arXiv:2301.11054v1 [math.FA] 26 Jan 2023

通过抽象算子系统对线性矩阵不等式进行分类

MARTIN BERGER、TOM DRESCHER 和 TIM NETZER

Abstract. 我们系统地研究抽象算子系统的性质如何帮助对集合的线性矩阵不等式定义进行分类。我们主要关注多面锥、三维洛伦兹锥（在这两种情形下，我们都能完整描述所有定义该锥的线性矩阵不等式），以及半正定矩阵锥。对于后者，我们利用矩阵代数之间的等距映射相关结果，描述规模相对较小的线性矩阵不等式定义。反过来，我们利用算子系统理论来刻画这类等距映射中的特殊情形。

1. Introduction

谱半空间按定义是线性矩阵不等式的解集。本文全程将讨论范围限定为凸锥，因此谱半空间具有如下形式：

$$\{a \in \mathbb{R}^d \mid a_1 M_1 + \cdots + a_d M_d \geqslant 0\},$$

其中 $M_1, \ldots, M_d \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ 是厄米矩阵，而 $\geqslant 0$ 表示该矩阵为半正定矩阵。所有多面体都是谱半代数，但谱半代数远不止于此。谱半代数恰好是半定规划的可行集，因此，判断一个集合是否为谱半空间是优化中的一个重要问题。这也是一个出人意料地困难的问题，与多项式行列式表示理论和凸代数几何有着深刻联系。关于这一令人兴奋的主题，更多详情请参见 [3, 13] 。

在这里，我们提出一个略有不同的问题：给定一个谱半空间，它可以由多少个不同的线性矩阵不等式定义？ [9] 首次观察到，这个问题与谱半空间的所谓自由（=非交换）扩张密切相关。另一方面，这些自由扩张与抽象算子系统几乎相同；抽象算子系统是算子代数中一个研究较为深入的概念（例如参见 [14], ）。

本文系统地研究抽象算子系统的不同性质如何导出集合的线性矩阵不等式表示的相关结果。我们证明了关于抽象算子系统的若干新结果，并将已有结果应用于获得关于谱半空间表示的新见解。我们主要关注多面锥、圆锥以及半正定矩阵构成的锥。

本文结构如下。在第 2 节中，我们介绍将要使用的所有概念；第 3 节包含我们的主要结果。在第 3.1 节中，我们首先解释算子系统的性质如何阐明一般集合的线性矩阵不等式定义

Date：2023年1月27日。

。第 3.2 节包含关于一般凸锥上的最大算子系统的结果。随后，我们针对特殊类别的锥加强了这些结果。特别地，第 3.3节讨论多面锥，第 3.4 节专门讨论 $\mathbb{R}^3$. 洛伦兹锥。在这里，我们可以完整分类所有定义该锥的线性矩阵不等式。通过证明关于洛伦兹锥上最大算子系统的一个结果，我们还表明存在一列越来越弱的此类定义。最后，第3.5节讨论半正定（psd）矩阵构成的锥。由于该锥的线性矩阵不等式定义与矩阵代数之间的单位 $*$-等距映射相同，因此我们可以利用已有结果深入了解算子系统以及半正定锥的线性矩阵不等式定义。随后，我们采用算子系统方法刻画矩阵代数之间的特殊 $*$-等距映射。

致谢。 感谢 Mario Kummer 提出了我们命题 3.7 以下内容的一种非常优雅的替代证明，并允许我们将其收录于此。Martin Berger¨衷心感谢奥地利科学院（OAW）通过 DOC奖学金 提供的资助。

2. Preliminaries

本节汇总我们主要结果中将要使用的所有重要概念和事实。

2.1. 抽象算子系统。

在整个下文中，$\mathcal{V}$ 表示一个带有对合 $*$ 的有限维 $\mathbb{C}$-向量空间。对于每个 $s \geqslant 1$，空间

$$\mathrm{Mat}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{V} = \mathrm{Mat}_s(\mathcal{V})$$

继承了一个典范对合（逐项 $*$ 和转置），而厄米元素的 $\mathbb{R}$-向量空间（即对合的不动点）记为 $\mathrm{Her}_s(\mathcal{V})$。所有空间均赋予欧几里得范数/拓扑。若一个凸锥是闭的、具有非空内部且不包含整条直线，则称其为适当的。

定义 2.1. 一个抽象算子系统 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_s)_{s\geqslant 1}$ 在 $\mathcal{V}$ 上由每个 $s \geqslant 1$对应的真凸锥 $\mathcal{C}_s \subseteq \mathrm{Her}_s(\mathcal{V})$组成，并满足

$$A \in \mathcal{C}_s, V \in \mathrm{Mat}_{s,t}(\mathbb{C}) \;\Rightarrow\; V^*AV \in \mathcal{C}_t.$$

通常，固定的内部点 $u \in \mathcal{C}_1$ 也被视为结构的一部分。我们称 $\mathcal{C}_s$ 为抽象算子系统 $\mathcal{C}$的第 s 层的锥。

根据 Choi–Effros定理（[6], 另见 [14]），对于每个抽象算子系统 $\mathcal{C}$，都存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及一个 $*$-线性映射 $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$，满足 $\varphi(u) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$，使得对于所有 $s \geqslant 1$ 以及 $A \in \mathrm{Her}_s(\mathcal{V})$，

$$A \in \mathcal{C}_s \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{id} \otimes \varphi)(A) \geqslant 0,$$

其中 $\geqslant 0$ 表示半正定性（psd）。在右侧，我们使用典范识别

$$\mathrm{Mat}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mat}_s(\mathbb{B}(\mathcal{H})) = \mathbb{B}(\mathcal{H}^s)$$

以定义该算子的正性。这样的映射 φ 称为算子系统 $\mathcal{C}$ 的具体实现，或简称实现。

2.2. **自由谱半代数集与数值域**。某些特殊类别的抽象算子系统尤其值得关注。

定义 2.2。(*i*) 若一个抽象算子系统具有维数为 $\dim \mathcal{H} < \infty$ 的实现，则称其为自由谱体。

(*ii*) 若一个算子系统是有限生成的，我们称其为自由数值域。这意味着它包含有限多个元素，并且是包含这些元素的最小算子系统。

注 2.3。由于我们假设 $\mathcal{V}$ 是有限维的，因此可以假设 $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$ 带有典范对合，从而

$$\mathrm{Mat}_s(\mathcal{V}) = \mathrm{Mat}_s(\mathbb{C})^d, \quad \mathrm{Her}_s(\mathcal{V}) = \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})^d.$$

那么，抽象算子系统的一个实现仅由满足 $u_1M_1 + \cdots + u_dM_d = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ 的自伴算子M_1、…、$M_d \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ 组成，使得

$$(A_1, \ldots, A_d) \in \mathcal{C}_s \;\Leftrightarrow\; A_1 \otimes M_1 + \cdots + A_d \otimes M_d \geqslant 0.$$

有限维可实现性意味着可以将 M_i 取为厄米矩阵。在这种情况下，我们将算子系统/自由谱体记为

$$\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d) = (\mathcal{S}_s(M_1, \ldots, M_d))_{s \geqslant 1}.$$

特别地，我们有

$$\mathcal{S}_1(M_1, \ldots, M_d) = \{a \in \mathbb{R}^d \mid a_1M_1 + \cdots + a_dM_d \geqslant 0\},$$

这就是 经典谱半代数集的定义，即半定规划的可行集 .

