arXiv:2301.11073v1 [math.CO] 26 Jan 2023

树的谱任意性彻底失败

SHAUN M. FALLAT、H. TRACY HALL、RUPERT H. LEVENE、SETHA. MEYER、SHAHLA NASSERASR、POLONA OBLAK、HELENA ŠMIGOC

摘要。若 G 是一个图，且 $\mathbf{m}$ 是至少能由一个图为 G 的对称矩阵实现的有序重数列表，那么对于所有实现 $\mathbf{m}$ 的矩阵的特征值，我们能得出什么结论？人们有时会倾向于认为，尤其当 G 是一棵树时，多重特征值的任意间距都应当可以实现。然而，F. Barioli 和 S. Fallat 首次提出了反例：一棵有 16 个顶点的树及一个有序重数列表，对该列表的每组可实现特征值都满足一个非平凡的线性约束。

我们通过给出一个无穷树族及相应的有序重数列表来拓展这一结果；这些列表所对应的可实现特征值集合受到极强约束，无论该树族中的树有多大，其自由度至多为 5。特别地，我们首次给出了会对树施加非平凡非线性特征值约束的重数列表示例，并构造出一种有序重数列表：除平移与缩放外，它仅由一组唯一 的特征值实现。

目录

1. 引言 2 2. 设置与记号 4 2.1. 标准记号 4 2.2. IEP-G 与谱任意性 5 2.3. 几何视角 6 2.4. 树篱 7 2.5. 矩阵集与权重 9 3. 分支复制与收缩，以及路径到树篱构造 10 3.1. 树中的分支复制与收缩 11 3.2. 路径到树篱构造 13 4. 路径矩阵的贪心构造 17 4.1 子路径中的特征值重合 17 4.2. 路径到树篱构造的推论 21 5. 可逆子树引理与组合学 22 5.1. 可逆子树引理 23 5.2. 路径覆盖公式 25 6. 主定理 29 7. 两个猜想的解决 36 8. 谱任意性的惊人失败 38 致谢 43 参考文献 43

日期：2023年1月26日。2020 数学主题分类。15A29、05C50、15A18。关键词和短语。谱、重数列表、有根树、树篱、图的逆特征值问题、分支。

1. 引言

给定一个具有 n 个顶点的简单图 G， G 的逆特征值问题（IEP-G）要求找出相关对称矩阵所有可能的谱——也就是说，找出对角线元素为实数、且非对角线元素的零—非零模式与 G 的邻接矩阵相同的 $n \times n$ 个对称矩阵的特征值多重集。重要的子问题包括仅求所有可能的特征值重数组合（可能还包括它们出现的顺序），或仅求最大可能重数。有关这一问题及其子问题的文献综述，包括讨论这类逆问题如何自然地出现在物理系统动力学研究中——其中 G 编码了系统各部分之间的相互作用——请参阅近期的专著 [19]。众所周知，逆问题既重要又困难，IEP-G 及相关逆问题也不例外。过去几十年间关于这一问题的大量文献，源自一个较简单（但仍然重要）的特殊情形： G 是一条路径。对于这一情形，Hochstad [18] 于 1974 年解决了完整的 IEP-G，结果表明，任意一个由互异实特征值构成的数值有序列表，都可以成为某个模式对应于路径的矩阵的有序谱。在这种情况下，对于一条具有 n 个顶点的路径 G，我们称由 n 个单元素组成的有序重数列表是谱任意的。对于一般图 G，谱任意性意味着各个单特征值或多重特征值的具体数值可以任意选取，唯一的限制是它们必须按正确顺序出现。如果所有可实现的有序重数列表都满足这一性质，那么它就非常方便，因为这意味着一旦解决了有序重数列表这一子问题，整个 IEP-G 也就解决了。

对于一般的 G，不仅完整的 IEP-G 尚未解决，就连重数列表或最大重数这些子问题也仍悬而未决，并被认为极具挑战性。针对小型图或特殊图族，人们已取得一些进展。尤其是在由所有树构成的庞大图族中，已证明最大重数 [21] 等于树的路径覆盖数。找出树的所有可能有序重数列表要困难一些，但 Johnson 和 Leal Duarte [23]曾猜想，这足以解决任意给定树的完整 IEP-G；换言之，树的所有可实现重数列表都具有谱任意性。Barioli 和 Fallat [4]推翻了这一猜想，他们给出了一个相对较小的树及一个特定的有序重数列表：该列表可以在这棵树上实现，但前提是特征值的数值位置满足一个特定的线性约束。Ferrero 等人 [14], 进一步推广了这一结果，将 [4] 中的树推广为一个无限树族，并证明其中每棵树都有一个需要对特征值位置施加线性约束的重数列表。然而，在本研究取得这些结果之前，人们尚不清楚是否存在重数列表需要非线性约束的图，也不知道树的谱任意性可能在多大程度上失效。

本研究首先提出一种构造（见第 4 节），以路径的 IEP-G 解法为基础，但所构造的矩阵对应于一个相当一般的树族；该树族在文中被引入并命名为树篱。对于给定的树篱 T，这种构造得到的矩阵不仅实现了可能的最大重数，还具有若干其他较高的特征值重数。研究特别着重于尽可能提高五个 特定特征值的重数；这穷尽了该技术所允许的所有选择，并得到一个具有若干谱约束和结构约束的矩阵。具体而言，尽管这种构造允许在数值上选择与五个特定重数对应的特征值，且具有完整的五个自由度，但一旦这五个选择确定，所有其他特征值的取值便完全确定，其中还包括许多重数相对较高的特征值。如此高程度的约束并不令人意外，因为与谱中的特征值数量相比，这种构造的自由度要少得多。

与构造一个具有高重数的特定矩阵相比，其逆命题更为引人注目：我们证明（定理 6.1），在对树篱 T 添加一些额外约束（它必须是一个 繁茂树篱）后，任何具有模式 T 且达到至少这五种特殊重数的对称矩阵，都必然来自这一精确构造。证明依赖于一个组合论论证，该论证拓展了路径覆盖数和零迫的思想，并实质性地利用了所引入的树篱族的结构。

这一逆向结果表明，树的谱任意性可能以远超想象的程度失效；此前首次证明树的谱任意性会因一个线性约束而失效的研究，所揭示的程度远不及此。至少有两个自由度——称为平移与缩放，——在放置具有特定重数的特征值时始终可用。若 A 是一个呈现图 G模式的矩阵，那么对于任意选定的严格正实数 m 和任意实数 b，矩阵 $mA + bI$的谱经 m 缩放并经 b平移后，将具有相同的模式 G 以及相同的特征值重数有序列表。因此，对于一组 k重数而言，谱任意性意味着两个平凡自由度和 $k - 2$ 个非平凡自由度。一个线性约束会使非平凡自由度减少到 $k - 3$个。在定理 6.1 的假设下，尽管 k 关于繁茂树篱 T的直径是二次函数，非平凡自由度仍会减少到仅有三个。许多额外约束还包括非线性约束，例如例 6.5 中明确描述的三次约束。

在第 8 节中，通过展示一个特定的有序重数列表，将谱任意性的失效推向彻底崩溃：对于任何高度足够的繁茂树篱，该列表的特征值位置完全不受非平凡扰动的影响。为此，我们对五个特定特征值作出特殊选择，利用剩余的三个非平凡自由度，构造出另外三个特征值重合。由此得到的特征值重数列表在其实现空间中仅剩两个平凡的自由度，可用于

平移和缩放，这意味着特征值的相对间距完全固定。

上述工作对我们理解图的逆特征值问题有着重要影响。具体而言，它使我们得以（在第 7 节）解决某些尚未解决的问题和已有的猜想；我们相信，所发展的组合技术将在该领域得到广泛应用。

2. 设置与记号

本节介绍一些记号和术语，并概述这项工作如何融入关于 IEP-G 的现有研究成果。

2.1. 标准记号。 对于任意正整数 n，令 $[n] := \{1, \dots, n\}$，并令 $[0] := \emptyset$。我们用 $\mathbf{0}$ 表示零向量，用 $\mathbf{1}$ 表示全一向量，并用 $\mathbf{e}_i$ 表示一个除第 i 个分量为 1 外其余分量均为 0 的向量。向量的阶数由上下文决定。若向量 $\mathbf{t} = (t_i) \in \mathbb{R}^n$ 满足**正**，即 $t_i > 0$ 对所有 $i \in [n]$ 均成立，则称其为正向量。我们用 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示所有实矩阵的集合。用 I_n 表示 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的单位矩阵，而 $E_{i,j}$ 表示相应阶数的矩阵单位，其 (i, j) 位置为 1，其余位置为 0。若向量或矩阵的每个分量均非零，则称其处处非零。矩阵 A 的特征多项式记作 $p_A(x)$。

我们只考虑简单图 $G = (V(G), E(G))$，记作 $|G| := |V(G)|$。图 G 中顶点 v 的度记为 $\deg_G(v)$；叶节点是度为一的顶点。若 G 的顶点 u 和 v，则从 u 到 v 的路径是由互不相同的顶点 $u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$ 构成的序列，其中 k 是非负整数，且对每个 $0 \le i < k$，$\{v_i, v_{i+1}\}$ 都是 G 的一条边；该路径的长度为 k 条边。u 和 v 之间的距离记为 $d(u, v)$，它是连接 u 与 v 的路径的最小长度；G 的直径则是 G 中任意两顶点间距离的最大值。G 中一组顶点不相交的诱导路径，若其顶点并集为 $V(G)$，则称为 G 的路径覆盖。路径覆盖中路径数量的最小值称为 G 的路径覆盖数，记作 $P(G)$。

在本文中，字母 T 表示一棵树，即一个无环、连通的有限图。森林 是若干棵树的不交并。有根树 T 是一棵带有指定顶点 r 的树，这个顶点称为树的根。在至少有两个顶点的有根树中，叶节点是度为 1 的非根顶点。由于我们会经常提到路径，对于 $n \ge 1$，我们记 P_n 为路径 1—2— $\cdots$ —n，其顶点集为 $[n]$。我们始终将其视为一棵有根树，根顶点为 $r = 1$；当 $T = P_1$ 时，唯一的顶点既是根，也是叶节点。对于 $n \ge 1$，星图 $K_{1,n}$ 是由一个根顶点连接 n 个叶节点构成的、含有 $n+1$ 个顶点的有根树。

若 y 和 z 是 T 中相邻的顶点，且从根到 y 的路径经过 z，则称 y 是 z 的**子节点**，或者称 z 是 y 的（必然唯一的）**父节点**。具有相同父节点的两个顶点称为**兄弟节点**。若 Q 是 k 个顶点上的导出路径，且 T 的根不在 Q 中，并且 Q 与 $T \setminus Q$ 之间唯一的边连接到 Q 的某个端点，则称 Q 是 T 中的**悬挂路径** k-路径。T 中的**悬挂路径**是 T 中的悬挂 k-路径，其中 $k \ge 1$ 为某个值。

2.2. IEP-G 与谱任意性。 给定一个有 n 个顶点的图 G，令 $\mathcal{S}(G)$ 表示所有满足以下条件的 $n \times n$ 实对称矩阵 $A = (a_{i,j})$ 的集合：对于 $i \neq j$、$a_{i,j} \neq 0$，当且仅当 $\{i, j\} \in E(G)$ 时，A 的对角线元素不受限制。（这里我们默认将 $V(G)$ 与 $[n]$ 视为相同。）G 的逆特征值问题（IEP-G）要研究哪些实数多重集是 $\mathcal{S}(G)$ 中某个矩阵的谱。IEP-G 是一个困难的开放问题；迄今为止，它仅针对某些图族得到解决：至多有五个顶点的图、[6, 10]，路径、[15, 17, 18]，圈图、[13]，广义星、[22]，线性树、[27]，完全图，以及 [9] 仙人掌图和哑铃图 [31]。这一问题已有大量研究成果，并促使人们探究若干子问题，参见例如 [19]。

对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，我们用 $\mathrm{mult}(\lambda, A)$ 表示标量 λ 作为特征值的重数。如果 A 有 k 个互异特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，我们将其谱记为多重集 $\sigma(A) = \{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k\}$，其中 $m_i = \mathrm{mult}(\lambda_i, A) \geq 1$ 对于 $i \in [k]$。如果某个多重集 σ 满足：对于某个 $A \in \mathcal{S}(G)$，有 $\sigma = \sigma(A)$，那么我们称它对 G 可实现。图 G 的最大重数为 $M(G) := \max\{\mathrm{mult}(\lambda, A) : \lambda \in \sigma(A)\ A \in \mathcal{S}(G)\}$。

列表 $\{m_1, \ldots, m_k\}$ 称为 A 的无序重数列表；如果在上述记法中有 $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$，那么 $\mathrm{m}(A) = (m_1, \ldots, m_k)$ 称为 A 的有序重数列表。如果存在一组互异的值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，使得对于某个 $A \in \mathcal{S}(G)$，有 $\sigma(A) = \{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k\}$，那么我们称无序重数列表 $\{m_1, \ldots, m_k\}$ 在 $\mathcal{S}(G)$ 中可实现。如果对于某个 $A \in \mathcal{S}(G)$，有 $\mathrm{m} = \mathrm{m}(A)$，那么我们称有序列表 $\mathrm{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ 对 G 可实现。

若对于满足 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ 的所有实数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，多重集 $\{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k\}$ 均可由 G 实现，则称有序重数列表 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ 对 G 谱任意。此外，如果每个可由 G 实现的有序重数列表$\mathbf{m}$ 对 G 都是谱任意的，则称 G 是谱任意的。

我们采用多重集上的自然运算；例如，多重集的并通过相加重数构成，交对应于取重数的最小值，（多重集）差通过相减重数并取非负部分构成；若 $s \geq 0$ 是一个整数，且 $\Lambda = \{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k\}$ 是一个多重集，我们使用记号$s\Lambda := \{\lambda_1^{(sm_1)}, \ldots, \lambda^{(sm_k)}{}_k\}$。

对于给定图，如何刻画所有可能实现的有序或无序重数列表，这一问题已得到广泛研究，相关进展主要集中于树，[1, 4, 8, 11, 14, 21, 23, 29, 30]。特别是，最大的若干个重数之和的上界已经得到计算，[14, 28]。此外，在第 5 节中，我们将用到以下结论：对于任意树T，等式 $M(T) = P(T)$ 成立，该等式最早见于 [21]。

最近已有研究证明，线性树具有谱任意性 [27]。另一方面，Barioli 和 Fallat 最先证明 [4] 一般而言，树不一定具有谱任意性。沿用他们的思路，可以证明，图 1 所示的树 T_{BF} 是这类例子中规模最小的，而且有序重数列表 $\mathbf{m}_{BF} = (1, 2, 4, 2, 1)$ 可实现，但对于 T_{BF}而言并非谱任意。谱任意性的失效是由于

相应的特征值 $\lambda_1 < \ldots < \lambda_5$ 若要实现 $\mathcal{S}(T_{\mathrm{BF}})$ 中的 $\mathbf{m}_{BF}$，就必须满足线性约束 $\lambda_1+\lambda_5 = \lambda_2+\lambda_4$。在推论 6.4 中，我们证明，对于一大类具有四个高重数特征值的树，也必须满足同一线性约束。Ferrero 等人 [14] 研究了一类规模更大的树 T，并找到一个无序重数列表（取决于 T），使得所有实现 T 的矩阵都满足另一项线性约束。正如我们将在例 6.5 和第 8 节中看到的，我们的结果能够重新得到、细化并大幅扩展这些特征值约束。

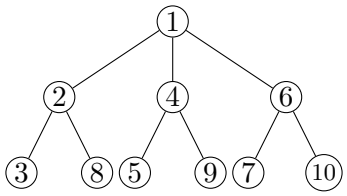


图 1. Barioli-Fallat 树 T_{BF}。

2.3. **几何视角**。为了量化谱任意性在特定图 G 和有序重数列表 $\mathbf{m}$上的失效程度，我们将定义一个模空间 RS(G,$\mathbf{m}$)（见定义 2.1），用于刻画特征值可能位置的本质变化；这里的“本质”是指我们希望忽略由保定向仿射变换（也称为“平移与缩放”）对谱所作的平凡改变。

给定一个对称矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$，它实现了某个有序重数列表 $\mathbf{m}$，以及 $m, b \in \mathbb{R}$，其中 $m > 0$，矩阵 $mA+bI \in \mathcal{S}(G)$ 会为同一个有序重数列表 $\mathbf{m}$给出不同的特征值位置。这种仿射变换不会改变特征值的相对间距，也就是说，不会改变特征值间隙之间的比值。记号 RS(G,$\mathbf{m}$)意在表示图 G 和 $\mathbf{m}$所对应的所有可能的特征值“相对间距”。

维数为 d in $\mathbb{R}^{d+1}$ 的标准单纯形记为 Δ_d。其内部由所有坐标均为严格正实数且总和为 1 的 $(d+1)$ 元组组成，记为 Δ_d。给定一个实现了 $\mathbf{m}$ 的全部 k 重数的具体谱 σ realizing，我们通过将其 σ 缩放 σ 以使总宽度为 1，然后从左到右列出连续互异特征值之间的 $k-1$ 缩放后的间隔，得到 Δ_{k-2} 中的一个点；这些间隔均为正数，且总和为 1。

定义 2.1。设 G 为一个具有 n 个顶点的图，且$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ 是一个由正整数构成的有序重数列表，其中 $\sum_{i\in[k]} m_i = n$。在$k \geq 2$的情形下，模空间 RS(G,$\mathbf{m}$) 定义为 $\mathring{\Delta}_{k-2}$ 的子集，满足$\mathbf{p} \in$ RS(G,$\mathbf{m}$) 当且仅当存在一个矩阵 $A \in \mathcal{S}(G)$，其谱为$\{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k \}$, $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$，并且

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_k - \lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_1} \right).$$

在 $k = 1$ 的情况下，如果G 没有边，则 RS(G，$\mathbf{m}$) $=$RS(G，(n)) 被定义为一个单点；否则，RS(G，(n)) 被定义为空集。

注意，如果 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots\ldots, p_{k-1}) \in \mathrm{RS}(G, \mathbf{m})$，那么对于 $\lambda_1 := 0$ 和 $\lambda_j := \sum_{i=1}^{j-1} p_i$，对于 $2 \le j \le k$，我们有 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k = 1$，而谱 $\{\lambda_1^{(m_1)}, \ldots\ldots, \lambda^{(m_k)}{}_k\}$ 可由 $\mathcal{S}(G)$ 中的某个矩阵实现。此外，除平移和缩放外，所有此类 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ 都以这种方式产生。因此，$\mathring{\mathbf{m}}$ 对 G 是谱任意的，当且仅当 $\mathrm{RS}(G, \mathbf{m}) = \Delta_{k-2}$；而 G 是谱任意的，当且仅当对于 n 的每个具有$k \ge 2$ 个部分的有序划分，$\mathrm{RS}(G, \mathbf{m})$ 要么为空，要么等于 Δ_{k-2}。

例 2.2. 回顾一下，对于 T_{BF} 和有序重数列表 $\mathbf{m}_{BF} = (1, 2, 4, 2, 1)$，在$\mathcal{S}(T_{\mathrm{BF}})$中实现$\mathbf{m}_{BF}$的相应特征值 $\lambda_1 < \ldots < \lambda_5$必须满足线性约束 $\lambda_1 + \lambda_5 = \lambda_2 + \lambda_4$，或者等价地，$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_5 - \lambda_4$。事实上，不存在其他约束，因此可得

$$\mathrm{RS}(T_{\mathrm{BF}}, \mathbf{m}_{BF}) = \left\{(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathring{\Delta}_3 : p_1 = p_4\right\},$$

这意味着 $\mathrm{RS}(T_{\mathrm{BF}}, \mathbf{m}_{BF})$ 是二维的，因为它是$\mathring{}$三维标准单纯形 Δ_3 的内部与一个线性子空间的交集，如图 2 所示。

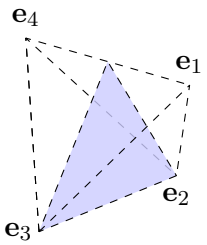


图 2. 二维流形 $\mathrm{RS}(T_{\mathrm{BF}}, \mathbf{m}_{BF})$（蓝色）显示于三维标准单纯形 Δ_3 内。

本文旨在更深入地理解某一特定树族的 $\mathrm{RS}(T, \mathbf{m})$ 的几何，我们将在下一小节介绍该树族。与此前已知的例子不同，我们将证明 $\mathrm{RS}(T, \mathbf{m})$ 不一定是凸的（见例 6.6）。此外，在第 8 节中我们将看到，对于某些规模任意大的树 T，可以使 $\mathrm{RS}(T, \mathbf{m})$ 仅由一个点构成，这体现了谱任意性的极端失败。

