IM障碍物散射中的分形魏尔上界已获证明 G

LUCAS VACOSSIN

摘要。本文研究平面上严格凸障碍物的散射问题。我们给出矩形区域 $\{r \leq \mathrm{Re}(\lambda) \leq r+1; \mathrm{Im}(\lambda) \geq -\gamma\}$ 内共振数量 $N(r, \gamma)$ 的一个上界。 [NSZ14] 的工作证明了 $N(r, \gamma) = O_\gamma(r^{d_H})$，其中 $2d_H + 1$ 是弹球流俘获集的豪斯多夫维数。本文在带状区域 $0 \leq \gamma < \gamma_{cl}/2$ 中给出一个改进的上界，其中 γ_{cl} 是该流的经典衰减率。这一改进的韦尔上界与凸共紧曲面情形下 [Nau12] 和 [Dya19] 的结果，以及开放量子贝克映射情形下 [DJ17] 的结果一脉相承。

arXiv:2301.11077v1 [math.AP] 26 Jan 2023

1. 引言

1.1. 改进的分形上界。

凸障碍物散射。本文研究平面上严格凸障碍物的散射问题。我们假设

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{O}_j$$

其中， $\mathcal{O}_j$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开且严格凸的障碍物，具有光滑边界并满足伊川条件： 对于 $i \neq j \neq k$, $\mathcal{O}_i$ 不与 $\mathcal{O}_j \cup \mathcal{O}_k$的凸包相交。令

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}.$$

It i已知，Ω中狄利克雷拉普拉斯算子的预解算子可亚纯延拓至 e

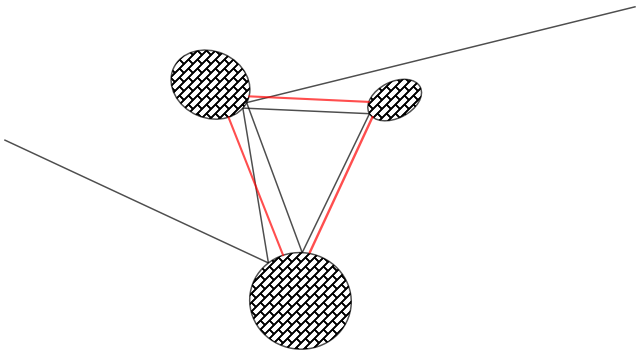


图1. 平面上三个障碍物的散射

$\mathbb{C}$ 的对数覆盖（例如参见 [DZ19], 第 4 章定理 4.4）。更准确地说，假设 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathcal{O}$ 的一个邻域内等于 1。

$$R_\chi(\lambda) := \chi(-\Delta - \lambda^2)^{-1}\chi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

在区域 $\{\mathrm{Im}\,\lambda > 0\}$ 中是全纯的，并且可亚纯延拓到 $\mathbb{C}$ 的对数覆盖上。其极点就是散射共振。我们关注这些散射共振在对数覆盖的第一层（即 $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$）中的分布，或者更确切地说，关注其在 $\mathbb{R}$ 的一个锥形邻域中的分布。

一个（非零）共振 λ_0 的重数定义为

$$m(\lambda_0) = \text{ rank } \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R_\chi(\lambda)d\lambda \text{ , } \gamma(t) = \lambda_0 + \epsilon^{2i\pi t} \text{ , } 0 \leq t \leq 1 \text{ , } 0 < \epsilon \ll 1$$

我们关注条带中的共振计数，在本文中我们重点研究这些量的上界。

$$N(r,\gamma) = \sum_{\substack{r\leq \text{Re}\,\lambda \leq r+1 \\ \text{Im}\,\lambda \geq -\gamma}} m(\lambda)$$

在条带深度 γ 固定的情况下，我们关注 $r \to +\infty$ 时的上界。

分形魏尔界。在这个区域中，它成为一个高频问题，并为引入小参数 $h = r^{-1}$提供了依据。在这种重新缩放下，它成为一个半经典问题。在半经典极限下，也就是 $h \to 0$，与这个量子问题相关的经典动力学是 $\Omega \times \mathbb{S}^1$中的弹球流 φ^t，也就是说，在障碍物外自由运动，并在障碍物边界上发生法向反射。一个相关的动力学对象是俘获集 K：它对应于点 $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{S}^1$，这些点在流的正向和反向过程中都不会逃逸至无穷远。对于两个障碍物的情形，俘获集是一条单独的闭测地线。一旦涉及更多障碍物，俘获集的结构就会变得复杂，并呈现分形结构。这是弹球流双曲性的结果。俘获集的结构对 $-\Delta$的谱性质起着关键作用。具体而言，在估计 $N(r, \gamma)$时，会涉及其豪斯多夫维数。在 [NSZ14], 中，作者证明了一个涉及该分形维数的分形魏尔上界。

定理 1。 分形魏尔上界 [NSZ14]
假设障碍物 $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^2$ 满足上述条件。假设弹球流的俘获集的豪斯多夫维数为 $2d_H + 1$。那么，对于每个 $\gamma > 0$，存在 $C_\gamma > 0$，使得对于所有 $r \geq 1$,

$$N(r,\gamma) \leq C_\gamma r^{d_H}$$

备注。 他们的结果在任意维数下都成立，但在维数 $d > 2$中，需要额外损失 ε：对于每个 $\varepsilon > 0$，对于每个 $\gamma > 0$，存在 $C_{\varepsilon,\ \gamma} > 0$ 使得对于所有 $r \geq 1$,

$$N(r,\gamma) \leq C_{\varepsilon,\gamma} r^{d_H+\varepsilon}$$

有人猜想，当 γ 取较大值时，该上界是最优的（见 [Zwo17], 猜想 5）。然而，一旦存在谱隙，对于任意 γ，指数 d_H 都不可能是最优的。正如 [Vac22] 所证明的，在维数 2 中谱隙总是存在；在更高维数下，若弹球流满足某个压强条件（见 [Ika88]），该结论同样成立。下面的定理 2 给出了维数 2 中更好的上界，适用于

$$\gamma < \gamma_{cl}/2$$

其中，γ_{cl} 是流的经典衰减率。 γ_{cl} 等于 $-P(-\varphi_u)$，其中 φ_u 由式 (1.9) 定义，采用不稳定雅可比； P 是俘获集上台球映射的拓扑压力（见定义 3.1）。它也可由下列公式给出（见 [BR75], 命题 4.4）：

$$-\gamma_{cl} = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\log \text{Leb}\left(\bigcup_{\rho\in K} B_\rho(\varepsilon,T)\right) \tag{1.1}$$

其中

$$B_\rho(\varepsilon,T) = \{(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{S}^1, \forall t\in[0,T], d(\varphi^t(x,\xi),\varphi^t(\rho)) \leq \varepsilon\}$$

是鲍恩球。

本文证明的定理如下：

定理 2. 假设障碍物 $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^2$ 满足上述条件。那么，存在一个非递增函数 $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，满足

- $\sigma(\gamma) > 0$ 对 $0 \leq \gamma < \gamma_{cl}/2$ 成立；
- $\sigma(\gamma) = 0$ 对于 $\gamma \geq \gamma_{cl}/2$

并且使得对所有 $\gamma > 0$ 且对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $C_{\gamma,\varepsilon} > 0$ 使得

$$\forall r \geq 1, N(r,\gamma) \leq C_{\gamma,\varepsilon} r^{d_H - (\sigma(\gamma)-\varepsilon)_+}$$

备注。关于拓扑压力的 σ 一个相当明确的值由公式 (6.2) 给出。这里，根据 [NSZ14] 的结果，我们可以取 $(\sigma(\gamma) - \varepsilon)_+ = \max(\sigma(\gamma) - \varepsilon, 0)$。当 $\gamma \geq \gamma_{cl}/2$ 时，我们总有 $(\sigma(\gamma) - \varepsilon)_+ = 0$。当 $\gamma < \gamma_{cl}/2$ 时，我们可以找到 $\varepsilon > 0$，使得定理 2 给出的界优于定理 1 的界。

关于障碍物散射的更多内容。障碍物波散射问题在物理学和数学文献中有着悠久的历史。两个障碍物的情形得到了特别充分的研究（参见 [Gé88], [Ika82]），单个凸障碍物的衍射问题也是如此（例如参见 [BLR87], [HL94]）。一旦涉及 3 个或更多障碍物，其背后的经典流——在此情形下即弹球流——就会变得高度混沌。一个特别有趣的模型是 n-圆盘系统，该系统已经通过数值和实验方法得到了深入研究（例如参见 [GR89],[BWP+13]），并且分形上界已在 [PWB+12] or [LSZ03] 中得到成功检验。[Vac22], 证明了一个关于谱隙的近期结果，改进了 [Ika88] 先前的结果（另见 [NZ09]）。

开放双曲系统中的相关结果。障碍物散射问题属于开放双曲系统这一更广泛的谱问题类别。开放双曲系统是指大多数轨线逃逸至无穷远的散射系统，因此俘获集的刘维尔测度为零，且其上支撑着双曲流。关于这些开放混沌系统的综述，请参阅综述文章 [Non11] 。在数学家和物理学家广泛关注的问题中，共振计数和谱隙位居前列（关于共振的结果和未解决问题，参见例如 [Zwo17] ）。一个重要例子是势的半经典散射（见 1.2.2），其中对哈密顿流施加了特定的动力学假设。

凸余紧双曲曲面。另一类具有分形俘获集的开放双曲系统由凸余紧双曲曲面组成，这些曲面可以通过将双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 按舒托基群 Γ取商得到。谱问题涉及这些曲面上的拉普拉斯算子，其经典对应物是余球丛上的测地流；由于这些曲面的负曲率，该流已知是双曲的。在此背景下，通常将能量变量写作 $\lambda^2 = s(1-s)$，并研究其亚纯延拓的

$$s \in \mathbb{C} \mapsto (-\Delta - s(1-s))^{-1}$$

The 俘获集，尤其是其维数，会影响谱（例如参见 文献[Bo 介绍这一理论）。

韦尔上界。计数函数在条带中的第一个分形魏尔上界出现在 Sjöstrand 的工作中 [Sjö90]（见第 5 节定理 5.7），针对的是解析情形下的薛定谔算子$-h^2\Delta + V$。作者估计了更大盒子中共振的数量$\{|\operatorname{Re} z| \leq \delta,\ -\gamma h \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$ 在极限 $h \to 0$下。对于更小盒子的更精确上界 $O(h^{-d_H})$ $\operatorname{Re}\ \{|z| \leq Ch,\ -\gamma h \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$，在重缩放 $r = h^{-1}$下对应于我们所考虑的盒子，这些结果分别在不同的光滑情形中获得：凸余紧双曲曲面（[Zwo99]）、势散射（[SZ07]）、障碍物散射（[NSZ14]）以及渐近双曲流形（[DD12]）。有人猜想（见 [Zwo17], 猜想 5），当条带足够宽时，上界 $N(r,\ \gamma) = O(r^{d_H})$ 是最优的。然而，数值实验（例如参见 [Dya19] 关于凸共紧曲面的情形的附录）表明，对于宽度小于某个阈值的条带，上界应当可以得到改进。这些数值结果促使 [Zwo17]猜想

$$\lim_{r\to+\infty} N(r,\gamma) r^{-d_H} = 0 \text{ when } 0 \leq \gamma < \frac{\gamma_{cl}}{2}$$

这一方向的最初成果是在凸余紧双曲曲面的情形下取得的：

- 在 [Nau12], 中，作者证明了一个与定理 2 中类似的界（没有 ε 的损失），并给出了具有相同性质的函数 σ；

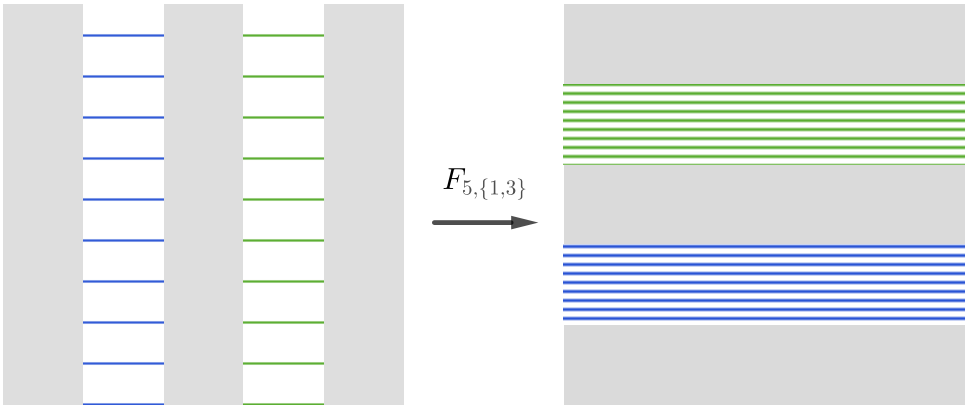


图2. 开放贝克映射示例。

- 在 [Dya19], 中，作者得到了相同的结果，其中显式函数 σ 由$\sigma(\gamma) = 1 - d_H - 2\gamma$给出，并且具有与定理 2 中的函数相同的性质（因为在此背景下 $\gamma_{cl} = 1 - d_H$）。他的结果可以推广到高维凸共紧双曲流形。