注记 2.4. 抽象算子系统在分块对角和下封闭:

$$A \in \mathcal{C}_s, B \in \mathcal{C}_t \;\Rightarrow\; A \oplus B \in \mathcal{C}_{s+t}.$$

因此，每个自由数值域 都由单个元素生成 $M \in \mathcal{C}_r$. 这意味着

$$\mathcal{C}_s = \left\{ \sum_{j=1}^{n} V_j^* M V_j \mid n \geqslant 1, V_j \in \mathrm{Mat}_{r,s}(\mathbb{C}) \right\}$$

对所有 $s \geqslant 1$.均成立。特别地，如果 $M = (M_1, \ldots\ldots, M_d) \in \mathrm{Her}_r(\mathbb{C})^d$且 $u_1M_1 + \cdots + u_dM_d = I_r$ 对某个 $u \in \mathbb{R}^d$成立，那么

$$\{a \in \mathcal{C}_1 \mid u^t a = 1\} = \left\{ \sum_j (v_j^* M_1 v_j, \ldots, v_j^* M_d v_j) \mid v_j \in \mathbb{C}^r, \sum_j v_j^* v_j = 1 \right\}$$

它是由 M_1，……，M_d的所谓联合数值域 构成的凸包。如果自由数值域由 $(M_1, \ldots, M_d) \in \mathrm{Her}_r(\mathbb{C})^d$，生成，则记为

$$\mathcal{W}(M_1, \ldots, M_d) = (\mathcal{W}_s(M_1, \ldots, M_d))_{s \geqslant 1}.$$

下面的结果是 [7], 在我们的语境下表述的分离方法：

定理 2.5. 每个定义在 $\mathcal{V}$ 上的抽象算子系统都是自由谱凸集的交集 .

2.3. **最小和最大算子系统。** 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个真凸锥。我们关注满足 $\mathcal{C}_1 = C$的算子系统 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_s)_{s \geqslant 1}$ 。我们称之为定义在 C上的算子系统。存在一个最大的此类算子系统 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}}$，定义为

$$\mathcal{C}_s(C)^{\mathrm{lrg}} := \left\{ (A_1, \ldots, A_d) \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})^d \mid \forall v \in \mathbb{C}^s \colon (v^* A_1 v, \ldots, v^* A_d v) \in C \right\}.$$

此外，还存在一个最小的此类算子系统 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}}$，定义为

$$\mathcal{C}_s(C)^{\mathrm{sml}} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} P_j \otimes c_j \mid n \geqslant 1, c_j \in C, P_j \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C}), P_j \geqslant 0 \right\}.$$

这些系统在如下意义下是最大的/最小的：对于任意算子系统 $(\mathcal{C}_s)_{s \geqslant 1}$,$(\mathcal{D}_s)_{s \geqslant 1}$且满足 $\mathcal{C}_1 \subseteq C \subseteq \mathcal{D}_1$, 我们有 $\mathcal{C}_s(C)^{\mathrm{sml}} \subseteq \mathcal{D}_s$ 和 $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{C}_s(C)^{\mathrm{lrg}}$ 对所有 $s \geqslant 1.$ 均成立。关于这些结论的详细内容和证明, 参见 [8, 15]。

2.4. **对偶性。** 给定定义在 $\mathbb{C}^d$, 上的抽象算子系统 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_s)_{s \geqslant 1}$ ，其自由对偶 $\mathcal{C}^{\vee_{\mathrm{fr}}}$ 定义为

$$\mathcal{C}_s^{\vee_{\mathrm{fr}}} := \left\{ (A_1, \ldots, A_d) \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})^d \mid \forall s \geqslant 1, B \in \mathcal{C}_s \colon \sum_{i=1}^{d} B_i \otimes A_i \geqslant 0 \right\}.$$

以下结果概述了自由对偶最重要的性质。证明例如可见 [1, 10]。

定理 2.6。 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个真凸锥， $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_s)_{s \geqslant 1}$ 是一个抽象算子系统，且 $\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)$ 是定义在 $\mathbb{C}^d$ 上的自由谱体。

(i) $\mathcal{C}^{\vee_{\mathrm{fr}}}$ 是一个抽象算子系统。*(ii)* $(\mathcal{C}^{\vee_{\mathrm{fr}}})^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \mathcal{C}$。*(iii)* $(\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}})^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \mathcal{C}(C^{\vee})^{\mathrm{lrg}}$ 且$(\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}})^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \mathcal{C}(C^{\vee})^{\mathrm{sml}}$，其中 $C^{\vee}$ 表示 $C \subseteq \mathbb{R}^d$的对偶锥。*(iv)* $\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \mathcal{W}(M_1, \ldots, M_d)$，且 $\mathcal{W}(M_1, \ldots, M_d)^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)$。特别地， $\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)^{\vee_{\mathrm{fr}}} \subseteq \mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)$当且仅当 $\sum_{i=1}^{d} M_i \otimes M_i \geqslant 0$。

2.5. **包含关系。** 对于两个抽象算子系统 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_s)_{s \geqslant 1}$ 和 $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_s)_{s \geqslant 1}$ 在$\mathcal{V}$上，我们记 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 若 $\mathcal{C}_s \subseteq \mathcal{D}_s$ 对每个 $s \geqslant 1.$ 都成立。注意， $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{D}_1$ 通常并不意味着 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$。在以下结果中，([9],) 与 (*i*) 等价，这由定理2.6得出；() 与 (*ii*) 等价则显而易见。

定理 2.7。 设 $(M_1, \ldots, M_d) \in \mathrm{Her}_{r_1}(\mathbb{C})^d$ 和 $(N_1, \ldots, N_d) \in \mathrm{Her}_{r_2}(\mathbb{C})^d$ 满足 $\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d)$ 和 $\mathcal{S}(N_1, \ldots, N_d)$ 均为自由谱半代数集。那么，以下条件等价：

(i) $\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d) \subseteq \mathcal{S}(N_1, \ldots, N_d)$ (ii) $\mathcal{W}(N_1, \ldots, N_d) \subseteq \mathcal{W}(M_1, \ldots, M_d)$ (iii) 存在 $V_j \in$ 矩阵空间$_{r_1, r_2}(\mathbb{C})$ 使得

$$\sum_j V_j^* M_i V_j = N_i$$

对于所有 $i = 1, \ldots, d$.