2.4. 树篱。

我们将使用以下特殊的一类有根树。

定义 2.3。 有根树 T 称为树篱，如果 $T = P_1$，或者 T 的每个叶节点到 T的根的距离都相同。

树篱 T中顶点 u 的高度 记作 $\mathrm{ht}(u)$，是从 u 到某个叶节点的最短距离；树篱的高度 记作 $\mathrm{ht}(T)$，即其根的高度 $\mathrm{ht}(r)$。例如，P_{n+1} 的高度为 n，而 $K_{1,\,n}$ 的高度为1。

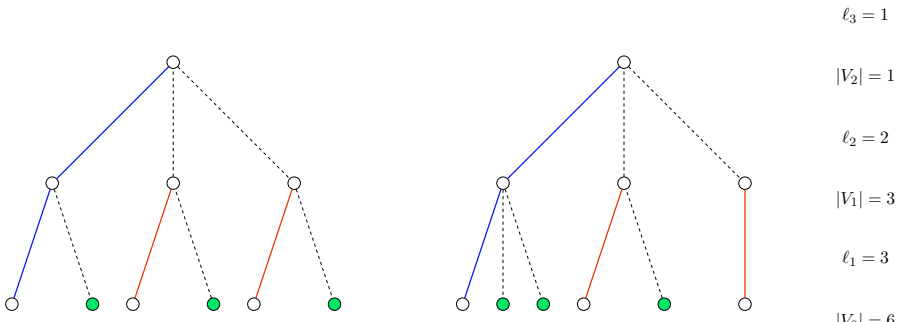
当 T 是高度为 H 且 $i \ge 0$的树篱时，我们将 $V_i(T)$定义为 T中高度为 i的顶点集合。特别地，$V_H(T)$只包含根顶点

T的，且 $V_0(T)$是 T 的叶集合。显然，对于$0 \le i \le H$， $V_i(T)$非空，而 $V_i(T) = \emptyset$。对于 $i \ge 1$，令

$$\ell_i(T) := |V_{i-1}(T)| - |V_i(T)|.$$

注意，如果 $i > H+1$，则 $\ell_{H+1}(T) = 1$ 且 $\ell_i(T) = 0$。由于 T 的任何非叶顶点都至少有一个子节点（除非是平凡情形 $T = P_1$），因此对于所有 $i \in [H]$，都有 $\ell_i(T) \ge 0$。根据上下文，我们记 $V_i := V_i(T)$ 和 $\ell_i := \ell_i(T)$。

注意， ℓ_i 序列可以看作对每个高度处分支数量的编码；一些示例见图3。等价地， T 可以从 P_{H+1} 开始构造，并递归地与 ℓ_i 条悬挂 i-路径作不交并，再按顺序$i = H$， $H-1$， $H-2$，……，1，将这些路径分别通过一条新的连接边连接到高度为 i 的一个顶点上。



(a) 繁茂树篱 T_{BF}。 (b) 一种不繁茂的树篱。

图3. 两种树篱，具有 $H = 2$ 和 $\ell_1 = 3$， $\ell_2 = 2$和 $\ell_3 = 1$。实线边表示生成子图，且它们都同构于 $3P_1 \cup 2P_2 \cup 1P_3$。虚线边表示分支的数量，从高度 h 到高度 $h-1$ 的虚线边数等于 ℓ_h，其中 $h \in [H]$。

定义2.4. 若树篱 T 满足：高度至少为2的每个顶点都有至少三个子节点，且高度为1的每个顶点都有至少两个子节点，则称其为繁茂的。换言之，对于 T 中的每个非叶顶点 v，都有

$$\deg_T(v) \ge \begin{cases} 3, & \text{if } \mathrm{ht}(v) = 1 \text{ or } \mathrm{ht}(v) = H, \\ 4, & \text{if } H > 2 \text{ and } 2 \le \mathrm{ht}(v) < H. \end{cases}$$

我们通过一些例子来说明这些定义。

例2.5. 路径 P_n （ $n \ge 2$ ）是高度为 $n-1$ 的树篱，其中对所有 $i \in [n-1]$，$\ell_n(P_n) = 1$，且 $\ell_i(P_n) = 0$。由于对所有 $u \in V(P_n)$，$\deg_{P_n}(u) \le 2$，它并不繁茂。图 P_1 是一片繁茂树篱。

高度为 $H \ge 2$ 的完美二叉树是一种树篱，其 $i \in [H]$ 为 $\ell_i = |V_i| = 2^{H-i}$。它并不繁茂，因为根的度只有 2。

在 n 个顶点上，高度为1的树篱是星图 $K_{1,\,n-1}$，只要 $n \ge 3$，它就是繁茂的。

Barioli-Fallat 树 T_{BF}（见图 1 和图 3(a)）是高度 2 的繁茂树篱。此外，T_{BF} 是最小的高度 2 繁茂树篱，并且具有$\ell_1 = 3$、 $\ell_2 = 2$ 和 $\ell_3 = 1$。

高度为 $H \geq 2$ 的有根树 L 是繁茂树篱，当且仅当存在 $t \geq 3$ 和高度均为 $H-1$ 的繁茂树篱 L_1、.....、L_t，使得对 $i = 1$、.....、t， L 的根顶点与 L_i 的根顶点相邻。因此，每个这样的繁茂树篱 L 都可以递归构造；见图 4。

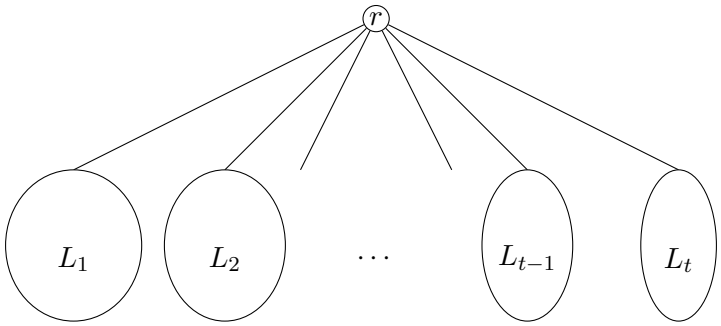


图 4. 高度为 $H \geq 3$、根顶点为 r 且 $\deg_L(r) = t$ 的繁茂树篱 L。子树 L_i、 $i \in [t]$ 都是高度为 $H-1$ 的繁茂树篱。

我们现在指出一个供后文使用的事实：繁茂树篱所需的高度分支程度意味着 ℓ_i 的值会迅速递减。

引理 2.6. 对于每个高度为 H 的繁茂树篱 T，我们有

$$\ell_i(T) \geq 2 \sum_{j=i+1}^{H+1} \ell_j(T)$$

对于所有 $i \geq 2$。

证明。由于 T 是繁茂的，对于 $i \geq 2$，我们有 $|V_{i-1}(T)| \geq 3|V_i(T)|$。因此，$\ell_i(T) \geq 2|V_i(T)| = 2\sum_{j=i+1}^{H+1} \ell_j(T)$。□

2.5. **矩阵集与权重**。在讨论由关于 $\mathcal{S}(T)$ 的特征值的部分（或完整）信息所暗示的实现的唯一性时，我们无法避免由对角相似所产生的固有歧义。虽然只有由对角线上元素为 1 或 -1 的对角矩阵进行共轭才能保持对称性，但由任意可逆对角矩阵进行共轭，则会以下述意义保持组合对称性。

如果一个矩阵 $A = (a_{i,\,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足：当 $a_{i,\,j} \neq 0$时，$a_{j,\,i} \neq 0$对所有 $i \neq j$ 均成立，则称其为组合对称矩阵，例如参见 [24, 32]。给定一个 $n \times n$组合对称矩阵 A，记 $G(A)$ 为这样一个图：其顶点集为 $[n]$，并且当 $i \neq j$ 且 $a_{i,\,j} \neq 0$时，$\{i, j\}$ 为边。图 $G(A)$ 被称为图 A。我们将研究满足 $a_{i,\,j}a_{j,\,i} > 0$ 的组合对称矩阵，因为在对角相似意义下，它们与某个对称矩阵相似。这一点可通过归纳法轻松证明，也可以间接从 $A = (a_i$ 的工作中推导出来，但还

可以从 [26] 间接推导出来。我们将所有与一棵树 T 对应的此类组合对称矩阵组成的集合记为

$$\mathcal{R}(T) := \{A \in \mathbb{R}^{|T|\times|T|} \colon G(A) = T,\ a_{i,j}a_{j,i} > 0 \text{ if } \{i,j\} \in E(T)\}.$$

本文的大部分内容中，我们将使用 $\mathcal{R}(T)$ 中的矩阵，而非 $\mathcal{S}(T)$ 中的矩阵。当然，由于 $\mathcal{S}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)$，我们对 $\mathcal{R}(T)$ 得出的结果也适用于 $\mathcal{S}(T)$。

给定一棵树 T，若且唯若 $a_{i,\ i} = b_{i,\ i}$ 且 $a_{i,\ j}a_{j,\ i} = b_{i,\ j}b_{j,\ i}$ 对所有 $\{i,j\} \in E(T)$ 均成立，则两个矩阵 $A = (a_{i,j})$ $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{R}(T)$ 在对角相似意义下相似。对角相似是一种等价关系；本文所讨论的实现的唯一性将定义为在对角相似的等价类意义下唯一。$\mathcal{R}(T)$ 中固有的非唯一性促使我们考虑以下对象。我们称函数

$$w \colon V(T) \cup E(T) \to \mathbb{R}, \quad w(e) > 0 \text{ for } e \in E(T)$$

为 T 上的一个权函数，并用 $W(T)$ 表示 T 上所有此类权函数的集合。（注意，顶点 $i \in V(T)$ 的权重 $w(i)$ 不受约束，因此可以是任意实数。）我们稍微滥用一下记号：当 $\{i,j\} \in E(T)$ 时，写作 $w(i,\ j)$，而非 $w(\{i,j\})$。给定 $w \in W(T)$，考虑集合

$$\mathcal{R}_w(T) := \{A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{R}(T) \colon a_{i,j}a_{j,i} = w(i,j),\ \{i,j\} \in E(T),\\ a_{i,i} = w(i),\ i \in V(T)\}.$$

注意，对于唯一的权重 w on$T$，任意矩阵 $A \in \mathcal{R}(T)$ 都属于 $\mathcal{R}_w(T)$。事实上，$\mathcal{R}_w(T)$ 恰好是 $\mathcal{R}(T)$ 关于对角相似这一等价关系的等价类，且该等价类包含 A。在这种情况下，我们称 $w_A := w$ 为 的权重。为简化表述，我们通常通过一个满足$a_{i,\ j} = 1$或 $a_{j,\ i} = 1$（对所有 $\{i,j\} \in E(T)$）的代表元来定义等价类；并且在方便时，若 $\{i,j\} \in E(G)$ 且 $i > j$，我们将假设$a_{i,\ j} = 1$ 。

对于 $A \in \mathcal{R}(T)$ 和顶点集为 V_0 的子图 $T_0 \subseteq T$ ，矩阵$A[T_0] = A[V_0]$ 是 A 的主子矩阵，其行和列由 V_0 索引。类似地，若$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{|T|}$的元素带有 $V(T)$ 标签，则 $\mathbf{v}[T_0] = \mathbf{v}[V_0] \in \mathbb{R}^{|T_0|}$ 是一个元素由 V_0 索引的向量。

3. 分支复制与收缩，以及路径到树篱构造

图的分支复制与收缩是两种相反的操作，分别用于扩展和收缩图。如果可以执行这些操作，使得与扩展图和原图对应的矩阵的特征值保持一致，那么我们就能为扩展图构造一个矩阵，使其特征值具有较大的重数。定理 3.11 利用这一技术，从图为路径的矩阵 C 构造出一个较大的矩阵 A，其图为树篱，使得 $\sigma(A)$ 由 C 的各种主子矩阵的谱副本组成。我们称之为路径到树篱构造。在本节末尾，我们将通过示例详细说明这些操作。

3.1. 树中的分支复制与收缩。我们首先介绍树上的分支操作，以及与树对应的对称矩阵上的分支操作。这些操作在 [25] 中首次提出。

设 T 是一棵树，v 是 T 的一个顶点。我们称 $T \setminus v$ 的一个连通分支为 T 在 v 处的分支。设 B_0 是 T 在 v 处的一个分支，$\{v, b_0\}$ 是连接 v 与 B_0 的边。回顾一下，对于 $s \geq 1$，[25] 的 s-分支复制 B_0 在 v 中 T 是由 T 得到的树 T'：添加 s 个 B_0 的不相交副本$B_1, \ldots\ldots, B_s$，以及对于 $i \in [s]$ 的边 $\{v, b_i\}$，其中 $b_i \in V(B_i)$ 是 b_0 的副本。

给定上述的 T、B_0、v、b_i、s、T' 以及 $A = \left(a_{i,\ j}\right) \in \mathcal{S}(T)$，对于任意非零向量 $\mathbf{z} = (z_0, \ldots\ldots, z_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$，满足$\mathbf{z}^\top \mathbf{z} = 1$，我们可以构造一个矩阵 $A' = \left(a'_{i,\ j}\right) \in \mathcal{S}(T')$，称为相对于$\mathbf{z}$的 s-加项复制 $A[B_0]$ 在 v 相对于，其定义如下：

$$A'[T \setminus B_0] = A[T \setminus B_0],\ A'[B_i] = A[B_0],\ a'_{v,b_i} = z_i a_{v,b_0} \text{ for } 0 \leq i \leq s.$$

如 [25], 所示，这些矩阵的特征多项式通过 $p_{A'} = p_A \cdot (p_{A[B_0]})^s$ 相互关联。因此，作为多重集，我们有

$$\sigma(A') = \sigma(A) \cup s\,\sigma(A[B_0]). \tag{1}$$

如上文所述，我们将使用 $\mathcal{R}(T)$ 中的矩阵，它们不必是对称矩阵，并使用其权重 $w \in W(T)$。在此背景下，我们定义如下更一般的分支操作。

定义 3.1。设 T, B_i, v, b_i, s, T' 如上所述，$w \in W(T)$ 是 T 上的一个权函数，且 $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ 是一个满足 $t_0 + \cdots + t_s = 1$ 的正向量。权函数 $w' \in W(T')$ 是 w 在 v 处B_0 相对于$\mathbf{t}$ 的-加项复制 s，如果：

- w' 在 $V(T) \cup E(T) \setminus \{\{v, b_0\}\}$ 上与 w 一致；
- 在 B_i 上，w' 在将 B_i 的顶点和边与 B_0 的对应部分相对应后，与 w 在 B_0 上一致；并且
- $w'(v, b_k) = t_k w(v, b_0)$ 对于 $k = 0, 1, \ldots\ldots, s$。

我们也可以通过等价类的代表元，在非对称矩阵层面而非权重层面说明 s-加项复制。回想一下，对于任意两个矩阵 $A = (a_{i,j})$ 和 B，与 B 的克罗内克积（或张量积）（记作 $A \otimes B$）定义为 $A \otimes B = (a_{i,j} B)$。沿用定义 3.1 中的记号，任取 $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{R}_w(T)$。于是

$$A' = \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v, b_0)\mathbf{t}^\top \otimes E_{v,b_0} \\ \mathbf{1}_{s+1} \otimes E_{b_0,v} & I_{s+1} \otimes A[B_0] \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{w'}(T').$$

矩阵 $A' = \left(a'_{i,j}\right) \in \mathcal{R}_{w'}(T')$ 称为 s-加项复制：将 $A[B_0]$ 在 x 处相对于 $\mathbf{t}$ 进行复制。注意：

$$A'[T \setminus B_0] = A[T \setminus B_0],\ A'[B_i] = A[B_0],$$
$$a'_{i,j} = t_k w_A(v, b_0) \text{ if } i < j \text{ and } \{i, j\} = \{v, b_k\}.$$

现在我们来验证，等式 (1) 对此定义仍然成立。

命题 3.2。设 v 是有根树 T 的一个顶点，B_0 是 T 在 v 处分支，且 $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ 是一个正向量，满足 $t_0 + \cdots + t_s = 1$。如果

$w' \in W(T')$ 是相对于 $\mathbf{t}$， $w \in W(T)$ 在 v 处关于 B_0 的 s-加项复制，那么

$$\sigma(A') = \sigma(A) \cup s\sigma(A[B_0])$$

对于任意 $A \in \mathcal{R}_w(T)$ 和 $A' \in \mathcal{R}_{w'}(T')$。

证明。设 $w = w_A$。只需证明这些矩阵

$$A' = \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v,b_0)\mathbf{t}^\top \otimes E_{v,b_0} \\ \mathbf{1}_{s+1} \otimes E_{b_0,v} & I_{s+1} \otimes A[B_0] \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{w'}(T')$$

~和 $A \oplus (I_s \otimes A[B_0])$ 相似，其中

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v,b_0)E_{v,b_0} \\ E_{b_0,v} & A[B_0] \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_w(T).$$

设 D 为对角矩阵，其对角线为 $(\sqrt{t_0}, \dots, \sqrt{t_s})$。根据假设， $D\mathbf{1}_{s+1}$ 是一个单位向量，因此存在一个正交矩阵 U ，使得 $UD\mathbf{1}_{s+1} = \mathbf{e}_1$。注意， $UD^{-1}\mathbf{t} = UD\mathbf{1}_{s+1} = \mathbf{e}_1$。令

$$V = I_{|T\setminus B_0|} \oplus (UD \otimes I_{|B_0|}).$$

Then

$$\begin{aligned} &VA'V^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & \\ & UD \otimes I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v,b_0)\mathbf{t}^\top \otimes E_{v,b_0} \\ \mathbf{1}_{s+1} \otimes E_{b_0,v} & I_{s+1} \otimes A[B_0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & D^{-1}U^\top \otimes I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v,b_0)\mathbf{e}_1^\top \otimes E_{v,b_0} \\ \mathbf{e}_1 \otimes E_{b_0,v} & I_{s+1} \otimes A[B_0] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A[T \setminus B_0] & w(v,b_0)E_{v,b_0} & \mathbf{0}^\top \\ E_{b_0,v} & A[B_0] & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & I_s \otimes A[B_0] \end{pmatrix} = \tilde{A} \oplus (I_s \otimes A[B_0]). \end{aligned}$$ □

在本文中，反复进行 s 加项复制将是构造具有高重数特征值的矩阵的主要技术。反过来，给定一个矩阵 $A \in \mathcal{R}(T)$，我们希望知道该矩阵是否由 s 复制得到，并逆转这一操作。这个逆向过程称为“收缩”。

定义 3.3。设 w 是 T 上的权函数，其中 T 是一棵树，且 v 是 T 的一个顶点。假设 B_0， B_1，……， B_s 是 T 在 v 处的互相同构的分支，且对应的连接边为 $\{v, b_i\}$ （ $0 \le i \le s$），其中同构 $\theta_i : B_i \to B_0$ 满足 $\theta_i(b_i) = b_0$，且 $w|_{B_i} = w|_{B_0} \circ \theta_i$。那么我们称分支 B_0， B_1，……， B_s 对 w可收缩。此时，我们定义收缩树 $T^\circ := T \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_s)$，以及收缩权 $w^\circ \in W(T^\circ)$；除了以下情况外，它与 w 在 T° 上的限制一致：

$$w^\circ(v,b_0) := \sum_{i=0}^{s} w(v,b_i).$$

注意，若 $w^\circ \in W(T^\circ)$ 是如上所述，通过合并 $B_0, \dots, B_s$ 从 $w \in W(T)$ 得到的权重，则可通过相对于 $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} w & & w \\ w^\circ(v,b_0) & \cdots & w^\circ(v,b_0) \end{pmatrix} \in$ 对 B_0 进行 s-加项复制，从 $\{w(v,b_i)\}_i$ 和 w° 恢复 w

$\mathbb{R}^{s+1}$。根据命题 3.2，若 $A^\circ \in \mathcal{R}_{w^\circ}(T^\circ)$ 和 $A \in \mathcal{R}_w(T)$，则作为多重集，我们有

$$s\,\sigma(A[B_0]) \subseteq \sigma(A) \text{ and } \sigma(A^\circ) = \sigma(A) \setminus s\,\sigma(A[B_0]). \tag{2}$$

定义 3.4。设 $A \in \mathcal{R}(T)$，其中 T 是一棵树。若分支B_0、B_1、……、B_s在 T中（于某个共同顶点 v 处）对于权重 w_A 可折叠，则称它们在 A 中可折叠。

定义 3.5。设 T 是一棵树，且 $k \geq 1$。对于 T中每个与悬挂的 k-路径 B_0、B_1、……、B_s 相连的顶点 $x \in V(T)$，依次折叠 B_0、B_1、……、B_s 后得到的树 T°，称为由T 通过折叠悬挂 k-路径得到。