定理 2 对二维障碍物散射中的这一猜想给出了肯定的回答。Jakobson-Naud（[JN12]）针对凸共紧曲面还提出了一个更强的猜想：对于每个 $\gamma < \gamma_{cl}/2$, $N(r,\gamma) = 0$，对于 $r \gg 1$。我们的工作距离证明这一猜想仍有很大差距。

玩具模型与开放量子映射。 为了检验这些猜想，研究玩具模型很有帮助，因为在这类模型中，数值计算和理论计算有时都更容易。研究开放双曲系统时，一个广受欢迎的玩具模型是开放贝克映射（例如参见 [非11],节 6.1.1）。经典映射是环面 $\mathbb{T}^2$ 上的一个分段仿射开放映射 $F_{a,\mathcal{A}}$，它与字母表 $\mathcal{A} \subset \{0,\dots,a-1\}$（$a$ 称为基数）相关（见图2）。

其量子化由矩阵 $M_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ 给出，其中 N 起到 $(2\pi h)^{-1}$ 的作用。在此背景下，人们希望在极限 $N \to +\infty$ 下，统计矩阵 $M_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ 在环域$\{|z| \geq \nu\}$ 中的特征值个数。

这些玩具模型就是我们所说的开放量子映射。开放量子映射与开放量子系统之间存在一种启发式对应关系。这些量子化的开放映射应被解释为开放量子系统在时间 $t = \log a$ 的传播子，其不稳定雅可比为常数 $J^u = a$；因此，对于开放量子系统的一个共振 λ，与之对应的是开放量子映射的一个特征值 $e^{-it\lambda}$，其中 $t = \log a$。事实上， [NSZ11] 和 [NSZ14] 已证明，障碍物散射中的共振研究可以归结为对一族更一般的开放量子映射的研究。这一化约是定理 2 证明的出发点。

关于量化的开放贝克映射，已有令人信服的数值和理论结果。在 [NR07], 中，作者给出了韦尔上界的数值证据，其形式为

$$\#\left(\mathrm{Spec}\ (M_N) \cap \{|z| \geq \nu\}\right) \leq C_\nu N^{d_H}$$

在 [DJ17], 中，作者证明了一个更精确的上界，条件是 $N = a^k$：

$$\#\left(\mathrm{Spec}\ (M_{a^k}) \cap \{|z| \geq \nu\}\right) \leq C_\nu (a^k)^{d_H + \varepsilon - \Sigma(\nu)}, \forall k \in \mathbb{N} \quad ; \quad \Sigma(\nu) = \sigma\left(-\frac{\log \nu}{\log J^u}\right)$$

其中，$J^u = a$ 是该系统的不稳定雅可比，而 $\sigma(\gamma) = \max(1 - d_H - 2\gamma, 0)$。特别地，$\sigma$ 具有与定理 2 中对象相同的性质，因为贝克映射的经典衰减率为 $1 - d_H$。$\Sigma(\nu)$ 与 $\sigma(\gamma)$ 之间的联系源于上述启发式解释。

1.2. 主定理的陈述。 我们的定理 2 的证明依赖于[NSZ14]的先前结果。他们的定理 5 将散射共振 $\lambda \in]1/h - R, 1/h +$

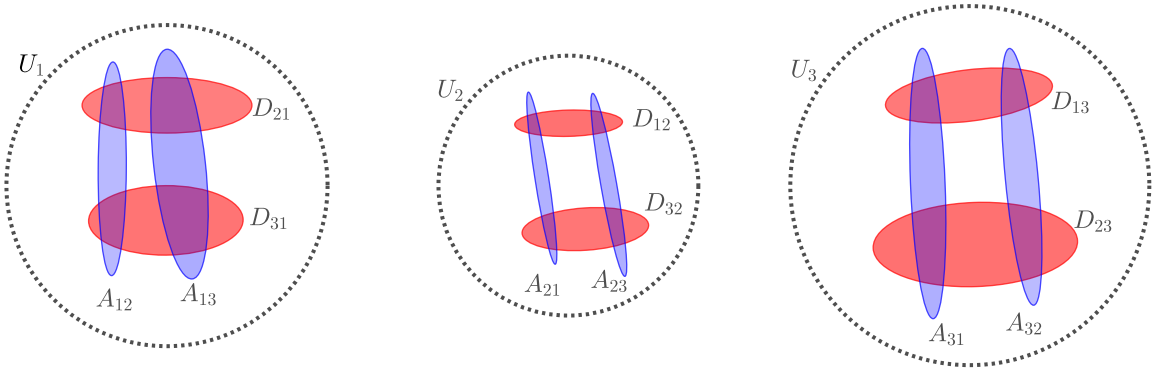


图 3。在 $J = 3$ 的情形下开放双曲映射的示意例子，其中 $D_{ii} = \emptyset$ 对于 $i = 1$，2，3。

$R[+i] - R, R[$ 归结为对.....抵消的研究

$$z \in]-R, R[+i] - R, R[\mapsto \det(\mathrm{I} - M(z;h))$$

其中

$$M(z) = M(z;h) : L^2(\partial\mathcal{O}) \to L^2(\partial\mathcal{O}) \tag{1.2}$$

是一个开放量子双曲映射族（见下文第 1.2.1 节）。族 $z \mapsto M(z)$ 关于 $z \in]-R, R[+i] - R, R[$ 全纯地依赖于某个任意的 $R > 0$，有时也称为双曲量子单值算子。零点 z 与共振之间通过关系式 $h\lambda = 1 + z$ 联系起来。单值这一概念源于以下事实：方程 $-\Delta u = \lambda^2 u$ 的出射解必须满足方程 $M(z)u = u$，该方程规定了 u 在障碍物边界上的行为。现在我们引入陈述本文主要定理所需的一些定义。我们利用 [NSZ14] 在第 6.1 节中的结果，说明定理 3 如何推出定理 2。

1.2.1. 开放量子双曲映射及主定理的表述。 下面的长篇定义基于 Nonnenmacher、Sjöstrand 和 Zworski 在 [NSZ11] 及 [NSZ14] 中的定义，并专门针对二维相空间。考虑由 J $\mathbb{R}$ 的副本构成的开区间 $Y_1, \dots, Y_J$，并令：

$$Y = \bigsqcup_{j=1}^{J} Y_j \subset \bigsqcup_{j=1}^{J} \mathbb{R}$$

并考虑

$$U = \bigsqcup_{j=1}^{J} U_j \subset \bigsqcup_{j=1}^{J} T^*\mathbb{R} \quad ; \quad \text{where } U_j \Subset T^*Y_j \text{ are open sets}$$

希尔伯特空间 $L^2(Y)$ 是 $\bigoplus_{i=1}^{J} L^2(Y_i)$ 的正交直和。

对于 $j = 1, \dots, J$，考虑开的不相交子集 $D_{ij} \Subset U_j$、$1 \le i \le J$、出发集，并且类似地，对于 $i = 1, \dots, J$，考虑开的不相交子集 $A_{ij} \Subset U_i$、$1 \le j \le J$、到达集 （见图 3）。我们假设存在具有光滑逆映射的光滑辛同胚，

$$F_{ij} : \widetilde{D}_{ij} \to F_{ij}\left(\widetilde{D}_{ij}\right) = \widetilde{A}_{ij} \tag{1.3}$$

‹ 我们注意到 F 对于全局光滑映射 $F : D \to A$，其中 A 和 D 是完整的到达集和出发集，定义如下

$$\widetilde{A} = \bigsqcup_{i=1}^{J} \bigsqcup_{j=1}^{J} \widetilde{A}_{ij} \subset \bigsqcup_{i=1}^{J} U_i$$

$$\widetilde{D} = \bigsqcup_{j=1}^{J} \bigsqcup_{i=1}^{J} \widetilde{D}_{ij} \subset \bigsqcup_{j=1}^{J} U_j$$

我们将出射（分别为入射）尾集定义为 $\mathcal{T}_+ := \{\rho \in U;\ F^{-n}(\rho) \in U, \forall n \in \mathbb{N}\}$（分别为$\mathcal{T}_- := \{\rho \in U;\ F^{n}(\rho) \in U, \forall n \in \mathbb{N}\}$）。我们假设它们是 U的闭子集，并且俘获集

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_- \tag{1.4}$$

是紧的。我们还假设

$$\mathcal{T} \text{ is } \textit{totally disconnected.}$$

‹**备注**。 对于某些 i 和 j， $D_{ij} = \emptyset$ 可能成立。例如，在处理 ‹ 台球映射（见第 6.1 小节）时，集合 D_{ii} 全部为空。

接下来我们作出以下动力学假设。

$$\mathcal{T} \text{ is a hyperbolic set for } F \tag{1.5}$$

也就是说，对于每个 $\rho \in \mathcal{T}$，我们假设存在稳定/不稳定切空间 $E^s(\rho)$ 和 $E^u(\rho)$，使得:

- 维数 $E^s(\rho)$ =维数 $E^u(\rho) = 1$
- $T_\rho U = E^s(\rho) \oplus E^u(\rho)$
- 存在 $\lambda > 0$、 $C > 0$ ，使得对于任意 $v \in T_\rho U$ 及任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$v \in E^s(\rho) \implies ||d_\rho F^n(v)|| \leq Ce^{-n\lambda}||v|| \tag{1.6}$$

$$v \in E^u(\rho) \implies ||d_\rho F^{-n}(v)|| \leq Ce^{-n\lambda}||v|| \tag{1.7}$$

其中， $||\cdot||$ 是 U上的固定黎曼度量。

假设 $T_\rho U$ 分解为稳定空间和不稳定空间是连续的。由此可以定义稳定雅可比 $J^u_n(\rho)$ 和不稳定雅可比 $J^s_n(\rho)$（精确定义见定义 3.3）。我们将最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max}$ 定义为

$$\lambda_{\max} = \sup_{\rho \in \mathcal{T}} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log J^u_n(\rho) \tag{1.8}$$

我们还注意到

$$\varphi_u(\rho) = \log J^u_1(\rho) \tag{1.9}$$

备注。

- 该定义对 U 上的任意黎曼度量均成立，当然我们可以假设它是标准欧氏度量。- 一个标准事实（见 [Mat68]）是，存在 U 上的光滑黎曼度量，称为适配动力学的度量，使得 (1.6) 和 (1.7) 在 $C = 1$ 下成立。

经典映射的描述到此结束。它涵盖了台球映射的情形，这在处理障碍物散射时很有用（见第 6.1 小节）。接下来，我们将 F 开放量子双曲映射 与之关联，它是经典映射的量子对应物。这类算子的定义将在 2.2.3 节中详细介绍。开放量子双曲映射 $T\colon L^2(Y) \to L^2(Y)$ 是一个算子值矩阵 $(T_{ij})_{ij}$ ，其中 $T_{ij}\colon L^2(Y_j) \to L^2(Y_i)$ 是一个与 F_{ij} 相关联的傅里叶积分算子（精确定义见定义 2.4）。

现在我们来陈述本文的主要定理。

定理 3 的假设。 我们考虑一族 $(M_h(z))_z = (M(z;\ h))_z$ 开放双曲量子映射，与 F 相关，定义见定义 2.4，并关于参数 $z \in \Omega = \Omega_R =]-R, R[+i]-R, R[$ 全纯依赖，其中 R 固定（但在实际应用中，它可以任意大）。我们假设存在 $L > 0$ 和 $a \in C^\infty_c(T^*Y)$，使得 ‹ $\mathrm{supp}(a)$ 包含于 $\mathcal{T}$ 的一个紧邻域 $\mathcal{W}$ 中， $\mathcal{W} \subset D$, $a = 1$ 位于 $\mathcal{T}$ 的一个邻域内，并且对 Ω 一致，

$$M_h(z)(1 - \mathrm{Op}_h(a)) = O(h^L)_{L^2 \to L^2}$$

我们用 $\alpha_h(z)$ 表示 $M_h(z)$ 的振幅（定义见定义 2.4 之后）。我们对 α_h 作如下假设：存在 $\mathcal{T}$ 的一个邻域 $V \subset U$ 和一个光滑函数 $t_{ret}: V \to \mathbb{R}_+$[1]，使得 $\inf_V t_{ret} > 0$、$\sup_V t_{ret} < +\infty$，且对所有 $z \in \Omega$ 和 $\rho \in V$，

$$\alpha_h(z)(\rho) = \exp(-i \operatorname{Im} z t_{ret}(\rho)) + O(h^{1-})_{S_{0+}}$$

也就是说，存在支集包含于 $\mathcal{T}$ 的一个较大邻域中的 $\chi \in C_c^\infty(U)$，使得 $\chi \equiv 1$ 在 V 上成立；并且对每个 $\eta > 0$，$\chi(\alpha_h(z) - \exp(-izt_{ret}))$ 一致属于 $h^{1-\eta}S_\eta$，其中 $z \in \Omega$。符号类 S_η 和 S_{0+} 的定义将在第 2 节中回顾。

备注。特别地，α_h 的主部 $\alpha_z(\rho) = \exp(-izt_{ret}(\rho))$ 与 V中的 h 无关。这个假设乍看之下可能显得很强，但实际上，在我们考虑的两个应用中都满足（见 6.1 和 6.2）。事实上，[NSZ11] 和 [NSZ14] 的研究允许处理到 $\operatorname{Im} z = C \log h$。对于这样的 z，α 显然依赖于 h，并且属于符号类 S_{0+}。