2.6. **自由谱半代数阴影**。若 $\pi\colon \mathbb{R}^{d+e} \to \mathbb{R}^d$ 是典范投影，且 $C \subseteq \mathbb{R}^{d+e}$ 是一个（经典）谱半代数锥，则 $\pi(C)$ 称为谱体影子。我们可以将这一概念推广到自由谱半代数集。对于每个 $s \geqslant 1$，考虑投影

$$\begin{aligned} \pi_s\colon \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})^{d+e} &\to \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})^d \\ (A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_e) &\mapsto (A_1, \ldots, A_d). \end{aligned}$$

若 $\mathcal{C} = \mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d, N_1, \ldots, N_e)$ 是 $\mathbb{C}^{d+e}$ 上的自由谱体，则

$$\pi_{\mathrm{fr}}(\mathcal{S}(M_1, \ldots, M_d, N_1, \ldots, N_e) := (\pi_s(\mathcal{S}_s(M_1, \ldots, M_d, N_1, \ldots, N_e)))_{s \geqslant 1}$$

称为自由谱半代数阴影（或谱半代数投影，见 [10]）。以下结果证明于 [10]，，将经典谱半代数阴影的同一结果推广到了自由情形。

定理 2.8。自由谱半代数阴影的自由对偶是自由谱半代数阴影。特别地，每个自由数值域都是自由谱半代数阴影。

3. Results

现在，我们已经为论文的主要结果做好准备。在第3.1 节中，我们首先解释最小/最大算子系统与锥的线性矩阵不等式定义之间的一般关系。我们以此为动机，在第3.2节研究相当一般的锥上的最大算子系统，并证明其内部总是被该锥上的自由谱半代数阴影所覆盖。在第3.3 节中，我们简要描述并回顾关于多面体的线性矩阵不等式定义的已知结果。第3.4 节专门讨论 $\mathbb{R}^3$中的圆锥，它具有一些令人惊讶的性质。这些性质使我们能够对其所有线性矩阵不等式定义进行完整分类。我们还证明，它存在一整个序列逐渐变弱的线性矩阵不等式定义。最后，第3.5 节讨论半正定矩阵锥。我们证明，较小的线性矩阵不等式定义总会导出两种标准定义之一（恒等映射和转置），随后刻画这一结论何时也适用于更大的尺寸。

3.1. 算子系统与线性矩阵不等式的分类。 我们首先概述抽象算子系统理论，特别是最小和最大算子系统，与对实现给定真凸锥 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为谱半空间的矩阵元组 $(M_1, \dots, M_d)$进行分类这一问题之间的关系：

$$C = \mathcal{S}_1(M_1, \dots, M_d).$$

我们也称 $M_1, \dots, M_d$ 由线性矩阵不等式定义 C。

首先假设

$$\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}} = \mathcal{S}(N_1, \dots, N_d)$$

是一个自由谱体。这意味着 $(N_1, \dots, N_d$给出了 最弱的线性矩阵不等式定义 C，即 N_i 可由关于 C 的其他任意线性矩阵不等式导出，其含义见定理 (iii)。类似地，若 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}} = \mathcal{S}(M_1, \dots, M_d)$ 是一个自由谱体，则 $(M_1, \dots, M_d)$ 给出了 最强的定义，其他任意定义都可由此得到。

的主要结果 [8] 对这种情况进行了部分分类。具体而言， $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}}$ 是自由谱体，当且仅当 C 是多面体的。在这种情况下， $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}}$ 是自由谱体，当且仅当 C 是单纯形锥。注意，多面锥最弱的定义是通过对角线性矩阵不等式给出的，其对角线上包含 C各个面的线性不等式。对于单纯形锥，这同时也是最强的定义。

所以现在假设 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}}$ 不是自由谱体。那么，对于任意 $C = \mathcal{S}_1(N_1, \dots, N_d)$，都有

$$\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}} \subsetneq \mathcal{S}(N_1, \dots, N_d).$$

根据定理 2.5，我们可以找到矩阵（$M_1, \dots, M_d$），使得

$$\mathcal{C}(C)^{\mathrm{sml}} \subsetneq \mathcal{S}(M_1, \dots, M_d) \subsetneq \mathcal{S}(N_1, \dots, N_d).$$

因此，新矩阵并非旧矩阵的压缩之和，只有反过来的情况成立。我们可以迭代这一过程，得到 C 的一系列越来越强的线性矩阵不等式定义，其中没有一个是前一个定义的压缩之和。

另一方面，如果 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}}$ 不是自由谱体（即，如果 C 不是多面体的），情况可能会更复杂。虽然我们没有例子，但有可能每个基于 C 的自由谱体都包含于有限个极大自由谱体之一。在这种情况下， C 将具有有限个弱线性矩阵不等式定义，其含义是，任何其他定义都可通过压缩之和导出其中一个定义。

然而，如果情况并非如此，我们就会得到一系列越来越弱的 C线性矩阵不等式定义，其中没有任何一个能通过压缩之和导出前一个定义。例如，圆锥就是这种情况，正如我们将在第 3.4 节中所证明的。

3.2. 一般锥。 我们首先证明一个关于一般谱半空间/谱体影子上的最大算子系统的一般结果。所有诸如并集、内部.....等概念均按层级理解。

定理 3.1。 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个真凸锥。

(i) 如果 $C^\vee$ 是一个谱半空间，那么所有关于 C 的自由数值域的并集覆盖了 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}}$的内部。

(ii) 如果 C 是一个谱体影子，那么所有关于 C 的自由谱半代数阴影的并集覆盖了 $\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}}$的内部。

证明。 (i) 根据定理 2.5，我们知道

$$\mathcal{C}(C^\vee)^{\mathrm{sml}} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}^{(i)} \tag{1}$$

是所有关于 $C^\vee$的自由谱半代数集 $\mathcal{C}^{(i)}$ 的交集。由对偶性可得

$$\mathcal{C}(C)^{\mathrm{lrg}} = \left(\mathcal{C}(C^\vee)^{\mathrm{sml}}\right)^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}^{(i)}\right)^{\vee_{\mathrm{fr}}} = \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{C}^{(i)^{\vee_{\mathrm{fr}}}}\right)^{\vee_{\mathrm{fr}}\vee_{\mathrm{fr}}}.$$

根据定理2.6，每个 $\mathcal{C}^{(i)^{\vee_{\mathrm{fr}}}}$ 都是一个自由数值域。由于关于C 的自由数值域构成一个偏序集，该并集的自由双重对偶恰好是其（逐层）闭包，由此得证。

(ii) 的证明类似，只需令 (1) 中的交集遍历 C上的所有自由谱半代数阴影。□

下一个结果通过最大的算子系统，对包含给定锥的所有谱半代数集作出刻画。

命题 3.2. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ 为真凸锥，且 $N_1, \ldots, N_d \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C})$ 为厄米矩阵。那么，当且仅当$(N_1, \ldots, N_d) \in \mathcal{C}(C^\vee)^{\mathrm{lrg}}$时，$C \subseteq \mathcal{S}_1(N_1, \ldots, N_d)$。