设 $k \geq 1$，且 $w \in W(T)$ 是一个权重，具有如下性质：每当 T中相交于同一顶点的悬挂 k-路径 B_{i_1}、……、B_{i_t} 存在时，分支 B_{i_1}、……、B_{i_t} 对于 w 都是可折叠的。此时称我们可以在 中折叠悬挂 k-路径，而对 T 中所有此类悬挂 k-路径集合实施所有这类折叠后得到的权重 $w^\circ \in T^\circ$，称为由 w 通过折叠悬挂 k-路径得到。此时我们称已折叠了 ℓ 悬挂 k-路径，其中 ℓ 是 $T \setminus T^\circ$ 中 P_k 的副本总数。

如果 $A \in \mathcal{R}$（T），并且我们可以在 w_A 中收缩悬挂的 k-路径，那么我们就说可以在 A 中收缩悬挂的 k，如果矩阵 A° 可由 A 通过收缩悬挂的 k-路径 得到，则称矩阵 A° 是通过收缩悬挂的 k-路径从 w_A 得到的。

在 $k = 1$ 的情况下，我们将这些关系称为收缩叶节点，而不是收缩悬挂的 1-路径。

3.2. **路径到树篱构造**。每个高度为 H 的树篱 T 都可以通过反复复制作为悬挂路径的分支，从一条路径 P_{H+1} 构造出来。本节将从树的角度说明这一构造，然后讨论它对矩阵的影响。

在树的层面上，我们从 P_{H+1} 开始，然后复制路径根部的 P_H。接着重复这一过程，从高度依次更小的顶点处开始复制路径。更正式地说：

定义 3.6。设 T 是高度为 H 的树篱。对于 T 的每个非叶顶点 v，选取一个指定子节点 v^*，它是 v 的子节点。我们定义一列高度为 H 的树篱

$$T = T^{(0)} \supseteq T^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq T^{(H-1)} \supseteq T^{(H)} = P_{H+1}$$

如下：对于 $0 \leq h \leq H$，令 $T_{(h)} = T[V_{(h)}]$ 为 T 在顶点集上的导出子图

$$V^{(h)} = (V_H(T) \cup \cdots \cup V_{H-h}(T)) \cup \{v^*, v^{*(2)}, \ldots, v^{*(H-h)} : v \in V_{H-h}(T)\},$$

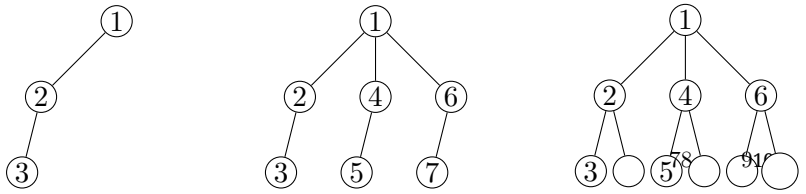
其中 $v^{*(k)} := (v^{*(k-1)})^*$ 且 $v^{*(1)} := v^*$。

这个子图链中因 v^* 的各种可能选择而产生的歧义并不重要，因此本文余下部分将固定一种任意选择，并使用由此得到的子图链$(T_{(h)})_{0 \leq h \leq H}$。（在示例中，我们通常选择 v^* 作为 v 的子节点中标签数值最小的那个。）事实上，若我们选择不同的指定子节点，例如$\tilde{v}^*$，从而得到不同的子图链$(\tilde{T}_{(h)})_{0 \leq h \leq H}$，那么图 $T_{(h)}$

并且对每个 h， $\tilde{T}^{(h)}$ 显然同构：它们都是取 T 中高度至少为 $H-h$ 的顶点所导出的子图，再为其每个叶添加导出悬挂路径，从而形成高度为 H 的树篱。 $T^{(h)}$ 与 $\tilde{T}^{(h)}$ 之间唯一的区别在于，它们是 T 中顶点集可能不同的同构导出子图。

注意，对于 $0 \leq h < H$，图 $T^{(h+1)}$ 是通过收缩悬挂（$h+1$）路径从 $T^{(h)}$ 得到的。等价地， $T^{(h)}$ 是通过连续复制分支从 $T^{(h+1)}$ 得到的；更具体地说，对于每个 $v \in V_{H-h}$（T），都对 v 处的悬挂路径进行 s（v）分支复制，其中 v 在 T 中有 s（v）个 $+1$ 子节点。示例见图 3 和图 7。注意，在图 7 中，我们有 $T^{(3)} = P_4$， $T^{(2)}$ 是由 $2P_3 \cup P_4$ 张成的图， $T^{(1)}$ 是由 $6P_2 \cup 2P_3 \cup 1P_4$ 和 $T^{(0)} = T$ 张成的图。

例 3.7. 考虑图 5(a) 和 5(b) 中所示的 Barioli-Fallat 树的两个导出子图，它们通过分支过程与图 5(c) 中所示的 T_{BF}相关。事实上， $T^{(1)}$ 是通过在 $v = 1$处对 $B = T^{(2)}[\{2,3\}]$ 进行 2- 分支复制，从 $T^{(2)}$ 得到的；而 $T^{(0)} = T_{\mathrm{BF}}$ 则是通过连续三次进行 1-分支复制，从 $T^{(1)}$ 得到的：分别在顶点 2、4 和 6 处，对 $T^{(1)}$ 在 $\{3\}$、 $\{5\}$ 和 $\{7\}$上的子图进行复制。就收缩而言，很容易看出，对于 $h = 0$， 1，图 $T^{(h+1)}$ 是通过收缩悬挂（$h+1$）路径从 $T^{(h)}$ 得到的。



(a) $T^{(2)} = P_3$ (b) $T^{(1)}$ (c) $T^{(0)} = T_{\mathrm{BF}}$

图 5. Barioli-Fallat 树$T^{(0)} = T_{\mathrm{BF}}$的子图 $T^{(2)}$ 和 $T^{(1)}$ 。

现在我们转向矩阵，首先考察 $\mathcal{R}(P_{H+1})$中的某些矩阵。给定实数 a_k （对应 $k \geq 1$）以及 $b_k > 0$ （对应 $k \geq 2$），令 C_n 为按递归方式定义的 $n \times n$矩阵：

$$C_1 := (a_1) \quad \text{and} \quad C_{k+1} := \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1}\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1^{\top} & C_k \end{pmatrix}, \; k \geq 1 \tag{3}$$

其中$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$。因此， C_n是一个三对角矩阵，其主对角线为$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$，上对角线为正数 $(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2)$，且所有下对角线元素均等于 1。例如，

$$C_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

为了通过一个小型贯穿示例来演示我们的流程，我们选取具体的 $C_i, i = 1$, 2，3，作为示例。

例3.8。 设 $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, b_2 = 3$ 和 $b_3 = 20$。那么

$$C_1 = (2), \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们指出，供后续使用， $\sigma(C_2) = \{1, 5\}$ 和 $\sigma(C_3) = \{0, 3, 11\}$。

定义3.9。 设 T是高度为 H且 $w \in W(T)$的树篱。设 $w' \in W(P_{H+1})$，其中照例将 P_{H+1} 视为高度为 H的树篱。对于$v \in V(T)$，记 v'为 P_{H+1}中与 v高度相同的唯一顶点。我们称权重 w 来自 w' 经由路径到树篱构造，如果:

对所有 $v \in V(T)$， • $w(v) = w'(v')$；并且
对于 T的每个非叶顶点 v ，都有

$$\sum_{u \in \text{children}(v)} w(v, u) = w'(v', z)$$

其中 z 是 P_{H+1}中 v' 的子节点。

我们用 $\mathcal{PH}(w', T)$ 表示所有此类权重 w 的集合。

若 $C \in \mathcal{R}_{w'}(P_{H+1})$、 $A \in \mathcal{R}(T)$ 和 $w_A \in \mathcal{PH}(w', T)$ 成立，则称 A 是由 C 经路径到树篱构造得到的，并用 $\mathcal{PH}(C, T)$ 表示所有此类矩阵 A 的集合。

命题3.10。 设 T 是一个高度为 H 的树篱，并回顾定义 *3.6* 中的树篱序列 $T = T^{(0)} \supseteq \cdots \supseteq T^{(H)} = P_{H+1}$。假设对 $0 \le h \le H$， $A^{(h)} \in \mathcal{R}(T^{(h)})$ 成立；并且对 $h \in [H]$, 矩阵 $A^{(h)}$ 是通过收缩 $A^{(h-1)}$ 中悬挂的 h-路径得到的。那么 $A^{(0)} \in \mathcal{PH}(A^{(H)}, T)$。

此外，对 $h \in [H]$, 只要 B 是 $T^{(h-1)}$ 中一条悬挂的 h-路径，且 Q 是 P_{H+1} 中那条悬挂的 h-路径，就有 $w_{A^{(h-1)}}|_B = w_{A^{(H)}}|_{B'}$ 。

证明。 我们断言，对于 $0 \le h \le H$， $A^{(h)} \in \mathcal{PH}(A^{(H)}, T^{(h)})$。当 $h = H$ 时显然成立，而对于 $0 \le h < H$，可由归纳法得出。

设 $h \in [H]$。由于 $A^{(h)}$ 是通过收缩 $A^{(h-1)}$ 中的悬挂 h-路径得到的，因此对于 $T^{(h-1)}$ 中任意悬挂的 k-路径 B 以及 $T^{(h)}$ 中的 B' ，只要 $1 \le k \le h$，就有 $w_{A^{(h-1)}}|_B = w_{A^{(h)}}|_{B'}$ 。由归纳法可得 $w_{A^{(h-1)}}|_B = w_{A^{(H)}}|_Q$，其中 Q 是 P_{H+1} 中的悬挂 k-路径；取 $k = h$ 即可证明该断言。□

$A \in \mathcal{PH}(C, T)$ 的特征值由 C 的特征值以及 C 的若干主子矩阵决定，如下所示。

定理 3.11。 设 T 是高度为 H 的树篱， $C \in \mathcal{R}(P_{H+1})$ 和 $A \in \mathcal{PH}(C, T)$。对于 $i = 1, \ldots, H+1$ ，定义 $C_i := C[H - i + 2, \ldots, H + 1]$。那么

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{H+1} \ell_i(T)\, \sigma(C_i).$$

证明。 令 $w^{(0)} = w_A$。由于 $A^{(0)} \in \mathcal{PH}(C, T^{(0)})$，我们可以在 $w^{(0)}$ 中收缩 $\ell_1(T)$ 条悬挂 1- 路径，从而得到权重为 $w^{(1)} \in \mathcal{PH}(w_C, T^{(1)})$。继续归纳地进行（在第 h 步收缩 $\ell_h(T)$ 条悬挂 h- 路径），我们得到 $w^{(h+1)} \in \mathcal{PH}(w_C, T^{(h)})$，其中 $0 \le h < H$。特别地， $w^{(H)} \in$

$\mathcal{PH}(w_C, T_{(H)}) = \mathcal{R}_{w_C}(P_{H+1})$，因此 $w^{(H)} = w_C$。现在，为每个 $h \in [H]$ 选取一个矩阵 $A^{(h)} \in \mathcal{R}_{w^{(h)}}(T^{(h)})$。由于 $w^{(h)}$ 是由 $w^{(h-1)}$ 通过收缩 $\ell_h(T)$ 个分支 B 得到的，每个分支都具有 $w^{(h-1)}|_B = w_{C_h}$（根据命题3.10），等式 (1) 表明，对于 $h \in [H]$，我们有

$$\sigma(A^{(h-1)}) = \ell_h(T)\sigma(C_h) \cup \sigma(A^{(h)}).$$

此外，$\sigma(A^{(H)}) = \sigma(C) = \ell_{H+1}(T)\sigma(C_{H+1})$。因此，$\sigma(A) = \sigma(A^{(0)}) = \bigcup_{i=1}^{H+1} \ell_i(T)\sigma(C_i)$，如所述。□

定义 3.12。设 T 是高度为 H 的树篱，$C \in \mathcal{R}(P_{H+1})$ 和 $A \in \mathcal{PH}(C, T)$。对于 $i = 1, \ldots, H+1$，定义 $C_i := C[H - i + 2, \ldots, H + 1]$。我们将 $\sigma(C_i)$ 称为 $1 \le i \le H+1$ 的第 i 层特征值集合 A。

例 3.13。设 $C_3 = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是例3.8中的矩阵。那么$\mathcal{PH}(C_3, T_{\mathrm{BF}})$ 是形如以下形式的矩阵集合

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 20t_{1,2} & 0 & 20t_{1,4} & 0 & 20t_{1,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3t_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t_{2,8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3t_{4,5} & 0 & 0 & 0 & 3t_{4,9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3t_{6,7} & 0 & 0 & 3t_{6,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $t_{v,\,b} > 0$ 和

$$\sum_{b \in \mathrm{children}(v)} t_{v,b} = 1$$

对于 $v \in \{1, 2, 4, 6\}$。根据定理 3.11，这些矩阵都是共谱的，并且由于 $(\ell_3(T_{\mathrm{BF}})\ \ell_2(T_{\mathrm{BF}})\ \ell_1(T_{\mathrm{BF}})) = (1, 2, 3)$，我们有

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma(C_3) \cup 2\sigma(C_2) \cup 3\sigma(C_1) \\ &= \{0, 3, 11\} \cup 2\{1, 5\} \cup 3\{2\} = \{0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 11\} \end{aligned}$$

如表 1 所示。

矩阵	特征值						ℓ_is
C_3	0			3		11	$\ell_3 = 1$
C_2		1			5		$\ell_2 = 2$
C_1			2				$\ell_1 = 3$
A	0	$1^{(2)}$	$2^{(3)}$	3	$5^{(2)}$	11	

表 1。$A \in \mathcal{PH}(C_3, T_{\mathrm{BF}})$ 的特征值及其层级 i特征值（即 C_i 的特征值），其中 $i = 1, 2, 3$。

定理 3.11 表明，从任意矩阵 $C \in \mathcal{R}(P_{H+1})$ 出发，路径到树篱构造会产生一个具有若干重特征值的矩阵。一般情况下（当 $\sigma(C_i) \cap \sigma(C_j) = \emptyset$ for $i \neq j$ 如例 3.13 所示），我们只能得到定理所蕴含的重数 $\ell_i(T)$。然而，只要谨慎选择矩阵 $C \in \mathcal{R}(P_{H+1})$，使得 C 的适当子矩阵 C_i 和 C_j 具有一些共同特征值，就有可能进一步增加所选特征值的重数；那么，这些特征值在矩阵 $A \in \mathcal{PH}(C, T)$ 中的重数至少为

$\ell_i + \ell_j$。我们将在下一节介绍一种系统化的做法；现在先给出一个小例子。

例3.14。考虑例 3.13 中使用以下构造

$$C_3' = \begin{pmatrix} 2 & 20 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $\{3-2\sqrt{6}, 2, 3+2\sqrt{6}\}$，而非例3.8 中定义的 C_3。于是得到的矩阵 $A' \in \mathcal{PH}(C_3', T_{\mathrm{BF}})$ 的 (1，1) 元素为 2，其余部分则与 (4) 中的矩阵完全相同。由于 2 现在是 C_3' 和 C_1' 的公有特征值，因此它作为 A' 的特征值时重数为 4。事实上，

$$\begin{aligned} \sigma(A') &= \sigma(C_3') \cup 2\sigma(C_2') \cup 3\sigma(C_1') \\ &= \{3-2\sqrt{6}, 2, 3+2\sqrt{6}\} \cup 2\{1,5\} \cup 3\{2\} \\ &= \{3-2\sqrt{6}, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 3+2\sqrt{6}\}, \end{aligned}$$

如表2 所示。注意，A' 实现了例 2.2 中的重数列表 $\mathbf{m}_{BF}$ =(1，2，4，2，1)。

矩阵	特征值					ℓ_is
C_3'	$3-2\sqrt{6}$		2		$3+2\sqrt{6}$	$\ell_3 = 1$
C_2'		1		5		$\ell_2 = 2$
C_1'			2			$\ell_1 = 3$
A'	$3-2\sqrt{6}$	$1^{(2)}$	$2^{(4)}$	$5^{(2)}$	$3+2\sqrt{6}$	

表2。 $A' \in \mathcal{PH}(C_3', T_{\mathrm{BF}})$ 的特征值及其层级 i 特征值（即 C_i' 的特征值），其中 i = 1,2,3。

4. 路径矩阵的贪心构造

在路径到树篱构造中，我们现在有一种方法，可以构造一个与树篱对应的矩阵，其特征值与给定路径矩阵 C 的尾随主子矩阵的特征值一致。现在，我们的目标是选择 C，使这些尾随主子矩阵具有周期性出现的共同指定特征值。命题 4.4 从满足某些次序条件 (5) 的五个互不相同的指定特征值出发，完成了这一构造。在定理 4.8 中，我们应用路径到树篱构造，为给定的繁茂树篱得到一个矩阵，该矩阵具有这五个重数较高的指定特征值。有趣的是，这五个指定特征值未必是该矩阵中重数较高的唯一特征值：在第 8 节中，我们将证明，随着繁茂树篱的高度增加，本节构造的矩阵还可能出现其他重数较高的特征值。

4.1. 子路径中的特征值重合。设 $a_n \in \mathbb{R}$、$b_n > 0$ 和 C_n 如 (3) 中所定义。为了进一步增加由路径到树篱构造产生的矩阵的重数，使其超过定理 3.11 自动产生的重数，我们希望选择 a_n，b_n，使得对于某些 i，j，

矩阵 C_i 和 C_j 有一些共同的特征值。我们很快会看到，C_i 和 C_{i+1} 不可能有任何共同的特征值，因此我们首先要求 C_i 和 C_{i+2} 始终有一个共同特征值。此外，C_i 和 C_{i+3}也可以有一个共同特征值。

引理 4.1. 对于 $n \geq 1$，令 $C_n \in \mathcal{R}(P_n)$ 按 (3) 中的定义，其中 $a_i \in \mathbb{R}$当 $i \geq 1$ 时，且 $b_i > 0$ 当 $i \geq 2$ 时。

(1) 若 $k \geq 2$，则 $\sigma(C_{k-1}) \cap \sigma(C_k) = \emptyset$。*(2)* 若 $k \geq 3$ 且 $\alpha \in \sigma(C_{k-2})$，则 $\alpha \in \sigma(C_k)$ 当且仅当 $a_k = \alpha$。*(3)* 若 $k \geq 4$ 且 $\beta \in \sigma(C_{k-3})$，则 $\beta \in \sigma(C_k)$ 当且仅当 $b_k = (\beta - a_k)(\beta - a_{k-1})$。

证明。回想一下，存在一个对称矩阵 $A \in \mathcal{S}(P_k)$，它与 C_k 余谱；于是 $A(1)$ 与 C_{k-1} 余谱。A 和 $A(1)$ 的特征值严格交错（例如参见 [20, 定理 4.3.17]），因此第一个断言成立。

令 $p_k(x)$ 表示 C_k 的特征多项式。那么，对于 $k \geq 3$,

$$p_k(x) = (x - a_k)p_{k-1}(x) - b_k p_{k-2}(x).$$

特别地，假设 $p_{k-2}(\alpha) = 0$，由最初的观察可得 $p_{k-1}(\alpha) \neq 0$，且 $p_k(\alpha) = (\alpha - a_k)p_{k-1}(\alpha)$。引理的第二部分得证。

为证明最后一部分，设 $k \geq 4$ 且 $p_{k-3}(\beta) = 0$。由上面的递推关系可得:

$$p_k(x) = ((x - a_k)(x - a_{k-1}) - b_k)p_{k-2}(x) - (x - a_k)b_{k-1}p_{k-3}(x),$$

因此 $p_k(\beta) = ((\beta - a_k)(\beta - a_{k-1}) - b_k)p_{k-2}(\beta)$。由于 $p_{k-2}(\beta) \neq 0$，我们得到$p_k(\beta) = 0$ 当且仅当 $b_k = (\beta - a_k)(\beta - a_{k-1})$，证毕。□

下面给出一些条件，它们的重要性将在下文的命题 4.4 中显现。

定义 4.2。令 $\mathcal{B}$ 表示满足以下十二个条件之一且包含五个不同元素的所有 $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^5$的集合:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
\beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_3 < \beta_4 \\
\beta_2 < \beta_4 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_3 \\
\beta_4 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_3 \text{ and } \alpha_2 + \beta_2 > \beta_4 + \beta_3 \\
\beta_3 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_4 \text{ and } \alpha_2 + \beta_2 < \beta_4 + \beta_3 \\
\beta_3 < \beta_2 < \beta_4 < \alpha_1 < \alpha_2 \\
\beta_4 < \beta_3 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2 \\
\beta_4 < \beta_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2 \\
\beta_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_4 < \beta_2 \\
\beta_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2 < \beta_4 \text{ and } \alpha_2 + \beta_2 < \beta_4 + \beta_3 \\
\beta_4 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2 < \beta_3 \text{ and } \alpha_2 + \beta_2 > \beta_4 + \beta_3 \\
\alpha_2 < \alpha_1 < \beta_4 < \beta_2 < \beta_3 \\
\alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4.
\end{cases}
$$

我们还定义

$$\mathcal{B}_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathcal{B} \text{ for some } \beta_4 \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^3 : (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathcal{B} \text{ for some } \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}\}$$

并设 $\mathcal{B}_1 = \mathbb{R}$。（这里的约定是， $\mathcal{B}_i$ 是集合 $\mathcal{B}$ ，其中删除了所有带下标 $j > i$ 的变量。）

注意，（5）中的后六个条件与前六个条件互为逆向，因此在忽略取反的情况下， $\mathcal{B}$ 中不相交的有效区域有六个。（对于$\mathcal{B}_3$ 和 $\mathcal{B}_2$，分别可归并为两个区域和一个有效区域（忽略取反）。）另请注意，在进行线性代换 $\gamma = \alpha_2 + \beta_2 - \beta_4$后，第三个条件等价于一串不等式：

$$\beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_3 < \gamma$$

第四个条件同样等价于：

$$\gamma < \beta_3 < \beta_2 < \alpha_1 < \alpha_2,$$

由此，我们在两种情况下都可以恢复 $\beta_4 = \alpha_2 + \beta_2 - \gamma$。由此可知，这 12 个互不相交的条件各自都可以通过选取五个严格有序、除此之外完全自由的实数来参数化。

下面这种“周期性”记法将会很方便。

定义 4.3。给定实数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4$，我们将它们扩展为数列 (α_i)、(β_i)，如下所示：

$$\alpha_i := \alpha_k \quad \text{whenever } i \notin \{1,2\},\ k \in \{1,2\} \text{ and } i \in 2\mathbb{Z} + k$$

and

$$\beta_i := \beta_k \quad \text{whenever } i \notin \{2,3,4\},\ k \in \{2,3,4\} \text{ and } i \in 3\mathbb{Z} + k.$$

命题 4.4。设 $\Lambda := (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 是由五个互不相同的实数组成的列表，且满足 $\alpha_2 + \beta_2 \neq \beta_3 + \beta_4$。设 $n \geq 1$ 为一个整数， a_i 和$b_i > 0$ 为实数，并考虑由(3)给出的相应矩阵 $C_i \in \mathcal{R}(P_i)$、$i = 1$、……、 n。以下条件等价：

(i) $\sigma(C_1) = \{\alpha_1\}$ *and* $\sigma(C_i) \cap \Lambda = \{\alpha_i, \beta_i\}$ *for* $i = 2, \ldots, n$.

