+1$。现在，若 $\mathrm{ht(J)} > \mathrm{d}+1$，则

结论由以下事实得出： $I \cap J =< b_0, \ldots, b_d >$。因此，我们可以假设 ht(J) $=$ d $+ 1$。

注意， $J =< b_0$、.....、b_d、$1 - e >$诱导出 $J =< b_0$、.....、$b_d > +J^2$。现在利用定理 3.2，存在 $c_i \in J$（$i = 0$、.....、d），使得 $J =< c_0$、.....、$c_d >$满足 $c_i - b_i \in J^2$，其中 $i = 0$、.....、d。应用命题 2.2], 中的减法原理 [9,，我们可以找到$f_i \in I$，使得 $I =< f_0$、.....、$f_d >$满足 $f_i - b_i \in I^2$，其中 $i = 0$、.....、d。证明完毕。□

注 3.7. 按照注 3.3 中给出的论证，定理 3.6 对 $R[T]$的非诺特几何子环 A 也成立，但需附加假设 μ（I） $< \infty$.

4. Application 1: Set-theoretic generation of ideals in A

设 A 如（1.2）所述。作为主定理的一个应用，本节将推导出关于环 A 中理想的集合论生成的一些结果。

以下定理的证明见 [7, 定理]。

定理 4.1. 设 R 是一个维数为 d的交换诺特环。设 $I \subset R$ 是一个理想。那么存在一个理想 J，满足 $\mu(J/J^2) \leq d$且 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$。

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 4.2. 设 A 是（1.2）中所述的环，但不一定是诺特环。设 $I \subset A$ 是一个理想，满足 ht(I) ≥ 2 且 $\mu(I) < \infty$。那么 I 在集合论意义下由至多$d + 1$ 个元素生成。

证明。注意，按照注 3.3 中给出的论证，只需假设 A 是一个诺特环。由定理 4.1 可知，存在一个理想$J \subset A$，使得 $\mu(J/J^2) \leq d + 1$且 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$。因此，只需证明$\mu(J) \leq d + 1$。证明的其余部分将用于证明这一点。

注意，若 $\mu(J/J^2) \leq d$，则由引理 2.1 可得 $\mu(J) \leq d + 1$。因此，我们可以假设 $\mu(J/J^2) = d + 1$。由于 $\sqrt{J} = \sqrt{I}$，我们有 ht(J) $=$ ht(I) ≥ 2。因此，可以利用定理 3.6 得到 $\mu(J) \leq d + 1$。证明完毕。□

5. Application 2: Set-theoretic generation of ideals in $A[X]$

令 A 如 (1.2) 所述。作为主定理的一个应用，本节将推导出关于 $A[X]$ 中理想的集合论生成的一些结果。

定理 5.1. 令 R 为维数为 $d \geq 1$ 的交换诺特环，并满足以下条件之一：

(1) $\mathbb{Q} \subset R$; (2) R 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的仿

射代数。

令 A 如 (1.2) 所述，但不必是诺特环，其中 (1.2) 中的 R 是上述两者之一。令 $I \subset A[X]$ 为高度为 ≥ 3 的理想，使得 $\mu(I) < \infty$。此外，假设 $I =< f_1, \ldots, f_{d+1} > +I^2$。那么存在 $g_i \in I$，使得 $I =< g_1, \ldots, g_{d+1} >$，且对所有 $i = 1, \ldots, d + 1$，均有 $f_i - g_i \in I^2$。

证明。我们将证明分为以下两种情况。

情形 1. 在此情形下，我们假设 $\mathbb{Q} \subset A$。注意，依照注 3.3 中的论证，不失一般性，我们可以假设 A 是一个包含 $\mathbb{Q}$ 的诺特环。由于 $\mathbb{Q} \subset A$，利用 [3, 引理 3.3], ，存在 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 使得 $I(\lambda) = A$或 ht(I(λ)) ≥ 3。此外，通过自同构 $T \to T - \lambda$，我们可以假设要么$I(0) = A$，要么 ht(I(0)) ≥ 3。注意，若 ht(I(0)) ≥ 3，则由定理 3.6，存在$b_i \in I(0)$，使得 $I(0) =< b_1, \ldots, b_{d+1} >$，其中 $f_i(0) - b_i \in I(0)^2$，对于 $i = 1, \ldots, d + 1$。利用 [3, 注 3.9]，存在 $F_i \in I$使得 $I =< F_1, \ldots, F_{d+1} > +I^2X$，其中

$F_i - f_i \in I^2$ 且 $F_i(0) = b_i$，对于 $i = 1,\dots,d+1$。注意，要证明此情形下的定理，只需找到 $I =< F_1,\dots,F_{d+1} > +I^2X$ 的生成元的一个提升。本情形证明的其余部分将致力于证明这一点。