证明。 我们有以下等价关系：

$$\begin{aligned} C \subseteq \mathcal{S}_1(N_1,\ldots,N_d) &\Leftrightarrow \forall a \in C\colon a_1N_1 + \cdots + a_dN_d \succcurlyeq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{C}^s, a \in C\colon a_1(v^*N_1v) + \cdots + a_d(v^*N_dv) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{C}^s\colon (v^*N_1v,\ldots,v^*N_dv) \in C^\vee \\ &\Leftrightarrow (N_1,\ldots,N_d) \in \mathcal{C}(C^\vee)^{\mathrm{lrg}}. \end{aligned}$$

□

3.3. **多面锥与单纯锥**。 以下关于多面体的线性矩阵不等式定义的结果，是上述事实的直接推论。

推论 3.3。 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 为多面体，但不是单纯形锥。那么存在一列 P的线性矩阵不等式定义，其中没有一个是前一个定义的压缩之和。

以下关于多面锥的线性矩阵不等式定义的结果 [2], 也可由以下事实推出：多面锥上的最大算子系统是自由谱体，参见 [13]。该结果表明，若谱半空间 $C = \mathcal{S}_1(M_1, \ldots, M_d) \subseteq \mathbb{R}^d$具有一个维数为 $d-1$的面，则存在 $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}$，使得

$$A^*M_iA = \begin{pmatrix} m_i & 0 \\ 0 & \tilde{M}_i \end{pmatrix}$$

对所有 $i= 1, \ldots, d$，且该面处的支撑超平面由方程定义 n

$$m_1x_1 + \cdots + m_dx_d = 0.$$

因此，对于多面体的 P，任何定义线性矩阵不等式都会分离出规范的对角/最弱部分。另一个块则定义了某个更大的谱半空间，对此我们通常无法作出判断。但如果多面锥是单纯形，我们就能做到。单纯形锥之所以如此简单，主要是因为正正交象限 $\mathbb{R}^d_{\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$, 中唯一的单纯形锥（在同构意义下）。因此，不失一般性，我们可以只考虑这种情况。

命题 3.4。设 $N_1, \ldots, N_d \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ 满足 $N_1 + \cdots + N_d = I_n$.

(i) $\mathbb{R}^d_{\geqslant 0} \subseteq \mathcal{S}_1(N_1, \ldots, N_d)$ 当且仅当所有 N_i 都是半正定的。(ii) $\mathbb{R}^d_{\geqslant 0} = \mathcal{S}_1(N_1, \ldots, N_d)$ 当且仅当存在一个酉矩阵 $U \in$ 矩阵空间$_n(\mathbb{C})$ 使得

$$U^*N_iU = \begin{pmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & \tilde{N}_i \end{pmatrix}$$

˜且 $N_i \geqslant 0$ 对所有 $i = 1, \ldots, d.$ 成立。这里， E_{ii} 表示大小为 d的标准矩阵单位。

证明。 (i)显然成立。对于（ii），注意到 $\mathbb{R}^d_{\geqslant 0} = \mathcal{S}_1(N_1, \ldots, N_d)$除了所有$N_i \geqslant 0$之外，还意味着对于每个 $j = 1, \ldots, d.$， $\sum_{i\neq j} N_i$是秩亏的。对于具有所述性质的矩阵，这一点显然满足。反过来，我们将其对角化

$$U^*(N_2 + \cdots + N_d)U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} = U^*N_2U + \cdots + U^*N_dU$$

利用适当的酉矩阵 U，得到

$$U^*N_iU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{for } i = 2, \ldots, d \quad \text{and} \quad U^*N_1U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

对右下角块重复此论证即可证明该结论。 □

3.4. 圆锥。 在本节中，令

$$D := \{(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant a_0, a_1^2 + a_2^2 \leqslant a_0^2\}$$

为 $\mathbb{R}^3$中的标准圆锥。由 [5] 可知 $\mathcal{C}$（D）^{sml} 是一个自由谱半空间（另见 [8, 例 4。10] 或 [11, 推论 14。15]），由以下线性矩阵不等式定义

$$A_0 \otimes I_2 + A_1 \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:M_1} + A_2 \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:M_2} \geqslant 0.$$

我们可以利用这一事实来刻画所有定义 D 的线性矩阵不等式。这正是 [16, 定理 4.5] 的对偶表述。由于我们的证明有所不同，尤其是 (i) 的证明不同，为求完整起见，我们将其列出。

定理 3.5. 令 $N_0, N_1, N_2 \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ 为任意元素。

(*i*) 当且仅当存在 $P, Q \in$ 矩阵空间$_{r,n}(\mathbb{C})$ *wi* *th*

$$N_0 = P^*P + Q^*Q \quad and \quad N_1 = P^*Q + Q^*P \quad and \quad N_2 = i(Q^*P - P^*Q).$$

(*ii*) 当且仅当我们可以在(*i*)中选取 $r = n - 1$ 时，才有 $D = \mathcal{S}_1(N_0, N_1, N_2)$；而只要 S_1 (N_0, N_1, N_2) 的边界包含至少 $n + 1$ 条来自D的射线，这一条件就已成立。

证明。 (*i*) 由 $D \subseteq \mathcal{S}_1(N_0, N_1, N_2)$可得

$$\mathcal{S}(I_2, M_1, M_2) = \mathcal{C}(D)^{\mathrm{sml}} \subseteq \mathcal{S}(N_0, N_1, N_2),$$

并由定理 2.7 得到 $V_1, \ldots, V_r \in$ 矩阵空间$_{2,n}(\mathbb{C})$，满足

$$N_0 = \sum_{j=1}^{r} V_j^* V_j, \quad N_1 = \sum_{j=1}^{r} V_j^* M_1 V_j, \quad N_2 = \sum_{j=1}^{r} V_j^* M_2 V_j.$$

令

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1, -i) \cdot V_1 \\ \vdots \\ (1, -i) \cdot V_r \end{pmatrix}, \; Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1, i) \cdot V_1 \\ \vdots \\ (1, i) \cdot V_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{r,n}(\mathbb{C})$$

并得到所需的表示。反过来，每个这样的表示都表明 $D \subseteq \mathcal{S}_1(N_0, N_1, N_2)$. 事实上，对于 $a, b \in \mathbb{R}$，若 $a^2 + b^2 = 1$，则令 $z := a + bi \in \mathbb{C}$ 并计算

$$0 \leqslant (zP + Q)^*(zP + Q) = N_0 + \overline{z}P^*Q + zQ^*P = N_0 + aN_1 + bN_2. \tag{2}$$