*(ii)*矩阵 C_1、……、 C_n 的元素 a_i、 b_i 由下式给出

$$a_i = \begin{cases} \alpha_1 & i \in 2\mathbb{Z} + 1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 & i = 2, \\ \alpha_2 & 2 < i \in 2\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6}$$

当 $1 \leq i \leq n$ 时，以及

$$b_i = \begin{cases} (\beta_2 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) & i = 2, \\ (\beta_3 - \alpha_2)(\beta_3 - \beta_2) & i = 3, \\ \frac{(\beta_4 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_4)(\alpha_2 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)}{\beta_4 - \beta_2} & i = 4, \\ (\beta_j - \alpha_1)(\beta_j - \alpha_2) & j \in \{2,3,4\} \text{ and } 4 < i \in 3\mathbb{Z} + j, \end{cases} \tag{7}$$

for $2 \leq i \leq n$.

此外，当这些条件得到满足时，以下断言成立。如果 $n \geq 4$，那么 $\Lambda \in \mathcal{B}$。如果 $n = 3$，那么 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) \in \mathcal{B}_3$。如果 $n = 2$，那么$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{B}_2$。如果 $n = 1$，那么 $\alpha_1 \in \mathcal{B}_1$。

证明。对于 $n \le 2$，直接验证即可。

在 $n = 3$ 的情形下，假设 $\{\alpha_1, \beta_3\} \subseteq \sigma(C_3)$。由于 $\sigma(C_1) = \{\alpha_1\}$，引理 4.1 允许我们得出结论： $a_3 = \alpha_1$。现在， C_3 的特征多项式 $p_3(x)$ 为 $p_3(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\beta_2) - b_3(x-\alpha_1)$。由于$p_3(\beta_3) = 0$，这就意味着 $b_3 = (\beta_3-\alpha_2)(\beta_3-\beta_2)$，如所声称的那样。反过来，给定上述的 a_i、 b_i，我们可以直接验证 $\sigma(C_3) = \{\alpha_1, \beta_3, \alpha_2+\beta_2-\beta_3\}$。根据假设，特征值 $\alpha_2+\beta_2-\beta_3$ 不等于 β_4 ；根据引理 4.1，它也不等于 $\beta_2 \in \sigma(C_2)$。因此， $\sigma(C_3) \cap \Lambda = \{\alpha_3, \beta_3\}$，正如所需。（这里先指出一条供后续使用的结论：在 $n = 3$ 的情形下，如果与假设相反，我们确实有 $\alpha_2 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_4$，那么条件 (2) 等价于以下条件：$\sigma(C_1) = \{\alpha_1\}$、 $\sigma(C_2) = \{\alpha_2, \beta_2\}$ 以及 $\sigma(C_3) = \{\alpha_1, \beta_3, \beta_4\}$。）此外，由于$b_2$、 $b_3 > 0$，且（根据 $n = 2$ 情形）我们有 $b_2 = (\beta_2 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)$，不难看出 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) \in \mathcal{B}_3$。

对于 $n = 4$，假设 $\{\alpha_2, \beta_4\} \subseteq \sigma(C_4)$，仿照用于 $n = 3$ 的类似论证可得 $a_4 = \alpha_2$ 和 $b_4 = {}^{p_3(\beta_4)}\beta_4 - \beta_2$，正如条件 ~~(ii)~~ 所述。对于 $i = 2,3,4$，要求 $b_i > 0$ 进而意味着，只要 $n \ge 4$ 且条件 (ii) 成立，就有 $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathcal{B}$。

对于 $n \ge 5$，假设给定了关于 C_i for$1 \le i \le n$ 的谱条件 (i)。特别地， $\alpha_n = \alpha_{n-2} \in \sigma(C_{n-2})$ 且 $\beta_n = \beta_{n-3} \in \sigma(C_{n-3})$。关于 a_n 和 b_n 的给定公式便可由引理 4.1 直接推出。

反过来，假设 $n \ge 4$ 和 a_i, b_i 由 (6) 和 (7) 给出，其中 $i \neq n+1$。考察矩阵 C_{n-3} 和 C_{n-2}，引理 4.1 表明$\{\alpha_n, \beta_n\} \in \sigma(C_n)$。此外，再由引理 4.1 可知， $\sigma(C_n)$ 与 $\sigma(C_{n-1}) \cup \sigma(C_{n+1}) \supseteq \{\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \beta_{n+1}\}$不相交，因此 $\sigma(C_n)$ 与 Λ 的交集恰为 $\{\alpha_n, \beta_n\}$。容易验证，若 $n \ge 4$，则 $2 \le i \le n$ 的 $b_i > 0$意味着 (5) 中 12 个互不相交的条件中恰有一个成立。□

定义 4.5。给定 $\Lambda \in \mathcal{B}$，我们始终将 $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 记作，并且

$$C_n^\Lambda = \begin{pmatrix} a_n & b_n & & & & \\ 1 & a_{n-1} & b_{n-1} & & & \\ & 1 & a_{n-2} & b_{n-2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_2 & b_2 \\ & & & & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

对于满足命题 4.4 的唯一 $n \times n$ 矩阵。

具体来说，我们有

$$C_1^\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix},$$
$$C_2^\Lambda = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 & (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \alpha_1) \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$
$$C_3^\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (\alpha_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_3) & 0 \\ 1 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 & (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \alpha_1) \\ 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$C_4^\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & (\alpha_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_3) & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_1+\alpha_2+\beta_2 & (\alpha_1-\alpha_2)(\beta_2-\alpha_1) \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

其中 $b_4 = \underline{(\alpha_1-\beta_4)\ (\beta_4-\beta_3)\ (\alpha_2+\beta_2-\beta_3-\beta_4)\ \beta_4-\beta_2}$ 与式（7）相同，并且对于 $n>4$,

$$C_n^\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & (\beta_n-\alpha_1)(\beta_n-\alpha_2)\ \ \mathbf{0}^\top \\ \hline 1 & \\ \mathbf{0} & C_{n-1}^\Lambda \end{array}\right).$$

注意，对于 $n>4$，如果去掉最后 3 行和列，这些矩阵的对角线和超对角线都是周期性的。事实上，省略 C_n^Λ 的最后两个元素后，其对角线形式为 $(\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \ldots\ldots)$，因此周期为 2；省略 C_n^Λ 的最后 3 个元素后，其超对角线形式为 $((\beta_n-\alpha_1)(\beta_n-\alpha_2),\ (\beta_{n-1}-\alpha_1)(\beta_{n-1}-\alpha_2)\ldots\ldots)$，因此周期为 3。

4.2. **路径到树篱构造的推论**。

推论 4.6。 如果 T 是高度为 H 的树篱， $\Lambda=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\in\mathcal{B}$, 且 $A\in\mathcal{PH}(C_{H+1}^\Lambda,T)$，那么

$$\mathrm{mult}(\alpha_j,A)=\sum_{\substack{i\in 2\mathbb{Z}+j,\\ i\geq j}}\ell_i(T),\ j=1,2\quad and$$

$$\mathrm{mult}(\beta_j,A)=\sum_{\substack{i\in 3\mathbb{Z}+j,\\ i\geq j}}\ell_i(T),\ j=2,3,4.$$

证明。 定理 3.11 告诉我们

$$\sigma(A)=\bigcup_{i=1}^{H+1}\ell_i(T)\,\sigma(C_i^\Lambda).$$

根据命题 4.4，我们得到 $\sigma(C_1^\Lambda)=\{\alpha_1\}$ 和 $\sigma(C_i^\Lambda)\cap\Lambda=\{\alpha_i,\beta_i\}$ 对于 $i=2\ldots,\ n$。结论得证。□

定义 4.7。 如果 T 是高度为 $H\geq 2$ 的繁茂树篱，那么我们称无序重数列表 $\mathbf{m}$ 是 T 的临界重数列表，如果在 $\mathbf{m}$ 中存在五个重数 $m_1,\ m_2,\ n_2,\ n_3,\ n_4$，使得:

$$\left\{\begin{array}{l} m_j\geq\displaystyle\sum_{\substack{i\in 2\mathbb{Z}+j,\\ i\geq j}}\ell_i(T),\ j=1,2; \\ n_j\geq\displaystyle\sum_{\substack{i\in 3\mathbb{Z}+j,\\ i\geq j}}\ell_i(T),\ j=2,3,4;\quad \text{and} \\ n_4<\ell_3(T). \end{array}\right. \tag{8}$$

注意，在 $H=2$ 的情况下，由于 $\ell_3=1$，这要求 $\mathbf{m}$ 包含一个重数为 $n_4=0$ 的项。如果我们采用这样的约定：谱，以及相应的有序或无序重数列表，可以写成包含一个“重数为零的特征值”，而该特征值

实际上并不出现在谱中。(8) 中的不等式是根据 Λ 中各项作为 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$ 的特征值时的重数推导出来的。由于 $\sigma(C_3^{\Lambda})$ 包含一个特征值 $\gamma \notin \Lambda$，γ 在 A 中的重数至少为 ℓ_3。因此，对于高度较小的树，Λ 中各项的重数不一定是 A 中最高的五个重数，这就是为什么上面需要不等式 $n_4 < \ell_3(T)$。

$\Lambda \in \mathcal{B}$ 中的元素包含矩阵 C_i^{Λ} 的特定特征值，因此也包含 $\mathcal{PH}(C_i^{\Lambda}, T)$ 中矩阵的特定特征值。

我们在下面的定理中总结本小节的结果。

定理 4.8. 设 T 是高度为 $H \geq 2$ 且 $\Lambda \in \mathcal{B}$ 的繁茂树篱。每个矩阵 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$ 都有一个临界重数列表。

证明。对于任意 $\Lambda \in \mathcal{B}$ 和 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$，记 $m_i = \mathrm{mult}(\alpha_i, A)$ 和 $n_j = \mathrm{mult}(\beta_j, A)$，其中 $i = 1, 2$ 且 $j = 2,3,4$。由推论 4.6 可得式 (8) 中前两个不等式。此外，由引理 2.6 可知

$$n_4 = \sum_{\substack{i \in 3\mathbb{Z}+1, \\ i \geq 4}} \ell_i(T) < 2 \sum_{j=4}^{H+1} \ell_j(T) \leq \ell_3(T). \qquad \square$$

注 4.9. 设 $\Lambda \in \mathcal{B}$。对于 $n > 2$，我们已经看到，α_n 和 β_n 都是 C_n^{Λ} 的特征多项式 $p_n(x)$ 的根。因此，C_n^{Λ} 的其余特征值是度为 $n-2$ 的多项式 $r_n(x)$ 的根：$= \quad {}^{p_n(x)}\ (x-\alpha_n(x-\beta_n)$。由于 $r_n(x)$ 完全由我们对 Λ 的选择决定，根据定理 3.11，对于任意 $H \geq 1$，任意矩阵 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$ 的整个谱都仅由 T 和 Λ 决定。

推论 4.6 保证了 $A \in \mathcal{R}(T)$ 中存在一个矩阵，其五个特征值具有较高的重数。用于构造 A 的路径到树篱构造，还意味着 A 具有更多谱性质和结构性质，正如前一条注释所述。在接下来的章节中，我们将证明，这是获得这五个关键重数的唯一方法。

5. 可逆子树引理与组合学

对于给定的一棵作为树篱的树，前几节介绍了一种构造具有较高特征值重数的矩阵的策略。本节则从相反的方向探讨这个问题：我们利用树的结构以及给定的、含有一些较高重数的无序重数列表，推断任何能够实现该列表的矩阵必须具备的结构性质。本节的主要结果是引理 5.4 及其推论，它们表明，对于一棵树，能够达到最大重数的矩阵不可能具有某些类型的可逆主子矩阵。所禁止出现的诱导子树取决于原树的最小路径覆盖，因此本节余下部分的目标是证明引理 5.11 和 5.14，从而确定繁茂树篱的最小路径覆盖的大小和构成。

这些结果源于文献中的两种标准工具，即零迫，以及路径覆盖与树的最大重数之间的联系。我们首先回顾一些相关结果。

零迫于2008年在 [16]中被引入，旨在为图的最大重数提供一种组合上界，并已在许多领域得到有效应用；例如参见 [2, 3]。为方便读者，下面简要介绍我们将使用的零迫概念。给定一个图 $G = （V， E）$，我们将每个顶点着色为蓝色或白色，并将 $B \subseteq V$ 记作蓝色顶点的集合。颜色变化规则规定，若蓝色顶点 v 恰好有一个白色邻点 u，则它可以将 或迫使 u 从白色变为蓝色，记作 $v \to u$。有限次连续迫使所构成的序列称为零迫过程。 B 的导出集是指在执行颜色变化规则的所有可能应用后变为蓝色的顶点 $B' \subseteq V$的集合，并且该集合不依赖于所选择的具体零迫过程。当 $B' = V$ 时，我们称 B 为G的零迫集。零迫集的最小大小称为 G 的零迫数，记作 $Z（G）$。

以下两个结果见于 [16], ，该文用它们证明了$M(G) \leq Z(G)$。本节的主要结构性结果——引理 5.4——也用到了这两个结果，因此在此列出，以供后文参考。

引理 5.1 ([16], 命题2.3)。 设 B 是 $G = (V, E)$和 $A \in \mathcal{S}(G)$的一个零迫集。若 $\mathbf{v} \in$ 核(A) 且 $\mathbf{v}[B] = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$。

引理 5.2 ([16], 命题2.2)。 设 $G = (V, E)$、 $|V| = n$、 A 是一个 $n \times n$矩阵，且 $N \subseteq [n]$ 是指标集。若唯一满足 $\mathbf{v}[N] = \mathbf{0}$ 的向量 $\mathbf{v} \in$核(A)是零向量，则 零度$(A) \leq |N|$。

接下来，我们转向零迫与路径覆盖之间的联系。首先请注意，在零迫过程中， G 中的每个顶点至多能迫使另一个顶点。给定一个以零迫集 B 和 $v_1 \in B$ 开始的零迫过程，假设过程以 $v_1 \to v_2$、 $v_2 \to v_3$、……、 $v_{k-1} \to v_k$ 结束，且没有 v_k 迫使其他顶点。那么，集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 是 G 中一条导出路径的顶点集，并称为零迫链。请注意，当零迫过程迫使 V 中的所有顶点时，零迫链构成一个路径覆盖。这表明，一般而言， $P(G) \leq Z(G)$；但当 T 是一棵树时， [16] 的作者证明，每个路径覆盖都是某个零迫过程的零迫链集合，因此 $P(T) = Z(T)$。因此，对于树，路径覆盖数、最大零度和零迫数三者相等。

5.1. 可逆子树引理。 完成预备工作后，我们转向一些结果，这些结果将使我们能够证明，在某些情况下，实现矩阵的部分结构可由给定的重数推知。由于本文只关注树，因此所有相关结果都仅针对树给出。我们指出，这些结果也可以推广到不一定是树的图，但代价是陈述会变得更加复杂。我们会指出哪些地方可以推广。

定义 5.3. 设 T 是一个森林，其子树为 T_1 和 T_2。若 $u \in V(T_1)$ 且 $v \in V(T_2)$ 蕴含 $\{u, v\} \notin E(T)$，则称 T_1 和 T_2 在 T 中独立 。

以下结果是本文主定理证明中的核心内容。我们称其为可逆子树引理，并认为它在其他场景中也可能有用。

引理 5.4 (可逆子树引理)。 设 T 是一个森林， $A \in \mathcal{R}(T)$且 $c \geq 1$。若 $T_1, \ldots, T_c$ 是 T 的相互独立子树，并且对每个 $i \in [c]$， $A[T_i]$ 都是可逆的，则 A 的零度至多为 $T \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_c)$ 的路径覆盖数。

证明。 令 $H_1, \ldots, H_k$ 为 $H = T\setminus(T_1 \cup \cdots \cup T_c)$ 的连通分量，并令 $N(T_i)$ 表示 T_i 在 T 中的邻点集，即 $V(T) \setminus V(T_i)$ 中与 T_i 的某个顶点相邻的所有顶点组成的集合。由于这些 T_i 两两独立，对于所有 $i \in [c]$， $N(T_i) \subseteq V(H)$。

令 B 为 H 的一个零迫集，并令 B' 为在 T 中进行零迫过程后得到的导出集。我们断言存在某个 $i_0 \in [c]$ ，使得 $N(T_{i_0}) \subseteq B'$。

为证明这一点，令 G 为通过将每个 T_i 和每个H_j 收缩为单个顶点而得到的图。也就是说， G 是具有 $c + k$ 个顶点$\{T_1, \ldots, T_c, H_1, \ldots, H_k\}$的图，并且 G 的边为

$\{\{X, Y\} : \ T$在 X 和 $Y\}$.之间有一条（必然唯一的）边

那么 G 是一个森林。由于 T_1、.....、T_c 在 T中彼此独立，因此将 G 的顶点划分为 $\{T_1, \ldots, T_c\}$ 和 $\{H_1, \ldots, H_k\}$，便构成了 G的二分划分。

用整数 $|B' \cap N(T_i) \cap V(H_j)| \in \{0, 1\}$标记 G 的每条边 $\{T_i, H_j\}$。因此，当且仅当与 T_i 关联的 $V(H_j)$中的顶点属于 B'时， G 中的边 $\{T_i, H_j\}$ 才标记为1。我们的断言等价于：存在某个 $i_0 \in [c]$ ，使得与T_{i_0} 关联的 G 的每条边都标记为1。

如果断言不成立，那么对每个 $i \in [c]$，都有一条与 T_i 关联且标记为0的 G 中的边。另一方面，在 H 中有效、但在 T 中无效的唯一迫使操作 $u \to v$ ，是 u 在某个 T_i中有一个邻点。由于 B 是 H的一个零迫集，因此 G中的每个非孤立 H_j 都至少有一条关联边标记为1。于是，我们可以在 G中找到一条形如T_{i_1}—H_{j_1}—T_{i_2}—H_{j_2}—.....的路径，其边的标签交替为0、1、0、1、.....。由于这种交替标记，对每个 t，都有 $i_{t+1} \neq i_t$和$j_{t+1} \neq j_t$ 。由于 G 无环，这意味着对于 $s \neq t$，有 $i_s \neq i_t$ 和 $j_s \neq j_t$，因此我们在森林 G中得到一条无限路径，矛盾。由此得证。