我们还假设，对于 $z \in \Omega$ 以及所有足够小的 h，$M_h(z)$ 都是一致有界的

$$||M_h(z)||_{L^2 \to L^2} \leq C.$$

现在定义如下量：

$$p(\beta) = -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(-\varphi_u + 2\beta t_{ret}) \tag{1.10}$$

其中，P 表示 φ 的拓扑压力：$\rho \in \mathcal{T} \mapsto -\varphi_u + 2\beta t_{ret}$，其对应于 F 在 $\mathcal{T}$ 上的动力学。它定义为（另见 3.1）

$$P(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P_0(\varphi, n, \epsilon)$$

其中

$$P_0(\varphi, n, \epsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(x)) \right) ; E \text{ is } (n, \epsilon) \text{ separated} \right\}$$

（如果对于每个 $x, y \in E, x \neq y$，都存在 $0 \leq i \leq n-1$,$d(F^i(x) F^i(y)) > \epsilon$，则称子集 $E \subset \mathcal{T}$ 是 (n, ϵ)-分离的）。量 $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(x))$ 称为伯克霍夫和。映射 $\beta \mapsto p(\beta)$ 是 β 的非增函数，并且在 $\beta = 0$ 时，我们有

$$p(0) = -\frac{1}{6\lambda_{max}} P(-\varphi_u) > 0.$$

对于 $\Omega' \subset \Omega$，我们注意到 $m_M(\Omega') = \sum_{z \in \Omega', f_h(z)=0} m(z)$，其中 $m(z)$ 表示 z 作为 $f_h(z) = \det(1 - M_h(z))$ 的零点的重数。注意，由于算子 $M_h(z)$ 被构造成迹类算子（见 2.2.3），该行列式是良定义的。在本文中，我们证明

定理 3。对于每个 $\varepsilon > 0$、$\gamma > 0$ 和 $0 < R' < R$，都存在 $C = C_{\varepsilon, \gamma, R'} > 0$ 和 $h_0 > 0$，使得

$$m_M\big(\{|\operatorname{Re} z| < R', \operatorname{Im} z \in [-\gamma, 0]\}\big) \leq C h^{-d_H + \max(p(\gamma+\varepsilon)-\varepsilon, 0)}, \ \forall 0 < h \leq h_0$$

其中，$2d_H$ 是 $\mathcal{T}$的豪斯多夫维数。

1.2.2. 在势散射中的应用。从开放量子系统到开放量子双曲映射的约化已在 [NSZ14] 中针对障碍物散射的情形得到证明，在 [NSZ11]中也针对势散射的情形得到了证明。因此，我们可以在势散射中证明一个类似于定理 2 所给出的界。以下定理将在 6.2 节中利用定理 3 证明。

定理 4。令 $V \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，$E_0 > 0$，并考虑半经典伪微分算子$P_h = -h^2\Delta + V - E_0$。记 $p(x, \xi) = \xi^2 + V - E_0$，并假设

$$dp \neq 0 \ on \ p^{-1}(0)$$

记 H_p 为与 p 相关联的哈密顿向量场，并记 $\Phi_t = \exp(tH_p)$ 为相应的哈密顿流。记 K_0 为 p 在能量 0 下的俘获集，并假设

(i) Φ_t 在 K_0 上是双曲的；*(ii)* K_0 是拓扑一维的。

[1] 在应用中，t_{ret} 是一个返回时间函数。

设 γ_{cl} 为系统在能量0 处的经典逃逸率， $2d_H+1$ 为 K_0 的豪斯多夫维数。设 $N(R,\gamma;\ h)$ 为 P_h/h 在 $\{|$ 实部 $z|<R$、虚部 $z\in[-\gamma,0]\}$ 中的共振数，按重数计。则存在一个非增函数 $\sigma:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，满足

- $\sigma(\gamma)\ >0$ 对于 $0\le\gamma<\gamma_{cl}/2$；
- $\sigma(\gamma)\ =0$ 对于 $\gamma\ge\gamma_{cl}/2$

and 使得对于所有 R、$\gamma>0$ 以及所有 $\varepsilon>0$，存在 $C_{R,\ \gamma,\ \varepsilon}>0$ 和 $h_0>0$，使得

$$\forall 0<h\le h_0\,,\ N(R,\gamma;h)\le C_{R,\gamma,\varepsilon}h^{-d_H+\sigma(\gamma)-\varepsilon}.$$

备注。我们关注薛定谔算子 $P_h=-h^2\Delta+V-E_0$ 在 0 的一个大小为 h 的邻域内的共振。为使记号与定理 3 中出现的谱参数 z 保持一致，我们进行重整化，以研究 P_h/h 在 0 的一个固定邻域内的共振。

备注。该定理可以推广到具有欧氏端的流形上拉普拉斯算子的更广泛扰动类。关于更一般的假设，请参阅 [NSZ11]（第 2.1 节）。

1.2.3. 定理 *3* 的证明概要。在 [NSZ14], 中，为了证明分形魏尔上界，作者修改了单值算子 $M(z;\ h)$，并将其替换为

$$M_{tG}(z;h)=e^{-tG}M(z;h)e^{tG}$$

˜其中 $G=\mathrm{Op}_h(g)$，g 是临界符号类 $S_{1/2}$中的一个逃逸函数，其构造使得傅里叶积分算子 M_{tG} 在˜$\mathcal{T}$的邻域 $\mathcal{T}(h^{1/2-})$之外具有较小的振幅，而 t 是一个固定参数。这里，为了避免使用临界符号类 $S_{1/2}$，我们将在符号类 S_δ 中工作，其中取某个 $\delta=1/2-\varepsilon$，这样一来，$\mathcal{T}$的感兴趣邻域变为 $\mathcal{T}(h^\delta)$，其体积与 $h^{\delta(2-2d_H)}$相当。

由于 $z\mapsto\det(1-M_{tG}(z;h))$ 的零点与 $\det(1-M(z;\ h))$ 的零点（计重数）重合，我们希望计算 $\det(1-M_{tG}(z;\ h))$ 的零点。詹森公式以及关于谱行列式的标准谱不等式，将对 $\det(1-M_{tG}(z;\ h))$ 的零点的估计归结为对 $M_{tG}(z;h)$ 的希尔伯特–施密特范数的控制。在 [NSZ14], 中，作者证明了 M_{tG} 接近一个秩与 h^{-d_H}相当的算子，由此得到如下形式的上界

$$||M_{tG}(z;h)||_{HS}^2\le||M_{tG}(z;h)||_{L^2\to L^2}^2\times\ \mathrm{rank}\ \le Ch^{-d_H}$$

为了改进 [NSZ14]的分形上界并证明定理 3，我们从一个简单的观察出发：对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，$\det(1-M_{tG}(z;\ h))$ 的零点都是 $\det(1-M_{tG}^n(z;\ h))$ 的零点。我们利用这一事实，并采用一个依赖于 h 的指数 $n=n(h)$：$n(h)\ \sim\nu\log 1/h$ 对于某个$\nu>0$。先验地，当 $n(h)$ 按对数增长时，M_{tG}^n 会变得“棘手”（即不再是某个合适类中的傅里叶积分算子；回想一下，本质上 $g\in S_\delta$），尤其是当 $n\ge\varepsilon\log\ 1/h$ 时，便无法再使用埃戈罗夫定理，其中某个小的 ε（本质上 $\frac{1/2-\delta}{\lambda_{\max}}$）。然而，算子 $M_{tG}(z)$ 对相干态 $\underline{\varphi_\rho}$ 的作用，在足够长的对数时间内仍然可控。我们将能够获得良好的估计，直至

$$n(h)\sim\frac{1}{6\lambda_{\max}}\log 1/h$$

为使用这些估计，我们采用用相干态表示迹的方法 :

$$||M_{tG}(z;h)^n||_{HS}^2=\frac{1}{2\pi h}\int_U||M_{tG}(z;h)^n\varphi_\rho||^2d\rho \tag{1.11}$$

本文的主要新要点在于，精确控制在此类对数时间内的演化态$M_{tG}^n\varphi_\rho$。该态的行为将取决于初始点 ρ（精确且严格的表述见命题 4.2）

- 如果 ρ 不在 $\mathcal{T}$的某个 h^δ 邻域内，我们将证明，对于任意 $L>0$，都可以找到 $t=t(L)$，使得 $M_{tG}^n\varphi_\rho$ 的范数为 $O(h^L)$。因此，积分 (1.11) 中的质量基本上集中在 $\mathcal{T}$的某个 h^δ 邻域内。特别地，只需在 $\mathcal{T}$的某个 h^δ 邻域内估计$||M_{tG}(z;h)^n||^2\le C$，我们便得到

$$||M_{tG}(z;h)^n||_{HS}^2\le Ch^{-1}h^{\delta(2-2d_H)}\le Ch^{-d_H+O(\varepsilon)}$$

这给出了此前的 [NSZ14]上界

- 对于足够接近 $\mathcal{T}$的态，φ_ρ 将演化为压缩相干态，并沿着 $\mathcal{T}_+$的不稳定叶排列。这一现象可以理解为相干态的离域化。在不稳定方向上，这个压缩态中远离 $\mathcal{T}_-$ 的分量（即距离大于 h^δ的分量）会由于逃逸函数而经历强烈阻尼。对于这种态，我们能够控制其平方 L^2-范数

$$w_z(\rho) \coloneqq ||M_{tG}(z;h)^n \varphi_\rho||^2$$

由（再次强调，严格表述见命题 4.2）

$$w_z(\rho) \leq C \left(\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_z(F^i(\rho)) \right)^2 J_n^u(\rho)^{d_H - 1} \tag{1.12}$$

其中 $\alpha_z(\rho) = \exp(-(\operatorname{Im} z) t_{ret}(\rho))$。这是本文的关键估计。将这一上界代入（1.11）中的积分，我们能够证明以下上界

$$||M_{tG}(z;h)^n||_{HS}^2 \leq C_\varepsilon h^{-d_H + \tilde{\sigma}(z) - O(\varepsilon)} \; ; \; \tilde{\sigma}(z) = -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(-\varphi_u + 2\log \alpha_z)$$

（见命题 4.1）。压强与（1.12）之间的联系体现在将其写成

$$w_z(\rho) \leq C J_n^u(\rho)^{d_H} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-2 \operatorname{Im} z t_{ret} - \varphi_u) \circ F^i(\rho) \right)$$

因子 $J_n^u(\rho)^{d_H}$ 在积分后消失（见命题 4.1 的证明）。最终得到定理 3（见第 4 节）。

关键估计（1.12）是本文的主要创新。它依赖于相干态传播，以及演化态与逃逸函数之间的微妙相互作用（见图 4）。（1.12）的证明依赖于以下思想：

- 这一项

$$\pi_{\alpha,n}(\rho) \coloneqq \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_z(F^i(\rho)) \tag{1.13}$$

来自 $M(z)$ 对 φ_ρ 的反复作用。

- 初始态 φ_ρ 是一个大小为 $h^{1/2}$ 的波包。$M(z)^n \varphi_\rho$ 是一个压缩相干态，在 $F^n(\rho)$ 附近微局部化。这是因为我们将处理 $n = n(h) \leq^{1-\eta}_{6\lambda_{\text{最大}}} \log(1/h)$，其中 $\eta > 0$ 为某个量。不过，它不再在该点的某个 $h^{1/2}$ 邻域内微局部化。将其写成与某个局部不稳定叶 $W_u(\rho_n)$ 相关联的拉格朗日态会更方便，其中 $\rho_n \in \mathcal{T}$ 接近 $F^n(\rho)$：如果 $\psi_u(x)$ 是 $W_u(\rho_n)$ 的生成函数，也就是说，如果我们可以写成 $W_u(\rho_n) = \{(\{\mathrm{v}30, \; \psi_u'(x)\}$，那么该态将写作

$$a_h(x) e^{\frac{i}{h}\psi_u(x)}$$

该拉格朗日态沿不稳定流形的大小由 ρ 附近的局部雅可比矩阵控制，并且为 $O(h^{1/2} J_n^u(\rho))$：我们将看到

$$|x| \gg h^{1/2} J_n^u(\rho) \implies a_h(x) = O(h^\infty)$$

- 最后，我们需要理解逃逸函数与这一演化态之间的相互作用。逃逸函数的作用会抑制距离大于 h^δ 的 $\mathcal{T}$ 的那部分态。由于这样的态非常接近不稳定流形，对该态而言，唯一相关的抑制来自距离 $\mathcal{T}_-$ 大于 h^δ 的分量。粗略地说，为了得到所需的界，我们证明如果 $d((x, \psi_u'(x)) \; \mathcal{T}_-) \leq h^\delta$，那么

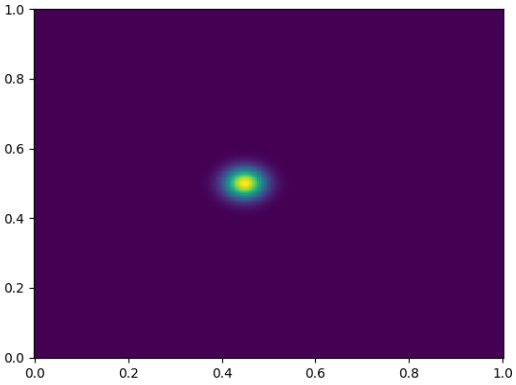
$$a_h(x) \leq C \pi_{\alpha,n}(\rho) \left(J_n^u(\rho)\right)^{-1/2} h^{-1/4} \tag{1.14}$$