(*ii*) 设 P, Q 为 N_0, N_1, N_2 提供一个分解，如 (*i*) 所示。我们进一步假设，在所有此类分解中（固定 r），Q^*Q 关于 $\leqslant$ 是极大的。现在假设对于某些满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的 a, $b \in \mathbb{R}$，我们有 $(1, a, b) \in \partial\mathcal{S}_1(N_0, N_1, N_2)$。那么 (2) 表明，对于 $z = a + bi$，矩阵

$$z\bar{P} + \bar{Q} \in \mathrm{Mat}_{r,n}(\mathbb{C})$$

的秩至多为 $n - 1.$。如果这种情况对至少 $n + 1$ 个不同的数 z 都成立，则 Q 的秩至多为 。我们现在计算奇异值分解 $Q = U\Sigma V^*$，并注意到

$$\tilde{P} := U^*\bar{P} \text{ and } \tilde{Q} := U^*\bar{Q} = \Sigma V^*$$

以与 P 和 Q 相同的方式产生 N_0, N_1, N_2，但是

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P \\ H \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

与 P, $Q \in$ 矩阵空间$_{n-1,\ n}(\mathbb{C})$。由于

$$\hat{P} := \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} := \begin{pmatrix} Q \\ H \end{pmatrix}$$

也表示 N_0, N_1, N_2，并且由于

$$\hat{Q}^*\hat{Q} = Q^*Q + H^*H = \tilde{Q}^*\tilde{Q} + H^*H = \bar{Q}^*\bar{Q} + H^*H,$$

Q^*Q 的极大性意味着 $H = 0.$ 因此， P 和 Q 给出了所需的N_0, N_1, N_2的表示。

反过来，假设我们有一个 $N_0,\ N_1,\ N_2$ 通过 $P,\ Q \in$ 矩阵空间$_{n-1,\ n}(\mathbb{C})$得到的表示。那么，对于每个满足 $a^2+b^2=1$的 $z=a+bi\in\mathbb{C}$，矩阵

$$N_0+aN_1+bN_2=(zP+Q)^*(zP+Q)\geqslant 0$$

是奇异的。这意味着 $D=\mathcal{S}_1(N_0,\ N_1,\ N_2)$。 □

回顾上文矩阵 $M_1,\ M_2$ 的定义。此外，现在令

$$M_3:=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

利用这些矩阵，我们可以将 $\mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}$ 明确描述为一个自由谱半代数阴影。

定理 3.6。 设 $N_0,N_1,N_2\in$ 厄米$_n(\mathbb{C})$。那么 $(N_0,N_1,N_2)\in\mathcal{C}(D)_n^{\mathrm{lrg}}$当且仅当存在厄米矩阵 $N_3\in$ 厄米$_n(\mathbb{C})$ 满足

$$N_0\otimes I_2+N_1\otimes M_1+N_2\otimes M_2+N_3\otimes M_3\geqslant 0.$$

证明。利用 D 的自对偶性和命题 3.2，我们首先注意到 $(N_0,N_1,N_2)\in\mathcal{C}(D)_n^{\mathrm{lrg}}$等价于 $D\subseteq\mathcal{S}_1(N_0,N_1,N_2)$。由此可知，我们可以找到矩阵 $P,Q\in$矩阵空间$_{r,n}(\mathbb{C})$，如定理 3.5（i）所示。现在我们可以选择 $N_3:=P^*P-Q^*Q$ 并令

$$A:=\begin{pmatrix}(P+Q) & i(P-Q)\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{r,2n}(\mathbb{C}).$$

那么我们有

$$N_0\otimes I_2+N_1\otimes M_1+N_2\otimes M_2+N_3\otimes M_3=A^*A\geqslant 0.$$

对于逆向证明，我们可以先写成

$$N_0\otimes I_2+N_1\otimes M_1+N_2\otimes M_2+N_3\otimes M_3=B^*B$$

与 $B=\begin{pmatrix}U & V\end{pmatrix}\in$ 矩阵空间$_{r,\ 2n}(\mathbb{C})$。现在令 $P:=(U-iV)/2$ 以及 $Q:=(U+iV)/2$ 便得到一个定理3.5 (i) 中所述的分解。 □

我们知道，$\mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}$ 不是自由谱半空间。然而，如上所述，我们无法先验地排除在 D 上存在一个或至少有限多个极大自由谱半代数集，且它们包含所有其他集合。在判断这个问题之前，我们先介绍以下构造。设 $P\subseteq D$ 是一个正规多面锥，具有 r 条极射线，且这些射线都位于 D 的边界上。设 $\ell_1,\dots,\ell_r\in\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2]$ 是通过不等式定义 P 的线性形式，其中假设所有 ℓ_j 中 x_0 的系数均为 1，以确保它们唯一。我们令 $h=\ell_1\cdots\ell_r\in\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2]$，并考虑其偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_0}h\in\mathbb{R}[x_0,x_1,x_2]$$

关于 x_0。参见图 1，其中展示了在 h 和 $\frac{\partial}{\partial x_0}h$ 的情况下，$r=7$. 以下证明由 Mario Kummer 提供建议，大大简化了我们此前的证明。我们感谢他允许我们在此收录该证明。

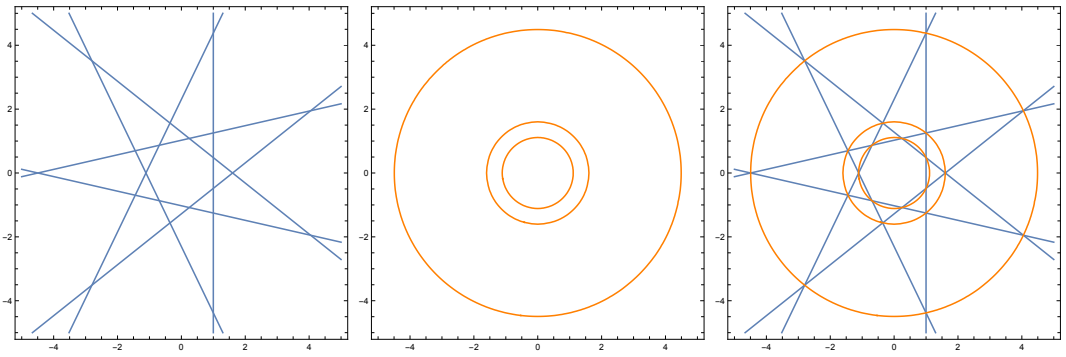


FIGURE 1. 从左至右： h， $\frac{\partial}{\partial x_0}h$ 的实零点集及二者的组合，绘于由 $x_0 = 1$ 定义的仿射截面上。

命题3.7。 当 $r \geqslant 3$ 为奇数时， $\frac{\partial}{\partial x_0}h$ 可分解为如下形式的二次型

$$\lambda x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$$

其中 $\lambda \geqslant 1$，而 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ 是这些形式之一。

证明。 由于 h 在绕 $2\pi/r$ 轴旋转角度 x_0时保持不变，因此 $q := \frac{\partial}{\partial x_0}h$ 也具有相同的不变性。关于该旋转不变的 $r-1$ 次齐次多项式空间的维数为 $\binom{r+1}{2}$。这既可通过初等方法计算，也可由Molien定理计算 [12] （例如另见 [19]）。现在,一只要两个 ℓ_i 有一个公共零点，多项式 q 也会在那里取零值。这就为 q增加了许多额外的独立条件，这一点很容易验证。因此,在这些点处取零的所有 $r-1$ 次不变多项式构成的空间是一维的。显然，如本命题表述所述，适当的二次多项式乘积属于该空间。由此得证。□