不妨设 $i_0 = c$；那么 $N(T_c) \subseteq B'$。如果$\mathbf{v}$ 是 A 的零向量，且$\mathbf{v}[B] = \mathbf{0}$，那么引理 5.1 的证明表明$\mathbf{v}[B'] = \mathbf{0}$。因此，按照由划分 $V(T) = V(T_c) \cup (B' \setminus V(T_c)) \cup (V(T) \setminus (B' \cup V(T_c)))$ 给出的矩阵和向量的分块分解，我们有

$$\mathbf{0} = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} A[T_c] & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}[T_c] \\ \mathbf{0} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A[T_c]\mathbf{v}[T_c] \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

（其中 $*$ 表示与我们的论证无关的项），因此根据 $A[T_c]$ 的可逆性，有 $\mathbf{v}[T_c] = \mathbf{0}$。若 $c > 1$，则在森林 $T' = T\setminus T_c$ 中进行同样的论证，我们可以重复上述论证，从而看到，对于同一个集合 B，存在$i'_0 \in [c-1]$，不妨记为 $i'_0 = c - 1$，使得 $\mathbf{v}[B \cup V(T_{c-1} \cup T_c)] = \mathbf{0}$。归纳地继续这一过程，我们得到 $\mathbf{v}[B \cup V(T_1 \cup \cdots \cup T_c)] = \mathbf{0}$。由于 B 是 $H = T\setminus(T_1 \cup \cdots \cup T_c)$ 的零迫集，引理 5.1 给出 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，因此根据引理 5.2，$\text{nullity}(A) \leq |B|$。由于对于森林而言，路径覆盖与零迫集一致[16]， $|B| \leq P(T \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_c))$，结论得证。□

下面陈述关于达到最大特征值重数的矩阵的推论。

推论 5.5。 设 T 是一棵树，其中 $A \in \mathcal{R}(T)$，且 T_1、…、T_c 是 T 的相互独立子树。

(1) 如果 零度$(A) > P(T \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_c))$，那么主子矩阵 $A[T_1]$、…、$A[T_c]$ 中至少有一个不可逆。*(2)* 如果 $\lambda \in \sigma(A)$，且 重数$(\lambda) > P(T \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_c))$，那么主子矩阵 $A[T_1]$、…、$A[T_c]$ 中至少有一个以 λ 为特征值。

证明。 该推论的第一部分直接由引理 5.4 得出。第二部分由第一部分得出，只需考虑 $A' := A - \lambda I$。□

当移除 T_i 后图的路径覆盖数下降时，可逆子树引理最为有用。

观察 5.6. 设 G 是一个图，且 Q 是大小为 $P(G)$ 的路径覆盖中的一条路径。那么 $P(G \setminus Q) = P(G) - 1$。

证明。 注意到 $P(G \setminus Q) \leq P(G) - 1$，因为在 $G \setminus Q$ 上不含 Q 的诱导路径覆盖有 $P(G) - 1$ 条路径。接着，若 $P(G \setminus Q) = k < P(G) - 1$，则可将其与 Q 取并，构造出一个包含 $k+1 < P(G)$ 条路径的 G 的路径覆盖。□

当 $c = 1$ 和 T_1 是最小路径覆盖中的单个顶点时，这个特殊情形将被反复使用，因此将其表述为一条推论。

推论 5.7. 设 T 是一棵树，并假设 $A = (a_{i,\,j}) \in \mathcal{R}(T)$ 满足$\lambda \in \sigma(A)$，且 $\operatorname{mult}(\lambda, A) = M(T)$。那么， T 的任意一个在某个最小路径覆盖中为单点的顶点 $v \in V(T)$ 都满足 $a_{v,\,v} = \lambda$。

证明。由于 T 的一个最小路径覆盖包含一条单顶点路径 $\{v\}$，根据观察 5.6，我们有 $M(T) = P(T) = P(T \setminus \{v\}) + 1$。将 $T_1 = \{v\}$ 代入推论 5.5 的第二部分即可得到结论。□

备注 5.8。 我们在此指出，前述结果的某些版本仍适用于比树更一般的图类，但其正式表述要复杂得多，而且对我们的主要结果并无必要，因此这里略去。特别地，引理 5.4 的证明只要求收缩后的图 G 是一棵树且没有重边。类似地，只要 $M(G) = Z(G)$，且 v 不属于原图中的任何圈，推论 5.7 的假设就可以修改为在顶点 v 处使用环零迫（见 [3]）。

5.2. **路径覆盖公式**。 设 T 是高度为 H 的繁茂树篱，并回顾定义 3.6 中的子树链

$$T = T^{(0)} \supseteq T^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq T^{(H)} = P_{H+1}$$

。为了确定这些子树的路径覆盖数，并找出 $T^{(h)}$ 的最小路径覆盖中可用于推论 5.5 和推论 5.7 的路径，我们将使用 Nylen 在 [33] 中的一个结果。

定义 5.9。设 $T = (V,\ E)$ 是一棵树。若删除顶点 $v \in V$ 后，G 至少有两个在端点处与被删除顶点相连的路径连通分量，则称 $v \in V$ 为合适的

。换言之， v 的度至少为 3，且至少有两条与其相邻的悬挂路径。

引理 5.10 ([33])。若 v 是一棵包含悬挂路径 p_1—. .. —p_k 和 q_1—. .. —q_l 的树 T 中的一个适当顶点，其中 v 与 p_1 和 q_1 相邻，则 T 存在一个包含路径

$$p_k — \ldots — p_1 — v — q_1 — \ldots — q_l.$$

现在我们可以建立 $T^{(h)}$ 的路径覆盖数公式。注意，同一公式已出现在推论 4.6 中；这将在下一节中发挥重要作用。

引理 5.11. 若 T 是高度为 $H \geq 1$ 的繁茂树篱，且 $0 \leq h \leq H$，则

$$M(T^{(h)}) = P(T^{(h)}) = \sum_{\substack{i \in 2\mathbb{Z}+h+1, \\ i \geq h+1}} \ell_i(T).$$

此外，若 Q 是以下两者之一

(1) $T^{(h)}$ 中的一条悬挂$(h+1)$路径，或 *(2)* 一个单顶点 $v \in V(T^{(h)})$，且$\mathrm{ht}(v) \geq h$ 和 $\mathrm{ht}(v)$ 与 h 奇偶性相同，

那么，存在一个关于 $T^{(h)}$ 的最小路径覆盖，其中包含 Q 作为一条路径，因此

$$P(T^{(h)} \setminus Q) = P(T^{(h)}) - 1.$$

证明。首先，我们注意到，对于任意一棵带有悬挂路径$Q_{u,v}$ 的树 T，该路径连接非叶节点 u 与叶节点 v，将$Q_{u,v}$ 收缩到顶点 u 后得到的图 $T' := T \setminus (Q_{u,v} \setminus \{u\})$必然保持最小路径覆盖，因此 $P(T) = P(T')$。从 $T = T^{(h)}$开始反复进行这一过程，我们得到一片繁茂树篱。因此，要证明上述路径覆盖公式，只需证明其在 $h = 0$的情形下成立；而要证明命题（1）和（2），只需在 $h = 0$ 的情形下，并对 $Q = \{z\}$，证明命题（2），其中 z 是 $T = T_{(0)}$中具有偶数高度的一个顶点。记 $V_i := V_i(T)$。

为此，将通过对 H 进行归纳法证明， T 存在一个由 P_3和 P_1组成的最小路径覆盖 $\mathcal{C}$：每个处于奇数高度的顶点与其两个子节点共同构成覆盖中的一个 P_3；而对于偶数$i \in [H]$，覆盖 $\mathcal{C}$ 中不存在连接 V_{i-1} 与 V_i的边。

如果 $H = 0$，那么 $T = P_1$，这显然成立。如果 $H = 1$，那么$T = K_{1,\,n}$ 是一个星图，唯一处于奇数高度的顶点是根。一个最小路径覆盖包含一条从叶节点到根再返回另一个叶节点的 P_3，以及若干个 P_1来覆盖其余叶节点，并且 $P(K_{1,\,n}) = n - 1 = |V_0| - |V_1| = \ell_1(K_{1,\,n})$。

接下来，假设 $H \geq 2$。我们将构造 T 的一个 $\mathcal{C}$，其类型如上所述。首先，V_1 中的每个顶点都符合条件，因为它至少有两个作为悬挂叶的子节点。根据引理 5.10，我们可以通过选取这样的路径来开始构造 $\mathcal{C}$：路径从一个叶节点出发，向上到达其高度为 1 的父节点，再向下到达另一个叶节点，且不经过任何高度 2 的顶点。如此反复，我们就覆盖了所有高度为 1 的顶点。我们还将剩余的叶节点作为单顶点路径纳入覆盖 $\mathcal{C}$。剩下未覆盖的顶点高度至少为 2，接下来归纳地重复这一过程：未覆盖部分 $T' := T \setminus (V_0 \cup V_1)$ 的

树具有所声称类型的最小路径覆盖。将其纳入 $\mathcal{C}$，即可完成构造。

为证明 $P(T)$ 的公式，设 T 是高度为 $H \geq 2$ 的繁茂树篱，并且已证明高度为 $H-2$ 的繁茂树篱的路径覆盖数公式。那么，特别地， $T' = T \setminus (V_0 \cup V_1)$ 有

$$P(T') = \sum_{1 \leq i \in 2\mathbb{Z}+1} \ell_i(T') = \sum_{3 \leq i \in 2\mathbb{Z}+1} \ell_i(T).$$

此外，由于 $T \setminus T' = T[V_0 \cup V_1]$ 是星图的并，很容易看出

$$P(T \setminus T') = \ell_1(T).$$

T 的最小路径覆盖 $\mathcal{C}$ 中， $T \setminus T'$ 与 T' 之间没有边，因此

$$P(T) = P(T \setminus T') + P(T') = \ell_1(T) + \sum_{3 \leq i \in 2\mathbb{Z}+1} \ell_i(T) = \sum_{1 \leq i \in 2\mathbb{Z}+1} \ell_i(T),$$

如所需。

现在考虑情形 $h = 0$ 和 $Q = \{z\}$ 下的命题 (2)，其中 z 或为叶节点，或为高度为偶数的顶点。考虑上文所述的最小路径覆盖 $\mathcal{C}$ 。如果 z 已经是 $\mathcal{C}$ 中的单顶点路径，则结论立即成立，因此假设并非如此。 $\mathcal{C}$ 中所有非单顶点路径都具有 u—p—v 的形式，其中 u、v 是高度为偶数的兄弟节点，而 p 是它们的父节点，因此 $\mathcal{C}$ 中包含 z 的路径也具有这种形式，设为 z—p—v。如果 p 有三个或更多子节点，那么取一个既不是 v 也不是 z 的子节点 u' 。于是 u' 必然是 $\mathcal{C}$ 中的单顶点路径，因此我们可以将 $\mathcal{C}$ 中的路径 u' 和 z—p—v 替换为 z 和 u'—p—v，从而得到 T 的一个新的路径覆盖 $\mathcal{C}'$ ，其中 z 是单顶点路径。否则， p 不是 T 的根（因为根至少有 3 个子节点），所以取 p 的父节点 g 。由于 g 位于正偶数高度，要么 g 是 $\mathcal{C}$ 中的一条单顶点路径，要么 g 是 $\mathcal{C}$ 中某条路径的端点。无论哪种情况，我们都可以通过替换这些路径，构造出 T 的一个新路径覆盖 $\mathcal{C}'$ 。

$\cdots$—g 和 z—p—v 在 $\mathcal{C}$ 中，其中有 $\cdots$—g—p—v 和 z。

这表明我们总能找到一个路径覆盖 $\mathcal{C}'$ ，其中 z 是一个单点集，并且使得 $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}|$，因此 $\mathcal{C}'$ 也是 T的一个最小路径覆盖。根据观察 5.6，这意味着 $P(T \setminus Q) = P(T) - 1$。
□

注意到，在命题 4.4给出的 C_n^Λ 序列中，特征值 β_i 每隔三步就会重复出现。这很有用，因为对于繁茂树篱中的路径覆盖，也存在类似的事实。以下定义和引理建立了这种联系，并为推论 4.6中的第二个求和公式给出了组合解释。

定义 5.12。设 T 是一棵高度为 H 的树篱。对于 $0 \leq h \leq H$，我们记作

$$\widehat{M}(T^{(h)}) := \sum_{\substack{i \in 3\mathbb{Z}+h+1, \\ i \geq h+1}} \ell_i(T).$$

注 5.13。使用这一记法和引理 5.11，定义临界重数列表这一概念的不等式 (8) 可简洁地写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{mult}(\alpha_j, A) \geq M(T^{(j-1)}),\ j = 1, 2,\\ &\mathrm{mult}(\beta_j, A) \geq \widehat{M}(T^{(j-1)}),\ j = 2, 3, 4,\ \text{and}\\ &\mathrm{mult}(\beta_4, A) < \ell_3(T).\end{aligned}$$

引理 5.14。设 T 是高度为 $H \geq 2$ 且为 $0 \leq h \leq H$ 的繁茂树篱。设 Q 是 $T^{(h)}$ 中一条悬挂的 $(h+1)$ 路径，并且

$$\widehat{V} := \{v \in V(T^{(h)}) : h + 2 \leq \mathrm{ht}(v) \in 3\mathbb{Z} + h + 2\}.$$

Then

$$P(T^{(h)} \setminus (Q \cup \widehat{V})) = \widehat{M}(T^{(h)}) - 1 \quad \textit{and} \quad P(T^{(h)} \setminus \widehat{V}) = \widehat{M}(T^{(h)}).$$

证明。记 $V_j := V_j(T^{(h)})$，使得 $V_j \subseteq V_j(T)$，并且对于 $j \geq h$，有 $V_j = V_j(T)$。于是我们有如下分解：

$$T^{(h)} \setminus \widehat{V} = T^{(h)}[V_0 \cup \cdots \cup V_{h+1}] \cup \bigcup_{h+4 \leq i \in 3\mathbb{Z}+h+1} T^{(h)}[V_{i-1} \cup V_i]$$

and

$$T^{(h)} \setminus (Q \cup \widehat{V}) = (T^{(h)}[V_0 \cup \cdots \cup V_{h+1}] \setminus Q) \cup \bigcup_{h+4 \leq i \in 3\mathbb{Z}+h+1} T^{(h)}[V_{i-1} \cup V_i].$$

路径覆盖数在不交并下具有可加性，因此只需计算这些分解中每一项的路径覆盖数。

我们断言，对于 $i \geq h+1$,

$$P(T^{(h)}[V_{i-1} \cup V_i]) = \ell_i.$$

为此，注意若 $h+1 \leq i \leq H$，则 V_{i-1} 和 V_i 非空，并且 $T^{(h)}[V_{i-1} \cup V_i]$ 具有 $\bigcup_{1 \leq j \leq |V_i|} K_{1,d_j}$ 的形式，其中 $d_j \geq 3$（因为 T 是繁茂的），其路径覆盖数为 $\sum_{j=1}^{|V_j|}(d_j - 1) = \ell_j$。为验证其余退化情形：若 $i > H+1$，则 $V_{i-1} = V_i = \emptyset$ 和 $\ell_i = 0$；若 $i = H+1$，则 $V_{i-1} = \{v\}$ 仅包含 T 的根顶点以及 $V_i = \emptyset$ 和 $\ell_i = 1$。

如上文引理 5.11 的证明中所观察到的，在树的叶节点处添加一条悬挂路径不会改变其路径覆盖数。因此，$P(T^{(h)}[V_0 \cup \cdots \cup V_{h+1}]) = P(T^{(h)}[V_h \cup V_{h+1}] = \ell_{h+1}$. 由此可得，$P(T \setminus \widehat{V}) = \widehat{M}(T^{(h)})$。

最后，$P(T^{(h)}[V_0 \cup \cdots \cup V_{h+1}] \setminus Q) = P(T^{(h)}[V_h \cup V_{h+1}] \setminus \{u\})$，其中 u 是 V_h 中的 Q 的顶点。现在 $T^{(h)}[V_h \cup V_{h+1}] \setminus \{u\} = \bigcup_{j=1}^{|V_{h+1}|} K_{1,\ d'_j}$ 其中$d'_j \geq 2$（因为 T 是繁茂的），且 $\sum_{j=1}^{|V_{h+1}|} d'_j = |V_h| - 1$。由于对所有 j, $d'_j \geq 2$，该图的路径覆盖数为 $\sum_{j=1}^{|V_{h+1}|}(d'_j - 1) = \ell_{h+1} - 1$。因此，$P(T^{(h)} \setminus (Q \cup \widehat{V})) = \widehat{M}(T^{(h)}) - 1$。□

6. 主定理

回顾一下，对于茂盛层架 T，推论 4.6 给出了一个矩阵 $A \in \mathcal{R}(T)$，它具有一个临界重数列表（见定义 4.7）；粗略地说，这意味着 A 的五个特征值具有较高的重数。以下定理是本文的主要结果，我们将在其中证明，每个具有此类临界重数列表$\mathbf{m}$ 的矩阵都源自路径到树篱的构造，因此其整个谱由这五个选定的特征值及其较高重数决定。

定理 6.1。设 T 是一个高度为 $H \geq 2$ 且具有 $A \in \mathcal{R}(T)$ 的繁茂树篱，其重数列表为 $\mathbf{m}$，且该列表是 T 的临界重数列表。那么，对于某个 $\Lambda \in \mathcal{B}$，有 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$。此外，每个这样的矩阵 A 的整个谱完全由 Λ 决定：

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{H+1} \ell_i(T)\, \sigma(C_i^{\Lambda}).$$

特别地，对于 $\mathbf{m}$，(8) 中前两个不等式取等号。

由于 $\mathcal{S}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)$，此定理也适用于更常见的图为 T 的对称矩阵情形。

本节余下部分将证明定理 6.1。我们首先建立一些谱条件，以确定矩阵 $A \in \mathcal{R}(T)$ 必然来自路径到树篱构造。我们的第一个引理给出了关于对角线元素和悬挂 2-路径的信息。

引理 6.2。设 T 是一个繁茂树篱，$A = (a_{i,\,j}) \in \mathcal{R}(T)$，且 α_1、α_2 是不同的实数，使得

$$\operatorname{mult}(\alpha_j, A) \geq M(T^{(j-1)})$$

对于 $j \in [2]$。

(C1) 若 $v \in V(T)$，且 $\operatorname{ht}(v) \neq 1$，则

$$a_{v,v} = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } \operatorname{ht}(v) \text{ is even,} \\ \alpha_2 & \text{if } \operatorname{ht}(v) \text{ is odd.} \end{cases}$$

(C2) 我们可以收缩 A 中的叶（如定义 *3.5* 所述），得到矩阵 $A^{(1)} \in \mathcal{R}(T^{(1)})$，并且对于 $T_{(1)}$ 中的每条悬挂 *2*-路径 Q，$\alpha_2 \in \sigma(A^{(1)}[Q])$。

证明。根据推论 5.7 和引理 5.11，只要 v 是偶数高度的顶点，就有 $a_{v,\,v} = \alpha_1$。这包括所有叶顶点，因此我们可以收缩 A 中的叶，得到 $A^{(1)} \in \mathcal{R}(T^{(1)})$。这次收缩从 T 中移除了 ℓ_1 个叶 u，其中每种情况下都有 $A[\{u\}] = (\alpha_1)$，因此根据方程（2），$\sigma(A^{(1)}) = \sigma(A) \setminus \ell_1\{\alpha_1\}$。特别地，

$$\operatorname{mult}(\alpha_2, A^{(1)}) = \operatorname{mult}(\alpha_2, A) \geq M(T^{(1)}).$$

将推论 5.7 和引理 5.11 应用于 $A^{(1)}$，可得 $a_{v,\,v}^{(1)} = \alpha_2$ 对于 $T^{(1)}$ 中高度 $\operatorname{ht}(v)$ 为奇数且 $\operatorname{ht}(v) \neq 1$ 的每个顶点 v 都成立。由于 A 是由 $A^{(1)}$ 经过连续直和项复制得到的（该操作将 $A^{(1)}$ 的对角线元素复制到相同高度处 A 的对角线元素中），因此 (C1) 成立。

若 Q 是 $T^{(1)}$ 中的一条悬挂 2-路径，则根据引理 5.11，

$$P(T^{(1)} \setminus Q) < P(T^{(1)}) = M(T^{(1)}) \leq \mathrm{mult}(\alpha_2, A^{(1)}).$$

根据推论 5.5， α_2 是 $A^{(1)}[Q]$的特征值，因此 (C2) 成立。 □

下面的引理是我们主定理归纳步骤的基础，因为它将使我们能够在逐渐增大的高度上反复进行折叠。

引理 6.3。 设 α、α'、β为互不相同的实数， $1 \leq h \leq H-1$、 T是高度为 $H \geq 2$的繁茂树篱，且 $w_h \in W(P_h)$。设 $B \in \mathcal{R}(T^{(h)})$ 满足

$$\mathrm{mult}(\beta, B) \geq \widehat{M}(T^{(h)})$$

并且对 $T^{(h)}$ 中所有满足$\mathrm{ht}(v) \geq 3$的顶点 v， $b_{v,v} \neq \beta$。此外，假设：*(P1)* $T^{(h)}$ 中的每条悬挂 h-路径 Q 都满足：