并且我们证明可以忽略其余满足 $d((x, \psi_u'(x)) \; \mathcal{T}_-) \geq h^\delta$ 的点 x（见命题 5.6）。于是得到

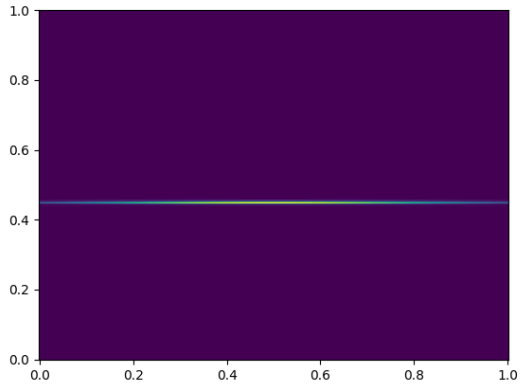
$$||M_{tG}(z)^n \varphi_\rho||_{L^2}^2 \leq C \pi_{\alpha,n}(\rho)^2 J_n^u(\rho)^{-1} h^{-1/2} \mathrm{Len}(X_-(\rho, \rho_n))$$

其中

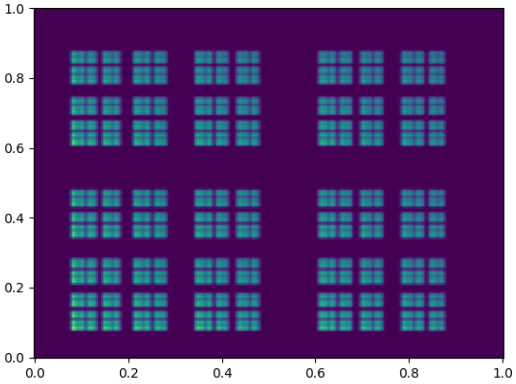
$$X_-(\rho, \rho_n) = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq C J_n^u(\rho) h^{1/2}, d((x, \psi_u'(x)), \mathcal{T}_-) \leq h^\delta\}$$



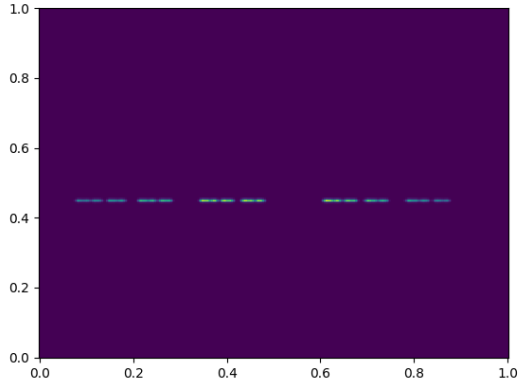
(a) 大小为 $h^{1/2}$ 的相干态.....



(b) .....演化为压缩相干态。



(c) 逃逸函数使远离俘获集的区域衰减.....



(d) .....并导致演化后的相干态发生衰减。

图 4。我们展示了开放双曲系统中一个相干态在相空间中的演化，该系统与一个开放贝克映射相关。颜色与该态的维格纳分布强度有关。逃逸函数导致的衰减显示于（4c）中。初始相干态显示于（4a）中，演化后的态（未经过衰减）显示于（4b）中。施加衰减后，演化后的态损失了部分质量（4d）。

.

- 我们还需要控制 $X_-(\rho,\ \rho_n)$ 的长度。我们利用 $\mathcal{T}_- \cap W_u(\rho_n)$ 的盒维数为 d_H 这一事实。事实上，我们关注的是 $W_u(\rho_n)$ 中大小为 $h^{1/2}J_n^u(\rho)$ 的一部分，并证明这部分可以用半径为 h^δ 的 N_h 个球覆盖（见引理 3.6）

$$N_h \leq C\left(\frac{h^\delta}{h^{1/2}J_n^u(\rho)}\right)^{-d_H}$$

从而

$$\mathrm{Len}(X_-(\rho,\rho_n)) \leq CN_h h^\delta \leq Ch^{1/2}J_n^u(\rho)^{d_H}h^{-O(\varepsilon)}$$

- 综合以上各部分，我们得到（1.12）。

本文结构。本文组织如下：

- 我们先在第 2 节和第 3 节介绍预备知识。第 2 节专门讨论有关伪微分算子、傅里叶积分算子、亚纯辛

算子和相干态的半经典结果。第 3 节侧重于双曲动力系统的性质。

- 第 4 节将定理 3 的证明归结为命题 4.2，该命题涉及传播后的相干态的行为。
- 第 5 节专门用于证明命题 4.2。

记号。在全文中，我们将在不同地方使用同一个常数 C ，但其含义可能不同。不过，它始终对我们所研究的动力系统以及算子族 $M_h(z)$ 具有相同的依赖关系。也就是说，我们写作 $f \le Cg$ 而不是：存在 $C>0$ ，其依赖于 F 和 $M_h(z)$，使得 $f \le Cg$。在某处，我们将固定 U 的一个单位分解，该单位分解与局部坐标图相关，并依赖于参数 ε 和 ε_0。常数 C 也将依赖于这些对象。如果常数 C 还具有其他依赖关系，我们将对此作出明确说明，或在必要时将其写入下标中。

最后，我们用 $f \sim g$ 表示 $C^{-1}f \le g \le Cf$。

致谢。作者谨向 Frédéric Naud 和 Stéphane Nonnenmacher 致谢，感谢他们允许作者重启这一研究项目，以改进分形上界；并向 Stéphane Nonnenmacher 致谢，感谢他进行了有益的讨论、给予了富有成效的帮助，并认真审阅了本文的初稿。

2. 半经典预备知识

2.1. 伪微分算子与魏尔量子化。我们回顾在 $\mathbb{R}^n$上的魏尔量子化的一些基本概念和性质。关于相关命题的证明，以及半经典分析和量子化的进一步讨论，请参阅 [Zwo12]。

定义。我们首先定义依赖于 h的符号类。在以下定义中， m是定义在 $T^*\mathbb{R}^n$上的正函数，其形式为 $\langle\rho\rangle^N$，其中 $\mathbb{N}\in\mathbb{Z}$，且 $\langle\rho\rangle=\sqrt{1+|\rho|^2}$和 $\rho=(x,\ \xi)$是相空间 $T^*\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n}$中的一点。 m 称为阶函数（按 [Zwo12], 4.4.1 的意义）。

定义 2.1。设 $0\le\delta<\frac{1}{2}$。如果对于每个 $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$，都存在 $C_\alpha>0$ 使得：我们称一个 h-依赖族 $a:=(a(\cdot;\,h))_{0<h\leqslant1}\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 属于类 $S_\delta(m)$（若 $m=1$，则简称为 S_δ ）。

$$\forall 0<h\le 1\,,\ \sup_{\rho\in\mathbb{R}^{2n}}|\partial^\alpha a(\rho;h)|\le C_\alpha h^{-\delta|\alpha|}m(\rho)$$

我们将使用记号 $S_{0+}(m)=\bigcap_{\delta>0}S_\delta(m)$。

我们记 $a=O(h^N)_{S_\delta(m)}$ 表示：对于每个 $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$，存在 $C_{\alpha,N}$ 使得

$$\forall 0<h\le 1\,,\ \sup_{\rho\in\mathbb{R}^{2n}}h^{\delta|\alpha|}|\partial^\alpha a(\rho;h)|\le C_{\alpha,N}h^N m(\rho)$$

如果对所有 $N\in N$ 都有 $a=O(h^N)_{S_\delta(m)}$，我们将记作 $a=O(h^\infty)_{S_\delta(m)}$。对于给定的符号 $a\in S_\delta$，如果存在一个紧集 K 使得[2]：我们称 a 具有紧本质支集。

$$\forall\chi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^{2n}),\operatorname{supp}\chi\cap K=\emptyset\implies\chi a=O(h^\infty)_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})}$$

我们称 a 属于类 S_δ^{comp}，其本质支集则定义为所有此类紧 K's 的交集。我们将其记为 ess supp $a\subset K$。特别地，类 S_δ^{comp} 包含所有支集包含于某个与 h 无关的紧集中的符号，而这些符号对应于模去 $O(h^\infty)_{\mathcal{S}(T^*\mathbb{R})}$ 后的所有 S_δ^{comp} 符号。因此，我们采用以下记号：如果 $V\Subset\mathbb{R}^{2n}$ 是一个开集，我们称 $a\in S_\delta^{comp}(V)$，当且仅当 $a\in S_\delta^{comp}(\mathbb{R}^{2n})$ 且 ess supp $a\Subset V$。

F或者对于符号 $a=a(\cdot;h)\in S_\delta(m)$，我们将使用维尔量子化对其进行量子化。它 is 信息通常写作：

$$(\mathrm{Op}_h(a)u)(x)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}a\left(\frac{x+y}{2},\xi;h\right)u(y)e^{i\frac{(x-y)\cdot\xi}{h}}dyd\xi$$

[2]这里 $\mathcal{S}$ 表示 Schwartz空间，记号 $O(h^\infty)_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})}$ 表示每个半范数都是 $O(h^\infty)$。

我们将用 $\Psi_\delta(m)$ 记对应的伪微分算子类。根据定义， $A=\mathrm{Op}_h(a)$ 的波前集为 $\mathrm{WF}_h(A)$ $=\operatorname{ess\,supp} a$。

如果对于每个 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，都存在$C>0$ 和 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $||\chi u||_{H_n^{-N}}\leq Ch^{-N}$，则称族 $u=u(h)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 是 h-温和的。对于一个 h-温和族 u，如果存在 $a\in S^{comp}$ 使得 $a(\rho)\neq 0$ 且 $\mathrm{Op}_h(a)u=O(h^\infty)_{C^\infty}$，则称点$\rho\in T^*\mathbb{R}^n$ 不属于 u 的波前集。记 $\mathrm{WF}_h(u)$ 为 u 的波前集。

如果算子族 $B=B(h):C_c^\infty(\mathbb{R}^{n_2})\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1})$ 的 Schwartz 核 $\mathcal{K}_B\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2})$ 是 h-温和的，则称该算子族是 h-温和的。我们将 B 的扭曲波前集定义为

$$\mathrm{WF}_h{}'(B)=\{(x,\xi,y,-\eta)\in T^*\mathbb{R}^{n_1}\times T^*\mathbb{R}^{n_2},(x,\xi,y,\eta)\in\mathrm{WF}_h(\mathcal{K}_B)\}$$

标准性质。现在回顾半经典分析中的标准结果，这些结果涉及伪微分算子的 L^2-有界性及其复合。我们将使用以下版本的 Calderon-Vaillancourt 定理（[Zwo12, 定理 4.23）。

命题 2.1。存在 $C_n>0$，使得下述结论成立。对于每个 $0\leq\delta<\frac{1}{2}$ 和 $a\in S_\delta$，$\mathrm{Op}_h(a)$ 是 L^2 上的有界算子，并且

$$||\operatorname{Op}_h(a)||_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)}\leq C_n\sum_{|\alpha|\leq 8n}h^{|\alpha|/2}||\partial^\alpha a||_{L^\infty}$$

作为尖锐 Gårding 不等式的推论（见 [Zwo12, 定理 4.32），我们还得到伪微分算子的 L^2 范数的精确估计：

命题 2.2。假设 $a\in S_\delta(\mathbb{R}^{2n})$。那么，存在 C_a，它取决于 a 的有限个半范数，使得：

$$||\operatorname{Op}_h(a)||_{L^2\to L^2}\leq||a||_\infty+C_ah^{\frac{1}{2}-\delta}$$

我们回顾一下，实符号的 Weyl 量子化在 L^2 上是自伴的。若 m_1 和 m_2 是形如 $\langle\rho\rangle^{N_i}$、$i=1,2$ 的两个阶函数，则 $\Psi_\delta(m_1)$ 和 $\Psi_\delta(m_2)$ 中两个伪微分算子的复合是类 $\Psi_\delta(m_1m_2)$ 中的伪微分算子。更准确地说（见 [Zwo12, 定理 4.11 和 4.18），若 $(a,b)\in S_\delta(m_1)\times S_\delta(m_2)$，则 $\mathrm{Op}_h(a)\circ\mathrm{Op}_h(b)$ 由 $\mathrm{Op}_h(a\#b)$ 给出，其中 $a\#b$ 是 a 与 b 的 Moyal 乘积。它的表达式为

$$a\#b(\rho)=e^{ihA(D)}(a\otimes b)|_{\rho=\rho_1=\rho_2}$$

其中 $a\otimes b(\rho_1,\rho_2)=a(\rho_1)b(\rho_2)$，$e^{ihA(D)}$ 是作用于 $\mathbb{R}^{4n}$ 上的函数的傅里叶乘子，并且记 $\rho_i=(x_i,\xi_i)$，

$$A(D)=\frac{1}{2}\left(D_{\xi_1}\circ D_{x_2}-D_{x_1}\circ D_{\xi_2}\right)$$

我们可以通过二次驻相法估计 Moyal 乘积，并得到以下展开式，该展开式对所有 $N\in\mathbb{N}$ 在 $S_\delta(m_1m_2)$ 中成立，

$$a\#b(\rho)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{i^kh^k}{k!}A(D)^k(a\otimes b)|_{\rho=\rho_1=\rho_2}+r_N$$