以下结果是针对圆锥的定理 3.1的加强版。

定理3.8。 (i) 所有定义在 D 上的自由谱半代数集之并覆盖了 $\mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}$ 的内部。$\mathcal{C}(D)^{\mathrm{sml}}$ 是所有定义在 D 上的自由数值域之交集。

(ii) 在 $\mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}$ 中存在一个点，它不属于任何定义在 D 上的自由谱半代数集。(iii) 并非存在有限多个定义在 D 上的自由谱半代数集，使它们包含其余所有自由谱半代数集。

证明。 (i) 对于每个奇数 $r \geqslant 3$，上文的多面锥 P 是一个谱半空间，由以下对角线性矩阵不等式定义

$$0 \leqslant \begin{pmatrix} \ell_1(x_0,x_1,x_2) & & \\ & \ddots & \\ & & \ell_r(x_0,x_1,x_2) \end{pmatrix} = x_0 I_r + x_1 L_1 + x_2 L_2,$$

同一个矩阵不等式定义了它的最大抽象算子系统 :

$$\mathcal{C}(P)^{\mathrm{lrg}} = \mathcal{S}(I_r, L_1, L_2).$$

这是 [8, 定理 32], 的简单方向，是一个直接的观察。根据 [18], 对于 $h = \ell_1 \cdots \ell_r$，我们知道

$$\frac{\partial}{\partial x_0} h = r \cdot \det\left(x_0 I_{r-1} + x_1 N_1 + x_2 N_2\right)$$

with

$$N_i = \begin{pmatrix} I_{r-1} \mid 1 \end{pmatrix} L_i \begin{pmatrix} I_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Her}_{r-1}(\mathbb{C}).$$

根据命题 3.7， $\frac{\partial}{\partial x_0} h$ 在 ∂D 上为零，但在 D 的内部并非如此。这意味着

$$\mathcal{S}_1(I_{r-1}, N_1, N_2) = D$$

（例如参见 [13]，了解更多关于行列式表示和谱半代数的信息）。由于 N_i 是作为 L_i 的压缩得到的，因此我们有

$$\mathcal{C}(P)^{\mathrm{lrg}} = \mathcal{S}(I_r, L_1, L_2) \subseteq \mathcal{S}(I_{r-1}, N_1, N_2) \subseteq \mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}.$$

容易看出， $\mathcal{C}(D)^{\mathrm{lrg}}$ 内部的每个元素，对某个足够大的 r而言，都已经属于 $\mathcal{C}(P)^{\mathrm{lrg}}$ 。这证明了第一个断言，而关于 $\mathcal{C}(D)^{\mathrm{sml}}$ 的陈述则由自由对偶性得出。

对于（ii），考虑厄米矩阵元组

$$(A_0, A_1, A_2) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{C}(D)_2^{\mathrm{lrg}}.$$

现在假设，对于某些 N_1， $N_2 \in$ ，有 $D = \mathcal{S}_1(I_n, N_1, N_2) \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$。注意，将 I_n 作为第一个矩阵并不构成限制，因为每个定义线性矩阵不等式 D 都可以化简为这种标准化形式，例如参见 [13, 17]。我们还可以假设N_2 是对角的:

$$N_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

由于 $(1, 1, \lambda) \in D$ 当且仅当 $\lambda = 0$，我们得到

$$N_1 + \begin{pmatrix} 1 + \lambda d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda d_n \end{pmatrix} \geqslant 0 \iff \lambda = 0. \tag{3}$$

现在假设

$$0 \leqslant A_0 \otimes I_n + A_1 \otimes N_1 + A_2 \otimes N_2 = \begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 & I_n + N_1 \end{pmatrix}$$

成立，这等价于

$$0 \leqslant I_n + N_1 - \frac{1}{2}N_2^2 = N_1 + \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}d_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}d_n^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

考虑以下方程：

$$\begin{aligned} &N_1 + \begin{pmatrix} 1+\lambda d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda d_n \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{N_1 + \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}d_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}d_n^2 \end{pmatrix}}_{\geqslant 0 \text{ by } (4)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_1^2+\lambda d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}d_n^2+\lambda d_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

如果 $|\lambda|$ 足够小，则最右边的矩阵是半正定的，这与（3）矛盾。最后，（iii）直接由（i）和（ii）得出。 □

如上所述，我们现在得到关于定义圆锥 {v3} 的线性矩阵不等式的以下结论。

推论 3.9。存在一个定义圆锥 D 的线性矩阵不等式序列，其中没有任何一个是前一个的压缩之和。

3.5. **半正定矩阵锥**。在本节中，我们始终考虑空间 $\mathcal{V} = \mathsf{Mat}_d(\mathbb{C})$，并采用通常的对合，因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_s(\mathcal{V}) &= \mathrm{Mat}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_{sd}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{Her}_s(\mathcal{V}) &= \mathrm{Her}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Her}_d(\mathbb{C}) = \mathrm{Her}_{sd}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

我们始终使用锥

$$P_d := \{A \in \mathrm{Her}_d(\mathbb{C}) \mid A \geqslant 0\}$$

半正定矩阵的锥作为第一级上的锥。于是 $\mathcal{C}(P_d)^{\mathrm{sml}}$ 由所谓的可分矩阵组成，而 $\mathcal{C}(P_d)^{\mathrm{lrg}}$ 则由块正矩阵组成。这两者都不是自由谱体或自由数值域，更多详细说明请参见 [1] 。有两个特别有趣的抽象算子系统

$$\mathrm{Psd}_d = (\mathrm{Psd}_{d,s})_{s\geqslant 1} \quad \text{and} \quad \mathrm{Psd}_d^{\Gamma} = \left(\mathrm{Psd}_{d,s}^{\Gamma}\right)_{s\geqslant 1}$$

在 P_d 上，由.....定义

$$\begin{aligned} \mathrm{Psd}_{d,s} &:= \{A \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Her}_d(\mathbb{C}) \mid A \geqslant 0\} \\ \mathrm{Psd}_{d,s}^{\Gamma} &:= \left\{ \sum_i A_i \otimes B_i \in \mathrm{Her}_s(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Her}_d(\mathbb{C}) \mid \sum_i A_i \otimes B_i^T \geqslant 0 \right\}. \end{aligned}$$

Psd_d 称为正矩阵系统，而 Psd_d^Γ 称为具有正部分转置的矩阵系统。容易看出，这两者都是由大小为 d 的线性矩阵不等式定义的自由谱半代数集。在 [1] 中，已证明它们互为自由对偶（请注意，该文中自由对偶的定义略有不同！）。特别地，它们也都是自由数值域，由属于其 d 阶层级的元素生成。在由相对较小规模的线性矩阵不等式定义的自由谱半代数集中，它们实际上是仅有的极大者。