- $w_{B[Q]} = w_h$,
- $\alpha \in \sigma(B[Q])$,
- 且若 $h > 1$ 则 $\alpha' \in \sigma(B[Q_0])$，其中 Q_0 是从 $T(h)$ 中通过移除一个高度为 $= h-1$ 的顶点（$v \in V(Q)$，$ht(v)$）得到的悬挂 $(h-1)$-路径。*(P2)* 若 $h = 1$，则对于 $T(1)$ 中的每条悬挂 2-路径 Q'，都有 $\alpha' \in \sigma(B[Q'])$；若 $h > 1$，则对于 $T(h)$ 中高度为 h 的每个顶点 u，都有 $b_{u,u} = \alpha'$。

于是存在一个权重 $w_{h+1} \in W(P_{h+1})$，使得对于 $T^{(h)}$ 中的所有悬挂 $(h+1)$-路径Q'，都有 $w_{B[Q']} = w_{h+1}$，且 α' 和 β 都是$B[Q']$的特征值。

证明。设 Q' 是 $T^{(h)}$ 中一条连接顶点 u 与一条悬挂 h-路径 Q 的悬挂 $(h+1)$-路径。则：

$$B[Q'] = \begin{pmatrix} b_{u,u} & c_u \mathbf{e}_1^\top \\ d_u \mathbf{e}_1 & B[Q] \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots\ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^h$，且由 (P1) 得 $w_{B[Q]} = w_h$。对于 $h-1 \leq i \leq h+1$，令 Δ_i 为 $B[Q']$的尾部主 $i \times i$ 子矩阵的特征多项式，即 Δ_{h+1} 是 $B[Q']$的特征多项式，Δ_h 是 $B[Q]$的特征多项式，而 Δ_{h-1} 是陈述中定义的 $B[Q_0]$ 的特征多项式。（在退化情形下，$\Delta_0 := 1$。）

我们首先证明 $\alpha' \in \sigma(B[Q'])$。若 $h = 1$，参见 (P2)。若 $h > 1$，则再次由 (P2) 得 $b_{u,\,u} = \alpha'$，因此

$$\Delta_{h+1}(x) = (x - \alpha')\Delta_h(x) - c_u d_u \Delta_{h-1}(x) \tag{9}$$

并且根据 (P1)， $\Delta_{h-1}(\alpha') = 0$，因此根据 (9)， $\Delta_{h+1}(\alpha') = 0$，如所需。

现在我们将应用推论 5.5 来证明 $\beta \in \sigma(B[Q'])$。考虑

$$\widehat{V} = \{v \in V(T^{(h)}) : h+2 \leq \mathrm{ht}(v) \in 3\mathbb{Z} + h + 2\}.$$

注意， $\{Q'\} \cup \{\{v\} : v \in \widehat{V}\}$ 是 $T^{(h)}$中的路径独立集；参见图 6，其中这些路径以橙色标出。根据引理 5.14，我们有

$$P(T^{(h)} \setminus (Q' \cup \widehat{V})) = \widehat{M}(T^{(h)}) - 1 < \widehat{M}(T^{(h)}) \leq \mathrm{mult}(\beta, B).$$

ˆ 现在，推论 5.5 与假设 $b_{v,\,v} \neq \beta$ for $v \in V$ 立即推出 $\beta \in \sigma(B[Q'])$。

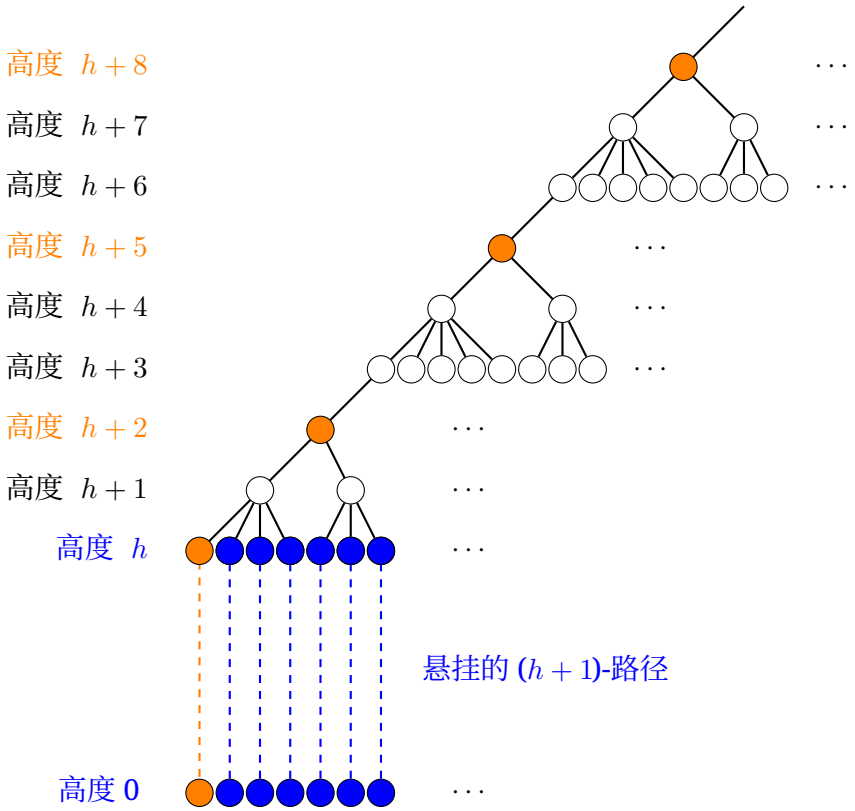


图 6. 归纳步骤。所示的树是 $T^{(h)}$ 的一部分，它具有如图所示、含有 $h+1$ 个顶点的悬挂路径。高度为 $3j+h+2$ 且路径为 Q 的橙色顶点是独立可逆树。此图中，每一层左侧仅绘出了少数几个顶点。

最后，我们必须证明 $w_{B[Q']}$ 与我们对 Q'的选择无关。根据 (P1)，我们已经知道 $w_{B[Q]} = w_h$ 不依赖于 Q'；若$h > 1$，则根据 (P2)，$b_{u,\ u} = \alpha_{h+1}$。若 $h = 1$，则 (P1) 中的权重 w_1 仅取一个值，设为 b_1，因此 $B[Q']$ 的迹等于 $b_1 + b_{u,\ u}$。另一方面，$B[Q']$ 的谱为 $\{\alpha_2, \beta\}$，所以 $b_{u,\ u} = \alpha_2 + \beta - b_1$。

还需证明乘积 $c_u d_u$ 独立于 Q'。根据假设，既然$\Delta_{h+1}(\beta) = 0$，$\alpha' \neq \beta$，且根据引理 4.1，$\Delta_h(\beta) \neq 0$，方程 (9) 给出 $c_u d_u = (\beta - \alpha_{h+1})^{\Delta_{h}(\beta)\,\Delta_{h-1}(\beta)}$，从而完成了证明：$\overline{w_{B[Q']}}$ 独立于 Q'。□

定理 *6.1* 的证明。定义 $M(T_{(i)}) = \widehat{M}(T_{(i)}) = 0 \text{for} i > H$。

由于 A 有一个临界重数列表，因此存在五个互不相同的实数 α_1，α_2，β_2，β_3，β_4，它们在 $\sigma(A)$ 中的重数分别为 m_1，m_2，n_2，n_3，$n_4 \geq 0$，并满足 (8)。根据注 5.13，我们有

$$\operatorname{mult}(\alpha_j, A) \geq M(T^{(j-1)}), \quad j = 1, 2, \text{ and}$$
$$\operatorname{mult}(\beta_j, A) \geq \widehat{M}(T^{(j-1)}), \quad j = 2, 3, 4.$$

关于 $\operatorname{mult}(\alpha_j, A)$ 的不等式使我们能够对 A 使用引理 6.2。因此，若 $\operatorname{ht}(v)$ 为偶数，则 $a_{v,v} = \alpha_1$；若 $\operatorname{ht}(v)$ 为奇数且 $\operatorname{ht}(v) \neq 1$，则 $a_{v,v} = \alpha_2$。请注意，这确定了从 A 收缩得到的任意矩阵中相应的对角线元素，因为收缩不会改变未删除的对角线元素的值。引理 6.2 允许对 A 进行首次收缩，从而得到 $A^{(1)} \in \mathcal{R}(T^{(1)})$，其中除对应于高度为1的顶点的对角线元素外，其余对角线元素均等于上述 α_1 或 α_2。由引理 6.2 以及第 13 页上的方程（2），我们有 $\sigma(A^{(1)}) = \sigma(A) \setminus \ell_1\{\alpha_1\}$，因此

$$\operatorname{mult}(\beta_j, A^{(1)}) = \operatorname{mult}(\beta_j, A), \qquad j = 2, 3, 4.$$

现在我们的目标是证明，可以利用引理 6.3 反复将 $A^{(h-1)} \in \mathcal{R}(T^{(h-1)})$ 收缩为 $A^{(h)} \in \mathcal{R}(T^h)$。由上文可知，对于该引理中的 $h > 1$，任何通过从 A 反复收缩得到的矩阵 $B \in \mathcal{R}(T^{(h)})$ 都满足 (P2)，其中 α' 在 h 为奇数时取 α_1，在 h 为偶数时取 α_2。技术条件 $b_{v,\,v} \neq \beta$ 若 $\operatorname{ht}(v) \geq 3$，显然也成立。对于 $h = 1$，(P2) 可由引理 6.2 中的 (C2) 得到满足。

对于 $j \geq 4$，记 $\Lambda_1 = (\alpha_1)$、$\Lambda_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$、$\Lambda_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3)$ 和 $\Lambda_j = \Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$。对于 $j \geq 4$，我们也记作 $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}$。我们声称，对于 $h = 1$、.....、H，存在矩阵 $A^{(h)} \in \mathcal{R}(T^{(h)})$，使得：

(S1)$_h$ $A^{(0)} = A$，且 $A^{(h)}$ 是通过收缩 $A^{(h-1)}$ 中的悬挂 h-路径得到的。

(S2)$_h$ $\operatorname{mult}(\beta_j, A^{(h)}) \geq \widehat{M}(T^{(j-1)})$，其中 $j = h+1$，$h+2$，$h+3$。

(S3)$_h$ $\Lambda_{h+1} \in \mathcal{B}_{h+1}$，并且对于每一条 $T^{(h)}$ 中的悬挂 $(h+1)$-路径 Q_{h+1}，$w_{A^{(h)}[Q_{h+1}]} = w_{C_{h+1}^{\Lambda_{h+1}}}$。

我们已在上文证明 (S1)$_1$ 和 (S2)$_1$ 成立。现在可以对 $h = 1$、$\beta = \beta_2$、$B = A^{(1)}$ 应用引理 6.3，因此对于 $T^{(1)}$ 中任意一条悬挂 2-路径 Q'，有 $\beta_2 \in \sigma(A^{(1)}[Q'])$。由于我们已知 $A^{(1)}[Q']$ 的对角线元素是 α_1，且 $\alpha_2 \in \sigma(A^{(1)}[Q'])$，因此有 $w_{A^{(1)}[Q']} = w_{C_2^{\Lambda_2}}$，其中 $\Lambda_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{B}_2$；根据命题 4.4，得证 (S3)$_1$。

现在我们要证明 (S1)$_2$–(S3)$_2$。根据 (S3)$_1$，，我们可以将 $A^{(1)}$ 中的悬挂 2-路径收缩，得到 $A^{(2)} \in \mathcal{R}(T^{(2)})$，因此 (S1)$_2$ 成立。根据命题 4.4，$\sigma(C_2^{\Lambda}) = \{\alpha_2, \beta_2\}$，于是根据 (S3)$_1$ 和方程（2）：

$$\operatorname{mult}(\beta_2, A^{(2)}) = \operatorname{mult}(\beta_2, A^{(1)}) - \ell_2, \quad \text{and}$$
$$\operatorname{mult}(\lambda, A^{(2)}) = \operatorname{mult}(\lambda, A^{(1)}), \quad \lambda \in \{\beta_3, \beta_4\}.$$

注意到 $\beta_5 = \beta_2$ 以及 $\widehat{M}(T_{(4)}) = \widehat{M}(T_{(1)}) - \ell_2$，(S2)$_2$ 现在可直接由 (S2)$_1$ 得出。

接下来，注意到引理 6.3 的假设对 $h = 2$ 均成立，具体为 $\beta := \beta_3$, $\alpha := \alpha_1 = \alpha_3$ 和 $B := A^{(2)}$。事实上，由 (S2)$_2$，我们有 $\operatorname{mult}(\beta_3, A^{(2)}) \geq \widehat{M}(T_{(2)})$；而 (S3)$_1$ 推出 (P1)。由引理 6.3，存在

一个矩阵 B_3，满足 $\sigma(B_3) = \{\alpha_1, \beta_3, \alpha_2+\beta_2-\beta_3\}$，使得当 Q 是 $T^{(2)}$ 中的悬挂 3-路径时，$w_{A^{(2)}[Q]} = w_{B_3}$。由 $(S3)_1$，$w_{B_3(1)} = w_{C_2^{\Lambda_2}}$，因此由命题 4.4 及其证明可知，$\Lambda_3 \in \mathcal{B}_3$ 和 $w_{B_3} = w_{C_3^{\Lambda_3}}$，故 $(S3)_2$ 成立。另请注意，$\sigma(C_3^{\Lambda_3}) = \sigma(B_3) = \{\alpha_1, \beta_3, \alpha_2+\beta_2-\beta_3\}$。

如果 $H = 2$，则结论成立。否则，$H \geq 3$，在进行归纳之前，我们希望证明 $\alpha_2+\beta_2 \neq \beta_3+\beta_4$，以便应用命题 4.4。反设（为了导出矛盾）$\alpha_2+\beta_2 = \beta_3+\beta_4$；那么，如上所述，$\beta_4 = \alpha_2+\beta_2-\beta_3 \in \sigma(C_3^{\Lambda_3})$。由（$S3$）$_2$，，我们可以在 $A^{(2)}$ 中压缩悬挂 3-路径，从而得到 $A^{(3)} \in \mathcal{R}(T^{(3)})$。由方程（2），我们有

$$\ell_3 \sigma(C_3^{\Lambda_3}) \subseteq \sigma(A^{(2)}),$$

因此由（8），

$$\ell_3 \leq \operatorname{mult}(\beta_4, A^{(2)}) = \operatorname{mult}(\beta_4, A) = n_4 < \ell_3$$

矛盾。因此，我们有 $\alpha_2+\beta_2 \neq \beta_3+\beta_4$。我们指出，到目前为止并不需要关于 β_4 的重数的假设，并且我们已经证明，在 A 中存在一个重数为 m' 的特征值 $\alpha_2+\beta_2-\beta_3$，且 $m' \geq \ell_3$。此外，如果 $\lambda \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \alpha_2+\beta_2-\beta_3\}$，那么 $\mathbf{mult}(\lambda, A) = \mathbf{mult}(\lambda, A^{(3)}) \leq M(T_{(3)}) < \ell_3$ 由方程（2）、引理 2.6 和引理 5.11 可知，因此 $\alpha_2+\beta_2-\beta_3$ 是 A 中除 α_1、α_2、β_2、β_3 之外，唯一一个重数至少为 ℓ_3 的特征值。这总结于推论 6.4 中。

现在假设 $3 \leq h \leq H$，且 $A^{(h-1)} \in \mathcal{R}(T^{(h-1)})$ 满足 $(S1)_{h-1}$、$(S2)_{h-1}$ 和 $(S3)_{h-1}$。由于 $\alpha_2+\beta_2 \neq \beta_3+\beta_4$，由 $(S3)_{h-1}$ 和命题 4.4，

$$\sigma(C_h^{\Lambda_h}) \cap \Lambda = \{\alpha_h, \beta_h\}.$$

此外，根据 $(S3)_{h-1}$，我们可以在 $A^{(h-1)}$ 中收缩悬挂的 h-路径，从而得到$A^{(h)} \in \mathcal{R}(T^{(h)})$，因此 $(S1)_h$ 成立。由第 13 页的方程（2），

$$\operatorname{mult}(\beta_h, A^{(h)}) = \operatorname{mult}(\beta_h, A^{(h-1)}) - \ell_h, \qquad \text{and}$$
$$\operatorname{mult}(\lambda, A^{(h)}) = \operatorname{mult}(\lambda, A^{(h-1)}), \quad \lambda \in \{\beta_{h+1}, \beta_{h+2}\}.$$

现在，通过注意到 $M(T_{(h+1)}) = M(T_{(h-1)}) - \ell_h$、$\beta_{h+3} = \beta_h$ 以及 $\widehat{M}(T_{(h+2)}) = \widehat{M}(T_{(h-1)}) - \ell_h$，可由 $(S2)_{h-1}$ 推出 $(S2)_h$。接下来，注意到对于 B，引理 6.3 的假设（取相同的 h 值）均得到满足：$=A^{(h)}$、$\alpha := \alpha_h$ 和 $\alpha' := \alpha_{h-1} = \alpha_{h+1}$，以及 $\beta := \beta_{h+1}$。事实上，根据 $(S2)_h$，我们有 $\mathbf{mult}(\beta_{h+1}, A^{(h)}) \geq \widehat{M}(T_{(h)})$，而 (P1) 由 $(S3)_{h-1}$ 推出。由引理 6.3，存在一个矩阵 B_{h+1}，其特征值为 α_{h+1}、β_{h+1}，使得$w_{A^{(h)}[Q]} = w_{B_{h+1}}$，其中 Q 是 $T^{(h)}$ 中的一条悬挂（$h+1$）-路径。根据 $(S3)_{h-1}$，$w_{B_{h+1}(1)} = w_{C_h^{\Lambda_h}}$，因此由命题 4.4，我们有 $\Lambda_{h+1} = \Lambda \in \mathcal{B}_{h+1} = \mathcal{B}$ 和$w_{B_{h+1}} = w_{C_{h+1}^{\Lambda}}$，所以 $(S3)_h$ 成立。这就证明了我们的断言。

由 $(S1)_h$，对于 $h \in [H]$，命题3.10表明 $A \in \mathcal{PH}(A^{(H)}, T)$。注意，若 $H+1 < 4$，我们可以将 $\Lambda_{H+1} \in \mathcal{B}_{H+1}$ 扩展到某个 $\Lambda \in \mathcal{B}$；若$H+1 \geq 4$，则我们已经有了 $\Lambda \in \mathcal{B}$。由 $(S3)_H$，我们有 $w_{A^{(H)}} = w_{C_{H+1}^{\Lambda}}$，因此 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$，如所需。

$\sigma(A)$ 的表达式已在定理 3.11 中给出。由推论 4.6 可直接得出，(8) 中前两个不等式均为等式。

□

回想一下，对于高度为 2 的最小繁茂树篱 T_{BF}，在 $\mathcal{S}(T_{\mathrm{BF}})$ 中实现的谱 $\{\lambda_1, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(4)}, \lambda_4^{(2)}, \lambda_5\}$ 的第五个特征值 λ_5 必须满足线性约束 $\lambda_5 = \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_1$。下面的推论是第 33 页定理 6.1 证明第一部分的附带结果，它表明，任意繁茂树篱中四个重数较高的特征值，都会对第五个特征值施加相同的线性约束。

推论 6.4。设 T 是高度为 $H \geq 2$ 且 $A \in \mathcal{R}(T)$ 的繁茂树篱，其重数列表 $\mathbf{m}$ 包含重数 m_1、m_2、n_2 和 n_3，并满足：

$$\begin{cases} m_j \geq \displaystyle\sum_{\substack{i \in 2\mathbb{Z}+j, \\ i \geq j}} \ell_i(T), \ j = 1, 2; \\ n_j \geq \displaystyle\sum_{\substack{i \in 3\mathbb{Z}+j, \\ i \geq j}} \ell_i(T), \ j = 2, 3 \end{cases}$$

那么 $\mathbf{m}$ 中有一个唯一的重数 m'（除 m_1、m_2、n_2 和 n_3之外），满足 $m' \geq \ell_3(T)$。此外，若矩阵 A 的特征值为：α_1，重数为 m_1；α_2，重数为 m_2；β_2，重数为 n_2；以及β_3，重数为 n_3，那么 A 的唯一特征值（除 α_1、α_2、β_2、β_3之外）其重数为 m'，即为 $\alpha_2 + \beta_2 - \beta_3$。

我们以定理 6.1 在特定的树和重数列表上的应用作为本节的结尾，展示特征值的位置受到三次约束，随后说明 RS(T，$\mathbf{m}$) 不一定是凸的。

例 6.5。设 T 是一棵高度为 $H = 3$ 的繁茂树篱；最小的此类树如图 7 所示。用 $\ell_i = \ell_i(T)$ 表示 $i \in [H+1]$，并回忆 $\ell_4 = 1$。