其中，对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$，存在一个与 a 和 b 无关的 C_α，使得

$$||\partial^\alpha r_N||_\infty\leq C_\alpha h^N||a\otimes b||_{C^{2N+4n+1+|\alpha|}}$$

加权Sobolev空间。我们还可以定义加权Sobolev空间 $H_h(m)$。在 $m=\langle\rho\rangle^N$ 的情况下，我们有

$$H_h\left(\langle\rho\rangle^N\right)=\mathrm{Op}_h\left(\langle\rho\rangle^{-N}\right)\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

当 $N\geq 0$、$H_h\left(\langle\rho\rangle^N\right)$ 与满足以下条件的函数 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 所组成的空间重合时

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\text{ with }\alpha+\beta\leq N\,,\ x^\alpha(h\partial^\beta)u\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

并且我们有以下范数等价关系：

$$||u||^2_{H_h(\langle\rho\rangle^N)}\sim\sup_{|\alpha|+|\beta|\leq N}||x^\alpha(h\partial^\beta)u||^2_{L^2}$$

根据 Calderon-Vaillancourt 定理，对于符号 $a\in S_\delta(m)$，我们有：

命题 2.3. 设 $N \in \mathbb{Z}$。存在 $M \in \mathbb{N}$ 和 $C > 0$，使得以下结论成立：对于所有 $a \in S_\delta\left(\langle\rho\rangle^N\right)$，$\mathrm{Op}_h(a)$：$H_h\left(\langle\rho\rangle^N\right) \to L^2$ 一致有界，并且

$$||\operatorname{Op}_h(a)||_{H_h(\langle\rho\rangle^N)\to L^2} \leq C \sup_{|\alpha|\leq M} h^{|\alpha|/2}||\langle\rho\rangle^{-N}\partial^\alpha a||_\infty$$

2.2. **傅里叶积分算子**。现在我们回顾傅里叶积分算子理论的若干方面。我们遵循 [Zwo12], 第 11 章和 [NSZ14]。关于拉格朗日分布和傅里叶积分算子的更多细节，请参阅 [GS13]。我们还将介绍理解定义 2.4 中开放双曲量子映射所需的内容。此外，我们还给出埃戈罗夫定理的一个定量版本。

2.2.1. 局部辛同胚及其量子化。我们暂时在维数 n 下工作。记 $\mathcal{K}$ 为如下辛同胚 κ 的集合：$T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ 满足以下条件：存在连续且分段光滑（在 t 中）的光滑函数族 $(\kappa_t)_{t\in[0,1]}$、$(q_t)_{t\in[0,1]}$，使得：

- $\forall t \in [0,1]$，κ_t：$T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ 是一个辛同胚；
- $\kappa_0 = \mathrm{Id}_{T^*\mathbb{R}^n}, \kappa_1 = \kappa$；
- $\forall t \in [0,1]$，$\kappa_t(0) = 0$；
- 存在 $K \Subset T^*\mathbb{R}^n$ 紧集，使得 $\forall t \in [0,1]$，q_t：$T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 且 $\operatorname{supp} q_t \subset K$；
- $\frac{d}{dt}\kappa_t = (\kappa_t)^* H_{q_t}$

如果 $\kappa \in \mathcal{K}$，我们注意到 $G_\kappa = Gr'(\kappa) = \{(x, \xi, y, -\eta), (x, \xi) = \kappa(y, \eta)\}$ 是 κ 的扭曲图，它在 $T^*\mathbb{R}^n$ 中是拉格朗日的。我们回顾 [Zwo12], 引理 11.4，该引理断言，只要我们具有一定的几何自由度，固定原点的局部辛同胚就可以视为 $\mathcal{K}$ 的元素。

引理 2.1。设 U_0、U_1 是 $T^*\mathbb{R}^n$ 的开且相对紧子集。假设 κ：$U_0 \to U_1$ 是一个固定 0 的局部辛同胚，并且可延拓到 0 的 $V_0 \ni U_0$ 一个开星形邻域上。那么，存在 $\tilde{\kappa} \in \mathcal{K}$ 使得 $\tilde{\kappa}|_{U_0} = \kappa$。

若 $\kappa \in \mathcal{K}$，且 (q_t) 表示与其定义中的 κ 相关联的光滑函数族，则我们注意到 $Q(t) = \mathrm{Op}_h(q_t)$。它是一个连续且分段光滑的算子族。于是，柯西问题

$$\begin{cases} hD_tU(t) + U(t)Q(t) = 0 \\ U(0) = \mathrm{Id} \end{cases} \tag{2.1}$$

是全局适定的。

遵循 [NSZ14], 定义 3.9，我们采用如下定义（其中 $G_\kappa = Gr'(\kappa)$）：

定义 2.2。固定 $\delta \in [0, 1/2)$。如果存在 $a \in S_\delta(T^*\mathbb{R}^n)$ 以及一条从 Id 到 κ 的路径 (κ_t)，满足上述假设，且 $T = \mathrm{Op}_h(a)U(1)$，其中 $t \mapsto U(t)$ 是柯西问题 (2.1) 的解，则称 $T \in I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; G_\kappa)$。

类 $I_{0+}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, G_\kappa)$ 按定义为 $\bigcap_{\delta>0} I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, G_\kappa)$。

一个标准结果称为埃戈罗夫定理（见 [Zwo12], 定理 11.1）：若 $U(t)$ 满足柯西问题 (2.1)，且 $b_0 \in S_\delta$，则 $U(1)^{-1}\mathrm{Op}_h(b_0)U(1)$ 是 Ψ_δ 中的伪微分算子；若 $b_1 = b_0 \circ \kappa$，则 $U(t)^{-1}\,\mathrm{Op}_h(b_0)U(t) - \mathrm{Op}_h(b_1) \in h^{1-2\delta}\Psi_\delta$。

备注。应用埃戈罗夫定理和比尔定理，可以证明：若 (κ_t) 是从 Id 到 Id 的闭路径，且 $U(t)$ 满足 (2.1)，则 $U(1) \in \Psi_0(\mathbb{R}^n)$。换言之，$I_\delta(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathrm{Gr}'(\mathrm{Id})) \subset \Psi_\delta(\mathbb{R}^n)$。但反向包含显然成立。因此，这里得到等式：

$$I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathrm{Gr}'(\mathrm{Id})) = \Psi_\delta(\mathbb{R}^n)$$

记号 $I(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, G_\kappa)$ 源于此类算子的 Schwartz 核是与 G_κ 相关联的拉格朗日分布，尤其是其波前集包含于 C 中。因此，如果 $T \in I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, G_\kappa)$，则 $\mathrm{WF}_h'(T) \subset \mathrm{Gr}(\kappa)$。

我们还要回顾一下，两个傅里叶积分算子的复合仍然是一个傅里叶积分算子：如果 $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{K}$ 且 $U_1 \in I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathrm{Gr}'(\kappa_1))$ $U_2 \in I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathrm{Gr}'(\kappa_1))$，那么，

$$U_1 \circ U_2 \in I_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathrm{Gr}'(\kappa_1 \circ \kappa_2))$$

2.2.2. 一个重要例子。让我们关注典范变换的一个特殊情形。设 $\kappa\colon\ T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ 是一个满足下述条件的典范变换

$$(x,\xi,y,\eta) \in \mathrm{Gr}(\kappa) \mapsto (x,\eta)$$

在 $(x_0,\ \xi_0,\ y_0,\ \eta_0)$ 附近是一个局部微分同胚。那么，存在一个相位函数 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，$\Omega_x$，$\Omega_\eta$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，且 Ω 是 $(x_0,\ \xi_0,\ y_0,\ -\eta_0)$ 的一个邻域，使得

$$\mathrm{Gr}'(\kappa)\cap\Omega = \{(x,\partial_x\psi(x,\eta),\partial_\eta\psi(x,\eta),-\eta), x\in\Omega_x,\eta\in\Omega_\eta\}$$

称 ψ 生成 $\mathrm{Gr}'(\kappa)$。设 $a \in S^{comp}_\delta(\Omega_x\times\Omega_\eta)$。那么，以下算子 T 是 $I_\delta(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \mathrm{Gr}'(\kappa))$ 的一个元素：

$$Tu(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(\psi(x,\eta)-y\cdot\eta)}a(x,\eta)u(y)dyd\eta \tag{2.2}$$

并且，如果 $T^*T = \mathrm{Id}$ 在 (y_0,η_0) 附近微局部地成立——即如果 $(y_0,\eta_0)\ \notin \mathrm{WF}_h(T^*T-\mathrm{Id})$——那么 $|a(x,\eta)|^2 = |\det D^2_{x\eta}\psi(x,\eta)| + O(h^{1-2\delta})$ 在 (x_0,ξ_0,y_0,η_0) 附近成立。逆命题也成立：在 (x_0,ξ_0,y_0,η_0) 附近微局部地，并且模去一个属于 $O(h^\infty)$ 的光滑化算子后，$I_\delta(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathrm{Gr}'(\kappa))$ 的元素都可以写成这种形式。

2.2.3. 开放量子双曲映射。本部分旨在于 2.4 中给出开放量子双曲映射的精确定义。考虑一个开放双曲映射 F，如 1.2.1 中的形式体系所述。回顾一下，该形式体系依赖于：

- $\mathbb{R}$ 和 $Y = \bigsqcup_{j=1}^J Y_j \subset \bigsqcup_{j=1}^J \mathbb{R}$ 的开区间 $Y_1,\dots,Y_J$；
- $U = \bigsqcup_{j=1}^J U_j \subset \bigsqcup_{j=1}^J T^*\mathbb{R}^d$ 其中 $U_j \Subset T^*Y_j$ 为开集；‹
- 对于 $j=1,\dots,J$，互不相交的子开集 $D_{ij}\Subset U_j$，$1\le i\le J$，即出发集；对于 $i=1,\dots,J$，互不相交的子开集 $A_{ij}\Subset U_i$，$1\le j\le J$，即到达集；
- 光滑辛同胚 $F_{ij}\colon$ ‹ $D_{ij}\to F_{ij}$Ä‹D_{ij}ä $=\widetilde{A}_{ij}$

‹~ ~ ‹ 接下来，F 是全局光滑映射 $F\colon D\to A$ 其中 A 和 D 分别是完整的到达集和出发集，定义为

$$\widetilde{A} = \bigsqcup_{i=1}^J\bigcup_{j=1}^J \widetilde{A}_{ij} \subset \bigsqcup_{i=1}^J U_i$$

$$\widetilde{D} = \bigsqcup_{j=1}^J\bigcup_{i=1}^J \widetilde{D}_{ij} \subset \bigsqcup_{j=1}^J U_j$$

最后，我们回顾并指出，$\mathcal{T}\subset U$ 是 F的俘获集。

~我们的目标是定义与 F相关联的开放量子映射。我们固定一个包含 $\mathcal{T}$某个邻域的紧集 $W\subset A$。我们的定义将取决于 W。遵循 [NSZ14]（第 3 节 3.4.2），现在我们着重于定义 $I_\delta(Y\times Y;\mathrm{Gr}(F)')$ 的元素。元素 $T\in I_\delta(Y\times Y;\mathrm{Gr}(F)')$ 是一个算子矩阵

$$T = (T_{ij})_{1\le i,j\le J} : \bigoplus_{j=1}^J L^2(Y_j)\to\bigoplus_{i=1}^J L^2(Y_i)$$

每个 T_{ij} 都是 $I_\delta(Y_i\times Y_j,\ \mathrm{Gr}(F_{ij})')$ 的一个元素。现在让我们描述构造 $I_\delta(Y_i\times Y_j,\ \mathrm{Gr}(F_{ij})')$ 元素的方法。

我们固定 $i,\ j\in\{1,\dots,J\}$。

- 取一个足够小的 $\varepsilon>0$ 以及 U_j，$U_j\subset\bigcup_{l=1}^L\Omega_l$和 $\Omega_l\Subset$ ~Ω_l的两个开覆盖，其中 ~Ω_l 呈星形且直径小于 ε。记 $\mathcal{L}$ 满足~ ‹$\Omega_l\subset D_{ij}\subset U_j$ 的指标集合为 l，并要求（当 ε 足够小时这是可能的）

$$F^{-1}(W)\cap U_j \subset \bigcup_{l\in\mathcal{L}}\Omega_l$$

- 引入与覆盖 (Ω_l)、$(\chi_l)_{1\le l\le L}\in C^\infty_c(\Omega_l,\ [0,1])$相关的光滑单位分解 $\mathrm{supp}\,\chi_l\subset\Omega_l$，$\sum_l\chi_l=1$位于 U_j的一个邻域内。—~ ，
- 对于每个 $l\in\mathcal{L}$，我们将 F_l 记为 F_{ij} 在 Ω_l 上的限制。根据引理 2.1，存在$\kappa_l\in\mathcal{K}$，其在 Ω_l 上与 F_l 重合。