令 S 为由 $R[X]$ 中所有首一多项式构成的乘法封闭集。令 $B = S^{-1}R[X]$。令 $A(X)$ 为将 $A[X]$ 中所有首一多项式求逆所得的环。根据 [9, 定理 4.2], ，只需证明生成元集 $IA(X) =<F_1,\dots,F_{d+1} > A(X) + I^2A(X)$ 可以提升为 $IA(X)$ 的一组生成元。此外，由于 $A(X)$ 是 $S^{-1}(A[X])$ 的局部化，只需将 $S^{-1}I = S^{-1} <F_1,\dots,F_{d+1} > +S^{-1}(I^2)$ 提升为 $S^{-1}I$ 的一组生成元。注意，我们有如下结果：

(1) $\dim(B) = \dim(R) = d$; (2) $B \subset S^{-1}A[X] \subset B[T, f^n]$;
(3) $(S^{-1}A[X])_s = S^{-1}(A_s[X]) = B_s[T, f^n]$; (4)
$S^{-1}I \subset S^{-1}A[X]$ 是一个理想，且 $\mathrm{ht}(S^{-1}I) \geq 3$。

特别地， $S^{-1}A[X]$ 是 $B[T, f^n]$的一个几何子环。因此，应用定理 3.6，我们可以将 $S^{-1}I = S^{-1} < F_1、...、 F_{d+1} > +S^{-1}I^2$ 提升为 $S^{-1}I$的一组生成元。这就完成了情形 1 的证明。

情形 2。在此情形下，我们假设 R 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$上的一个仿射代数。与前面一样，按照注 3.3 中给出的论证，不失一般性，我们可以假设 A 是一个有限生成的 R–代数。特别地，这将意味着 A 是一个仿射$\overline{\mathbb{F}}_p$–代数。因此，为了证明该定理，鉴于 [1, 定理 9.1] ，只需找到 $IA(X) =< f_1、...、 f_{d+1} > A(X) + I^2A(X)$的一个提升，使其成为 $IA(X)$的一组生成元。这可以按照情形 1 中给出的相同论证来实现。□

按照欧拉类理论文献中的惯例，我们将以下结果作为前一定理的推论得到。

推论 5.2. 设 R 和 A如定理 5.1 所述。此外，假设 A是有限生成的 R-代数。设 P 是一个秩为 $d+1$ 且具有平凡行列式的射影 $A[X]$-模。那么 P 含有一个幺模元素。

证明. 由定理 5.1 可得 $E^{d+1}(A[X]) = 0$。因此，结论由 [8,推论 4.11] 和 [1,定理 4.11]推出。□

注 5.3. 每当 $\mathbb{Q} \subset R$时，修改定理 5.1 的证明便可证明 $E^{d+1}(A[X], L)$ 是平凡的，其中 L 是一个秩一射影 $A[X]$–模。因此，利用 [10], ，可以从推论 5.2 中去掉 P 具有平凡行列式这一假设。

现在我们着手证明多项式扩张中的一个类似于定理 4.2 的结果。作为准备，我们需要以下 Ferrand-Szpiro 的定理 [27]（或参见 [19, 定理 6.1.3，第 75]页）。

定理 5.4. 设 R 是一个交换诺特环。设 I 是 R 的一个高度为 $n \geq 2$ 的局部完全交理想，且 $\dim(R/I) \leq 1$。那么存在一个高度为 n 的局部完全交理想 $J \subset R$ ，使得

(1) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$; (2) J/J^2是一个秩为 n的自由 R/J–模。

定理 5.5. 设 R 和 A 如定理 5.1 中所述。设 $I \subset A[X]$ 是一个高度为 ≥ 3 的局部完全交理想，满足 $\dim(A[X]/I) \leq 1$ 且 $\mu(I) < \infty$。那么 I 可由 $d+1$ 个或更少的元素集合论意义下生成。

证明。根据注 3.3，不失一般性，我们可以假设 A 是有限生成的 R-代数。令 $\mathrm{ht}(I) = h$。由定理 5.4 可知，存在一个理想 $J \subset A[X]$ ，使得以下条件成立：

(1) $\sqrt{I} = \sqrt{J}$; (2) J/J^2是秩为 h 的自由 $A[X]/J$-模。

若 $h \leq d$，则由引理 2.1 J可知，其由至多 $d+1$ 个元素生成。因此，我们可以假设 $h = d+1$。令 $J =< f_1, ..., f_{d+1} > +J^2$。应用定理 5.1，我们看到 J由 $d+1$ 个元素生成。因此，由 (1) 可知， I由 $d+1$ 个元素在集合论意义下生成。证明完毕。□