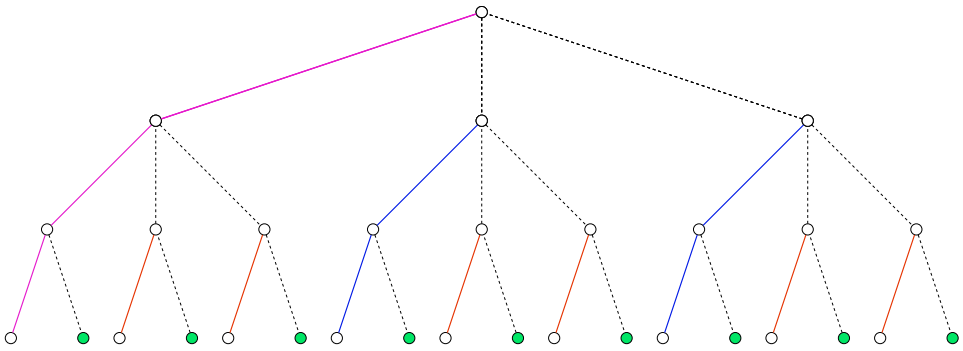


图 7。高度为 $H = 3$、满足$\ell_1 = 9$、$\ell_2 = 6$、$\ell_3 = 2$ 以及 $\ell_4 = 1$ 的最小繁茂树篱。实线边显示了一个 $9P_1 \cup 6P_2 \cup 2P_3 \cup 1P_4$ 可用于路径到树篱的收缩的生成子图。

（无序）重数列表

$$\mathbf{m} = \{\ell_1 + \ell_3, \ell_2 + \ell_4, \ell_2, \ell_3, \ell_3, 1, 1, 1\}$$

是 T 的临界重数列表，我们的结果表明它在 $\mathcal{S}(T)$ 中是可实现的。事实上，对于 $\Lambda \in \mathcal{B}$，在 $\mathcal{S}(T)$ 中存在一个与之余谱的矩阵

C_4^{Λ}，因此存在一个对称矩阵 $A \in \mathcal{PH}(C_4^{\Lambda}, T)$。我们知道，$\sigma(C_i^{\Lambda}) \cap \Lambda = \{\alpha_i, \beta_i\}$ 对于 $i = 2$、3、4，并且 $\sigma(C_1^{\Lambda}) = \{\alpha_1\}$。此外，根据注 4.9，$\sigma(C_3^{\Lambda}) = \{\alpha_1, \beta_3, \delta_1\}$，其中 δ_3 是线性函数 $r_3(x)$ 的根；而 $\sigma(C_4^{\Lambda}) = \{\alpha_2, \beta_4, \delta_2, \delta_3\}$，其中 δ_2、δ_3 是二次函数 $r_4(x)$ 的根。由引理 4.1 可知，α_1、α_2、β_2、β_3、β_4、δ_1、δ_2、δ_3 彼此不同。由于

$$\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{4} \ell_i \sigma(C_i^{\Lambda}) = \{\alpha_1^{(\ell_1+\ell_3)}, \alpha_2^{(\ell_2+\ell_4)}, \beta_2^{(\ell_2)}, \beta_3^{(\ell_3)}, \delta_1^{(\ell_3)}, \beta_4, \delta_2, \delta_3\}$$

由此可知，A 的无序重数列表恰为 $\mathbf{m}$。此外，由于 $\mathbf{m}$ 是临界的，根据定理 6.1，具有无序重数列表 $\mathbf{m}$ 的每个矩阵 $A \in \mathcal{S}(T)$ 都属于上文所述的 $\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda}, T)$，其中某个 $\Lambda \in \mathcal{B}$。

现在假设 A 是 $\mathcal{S}(T)$ 中任意一个矩阵，且 A 的无序重数列表为 $\mathbf{m}$。我们将证明，必然存在一种标记 $\lambda_1, \ldots, \lambda_8$，将 $\mathbf{m}$ 的互异特征值进行标记，使其满足以下约束：

$$\begin{aligned} \lambda_3 + \lambda_6 &= \lambda_2 + \lambda_7, \\ \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6 &= \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8, \\ (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3) &= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_8 - \lambda_3). \end{aligned}$$

注意，将前两个约束作线性组合可得

$$\lambda_5 + 3\lambda_3 + 3\lambda_6 = 2\lambda_2 + 2\lambda_7 + \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8,$$

Ferrero 等人已在定理 4.3] 中指出这一点。 [14,

首先，由于 $\mathbf{m}$ 是临界的，根据定理 6.1，具有无序重数列表 $\mathbf{m}$ 的每个矩阵 $A \in \mathcal{S}(T)$ 都属于上文所述的 $\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda}, T)$，其中某个$\Lambda \in \mathcal{B}$。我们有 $\operatorname{tr}(C_2^{\Lambda}) = \operatorname{tr}(C_3^{\Lambda}) - \alpha_1$，因此

$$\alpha_2 + \beta_2 = \beta_3 + \delta_1.$$

同理，$\operatorname{tr}(C_3^{\Lambda}) = \operatorname{tr}(C_4^{\Lambda}) - \alpha_2$，因此

$$\alpha_1 + \beta_3 + \delta_1 = \beta_4 + \delta_2 + \delta_3.$$

回想一下，$p_4(x) = (x - \alpha_2)p_3(x) - b_4 p_2(x)$，因此

$$\frac{p_4(x)}{x - \alpha_2} = (x - \beta_4)(x - \delta_2)(x - \delta_3) = p_3(x) - b_4 \frac{p_2(x)}{x - \alpha_2}.$$

由于 $p_2(\beta_2) = 0$ 且 $p_3(x) = (x - \alpha_1)(x - \beta_3)(x - \delta_1)$，这就得到了非线性恒等式

$$(\beta_2 - \beta_4)(\beta_2 - \delta_2)(\beta_2 - \delta_3) = (\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \delta_1). \tag{10}$$

因此，通过将 A 的特征值标记为$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8) = (\beta_4, \beta_3, \beta_2, \delta_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_3)$，即可恢复上述约束。

无序重数列表 $\mathbf{m}$ 至少可由一个长度为 $k = 8$ 的有序重数列表 $\mathbf{m}'$ 实现；对于该列表，$\mathrm{RS}(T, \mathbf{m}')$ 将是 6 维标准单纯形 Δ_6 内部的一个非空子集$^{\circ}$。由上述讨论可知，首先，$\mathrm{RS}(T, \mathbf{m}')$ 全部位于 $\mathring{\Delta}_6$ 的一个 4 维仿射子空间内；其次，$\mathrm{RS}(T, \mathbf{m}')$ 位于该 4 维子空间内由一个三次约束刻画的 3 维代数簇上。

为了明确说明 RS(T,**m**) 不是凸集，我们继续上面的例子，固定 $\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda},T)$ 中矩阵的一些特征值。

例 6.6。 考虑以下矩阵：

$$C_4^{\Lambda}=\begin{pmatrix} \frac{28-30x}{9(4-3x)} & \frac{4x(1-x)}{3(4-3x)} & 0 & 0 \\ 1 & x & \frac{2(8-9x)}{27(4-3x)} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{27x^2-75x+40}{9(4-3x)} & \frac{(3x-1)\left(27x^2-66x+28\right)}{27(4-3x)} \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}\in\mathcal{R}(P_4)$$

对于 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{9}\left(11-\sqrt{37}\right)$，其中

$$\Lambda=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\left(x,\frac{28-30x}{9(4-3x)},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{-27x^2+24x+4}{9(4-3x)}\right)\in\mathcal{B}.$$

这里， Λ 的选取使得 $\beta_2=\frac{1}{3}$、$\beta_3=\frac{1}{9}$和 C_4^{Λ} 的特征值为 0 和 1，这意味着 $\alpha_2=\frac{28-30x}{9(4-3x)}$ 和 $\beta_4=\frac{-27x^2+24x+4}{9(4-3x)}$，即 $\delta_2=0$ 和$\delta_3=1$。采用这一选取后， $A\in\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda},T)$ 的特征值顺序如下：

$$\delta_2<\beta_3<\beta_2<\beta_4<\alpha_1<\alpha_2<\delta_1<\delta_3.$$

令 Λ_1 由 Λ 通过设定 $x=2/5$ 得到，并令 Λ_2 由Λ 通过设定 $x=1/2$ 得到。对于 $A\in\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda_1},T)$，我们有

$$\sigma_1=\sigma(A)=\left\{0,\frac{1}{9}^{(\ell_3)},\frac{1}{3}^{(\ell_2)},\frac{116}{315},\frac{2}{5}^{(\ell_1+\ell_3)},\frac{40}{63}^{(\ell_2+\ell_4)},\frac{6}{7}^{(\ell_3)},1\right\},$$

并且对于 $A\in\mathcal{PH}(C_4^{\Lambda_2},T)$，我们有

$$\sigma_2=\sigma(A)=\left\{0,\frac{1}{9}^{(\ell_3)},\frac{1}{3}^{(\ell_2)},\frac{37}{90},\frac{1}{2}^{(\ell_1+\ell_3)},\frac{26}{45}^{(\ell_2+\ell_4)},\frac{4}{5}^{(\ell_3)},1\right\}.$$

对于有序重数列表 $\mathbf{m}_0:=(1,\ \ell_3,\ \ell_2,\ \ell_1+\ell_3,\ \ell_2+\ell_4,\ \ell_3,\ 1)$，现在我们有

$$\mathbf{p}_1=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{11}{315},\frac{2}{63},\frac{74}{315},\frac{2}{9},\frac{1}{7}\right)\in\mathrm{RS}(T,\mathbf{m}_0),$$
$$\mathbf{p}_2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{90},\frac{4}{45},\frac{7}{90},\frac{2}{9},\frac{1}{5}\right)\in\mathrm{RS}(T,\mathbf{m}_0).$$

不难验证，对于 σ_1 和 σ_2，式 (10) 成立，但对于任意 $t\in(0,\ 1)$，$t\sigma_1+(1-t)\sigma_2$ 均不成立。等价地，对于所有 $t\in(0,\ 1)$，都有 $t\mathbf{p}_1+(1-t)\mathbf{p}_2\notin\mathrm{RS}(T,\ \mathbf{m}_0)$。

7. 两个猜想的解决

我们的结果使我们能够为下列猜想提供反例。（虽然原始表述针对的是 $\mathcal{H}(T)$，即图为 T 而非 $\mathcal{S}(T)$ 的厄米矩阵集合，但很容易看出，这与下列陈述等价。）

猜想 7.1. [11] 设 T是一棵树，并假设$\mathbf{m}=\{m_1,m_2,...,m_k\}$是一个可由 $\mathcal{S}(T)$ 中的矩阵实现的无序重数列表。

(1)（分裂猜想，[11, 猜想 6]）。对于任意满足$m_j \geq 2$的 $j \in [k]$，无序重数列表

$$(\mathbf{m} \setminus \{m_j\}) \cup \{m_j - 1, 1\} = \{m_1, ..., m_j - 1, ..., m_k, 1\}$$

在 $\mathcal{S}(T)$ 中也可实现。

(2)（零一猜想，[11, 猜想 10]）。无序重数列表$\mathbf{m}$ 可由 $\mathcal{S}(T)$ 中的一个矩阵实现，且每个非对角线元素都等于0 或1。

猜想 7.1(1) 已在线性树和顶点数不超过 12 的树上得到证明，[11, 27]。此外，Fallat、Hall、Lin 和 Shader 的分岔引理 [12]证明，在相应矩阵具有强重数性质这一附加假设下，可实现重数列表的细化也可实现。我们注意到，无法用具有某些强性质的矩阵实现树的临界重数列表，见 [7, 推论 29]，；而通过我们的方法构造的矩阵不具有强重数性质。在下一个例子中，我们将证明，任意高度为 $H \geq 3$ 的繁茂树篱 T 都是分裂猜想的反例。

例7.2。（反驳 [11]的分裂猜想）。设 T 是高度为 $H \geq 3$ 的繁茂树篱，并注意在这种情况下，$\ell_3(T) \geq 2$。令

$$m_1 = M(T^{(0)}), m_2 = M(T^{(1)}), n_2 = \widehat{M}(T^{(1)}), n_3 = \widehat{M}(T^{(2)}), n_4 = \widehat{M}(T^{(3)}).$$

根据定理 6.1，存在一个重数列表 $\mathbf{m}$，使得 $\{m_1, m_2, n_2, n_3, n_4\} \subseteq \mathbf{m}$，且 $\mathbf{m}$ 在 $\mathcal{S}(T)$ 中可实现。选取这样一个

$$\mathbf{m} = \{m_1, m_2, n_2, n_3, n_4\} \cup \{m_6, m_7, \ldots, m_k\}$$

总长度最大的 k，由 $A \in \mathcal{S}(T)$ 实现。根据定理 6.1，对于某个 $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathcal{B}$，有 $A \in \mathcal{PH}(C_{H+1}^{\Lambda}, T)$。通过直接计算，$C_3^{\Lambda}$ 除了 $\{\alpha_1, \beta_3\}$ 之外，还有特征值 $\lambda := \alpha_2 + \beta_2 - \beta_3$，并且 $\mathrm{mult}(\lambda, A) \geq \ell_3(T) \geq 2$。此外，$\lambda \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$：由于 $\lambda \in \sigma(C_3^{\Lambda}) \setminus \{\alpha_1, \beta_3\}$，根据引理 4.1，得出 $\lambda \notin \{\alpha_1, \beta_3\} \cup \sigma(C_2^{\Lambda}) \cup \sigma(C_4^{\Lambda}) \supseteq \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$。因此，对于某个满足 $6 \leq j \leq k$的 j，有 $m_j = \mathrm{mult}(\lambda, A) \geq 2$。该列表

$$\mathbf{m}' = (\mathbf{m} \setminus \{m_j\}) \cup \{m_j - 1, 1\}$$

长度为 $k + 1$，并包含 $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$，因此根据我们对 k 的选择，它在 $\mathcal{S}(T)$ 中不可实现。因此，前述猜想对 T 不成立。

以图 7 中 31 个顶点上的高度为 3 的茂盛树篱 T 为例，这是一个具体的反例。按照上述记法，我们有 $(m_1, m_2, n_2, n_3, n_4) = (11, 7, 6, 2, 1)$。无序重数列表

$$\mathbf{m} = \{11, 7, 6, 2, 2, 1, 1, 1\}$$

在 $\mathcal{S}(T)$ 中可实现，但是

$$\mathbf{m}' = \{11, 7, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

并非如
此。

例 7.3.（反驳 [11] 的零一猜想的反例）。令 T 为任意一棵高度为 2 的繁茂树篱，其中有两个高度为 1 的顶点 x，y，使得 x 和 y 的子节点数不同。（最小的例子有 11 个顶点，是在 Barioli-Fallat 树 T_{BF} 上附加一个额外的叶节点得到的，如图 8 所示。）记作 $\ell_i = \ell_i(T)$，考虑重数列表

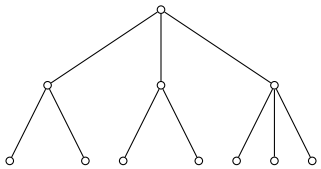


图 8. 例 7.3 中考虑的最小树。

$\mathbf{m} := \{\ell_1 + \ell_3, \ell_2, \ell_2, 1, 1\}$。它是 T 唯一的临界重数列表，根据定理 4.8，$\mathbf{m}$ 在 $\mathcal{S}(T)$ 中可实现。反设 $A \in \mathcal{S}(T)$ 的所有非对角线元素均为 1，且 A 的无序重数列表为 $\mathbf{m}$。根据定理 6.1，存在某个 3×3 矩阵 $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{S}(P_3)$，使得 $A \in \mathcal{PH}(C, T)$，这意味着对于 T 中高度为 1 的任意顶点 z，我们有

$$c_{2,3}^2 = \sum_{z' \in \mathrm{children}(z)} a_{z,z'}^2 = |\,\mathrm{children}(z)|.$$

由于 x 和 y 的子节点数不同，因此产生矛盾。

8. 谱任意性的惊人失败

在例 6.5 中，$\mathrm{RS}(T, \mathbf{m})$ 的维数仅为°3，而它所在的开单纯形 Δ_6 的维数为 6；如果 $\mathbf{m}$ 对于 T 是谱任意的，那么它就会完全填满该开单纯形。事实上，更一般地，只要 T 是繁茂树篱，且 $\mathbf{m}$ 是一个可在 $\mathcal{S}(T)$ 内实现的临界重数列表，定理 6.1 就意味着 $\mathbf{m}$ 的每种实现都只依赖于 5 个选择；若不计平移与缩放，则只依赖于 3 个选择。因此，在这些情况下，无论它所在的°开单纯形 Δ_{k-2} 的维数有多大，$\mathrm{RS}(T, \mathbf{m})$ 的维数至多为 3（顺带一提，它还满足数量不断增加、次数不断升高的非线性约束）。鉴于谱任意性°等价于 $\mathrm{RS}(T, \mathbf{m}) = \Delta_{k-2}$，对于任何可实现的临界重数列表而言，这已经充分体现了谱任意性的惊人失败。

但我们还能做得更糟。现在我们证明，经过精心选择特征值的矩阵，可能会产生一个重数列表，使得在 $\mathcal{S}(T)$ 中可实现的特征值相对间距完全 刚性。

定理 8.1. 设 T 是一棵高度为 $H \geq 8$ 的繁茂树篱。

(1) 存在一个矩阵 $A \in \mathcal{S}(T)$ 和一个有序重数列表 $\mathbf{m}^{\mathrm{rig}}(T) = \mathbf{m}(A)$，使得 $\mathbf{m}^{\mathrm{rig}}(T)$ 除包含临界重数列表所要求的五个重数外，还包含重数

- $m_{3,7} \geq \ell_3 + \ell_7$,
- $m_{4,8} \geq \ell_4 + \ell_8$，以及
- $m_{4,9} \geq \ell_4 + \ell_9$。

(2) 给定任意矩阵 $B \in \mathcal{S}(T)$，其有序重数列表 $m(B)$ 是临界重数列表，并且包含另外三个重数，分别至少与 $\ell_3+\ell_7$、$\ell_4+\ell_8$ 和 $\ell_4+\ell_9$ 一样大，则 $m(B)$ 或 $m(-B)$ 与 $m^{\mathrm{rig}}(T)$ 完全相同。*(3)* 给定任意矩阵 $B \in \mathcal{S}(T)$，且 $m(B) = m^{\mathrm{rig}}(T)$，则$B$ 的谱与 A 的谱在平移与缩放意义下完全相同，即模空间 $RS(T, m^{\mathrm{rig}}(T))$ 只包含一个点。

证明。 如果存在一个矩阵 $A \in \mathcal{S}(T)$，其有序重数列表 $\mathbf{m}(A)$ 是一个临界重数列表，并且包含另外三个重数$m_{3,\,7}$、$m_{4,\,8}$和 $m_{4,\,9}$，它们分别至少与 $\ell_3+\ell_7$、$\ell_4+\ell_8$ 和 $\ell_4+\ell_9$一样大，那么根据定理 6.1， A 的谱完全由对五个特殊特征值的某种选择决定。由此还可知，$\mathbf{m}(A)$中的每个重数都是若干项（也可能只有一项） $\ell_i = \ell_i(T)$之和，这些项对应不同的 i；此外，任何特定项 ℓ_i 恰好作为加数出现在 i 个重数中。

可实现的临界重数列表中的五个特殊重数，分别对应于单个 ℓ_1 项、两个 ℓ_2 项，以及对于每个 $i \geq 3$恰好两个 i 总共 ℓ_i 项。根据路径的严格特征值交错，剩余的非特殊重数中，没有一个能同时包含 ℓ_3 项和 ℓ_4项。由引理 2.6 可知，最大的非特殊重数（等于 $m_{3,\,7}$）必须包含一个 ℓ_3 项，而第二大和第三大的非特殊重数则必须各自包含一个 ℓ_4 项。根据同一引理，它们还必须各自至少包含另一个项 ℓ_b，并且在递减列表中分别不晚于 ℓ_7、ℓ_8 或 ℓ_9。因此，对于重数 $m_{3,\,7}$、$m_{4,\,8}$ 和 $m_{4,\,9}$，必然存在相应的特征值 $\lambda_{3,\,7}$，$\lambda_{4,\,8}$，$\lambda_{4,\,9} \notin \Lambda$，它们分别出现在多个层级中。

回想一下注 4.9 中定义的多项式 $r_k(x)$，它们恰好在层 k 中不属于 Λ 的那些特征值处为零。这样的非特殊特征值可能出现在两个不同的层 a 和 b，而这种可能性恰好由 $r_a(x)$ 和 $r_b(x)$ 的结式 $r_{a,\,b}$ 为零来刻画。注意，根据严格交错，$r_{a,\,a+1}$ 不可能为零。根据上述推理，要达到非特殊重数$m_{3,\,7}$，因此必须存在某个 $b \in \{5,6,7\}$使得 $r_{3,\,b}$为零；而若要进一步达到$m_{4,\,8}$，则必须存在某个 $c \in \{6,7,8\}$使得 $r_{4,\,c}$为零。