- 我们考虑 $T_l = \mathrm{Op}_h(\alpha_i)U_l(1)$，其中 $U_l(t)$ 是与 κ_l 和 $\alpha_i \in S^{comp}_\delta(T^*\mathbb{R})$ 相关的柯西问题 (2.1) 的解。

- 我们令

$$T^{\mathbb{R}} = \sum_{l\in\mathcal{L}} T_l \,\mathrm{Op}_h(\chi_l) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \tag{2.3}$$

$T^{\mathbb{R}}$ 是一个全局定义的傅里叶积分算子。我们记为 $T^{\mathbb{R}} \in I_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathrm{Gr}(F_{ij})')$。~ ‹ 其波前集包含于 $A_{ij}\times D_{ij}$ 中。

- 最后，我们固定截断函数 $(\Psi_i, \Psi_j) \in C^\infty_{\mathrm{c}}(Y_i, [0,1]) \times C^\infty_{\mathrm{c}}(Y_j, [0,1])$，使得 $\Psi_i \equiv 1$ 在 $\pi(U_i)$ 上成立，并且 $\Psi_j \equiv 1$ 在 $\pi(U_j)$ 上成立（这里，$\pi : (x, \xi) \in T^*Y. \mapsto x \in Y.$ 是自然投影），并采用以下定义：

定义 2.3。我们称 $T : \mathcal{D}'(Y_j) \to C^\infty(Y_i)$ 是类 $I_\delta(Y_i \overline{\times} Y_j, \mathrm{Gr}(F_{ij})')$ 中的傅里叶积分算子，如果存在如上所构造的 $T^{\mathbb{R}} \in I_\delta(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathrm{Gr}(F)')$，使得

- $T - \Psi_i T \Psi_j = O(h^\infty)_{\mathcal{D}'(Y_j)\to C^\infty(\overline{Y_i})}$;
- $\Psi_i T \Psi_j = \Psi_i T^{\mathbb{R}} \Psi_j$

对于 $U_j' \subset U_j$ 和 $U_i' = F(U_j') \subset U_i$，我们称 T（或 $T^{\mathbb{R}}$）在 $U_i' \times U_j'$ 中是微局部酉的，如果 $TT^* =$ 在 U_i' 中微局部地等于 Id，并且 $T^*T =$ 在 U_j' 中微局部地等于 Id。

Re标记。这一类的定义并非规范定义，因为它实际上取决于紧致的 s et W t通过单位分解。

现在我们可以给出与 F 相关联的开放量子双曲映射的定义：

定义 2.4。固定 $\delta \in [0, 1/2[$。我们称 $T = T(h)$ 是一个与 F 相关联的开放量子双曲映射，并记作 $T = T(h) \in I_\delta(Y\times Y, \mathrm{Gr}(F)')$，如果：对于每一对 $(i, j) \in \{1,\dots,J\}^2$，存在一个半经典傅里叶积分算子 $T_{ij} = T_{ij}(h) \in I_\delta(Y_j \times Y_i, \mathrm{Gr}(F_{ij})')$，它按照定义 2.3 与 F_{ij} 相关联，并满足

$$T = (T_{ij})_{1\le i,j\le J} : \bigoplus_{i=1}^{J} L^2(Y_i) \to \bigoplus_{i=1}^{J} L^2(Y_i)$$

~ ‹ 特别是 $\mathrm{WF}_h'(T) \subset A \times D$。我们注意到 $I_{0+}(Y\times Y, \mathrm{Gr}(F)') = \bigcap_{\delta>0} I_\delta(Y\times Y, \mathrm{Gr}(F)')$。

我们称 $T \in I_{0+}(Y\times Y, \mathrm{Gr}(F)')$ 在 $\mathcal{T}$ 附近是微局部可逆的，若存在一个邻域 $U' \subset U$，其包含 $\mathcal{T}$，以及一个算子 $T' \in I_{0+}(Y\times Y, \mathrm{Gr}(F^{-1})')$，使得对于每个 $u = (u_1,\dots,u_J) \in L^2(Y)$

$$\forall j \in \{1,\dots,J\}, \mathrm{WF}_h(u_j) \subset U' \cap U_j \implies TT'u = u + O(h^\infty)||u||_{L^2}, T'Tu = u + O(h^\infty)||u||_{L^2}$$

假设 T 在 $\mathcal{T}$ 附近是微局部可逆的，并回忆 $T^*T \in \Psi_{0+}(Y)$。那么，我们可以写成

$$T^*T = \mathrm{Op}_h(a_h)$$

其中 a_h 是类别 $S_{0+}(U)$ 中的光滑符号。我们注意到 $\alpha_h = \sqrt{|a_h|}$，并称其为 $\overline{T}$ 的振幅。由于 T 在 $\mathcal{T}$ 附近是微局部可逆的，对于某个与 h 无关的常数 $c > 0$，$|a_h| > c^2$ 在 $\mathcal{T}$ 附近，这表明 α_h 是光滑的，且大于 c；这一性质在 $\mathcal{T}$ 的某个邻域内成立。

备注。如果 T 的振幅为 α，则在首次近似下，T 将一个以位于 $\mathcal{T}$ 小邻域中的点 ρ_0 为中心、范数为 1 的波包 u_{ρ_0} 变换为一个范数为 $\alpha(\rho_0)$、以点 $F(\rho_0)$ 为中心的波包。

2.2.4. 埃戈罗夫定理的精确版本。我们将需要一个更具定量性的埃戈罗夫定理版本，类似于 [DJN21]（引理 A.7）中的版本。该结果并未说明 $U(1)^{-1}\mathrm{Op}_h(a)U(1)$ 是一个伪微分算子（要得出这一点，需要使用比尔定理），但它给出了关于余项的精确估计，该估计取决于 a 的半范数。我们专门讨论维数为 2 的情形。该结论已在 [Vac22]（命题 3.3）中得到证明。

命题 2.4。考虑 $\kappa \in \mathcal{K}$ 并注意 $U(t)$ 是方程 (2.1) 的解。存在一个微分算子族 $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$，其阶数为 j，使得对于所有 $a \in S_\delta$ 及所有 $N \in \mathbb{N}$,

$$U(1)^{-1}\,\mathrm{Op}_h(a)U(1) = \mathrm{Op}_h\left(a\circ\kappa + \sum_{j=1}^{N-1} h^j (D_{j+1}a)\circ\kappa\right) + O_\kappa\left(h^N ||a||_{C^{2N+15}}\right) \tag{2.4}$$

通过使用局部坐标图和复合结果（例如参见 [DZ19, 命题 E.10），可以构造局部傅里叶积分算子；结合上一个命题可得

命题2.5。令 $V \subset \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$ 为一个开集，κ 为一个辛映射。固定$\rho_V \in V$。存在 $W \subset V' \subset V$、ρ_V的邻域以及一对 $(B,\ B')$ 傅里叶积分算子，属于 $I_0(\kappa(V') \times V',\ \mathrm{Gr}'(\kappa)) \times I_0(V' \times \kappa(V'),\ \mathrm{Gr}'(\kappa^{-1}))$，其满足：存在一个微分算子 $(L_j)_{j\geq 1}$，其阶数为 $2j$ 且支集包含于 V'，使得对于所有带有 $\operatorname{supp} a \subset W$ 的 $a \in S_\delta(\mathbb{R}^2)$ 以及所有 $N \in \mathbb{N}$,

$$B \operatorname{Op}_h(a) B' = \operatorname{Op}_h(a \circ \kappa^{-1}) + \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Op}_h\left(L_j a\right) \circ \kappa^{-1}) + O\left(h^N ||a||_{C^{2N+M}}\right)$$

对于某个普适整数 M。

证明。只需处理 $\rho_V = 0 = \kappa(\rho_V)$ 的情形。只需考虑 0 的充分小邻域，使得 κ 的限制可以看作 $\mathcal{K}$ 中某个元素的限制。然后使用命题 2.4。□

2.3. **元辛算子**。在作用于 $L^2(\mathbb{R})$的傅里叶积分算子类中，元辛算子是将 $T^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ 的线性辛变换量子化的算子。与一般傅里叶积分算子相比，元辛算子的主要优势在于 Egorov 性质是精确的（见下文定义 2.6）。这里回顾一些关于元辛算子的标准事实。有关更精确的介绍及其他参考文献，请参阅 [Zwo12]（第 11.3 节）和 [CR12]（第 3 章）。

定义 2.5。对于 $\rho = (x_0,\ \xi_0) \in \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$，相空间平移算子 $T_h(\rho)$ 定义为：

$$T_h(\rho) u(x) = e^{-i\frac{x_0\xi_0}{2h}} e^{i\frac{x\xi_0}{h}} u(x - x_0)$$

它在 $L^2(\mathbb{R})$ 和 $T_h(\rho)^* = T_h(-\rho)$ 上是酉的。此外，对于任意经典可观测量 $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$，$T_h(\rho)^* \operatorname{Op}_h(a) T_h(\rho) = \operatorname{Op}_h(a(\cdot - \rho))$。

命题 2.6。**(与定义)** 设 κ：$T^*\mathbb{R} \to T^*\mathbb{R}$ 是一个辛线性 映射。存在一个酉算子 $\mathcal{M}_h(\kappa) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$，使得以下两个等价条件之一成立：

(i) 对每个 $\rho \in T^*\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_h(\kappa) T_h(\rho) \mathcal{M}_h(\kappa)^* = T_h(\kappa(\rho))$；(ii) 对所有 $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\mathcal{M}_h(\kappa) \operatorname{Op}_h(a) \mathcal{M}_h(\kappa)^* = \operatorname{Op}_h(a \circ \kappa^{-1})$。算子 $\mathcal{M}_h(\kappa)$ 在相差一个 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ 中元素的乘法意义下唯一。

大多数情况下，我们不会特别说明 $T_h(\rho)$ 和 $\mathcal{M}_h(\kappa)$ 依赖于 h，而只简单地写作 $T(\rho)$ 和 $\mathcal{M}(\kappa)$。需要时，我们会写出指标 h（或 $h = 1$）。事实上，我们可以通过以下关系联系 $\mathcal{M}_h(\kappa)$ 和 $\mathcal{M}_1(\kappa)$：

$$\mathcal{M}_h(\kappa) \Lambda_h = \Lambda_h \mathcal{M}_1(\kappa) \tag{2.5}$$

其中，Λ_h 是酉缩放算子：

$$\Lambda_h u(x) = h^{-1/4} u(h^{-1/2} x) \tag{2.6}$$

获得亚纯辛算子的一种方法，是求解与二次哈密顿量相关的薛定谔方程。

命题 2.7。令 $S_2(\mathbb{R})$ 为 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 的对称矩阵空间。令 $t \in [0,1] \mapsto S(t) \in S_2(\mathbb{R})$ 为 C^1。注意到

- 二次时变哈密顿量 $H(t,\ \rho) = \frac{1}{2}(\rho,\ S(t)\rho)$；
- $t \in [0,1] \mapsto \kappa(t)$ 是哈密顿量 $H(t)$ 的经典流，它满足方程
  $$\dot{\kappa}(t) = JS(t)\kappa(t)$$
  其中，对于所有 $t \in [0,1]$，$\kappa(t)$ 是一个辛线性映射
- $U(t)$ 薛定谔方程的传播子
  $$\frac{h}{i}\frac{d}{dt} u(t) + \operatorname{Op}_h(H(t)) u = 0$$
  $U(t)$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都是作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 的酉算子。

于是，对于所有 $t \in [0,1]$， $U(t)$ 是与线性辛映射$\kappa(t)$ 相关联的元辛算子。

注意，对于每个 $\kappa_1 \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$，总存在一条（不唯一的） C^1 曲线 $\kappa:\ t \in [0,1] \to \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$，使得 $\kappa(0) = I_2$ 且 $\kappa(1) = \kappa_1$。（例如参见 [CR12], 第 3 章中的命题 31。）因此，我们可以利用前面的命题构造 $\mathcal{M}(\kappa_1)$。

示例。 酉的 h-傅里叶变换 $\mathcal{F}_h$，其中

$$\mathcal{F}_h u(\xi) = \frac{1}{(2\pi h)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} u(y) e^{-\frac{iy\xi}{h}}$$

是一个与 J相关联的亚纯辛算子。

示例。 设

$$\kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

带有 $a \neq 0$。那么，下面的算子是一个与 κ 相关联的亚纯辛算子:

$$\mathcal{M}(\kappa) u(x) = \left(\frac{1}{2\pi h |a|}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2h}(ca^{-1}x^2 + 2a^{-1}x\xi - a^{-1}b\xi^2)} \mathcal{F}_h u(\xi) d\xi \tag{2.7}$$

2.4. **相干态**。

2.4.1. 定义与记号。 本小节介绍研究相干态时将用到的记号和定义。请读者参阅 [CR12]。以零点为中心的半经典相干态（或高斯态）记为

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi h)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2h}} \tag{2.8}$$