References

[1] S. Banerjee 和 M.K. Das, *Splitting criteria of projective modules on polynomial extensions over various base rings.* 2022 2206 6 月预印本。06819 https://arxiv.org/abs/ 。[2] S.M. Bhatwadekar、H. Lindel 和 R.A. Rao, *The Bass-Murthy question: Serre dimension of Laurent polynomial extensions* **81** 1985 189 203 , 《Invent. Math.》（）-。[3] S.M. Bhatwadekar 和 R.Sridharan, *Projective generation of curves in polynomial extensions of an affine domain and a question of Nori.* **133 1** 161 192, 1998 《Inventiones Mathematicae》, （）：–, 6 月。[4] S. M. Bhatwadekar、R. Sridharan; *The Euler Class Group of a Noetherian Ring.* 《Compositio Math- ematica》122(2)（2000）, 183 - 222。[5] S.M. Bhatwadekar 和 A. Roy, *Some theorems about projective modules over polynomial rings.* 《J. Algebra》86（1984）150-158。[6] C. Bhaumik、H.P. Sarwar, *Rees algebra* 2022 10 48550 2301 , 预印本, 。https://doi.org/ 。/arXiv. 。[7] ´ *Existence of unimodular elements in a projective module over a symbolic* *Generating ideals up to radical.* **33**, M. Boratynski, 《Arch. Math. (Basel)》, （1979/80）, 第 5 期, 423–425。[8] M.K. Das。 *The Euler class group of a polynomial algebra.* 《Journal of Algebra》, 264(2), 582–612, 2003 年 6 月。[9] M.K. Das 和 R. Sridharan。 *Good invariants for bad ideals.* 《Journal of Algebra》, 323(12): 3216–3229, 2010。[10] M.K. Das 和 M.A. Zinna。 *The Euler class group of a polynomial algebra with coefficients in a line bundle.* **276 3 4** 757 783, 2013 《Mathematische Zeitschrift》, (-), –。[11] M.K. Das 和 M.A. Zinna。 *Efficient generation of ideals in overrings of polynomial rings.* 《Journal of Pure and Applied Algebra》, 219(9): 4016–4034, 2015。[12] D. Eisenbud 和 E.G. Evans, Jr. *Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory* 《Journal of Algebra》, 27: 278–305, 1973。[13] M.K. Keshari、H.P. Sarwar, *Serre Dimension of Monoid Algebras*, 《Proc. Math. Sci. Indian Acad. Sci.》, 127（2017）, 第 2 期, 269–280。[14] M.K. Keshari 和 M.A. Mathew。 *On Serre dimension of monoid algebras and Segre extensions*, 《Journal of Pure and Applied Algebra》226（2022）, 第 9 期, 论文编号 107058, 共 16 页。[15] N. Mohan Kumar。 *Complete intersections.* 《Journal of Mathematics of Kyoto University》, 17(3), 533–538, 1977。[16] N. Mohan Kumar。 *On two conjectures about polynomial rings.* 《Inventiones Mathematicae》, 46(3), 225–236, 1978。[17] N. Mohan Kumar。 *Some theorems on generation of ideals in affine algebras.* 《Commentarii Mathematici Helvetici》, 59(1), 243–252, 1984。[18] S. Mandal。 *Basic elements and cancellation over Laurent polynomial rings.* 《Journal of Algebra》, 79(2), 251–257, 1982。[19] S. Mandal。 *Projective modules and complete intersections*。Springer Berlin Heidelberg, 1997 年 10 月。[20] M.P. Murthy。 *Zero cycles and projective modules.* 《The Annals of Mathematics》, 140(2), 405, 1994。[21] B. Plumstead。 *The conjectures of Eisenbud and Evans.* 《American Journal of Mathematics》, 105(6), 1417–1433, 1983。[22] D. Quillen。 *Projective modules over polynomial rings*, 《Invent. Math.》36（1976）, 167–171。[23] R.A. Rao, *Stability theorems for overrings of polynomial rings. II.* **78** 1982 2, 437 444 《J. Algebra》（）, 第 – 期。[24] R.A. Rao 和 H.P. Sarwar。 *Stability results for projective modules over Rees algebras.* 《Journal of Pure and Applied Algebra》, 223(1): 1–9, 2019。[25] A. Sathaye。 *On the Forster-Eisenbud-Evans conjectures.* **46 3** 211 224, 1978 《Inventiones Mathematicae》, （）, –。[26] J.-P. Serre, *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle*, 1958 年 S´eminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 1957/58, Fasc. 2, Expos´e 23 18 页。[27] L. Szpiro。 *Lectures on equations defining space curves*。塔塔基础研究所, 孟买; Springer 出版社, 柏林—纽约, 1979。N. Mohan Kumar 笔记。

(Sourjya Banerjee) Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Campus Road, Mohanpur, West Bengal 741246
Email address: sourjya.pdf@iiserkol.ac.in*Email address*: sourjya91@gmail.com

(Chandan Bhaumik) Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharag-pur, Kharagpur 721302, West Bengal, India*Email address*: cbhaumik11math@gmail.com

(H.P. Sarwar) Department of Mathematics,
Indian Institute of Technology Kharagpur,Kharagpur 721302, West Bengal, India
Email address: parvez@maths.iitkgp.ac.in*Email address*: mathparvez@gmail.com