定理 3.10. 设 $\mathcal{C}$ 是定义在 P_d 上的抽象算子系统。

(i) 若 $\mathcal{C}$ 是由大小至多为 $2d-2$ 的线性矩阵不等式定义的自由谱体，则

$$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Psd}_d \quad or \quad \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Psd}_d^\Gamma.$$

(ii) 若 $\mathcal{C}$ 是由来自 $\mathcal{C}_{2d-2}$ 的元素生成的自由数值域，则

$$\mathrm{Psd}_d \subseteq \mathcal{C} \quad or \quad \mathrm{Psd}_d^\Gamma \subseteq \mathcal{C}.$$

证明。(i) 根据假设，存在一个具体实现

$$\varphi\colon \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_r(\mathbb{C})$$

$\mathcal{C}$，其中 $r \leqslant 2d-2$。如上所述，我们可以假设 $\varphi(I_d) = I_r$. 由 $\mathcal{C}_1 = P_d$ 可知

$$A \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) \geqslant 0$$

对所有 $A \in \mathrm{Her}_d(\mathbb{C})$ 均成立。根据 [4, 定理 2.3]，存在一个酉矩阵 $U \in$ 矩阵空间$_r(\mathbb{C})$ 和一个保单位的正 $*$-线性映射 ψ: 矩阵空间$_d(\mathbb{C}) \to$ 矩阵空间$_{r-d}(\mathbb{C})$，使得以下情况之一成立

$$U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix}$$

or

$$U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix}$$

对所有 $A \in$ 矩阵空间$_d(\mathbb{C})$ 均成立。第一种情况下，我们有 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Psd}_d$，第二种情况下，由自由对偶性可从 (i) 推得 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Psd}_d^\Gamma$. (ii)。□

A l大小为 r 的 P_d 的线性矩阵不等式定义与一个 $*$-线性映射相同

$$\varphi\colon \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_r(\mathbb{C})$$

with

$$A \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) \geqslant 0$$

对于所有 $A \in$ 矩阵空间$_d(\mathbb{C})$。在可能将零块分离出来之后，我们可以进一步假设$\varphi(I_d) = I_r$. 在 [4] 中，已证明这等价于 φ 是一个含幺 $*$-等距映射，其中矩阵代数上的范数为算子范数／谱范数。因此，对定义 P_d 的线性矩阵不等式进行分类，与对矩阵代数之间的含幺 $*$-等距映射进行分类相同。

有些等距映射很简单，即存在一个酉矩阵 $U \in$矩阵空间$_r(\mathbb{C})$，使得 t

$$U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix}$$

对所有 $A \in$矩阵空间$_d(\mathbb{C})$均成立。所有简单等距映射都定义了包含于 $\mathbf{Psd}_d$ 或 $\mathbf{Psd}_d^\Gamma$. 中的自由谱半代数集。定理 2.3（ [4], 我们上文用到的定理）指出，对于 $r \leqslant 2d-2$，所有等距映射都是简单的，但对于 $r \geqslant 2d-1$则不成立。下面的结果给出了简单等距映射的另一种刻画。

定理 3.11. 对于酉 $*$-等距映射 φ: 矩阵空间$_d(\mathbb{C}) \to$ 矩阵空间$_r(\mathbb{C})$，以下条件等价：

(i) 由 φ 定义的自由谱体包含于 Psd_d 或 Psd_d^Γ。(ii) 存在 $V \in$矩阵空间$_{r,\ d}(\mathbb{C})$，使得以下任一条件成立：

$$V^*\varphi(A)V = A \quad or \quad V^*\varphi(A)V = A^T$$

对所有 $A \in$矩阵空间$_d(\mathbb{C})$均成立。

(iii) φ 是简单的，也就是说，存在酉矩阵 $U \in$矩阵空间$_r(\mathbb{C})$，使得以下任一条件成立

$$U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix} \quad or \quad U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & \psi(A) \end{pmatrix}$$

对所有 $A \in$矩阵空间$_d(\mathbb{C})$均成立

(iv) 存在单位向量 $h_1, \ldots, h_d \in \mathbb{C}^r$，使得以下条件之一成立

$$\varphi(E_{ij})h_s = \delta_{js} \cdot h_i \quad or \quad \varphi(E_{ij})h_s = \delta_{is} \cdot h_j$$

对所有 i, j, s.均成立

证明。 显然，(iii) 蕴含 (ii)，而 (ii) 蕴含 (i)。现在假设 (i) 成立，并且不失一般性地进一步假设自由谱体包含于 $\mathbf{Psd}_d$。由定理 2.7 可知，存在有限个 $V_1, \ldots, V_\ell \in$矩阵空间$_{r,d}(\mathbb{C})$，使得

$$\sum_j V_j^*\varphi(A)V_j = A$$

对所有 $A \in$矩阵空间$_d(\mathbb{C})$均成立。由于 φ 为正，因此显然

$$A \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ V_j^*\varphi(A)V_j \geqslant 0 \text{ for all } j = 1, \ldots, \ell$$

对所有 A 均成立，即谱半空间 P_d 是由 $V_j^*\varphi(A)V_j \geqslant 0.$ 定义的有限多个谱半空间的交集。由于 P_d 的边界由实不可约多项式 $\det(A)$ 的零点定义，因此条件 $V_j^*\varphi(A)V_j \geqslant 0$ 中已有一个单独就定义了 $P_d.$ 。因此，对于相应的映射

$$A \mapsto V_j^*\varphi(A)V_j$$

我们可以应用 [4, 定理 2。3] 并得到（ii）。现在不失一般性地假设（ii）的第一种情况成立。通过添加列，将 V 扩展为酉矩阵 U。于是

$$U^*\varphi(A)U = \begin{pmatrix} A & \gamma(A)^* \\ \gamma(A) & \psi(A) \end{pmatrix}$$

对所有 $A \in$矩阵空间$_d$（$\mathbb{C}$）均成立。对于任意 $v \in \mathbb{C}^d$，我们知道

$$0 \leqslant U^* \varphi(vv^*)U = \begin{pmatrix} vv^* & \gamma(vv^*)^* \\ \gamma(vv^*) & \psi(vv^*) \end{pmatrix}$$

成立，这意味着 $\gamma(vv^*)$ 的核包含 v 的正交补。另一方面，如果 $v^*v = 1$，那么也

$$0 \leqslant U^* \varphi(I_d - vv^*)U = I_r - U^* \varphi(vv^*)U = \begin{pmatrix} I_d - vv^* & -\gamma(vv^*)^* \\ -\gamma(vv^*) & I_{r-d} - \psi(vv^*) \end{pmatrix}$$

成立，这意味着 $\gamma(vv^*)v = 0$。因此 $\gamma(vv^*) = 0$，这意味着对于所有 $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$，$\gamma(A) = 0$。这证明了（$iii$）。如果（$iii$）成立，我们令 $h_i := Ue_i$，其中 $i = 1$、.....、d，并得到（iv）。反过来，如果（iv）成立，我们令 h_i 为矩阵的前 d 列，并将其扩充为酉矩阵 $U \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{C})$。这证明了（$iii$）。□