以 ρ 为中心的相干态则简单记为

$$\varphi_\rho := T(\rho)\varphi_0 \tag{2.9}$$

我们还记

$$\varphi_0 = \Lambda_h \Psi_0$$

其中， Λ_h 在(2.6)中定义， Ψ_0 是重整化相干态

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.10}$$

回顾一下， φ_0 （分别为 Ψ_0）是谐振子 $-h^2\partial_x^2 + x^2$ （分别为$-\partial_x^2 + x^2$）的基态。该谐振子的其他特征函数称为激发态，可通过对 φ_0 （分别为 Ψ_0）作用产生算符$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2h}}(-h\partial_x + x)$（分别为 $\Lambda_h^* \mathbf{a} \Lambda_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial_x + x)$）得到。对于 $n \in \mathbb{N}$，例如可以注意到

$$\varphi_{0,n} = \mathbf{a}^n \varphi_0; \Psi_n = \Lambda_h^* \mathbf{a}^n \Lambda_h \Psi_0$$

我们回顾一下， $\Psi_n = h_n(x)\Psi_0$ 其中 h_n 是次数为 n的厄米多项式。特别地，若$P \in \mathbb{C}[X]$，则可以将 $P(x)\Psi_0(x)$分解为次数不超过 $\deg(P)$的激发态的线性组合。

我们还可以定义压缩相干态:

定义 2.6。设 $\gamma \in \mathbb{C}$ ，且 $\operatorname{Im}\gamma > 0$。由 γ 变形并以零为中心的压缩相干态为

$$\varphi_0^{(\gamma)}(x) = (a_\gamma \pi h)^{-1/4} e^{i\gamma \frac{x^2}{2h}}$$

其中 $a_\gamma = \operatorname{Im}(\gamma)^{-1}$ 使该态的范数等于一。我们还定义以 $\rho \in T^*\mathbb{R}$ 为中心的压缩相干态为

$$\varphi_\rho^{(\gamma)} = T(\rho)\varphi_0^{(\gamma)}$$

以及以 0 为中心的压缩重归一化相干态

$$\Psi_0^{(\gamma)}(x) = (a_\gamma \pi)^{-1/4} e^{i\gamma \frac{x^2}{2}}$$

我们通过回顾一个有用的公式——恒等算子的分解——来结束本节，这也是我们分析工作的出发点（参见第 1.2 节中的 [CR12],命题 6）。I

引理 2.2。 设 $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是一个迹类算子。那么，

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{2\pi h} \int_{T^*\mathbb{R}} < A\varphi_\rho, \varphi_\rho > d\rho$$

其中 $d\rho$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 的勒贝格测度。

2.4.2. 亚纯辛算子对相干态的作用。 这里我们回顾亚纯辛算子如何作用于相干态。完整证明以及任意维数下的一般版本，请参见 [CR12] （第 3.2 节）：

命题 2.8。 设 $\kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一个辛线性映射。设 $\mathcal{M}(\kappa)$ 是与 κ 相关联的元辛算子，按照命题 2.7，沿路径 κ_t 从 I_2 到 κ 构造。于是有：

$$\mathcal{M}(\kappa)\varphi_0(x) = (\pi h)^{-1/4}(a+ib)^{-1/2} e^{i\gamma_\kappa \frac{x^2}{2h}}$$

其中 $\gamma_\kappa = (c+id)(a+ib)^{-1}$。

备注。 平方根 $(a+ib)^{1/2}$ 由路径 κ_t $((a_t+ib_t)^{1/2}$ 确定（必须连续）。

由于 $\mathrm{Im}\,\gamma_\kappa = |a+ib|^{-2}$，该命题表明，对于某个 $\lambda \in \mathbb{U}$,

$$\mathcal{M}(\kappa)\varphi_0 = \lambda \varphi_0^{(\gamma)}$$

由于亚纯辛算子是模 $\mathbb{U}$ 定义的，在本文其余部分中，我们有时会省略因子 λ and，并且滥用记号写作 $\mathcal{M}(\kappa)\varphi_0 = \varphi_0^{(\gamma)}$。之后将不再对此作特别说明。无论如何，我们关注的是此类态的范数。

我们还给出以下关于亚纯辛算子作用于激发相干态的公式（见 [Hag98], 第2节）：

命题 2.9。 设 $\kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ã 是一个辛线性映射。设 $\mathcal{M}(\kappa)$ 是与 κ 相关联的元辛算子，该算子通过使用命题 2.7 构造，沿着从 I_2 到 κ 的路径 κ_t。然后，

$$\mathcal{M}(\kappa)\varphi_{0,n} = (|a+ib|^2\pi h)^{-1/4} \left(\frac{(a-ib)}{(a+ib)}\right)^{n/2} h_n\left(\frac{x}{h^{1/2}|a+ib|}\right) e^{i\gamma_\kappa \frac{x^2}{2h}}$$

其中 $\gamma_\kappa = (c+id)(a+ib)^{-1}$。

接下来，我们需要根据压缩参数估计压缩相干态的 $H_h(\langle\rho\rangle^N)$-范数。等价地，我们需要根据 κ 控制形如 $\mathcal{M}(\kappa)\varphi_\rho$ 的态的这个范数。为此，我们首先在 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 上固定一个范数 $||\cdot||$。为方便起见，假设对于所有线性辛映射，我们都有

$$||\kappa|| \geq 1 \tag{2.11}$$

例如，设 $||\kappa|| = \sqrt{2}\max(|\kappa|_{11}, |\kappa|_{12}, |\kappa|_{21}, |\kappa|_{22})$。不难检查，此范数满足 2.11，因为 $\det(\kappa) = 1$。式 (2.11) 的主要意义在于，$||\kappa||^a \leq ||\kappa||^b$ if $a \leq b$。

我们有：

引理 2.3. 存在一族通用常数 $(K_{N,k})_{(N,k)\in\mathbb{N}^2}$，使得以下结论成立：设 $N \in \mathbb{N}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 κ 为辛线性映射。则，对于所有 $0 < h \leq 1$，存在

$$||\mathcal{M}(\kappa)(x^k\varphi_0)||_{H_h(\langle\rho\rangle^N)} \leq K_{N+k} \sum_{l=0}^{N} h^{(l+k)/2} ||\kappa||^l$$

证明。 记 $\kappa = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ã。对于一个态 $u \in H_h(\langle\rho\rangle^N)$，我们有

$$||u||^2_{H_h(\langle\rho\rangle^N)} \sim \sum_{\alpha+\beta\leq N} ||\operatorname{Op}_h(x^\alpha\xi^\beta)u||^2_{L^2}$$

Let α, $\beta \in N$使得 $\alpha+\beta \leq N$。我们希望估计 $||\operatorname{Op}_h(x^\alpha\xi^\beta)\mathcal{M}(\kappa)(x^k\varphi_0)||^2_{L^2}$。我们有 e

$$\operatorname{Op}_h(x^\alpha\xi^\beta)\mathcal{M}(\kappa)(x^k\varphi_0) = \mathcal{M}(\kappa)\operatorname{Op}_h\left((ax+b\xi)^\alpha(cx+d\xi)^\beta\right)(x^k\varphi_0)$$

由于 $\mathcal{M}(\kappa)$ 在 L^2 上是酉的，因此只需估计 L^2 范数

$$\mathrm{Op}_h\left((ax+b\xi)^\alpha(cx+d\xi)^\beta\right)(x^k\varphi_0)=\mathrm{Op}_h\left(\sum_{l=(l_1,l_2)\in\mathbb{N}^2,l_1+l_2=\alpha+\beta}B_l(\kappa)x^{l_1}\xi^{l_2}\right)(x^k\varphi_0)$$

其中，B_l 是关于 κ 的某个 l_1+l_2 多线性型，其系数取决于 α 和 β。特别地，$|B_l(\kappa)|\leq C_l||\kappa||^{l_1+l_2}$，其中 C_l 是某个普适常数。最后，我们注意到 $||\mathrm{Op}_h(x^{l_1}\xi^{l_2})(x^k\varphi_0)||_{L^2}\coloneqq h^{(l_1+l_2+k)/2}C_{(l_1,l_2,k)}$，其中 $C_{(l_1,l_2,k)}$ 仅依赖于 $(l_1,\ l_2,\ k)$，由此得到

$$||\mathrm{Op}_h\left((ax+b\xi)^\alpha(cx+d\xi)^\beta\right)(x^k\varphi_0)||\leq C_{(\alpha,\beta,k)}\sum_{p=0}^{\alpha+\beta}||\kappa||^p h^{(p+k)/2}$$

我们得到所需的不等式，其中 $K_{N,\ k}$ 取决于 $C_{\alpha,\ \beta,\ k}$，且 $\alpha+\beta\leq N$。 □

作为推论，在 $h=1$ 处取特例，我们得到如下结论：

推论 2.1. 存在一个常数族 $K_{N,\ d},\ d\in\mathbb{N},\ N\in\mathbb{N}$，使得：对所有 $P\in\mathbb{C}[X]$、所有辛线性映射 κ 以及所有 $N\in\mathbb{N}$,

$$||\mathcal{M}_1(\kappa)(P\Psi_0)||_{H_1(\langle\rho\rangle^N)}\leq K_{N,\deg P}N_\infty(P)||\kappa||^N$$

其中，$N_\infty(P)$ 是 P 的系数上确界范数。

2.4.3. 伪微分算子对相干态的作用。在本小节中，当伪微分算子的符号属于类 S_δ 时，我们将给出半经典伪微分算子作用于相干态的精确结果。

引理 2.4。设 $a\in S_\delta(T^*\mathbb{R})$ 且 $0\leq\delta<1/2$。假设 $\rho_0=(x_0,\ \xi_0)\in T^*\mathbb{R}$。那么，对于任意 $N\in\mathbb{N}$，存在 $\rho_N(a,\ \rho_0)\in L^2$ 使得

$$\mathrm{Op}_h(a)\varphi_{\rho_0}=\sum_{k=0}^{N-1}h^{k/2}\psi_k(a,\rho_0)+h^{N/2}\rho_N(a,\rho_0)$$

其中

$$\psi_k(a,\rho_0)=T(\rho_0)\Lambda_h\mathrm{Op}_1\left(\sum_{\alpha+\beta=k}\frac{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(\rho_0)}{\alpha!\beta!}x^\alpha\xi^\beta\right)\Psi_0$$

and

$$||\rho_N(a,\rho_0)||_{L^2}\leq C_N h^{-\delta N}\sup_{|\gamma|\leq N+M}||h^{\delta|\gamma|}\partial^\gamma a||_\infty$$

备注。

- M 是一个普适常数。
- 展开式的首项是 $a(\rho_0)\varphi_{\rho_0}$。
- 由于 $a\in S_\delta$，它实际上是关于 $h^{1/2-\delta}$ 的幂展开式。
- 我们也可以将 $\mathrm{Op}_1(x^\alpha\xi^\beta)\Psi_0$ 写成 $P(x)\Psi_0$ 的形式，其中 P 是一个次数为$\alpha+\beta$的多项式；等价地，它是前 $|\alpha|+|\beta|$ 个激发态的线性组合。

证明。令 $\varphi_{\rho_0}=T(\rho_0)\Lambda_h\Psi_0$。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}_h(a)\varphi_{\rho_0}&=\mathrm{Op}_h(a)T(\rho_0)\Lambda_h\Psi_0\\&=T(\rho_0)\Lambda_h\mathrm{Op}_1(b_h)\Psi_0\end{aligned}$$

其中 $b_h(\rho)=a(\rho_0+h^{1/2}\rho)$。将 a 在 ρ_0 附近作泰勒展开：

$$b_h(x,\xi)=\sum_{\alpha+\beta\leq N-1}h^{(\alpha+\beta)/2}\frac{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(\rho_0)}{\alpha!\beta!}x^\alpha\xi^\beta+h^{N/2}R_N(x,\xi)$$

其中

$$R_N(\rho)=\frac{1}{(N-1)!}\int_0^1\frac{d^N}{dt^N}a(\rho_0+th^{1/2}\rho)(1-t)^{N-1}dt$$

对该展开式应用 Op_1，即可得到所需的渐近式，其中

$$\rho_N(a,\rho_0)=T(\rho_0)\Lambda_h\mathrm{Op}_1(R_N)\Psi_0$$

剩下要估计 L^2 ρ_N 的范数。由于 $T(\rho_0)$ 是酉的，只需计算 e

$$\Lambda_h\mathrm{Op}_1(R_N)\Psi_0=\mathrm{Op}_h(\tilde{R}_N)\varphi_0$$

其中 $\tilde{R}_N(\rho) = R_N(h^{-1/2}\rho) = \frac{1}{(N-1)!}\int_0^1 (1-t)^{N-1} d^N a(\rho_0 + t\rho)(\rho^{\otimes N}) dt$ [3]。利用 $a \in S_\delta$，不难看出，对积分求导后，对于任意 $\gamma \in \mathbb{N}^2$ 和 $\rho \in T^*\mathbb{R}$，

$$|\partial^\gamma \tilde{R}_N(\rho)| \leq C_N \sup_{\gamma_1 \leq N+|\gamma|} ||\partial^{\gamma_1} a||_\infty \langle\rho\rangle^N \leq h^{-\delta(N+|\gamma|)} ||h^{\delta|\gamma|}\partial^\gamma a||_\infty \langle\rho\rangle^N$$