若变量的某个线性组合出现在 C_n^{Λ}的超对角线上某个元素的因式分解中（对某个n而言），我们就称它在 Λ 平凡地非零 。除了诸如 $(\alpha_1-\alpha_2)$ 这样的 $\binom{5}{2}=10$ 项（其非零恰恰是因为五个特征值 Λ 互不相同）之外，项 $(\alpha_2+\beta_2-\beta_3-\beta_4)$ 也平凡地非零，从而保证 $\alpha_2+\beta_2 \neq \beta_3+\beta_4$。我们采用这一术语，是因为当 $\Lambda \in \mathcal{B}$时，这类表达式都不可能取零值。

直接计算表明，以下每个结式都完全分解为显然非零的因子：$r_{3,\,5}$、$r_{3,\,6}$、$r_{4,\,6}$以及$r_{4,\,7}$。每种分解为显然非零因子的形式都说明，相应的特征值层级对除 Λ的五个特殊特征值外，不可能有任何重合。由此可知，为了分别达到重数$m_{3,\,7}$ 和$m_{4,\,8}$，$r_{3,\,7}$ 和$r_{4,\,8}$ 必须同时为零。

我们希望论证，类似地，为了达到重数$m_{4,\ 9}$，$r_{4,\ 9}$必须为零；但乍看之下，如果$r_4(x)$和$r_8(x)$有两个公共根，也能达到这一点。我们可以通过考虑结式的一种推广来排除这种可能性，该推广能够检测多项式之间多个公共根的情况。具体做法是取一个多项式的伴随矩阵，并将其代入另一个多项式，例如 [34]中对此有解释。针对我们需要的具体情形，令 R_4为二次函数 $r_4(x)$的 2×2伴随矩阵，具体而言，就是将各系数的相反数置于矩阵第一行的伴随矩阵。假设五个特殊特征值 Λ的取值使得 $r_4(x)$和 $r_8(x)$有两个公共根；此时， $r_4(x)$作为 R_4的特征多项式，将是 $r_8(x)$的一个因子，而 $r_8(R_4)$将取值为 2×2零矩阵。然而，我们注意到， $r_8(R_4)$的第（2，1）个元素为

$$(\beta_3-\beta_4)\,(\alpha_1-\beta_2)\,(\beta_2-\alpha_2)\,(\alpha_1-\beta_4)\,(\alpha_2+\beta_2-\beta_3-\beta_4)\,,$$

由显然非零项相乘得到，因此 $r_4(x)$和 $r_8(x)$至多有一个公共根。

上述讨论表明，当且仅当存在 Λ 在 $\mathcal{B}$ 中的一种取值，使得三个多项式 $r_{3,7}$、 $r_{4,8}$和$r_{4,9}$ 同时为零时，才会出现另外三个高重数。为简化后续计算，我们利用平移与缩放的自由度作如下假设：Λ 包括令 β_2 取 -1 、 β_4 取 1；这尤其消去了分母 $\beta_4-\beta_2$，因此所有结式都是剩余变量 α_1、 α_2和 β_3的多项式。

令$r'_{a,b}$表示通过去除所有显然非零因子而得到的结式$r_{a,b}$的化简形式，并考察$r'_{3,7}$、 $r'_{4,8}$和$r'_{4,9}$。例如（在假设 $\beta_2=-1$ 和 $\beta_4=1$成立的条件下），我们有

$$r'_{3,7}=\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\beta_3-\beta_3-\alpha_1.$$

使用计算机代数系统求解 $r'_{3,7}=r'_{4,8}=r'_{4,9}=0$，并施加约束：
$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,-1,1\}$ 互不相同且均为实数，且 $b_2=(1+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)$ 为正，可得 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 的唯一解。此外，这三个值均属于 $\mathbb{Q}[\xi]$，其中
$\xi\approx 0.334981556$ 是以下方程的最小正根

$$\xi^6-3\,\xi^5-11\,\xi^4+24\,\xi^3-6\,\xi^2-48\,\xi+16=0.$$

具体数值如下： $\beta_4=1,\ \beta_2=-1,$

$$\alpha_1=\frac{1}{90}\Big[\ \ \xi^5-\ 4\xi^4-16\xi^3+49\xi^2+\ 44\xi-74\Big]\approx -0.604555194,$$

$$\alpha_2=\frac{1}{30}\Big[-3\xi^5+10\xi^4+30\xi^3-73\xi^2+\ 24\xi+14\Big]\approx\ \ 0.502965741,\text{ and}$$

$$\beta_3=\frac{1}{60}\Big[\ -\xi^5+\ \ \ \xi^4+25\xi^3-22\xi^2-134\xi+92\Big]\approx\ \ 0.759864937,$$

从而得到重合的特征值

$$\lambda_{3,7} = \frac{1}{60}\Big[-5\xi^5 + 19\xi^4 + 35\xi^3 - 124\xi^2 + 182\xi - 124\Big] \approx -1.256899196,$$

$$\lambda_{4,8} = \frac{1}{90}\Big[-2\xi^5 - \ \xi^4 + 41\xi^3 + \ 37\xi^2 - 124\xi - \ 86\Big] \approx -1.354063522, \text{ and}$$

$$\lambda_{4,9} = \frac{1}{30}\Big[-2\xi^5 + \ 9\xi^4 + 11\xi^3 - \ 69\xi^2 + \ 80\xi - \ 42\Big] \approx -0.747525931.$$

在展示出 $r_{3,\ 7}$、$r_{4,\ 8}$ 和 $r_{4,\ 9}$ 的一个唯一的（在平移与缩放意义下）公共根位于 $\mathcal{B}$ 内之后，并且先前已经证明，这组特定的特征值重合对于具有所需三个额外重数的临界重数列表而言是充分且必要的，该定理的全部三个结论随之成立。□

我们已经证明，对于任何高度至少为 8 的繁茂树篱，都存在一个有序重数列表 $\mathbf{m}$ ，使得 RS(T，$\mathbf{m}$) 仅由一个点组成——对于这样的有序重数列表，谱任意性遭遇了最大程度的失败。

对于层数 $H+1$ 至多为 40 的任何繁茂树篱，所有特征值按层排列后的结果如图 9 所示。

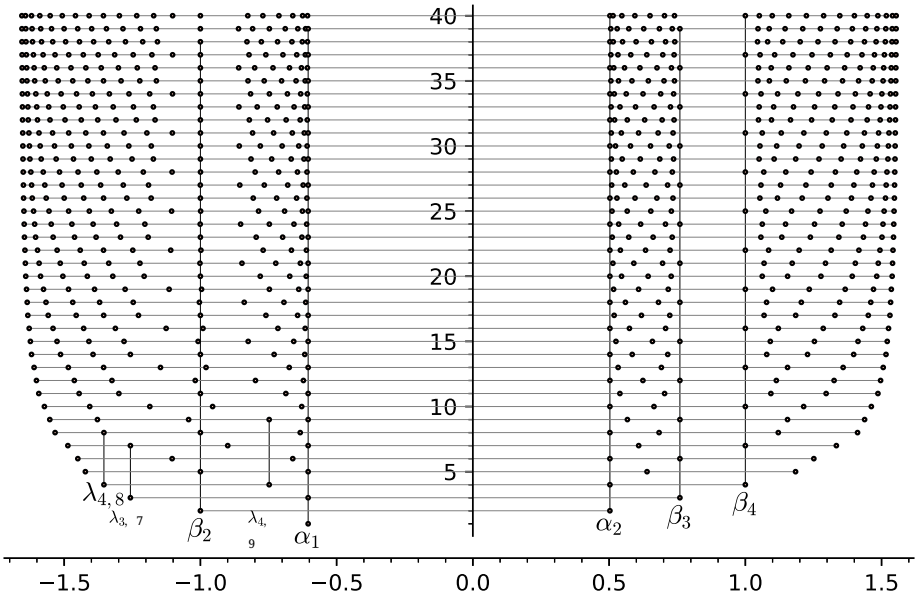


图 9. 描绘的是定理 8.1 的证明中出现的唯一解里的 40 层特征值。

注 8.2. 这三个约束 $r_{3,7} = 0$, $r_{4,8} = 0$ 和 $r_{4,9} = 0$中的每一个，至多使 RS(T, $\mathbf{m}$) 的维数减少一；它们合起来则使其维数从 3 降至 0。由此可知，通过令 $\mathbf{m}$ 为某个矩阵的有序重数列表，该矩阵由满足这些约束中一个或两个约束的某种 Λ 选择得到，也可以得到维数为 2 或 1 的模空间 RS(T,$\mathbf{m}$)。

下一个例子将定理 8.1 应用于一棵特定的树和一个特定的重数列表。

例 8.3. 可应用定理 8.1 的最小图，是高度为 $H = 8$ 的最小繁茂树篱，我们将其称为 T_8。它几乎是一棵完全三叉树（根节点的度为 3，其后代节点各有三个子节点，因此度为 4），只是叶节点是成对出现，而非三个一组。繁茂树篱的大小至少随其高度呈指数增长；这个高度为 8 的最小例子共有 $1+3+9+27+81+243+729+2187+4374 = 7654$ 个顶点。计算相邻层顶点数之差，可得 $\ell_1 = 2187$、$\ell_2 = 1458$、$\ell_3 = 486$、$\ell_4 = 162$、$\ell_5 = 54$、$\ell_6 = 18$、$\ell_7 = 6$、$\ell_8 = 2$ 和 $\ell_9 = 1$。

将定理 8.1 证明中给出的代数数代入 Λ，我们得到矩阵 C_9^{Λ}，对 T_8 应用路径到树篱构造，可得 $\mathcal{PH}(C_9^{\Lambda},\ T_8)$，这是一个由非常大的矩阵组成的参数化族，其共同的谱无需写出其中任何一个矩阵，我们便已知晓。计算 C_9^{Λ}的相应子矩阵的特征值（或参见图 9 中较低的 9 层），我们发现，除明确要求的重合外，不同层之间不存在其他特征值重合，由此推得 A的无序重数列表将呈如下形式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}(A) \;=\; & (\ell_1+\ell_3+\ell_5+\ell_7+\ell_9 = 2734, && (\text{for } \alpha_1)\\
& \ell_2+\ell_4+\ell_6+\ell_8 = 1640, && (\text{for } \alpha_2)\\
& \ell_2+\ell_5+\ell_8 = 1514, && (\text{for } \beta_2 = -1)\\
& \ell_3+\ell_6+\ell_9 = 505, && (\text{for } \beta_3)\\
& \ell_3+\ell_7 = 492, && (\text{for } \lambda_{3,7})\\
& \ell_4+\ell_7 = 168, && (\text{for } \beta_4 = 1)\\
& \ell_4+\ell_8 = 164, && (\text{for } \lambda_{4,8})\\
& \ell_4+\ell_9 = 163, && (\text{for } \lambda_{4,9})\\
& \ell_5 = 54, \ell_5 = 54, \ell_5 = 54,\\
& \ell_6 = 18, \ell_6 = 18, \ell_6 = 18, \ell_6 = 18,\\
& \ell_7 = 6, \ell_7 = 6, \ell_7 = 6, \ell_7 = 6,\\
& \ell_8 = 2, \ell_8 = 2, \ell_8 = 2, \ell_8 = 2, \ell_8 = 2,\\
& \ell_9 = 1, \ell_9 = 1, \ell_9 = 1, \ell_9 = 1, \ell_9 = 1, \ell_9 = 1)
\end{aligned}
$$

其有序重数列表为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}_{\mathrm{rig}}(T_8) = (&1,2,6,18,54,1,164,492,18,1,1514,6,163,18,2,2734,\\
&1640,1,6,54,2,505,168,2,1,54,18,6,2,1).
\end{aligned}
$$

作为对特征值总数的检验，每个值 ℓ_i 恰好在无序重数列表中出现 i 次，而有序重数列表的总和为 7654。与八个最大重数对应的 A 的特征值，恰好是定理 8.1 的证明中 $\mathbb{Q}[\xi]$ 指定的那些值。与剩余的重复重数（从 ℓ_5 到 ℓ_9）对应的 A 的特征值，是特定首一多项式的根；这些多项式分别是 $r_5(x)$ 到 $r_9(x)$ 的因子，每个多项式的度等于相应重数重复出现的次数，并且其系数属于域 $\mathbb{Q}[\xi]$（而且，不出所料，它们在该域上不可约）。

根据定理 8.1，任何达到这一特定有序重数列表 $\mathbf{m}^{\mathrm{rig}}(T_8)$ 的矩阵 $B \in \mathcal{S}(T_8)$，若其某个特征值 -1 的重数为 1514，且特征值 1 的重数为 168，则其谱必定与 A 完全相同。如果 $\mathbf{m}^{\mathrm{rig}}(T_8)$ 对 T_8而言是谱任意的，那么$\mathring{}\mathrm{RS}(T_8,\ \mathbf{m}^{\mathrm{rig}}(T_8))$ 就会填满整个 Δ_{28}；但实际上它的维数小 28，并且仅由一个点构成。

致谢

作者感谢美国数学研究所图的逆特征值问题研究共同体的组织者。Shaun Fallat 的部分研究经费由 NSERC 探索资助 RGPIN–2019–03934 提供。Polona Oblak 获得了斯洛文尼亚研究机构的资助（研究核心资助编号 P1-0222，项目编号 J1-3004）。

参考文献

[1] John Ahn、Christine Alar、Beth Bjorkman、Steve Butler、Joshua Carlson、Audrey Goodnight、Haley Knox、Casandra Monroe 和 Michael C. Wigal。六个顶点图的有序重数逆特征值问题。《电子线性代数期刊》，37:316–358，2021年。[2] Francesco Barioli、Wayne Barrett、Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Bryan Shader、P. van den Driessche 和 Hein van der Holst。零迫参数与最小秩问题。《线性代数及其应用》，433(2):401–411，2010年。[3] Francesco Barioli、Wayne Barrett、Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Bryan Shader、P. van den Driessche 和 Hein van der Holst。与树宽、零迫和图的最大零度相关的参数。《图论杂志》，72(2):146–177，2013年。[4] Francesco Barioli、Shaun Fallat 和 Leslie Hogben。若干图的最小秩与路径覆盖数的计算。《线性代数及其应用》，392:289–303，2004年。[5] Francesco Barioli 和 Shaun M. Fallat。关于无环对称矩阵逆特征值问题的两个猜想。《电子线性代数期刊》，11:41–50，2004年。[6] Wayne Barrett、Steve Butler、Shaun Fallat、Tracy Hall、Leslie Hogben、C.-H Lin、Jephian、Bryan Shader 和 Michael Young。图的逆特征值问题：重数与子式。《组合理论杂志 *B*辑》，142(2):第276–306号论文，2020年。[7] Wayne Barrett、Shaun Fallat、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Jephian C.-H. Lin 和 Bryan L. Shader。强阿诺德性质的推广与图的不同特征值的最小数目。《电子组合学期刊》，24(2):第40号论文，2017年。[8] Wayne Barrett、H. Tracy Hall 和 Raphael Loewy。图的逆惯性问题：割点、树与一个反例。《线性代数及其应用》，431(8):1147–1191，2009年。[9] Wayne Barrett、Anne Lazenby、Nicole Malloy、Curtis Nelson、William Sexton、Ryan Smith、John Sinkovic 和 Tianyi Yang。组合逆特征值问题：完全图及严格不等式成立的小图。《电子线性代数期刊》，26:656–672，2013年。[10] Wayne Barrett、Curtis Nelson、John Sinkovic 和 Tianyi Yang。组合逆特征值问题 II：小图的所有情形。《电子线性代数期刊》，27:742–778，2014年。[11] Shannon P. Buckley、Joseph G. Corliss、Charles R. Johnson、Cristina Araúz Lombardía 和 Carlos M. Saiago。关于树的重数列表的问题、猜想与数据。《线性代数及其应用》，511:72–109，2016年。

[12] Shaun M. Fallat、H. Tracy Hall、Jephian C.-H. Lin 和 Bryan L. Shader。图的逆特征值问题中强性质的分岔引理。《线性代数及其应用》，648:70–87，2022年。[13] Warren E. Ferguson, Jr. 具有给定谱的雅可比矩阵和周期雅可比矩阵的构造。《数学计算》，35(152):1203–1220，1980年。[14] Daniela Ferrero、Mary Flagg、H. Tracy Hall、Leslie Hogben、Jephian C.-H. Lin、Seth Meyer、Shahla Nasserasr 和 Bryan Shader。刚性链与部分零迫。《电子组合学杂志》，26(2):第2.43号论文，2019年。[15] L. J. Gray 和 D. G. Wilson。由谱数据构造雅可比矩阵。《线性代数及其应用》，14(2):131–134，1976年。[16] AIM 最小秩特殊图工作组。零迫集与图的最小秩。《线性代数及其应用》，428(7):1628–1648，2008年。[17] Ole H. Hald。雅可比矩阵的逆特征值问题。《线性代数及其应用》，14(1):63–85，1976年。[18] Harry Hochstadt。由谱数据构造雅可比矩阵。《线性代数及其应用》，8:435–446，1974年。[19] L. Hogben、J.C.H. Lin 和 B.L. Shader。《图的逆问题与零迫》。数学调查与专著。美国数学学会，2022年。[20] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，第2版，2012年。[21] Charles R. Johnson 和 António Leal Duarte。图为树的矩阵中特征值的最大重数。《线性与多重线性代数》，46(1-2):139–144，1999年。[22] Charles R. Johnson、António Leal Duarte 和 Carlos M. Saiago。图为树的矩阵的逆特征值问题与特征值重数列表：广义星和双广义星的情形。《线性代数及其应用》，373:311–330，2003年。组合矩阵理论会议（浦项，2002年）专辑。[23] Charles R. Johnson 和 António Leal Duarte。关于图为树的厄米特矩阵的特征值可能具有的重数。《线性代数及其应用》，348:7–21，2002年。[24] Charles R. Johnson、António Leal-Duarte 和 Carlos M. Saiago。域上图为树的可对角化矩阵中重数为一的特征值的最小数目。《线性代数及其应用》，559:1–10，2018年。[25] Charles R. Johnson 和 Carlos M. Saiago。通过分支复制，在图为树的厄米特矩阵中构造多重特征值。《线性与多重线性代数》，56(4):357–380，2008年。[26] Charles R. Johnson 和 Carlos M. Saiago。几何 Parter–Wiener 等理论。《线性代数及其应用》，537:332–347，2018年。[27] Charles R. Johnson 和 Tanay Wakhare。线性树的逆特征值问题。《离散数学》，345(4):第112737号论文，17页，2022年。[28] Franklin H. J. Kenter 和 Jephian C.-H. Lin。一种用于界定特征值重数之和的零迫技术。《线性代数及其应用》，629:138–167，2021年。[29] In-Jae Kim 和 Bryan L. Shader。史密斯标准形与无环矩阵。《代数与组合》，29:第63–80号论文，2009年。[30] António Leal-Duarte 和 Charles R. Johnson。关于图为给定树的对称矩阵的不同特征值的最小数目。《数学不等式及其应用》，5(2):175–180，2002年。[31] Jephian C.-H. Lin、Polona Oblak 和 Helena Šmigoc。关于块图的逆特征值问题。《线性代数及其应用》，631:379–397，2021年。[32] John S. Maybee。组合对称矩阵。《线性代数及其应用》，8(6):529–537，1974年。[33] Peter M. Nylen。具有给定图的最小秩矩阵。《线性代数及其应用》，248:303–316，1996年。[34] W. V. Parker。两个多项式的最大公因子的次数。《美国数学月刊》，42(3):164–166，1935年。

(S. M. Fallat) 里贾纳大学数学与统计学系，里贾纳，SK，S4S 0A2，加拿大。（通讯作者）电子邮箱：shaun.fallat@uregina.ca

(H. Tracy Hall)Hall Labs, LLC电子邮箱：
h.tracy@gmail.com

(R. H. Levene 和H. Šmigoc) 都柏林大学数学与统计学院，贝尔菲尔德，都柏林 4，爱尔兰电子邮箱：rupert.levene@ucd.ie电子邮箱：helena.smigoc@ucd.ie

(S. A. Meyer) 圣诺伯特学院数学学科，德佩尔，WI 54115，美国电子邮箱：
seth.meyer@snc.edu

(S. Nasserasr) 罗切斯特理工学院数学科学学院，罗切斯特，纽约州，美国电子邮箱：
shahla@mail.rit.edu

(P. Oblak）计算机与信息科学学院，卢布尔雅那大学，Večna pot 113，SI-1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚；卢布尔雅那大学数学与物理学院及数学、物理与力学研究所，Jadranska ulica 19，1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮箱地址：
polona.oblak@fri.uni-lj.si