例 3.12。 以下例子出自 [4]。对于 $d \geqslant 2$ 考虑

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathrm{Mat}_d\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mat}_{2d-1}(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b^t \\ c & B \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}}b^t & \frac{1}{\sqrt{2}}c^t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}c & B & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}b & 0 & B^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

容易验证

$$A \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) \geqslant 0$$

成立，因此 φ 导出一个算子系统 $\mathcal{C}$ 在矩阵空间 $\mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$ 上，且在 P_d 一级处。文献 [4] 证明了 φ 并非简单等距映射之一。根据定理 3.11，由 φ 定义的自由谱超集不包含于 Psd_d 或 Psd_d^{Γ}。

具体来说，我们考察 $\mathcal{C}_,$ 的二级锥，并将其与 $\mathrm{Psd}_{d,\ 2}$ 和 $\mathrm{Psd}_{d,\ 2}^{\Gamma}$进行比较。我们将范围限制在 $\mathrm{Her}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Her}_d(\mathbb{C}) = \mathrm{Her}_d(\mathrm{Her}_2(\mathbb{C}))$ 中由以下形式的矩阵构成的仿射子空间

$$A(x,y) := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & \overline{y} \\ \overline{x} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$A(x,y)\in\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{x}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\overline{y}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{y}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\overline{x}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{y}}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\overline{x}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

对 $(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$ 进行直接计算，因而可得

$$A(x,y)\in\mathcal{C}_2 \ \Leftrightarrow x^2+y^2\leqslant 4.$$

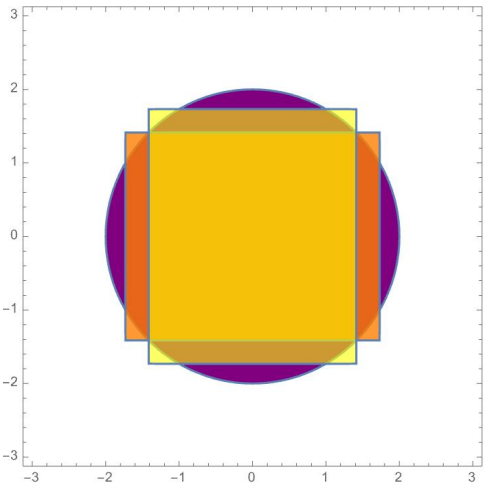
类似地，我们计算

$$A(x,y)\in \mathrm{Psd}_{d,2} \ \Leftrightarrow\ x^2\leqslant 3\wedge y^2\leqslant 2$$

and

$$A(x,y)\in \mathrm{Psd}_{d,2}^{\Gamma} \ \Leftrightarrow\ x^2\leqslant 2\wedge y^2\leqslant 3.$$

下图展示了 $\mathcal{C}_2$ （紫色）、$\mathrm{Psd}_{d,\ 2}$ （橙色）和 $\mathrm{Psd}_{d,\ 2}^{\Gamma}$（黄色）的这些仿射截面：



我们看到， $\mathcal{C}$ 甚至不包含在 Psd_d 和 Psd_d^{Γ} 的并集中，而且也不包含 Psd_d 或 Psd_d^{Γ}。

References

[1] M. Berger 和 T. Netzer， *Abstract operator systems over the cone of positive semidefinite matrices*，《算子理论杂志》（即将刊出）。↑4 13 14，A. Bhardwaj、P. Rostalski 和 R. Sanyal， *Deciding polyhedrality of spectrahedra*，《SIAM 优化杂志》**25**（2015 3, 1873 1884 ↑7），第 – 期。G. Blekherman、P. A. Parillo 和 R. Thomas（编），*Semidefinite optimization and convex algebraic geometry* 13，，MOS-SIAM 优化丛书，第 卷，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州；数学优化学会，费城，宾夕法尼亚州，2013年。↑1

[4] W.-S. Cheung、Ch.-K. Li 和 Y.-T. Poon, *Isometries between matrix algebras*, 《澳大利亚数学会杂志》77（2004 1, 1 16 2069021 ↑14 15 16），第 – 期。MR, M. D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices*, [5] 《线性代数及其应用》10（1975）, 285 290 ↑8 –。M.-D. Choi 和 E. G. Effros, *Injectivity and operator spaces*, 《泛函分析杂志》24（1977），第2期，156–209。 ↑2 [6] E. Effros 和 S. Winkler, *Matrix convexity: Operator analogues of the bipolar and hahn-banach theorems*, 《泛函分析杂志》 **144** 1997 117 152 ↑4（），–。T. Fritz、T. Netzer 和 A. Thom, [8] *Spectrahedral containment and operator systems with finite-dimensional realization* **1** 2017 1, 556 574 ↑4 6 8 ，《SIAM应用代数与几何杂志》（），第 – 期。，，，[9] *The matricial relaxation of a linear matrix inequality* 12 J. W. Helton、I. Klep 和 S. McCullough, ，《数学规划》138（2013），第1-2期，A辑，401–445。 ↑1, 4 [10] , *The tracial hahn-banach theorem polar duals matrix convex sets and projections of free spectrahedra* ，，，《欧洲数学会杂志》（），第 – 期。，[11] *Dilations linear matrix inequalities* 5 J. W. Helton、I. Klep、S. McCullough 和 M. Schweighofer, ，， *the matrix cube problem and beta distributions* **257** 2019 1232, +106 ，《美国数学会回忆录》（），第 vi 页。[12] *Ueber die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen.* **1897** 1897 1152 1156 ↑8 Th. Molien, ，《柏林科学院报告》（），–。[13] ↑11 T. Netzer 和 D. Plaumann, *Geometry of linear matrix polynomials*, 数学精要教材，Birkh¨ ↑1 7 12 auser，即将出版。，，V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, 剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社， 2003 ↑1 2 。，V. I. Paulsen、I. G. Todorov 和 M. Tomforde, [14] *Operator system structures on ordered spaces*, 《伦敦数学会会刊》 **102** 2010 1, 25 49 ↑4（五月），第 – 期。E. Poon、I. M. Spitkovsky 和 H. J. Woerdeman, [15] *Factorization of singular matrix polynomials and matrices with circular higher rank numerical ranges* **43** 2022 ，《SIAM矩阵分析与应用杂志》（），第3期，1423 1439–。[17] ↑8 M. Ramana 和 A. J. Goldman, *Some geometric results in semidefinite programming*, 《全球优化杂志》 **7** 1995 1, 33 50 ↑12（），第 – 期。R. Sanyal, [18] *On the derivative cones of polyhedral cones* **13** 2013 2, 315 321 ↑12，《几何进展》（），第 – 期。[19] *Algorithms in invariant theory* B. Sturmfels, ，第二版，符号计算丛书，SpringerWienNewYork，维也纳，2008年。 ↑11

Universität Innsbruck, Faculty of Mathematics, Computer Science and Physics, Departmentof Mathematics