This 表明，在 [Zwo12]（定义4.4.3）的意义下，$\tilde{R}_N \in h^{-\delta N} S_\delta(\langle\rho\rangle^N)$。然后，我们发现 th at

$$h^{\delta N} \operatorname{Op}_h(\tilde{R}_N) : H_h(\langle\rho\rangle^N) \to L^2(\mathbb{R})$$

是一族一致有界的算子，其范数取决于 $\tilde{R}_N$in $S_\delta(\langle\rho\rangle^N)$ 的有限个半范数。最后注意到，对于任意 $N \in \mathbb{N}$，φ_0 都属于 $H_h(\langle\rho\rangle^N)$，且其范数关于 h 一致有界。因此

$$||\rho_N||_{L^2} \leq ||\operatorname{Op}_h(\tilde{R}_N)||_{H_h(\langle\rho\rangle^N)\to L^2(\mathbb{R})} \times ||\varphi_0||_{H_h(\langle\rho\rangle^N)} \leq h^{-\delta N} C_N \sup_{|\gamma|\leq N+M} ||h^{\delta|\gamma|}\partial^\gamma b||_\infty$$

□

作为一个简单的推论，我们得到：

推论2.2. 假设 a 在 ρ_0 处以 k 阶消失。那么，

$$\operatorname{Op}_h(a)\varphi_{\rho_0} = O_{L^2}\left(h^{k(1/2-\delta)}\right)$$

特别地，若 a 在 ρ_0 的一个邻域内消失，我们便得到 $\operatorname{Op}_h(a)\varphi_{\rho_0} = O(h^\infty)$。自 $\operatorname{WF}_h(\varphi_{\rho_0}) = \{\rho_0\}$ 以来，这是众所周知的结果。

2.4.4. 傅里叶积分算子对相干态的作用。在 [CR12]（第 4 章）中，作者研究了含时哈密顿量对应的薛定谔方程的传播子对相干态的量子演化。关于相干态演化的这一非常一般的版本，请参阅他们的工作，尤其是本书中的定理21。在这里，我们将简单研究公式（2.2）所给出的特定形式的傅里叶积分算子对形如 $T(\rho_0)\mathcal{M}(\kappa)\varphi_0$ 的态的作用。换言之，我们希望研究傅里叶积分算子对这些压缩态和平移态的作用。更一般地，我们还将考虑形如 $T(\rho_0)\mathcal{M}(\kappa)\Lambda_h(P(x)\Psi_0(x))$ 的压缩激发态。我们将给出这些演化态的渐近展开，并控制其余项。该余项对 κ 的依赖性对于递归使用这一展开式至关重要。

下面描述我们希望使用的框架：设 Ω_x，Ω_η 是 $\mathbb{R}$ 的开区间，$\psi \in C^\infty(\Omega_x \times \Omega_\eta)$ 是一个相位函数，它生成某个辛映射 F 在某个开集 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^4$ 中的扭曲图，即

$$\operatorname{Gr}'(F) \cap \Omega_0 = \left\{(x, \partial_x\psi(x,\eta), \partial_\eta\psi(x,\eta), -\eta), x \in \Omega_x, \eta \in \Omega_\eta\right\}$$

我们假设 $a \in S^{comp}_{0^+}(\Omega_x \times \Omega_\eta)$，并考虑傅里叶积分算子：

$$Su(x) = \frac{1}{(2\pi h)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(\psi(x,\eta) - y\cdot\eta)} a(x,\eta) u(y) dy d\eta$$

我们不一定假设 S 是微局部酉的，但如果确实如此，则对于任意 $\varepsilon > 0$，a 将满足 $|a(x,\eta)|^2 = |\partial^2_{x\eta}\psi(x,\eta)| + O(h^{1-\varepsilon})$。更一般地，$S$ 作为傅里叶积分算子的振幅 α，模去 $O(h^\infty)S_{0^+}$ 后由下式给出

$$\alpha_S(y,\eta) = \frac{a(x,\eta)}{|\partial^2_{x\eta}\psi(x,\eta)|^{1/2}}\ ,\ F(y,\eta) = (x,\xi)$$

命题 2.10。假设 S 满足上述假设。设 $\kappa \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 是一个辛线性映射，且 $\rho_0 \in T^*\mathbb{R}$。记 $\rho_1 = F(\rho_0)$。设 $P \in \mathbb{C}[X]$。那么，存在一个多项式族 $Q_k(P)_{k\in\mathbb{N}}$，使得

- $Q_0(P) = \alpha_S(\rho_0)\ P$（相差一个 $\mathbb{U}$ 中元素的乘法）；
- $Q_k(P)$ 是一个次数为 $\deg\ P + 3k$ 的多项式，而映射 $P \mapsto Q_k(P)$ 是线性的，其系数取决于 κ 以及 ψ 和 a 在 (x_1,ξ_0) 处直到 $3k$ 阶的导数，并且我们有此外，如果 $(x_1,\xi_0) \notin \operatorname{supp} a$，那么 $Q_k = 0_{\mathcal{N}_\infty(Q_k(P)) \leq C_{3k}(\psi)||a||_{C^k}||\kappa||^{3k} N_\infty(P)}$

[3]Here, if $f \in C^N(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, we note $d^N f(\rho)(h^{\otimes N}) = \frac{d^N}{dt^N}\Big|_{t=0} f(\rho + th)$.

- 对于每个 $N \in \mathbb{N}$,

$$S\Big(T(\rho_0)\mathcal{M}(\kappa)\Lambda_h[P\Psi_0]\Big) = T(\rho_1)\mathcal{M}(d_{\rho_0}F\circ\kappa)\Lambda_h\left[\sum_{k=0}^{N-1} h^{k/2}Q_k(P)\Psi_0\right] + R_N \tag{2.12}$$

with

$$||R_N||_{L^2} \le h^{N/2}C_{3N+M}(\psi)||a||_{C^{N+M}}||\kappa||^{3N}K_{N,\deg P}N_\infty(P)$$

这里,

- $C_k(\psi)$取决于 ψ的 C^k 范数
- M 是一个普适常数;
- $N_\infty(P)$是 P 的系数的上确界范数;
- $(K_{N,\ d})_{(N,\ d)\in\mathbb{N}^2}$ 是一个通用常数族。

对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $C_{\varepsilon,\ k}$ 使得 $||a||_{C^k} \le C_{\varepsilon,\ k}h^{-\varepsilon}$。

备注。 该命题表明，傅里叶积分算子将以 ρ_0 为中心的波包变换为以 $F(\rho_0)$ 为中心的波包。然而，根据 ρ_0 处 F 的线性化，该变换会压缩波包：这就是 $\mathcal{M}(d_{\rho_0}F)$ 的作用。如果我们希望迭代该公式并将其应用于压缩相干态$\mathcal{M}(\kappa_h)\varphi_0$，且所用的辛线性映射 κ_h 可能依赖于 h，那么对误差的控制就十分重要。一旦

$$||\kappa_h||^3 \ll h^{-1/2}$$

，余项仍小于展开式中的各项。特别地，假设 $\kappa_h = \kappa_{n(h)}\cdots\kappa_0$，其中 $||\kappa_i|| \le e^\lambda$ 且 $n(h) \sim \nu \log(1/h)$。那么，只要

$$\nu \le \frac{1-\varepsilon}{6\lambda}$$

P屋顶。 以下计算均是在模去乘以 $\mathbb{U}$的一个元素后进行的 .

记下 $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$ 和 $\rho_1 = (x_1, \xi_1)$。回忆一下，根据 ψ 的定义,

$$\xi_1 = \partial_x\psi(x_1,\xi_0) \quad ; \quad x_0 = \partial_\eta\psi(x_1,\xi_0) \tag{2.13}$$

对于 $u \in L^2(\mathbb{R})$，我们有,

$$\begin{aligned}
&\left(\Lambda_h^* T(\rho_1)^* S T(\rho_0)\Lambda_h u\right)(x) = h^{1/4}e^{-\frac{ix\xi_1}{h^{1/2}}}\left(ST(\rho_0)\Lambda_h u\right)(h^{1/2}x + x_1)\\
&= e^{-\frac{ix\xi_1}{h^{1/2}}}\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(\psi(h^{1/2}x+x_1,\eta)-y\cdot\eta)}a(h^{1/2}x+x_1,\eta)e^{\frac{iy\xi_0}{h}}u(h^{-1/2}y - x_0)dyd\eta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{\psi}_h(x,\eta,y)}a(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0)u(y)dyd\eta
\end{aligned}$$

经过变量代换后，其中

$$\tilde{\psi}_h(x,\eta,y) = \frac{1}{h}\psi(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0) - y\eta - h^{-1/2}\left(x\xi_1 + x_0\eta\right) \tag{2.14}$$

将 $\psi(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0)$ 在 $N+1 \in \mathbb{N}$ 阶处作泰勒展开:

$$\begin{aligned}
\psi(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0) &= \psi(x_1,\xi_0) + h^{1/2}\left(x\partial_x\psi(x_1,\xi_0) + \eta\partial_\eta\psi(x_1,\xi_0)\right)\\
&+ \frac{h}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta)) + \sum_{k=3}^{N+1} h^{k/2}\psi_k(x,\eta) + h^{(N+2)/2}r_{N+2}^\psi(x,\eta;h)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中， ψ_k 关于 (x,η) 是 k-多重线性的，其系数取决于 ψ 在 (x_1,ξ_0) 处的 k 阶导数，并且对于 $\alpha \in \mathbb{N}^2$,

$$h^{(N+2)/2}r_{N+2}^\psi(x,\eta;h) = \frac{1}{(N+1)!}\int_0^1 (1-t)^{N+1}\frac{d^{N+2}}{dt^{N+2}}\big(\psi(x_1+th^{1/2}x, \xi_0+th^{1/2}\eta)\big)dt$$

特别地，我们有以下估计

$$|\partial^\alpha r_{N+2}^\psi(x,\eta;h)| \le C_N \sup_{N+2\le|\beta|\le N+2+|\alpha|} h^{(|\beta|-N-2)/2}||\partial^\beta\psi||_\infty\langle(x,\eta)\rangle^{N+2} \tag{2.16}$$

回顾（2.13），我们可以写成：

$$(\Lambda_h^* T(\rho_1)^* S T(\rho_0)\Lambda_h u)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{T^*\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)} e^{ih^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)} a(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0)u(y)dyd\eta \tag{2.17}$$

然后，我们将 $e^{ih^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)}$ 按 N 阶作泰勒展开：

$$e^{ih^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{i^k h^{k/2}}{k!} r_3^\psi(x,\eta;h)^k + \underbrace{\frac{i^N h^{N/2}}{(N-1)!}(r_3^\psi(x,\eta;h))^N \int_0^1 e^{ih^{1/2}sr_3^\psi(x,\eta;h)}(1-s)^{N-1}ds}_{\tilde{r}_N} \tag{2.18}$$

利用 (2.15)，我们写出 $r_3^\psi = \sum_{j=0}^{N-k-1} h^{j/2}\psi_{3+j} + h^{(N-k)/2} r_{3+N-k}^\psi$，并可展开

$$\left(r_3^\psi\right)^k = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k<N-k} h^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)/2}\psi_{3+\alpha_1}\dots\psi_{3+\alpha_k} + h^{(N-k)/2}\ Remainder$$

其中，余项是由通用系数组成的线性组合，包含以下形式的项

$$r_{3+\alpha_1}^\psi \dots r_{3+\alpha_j}^\psi \psi_{3+\alpha_{j+1}}\dots\psi_{3+\alpha_k} \quad ; \quad 0\le j\le k\,,\ \alpha_1+\cdots+\alpha_k = N-k \tag{2.19}$$

将关于 $k\le N-1$ 的 $h^{k/2}$ 阶所有项合并，并将 $h^{N/2}$ 阶的所有项合并为一个余项，我们得到

$$e^{ih^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)} = \sum_{k=0}^{N-1} h^{k/2}\tilde{P}_k(x,\eta;\psi) + h^{N/2}r_{N,1} + \tilde{r}_N$$

其中

- $\tilde{P}_k(\cdot;\psi)$ 是关于 (x,η) 的 $3k$ 次多项式，其系数形式为 $q\left((\partial^\alpha\psi(x_1,\xi_0))_{|\alpha|\le 3+k}\right)$，其中 q 是次数为 k 的通用多项式；
- $r_{N,1}$ 是形如 (2.19) 的项的线性组合，其中 $0\le k\le N-1$、$0\le j\le k$ 和 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$，且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = N-k$；
- $\tilde{r}_N$ 定义于 (2.18) 中。

类似地，我们可以对 $a(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0)$ 进行泰勒展开，得到

$$e^{ih^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)} a(h^{1/2}x+x_1, h^{1/2}\eta+\xi_0) = \sum_{k=0}^{N-1} h^{k/2}P_k(x,\eta;\psi,a) \tag{2.20}$$
$$+\underbrace{h^{N/2}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{P}_k(x,\eta;\psi)r_{N-k}^a(x,\eta;h) + h^{N/2}r_{N,1}\times a(h^{1/2}x+x_1,h^{1/2}\eta+\xi_0)}_{\text{first remainder term}} + \underbrace{\tilde{r}_N\times a(h^{1/2}x+x_1,h^{1/2}\eta+\xi_0)}_{\text{second remainder term}}$$

其中 $P_k(\cdot;\psi,a)$ 是关于 (x,η) 的 $3k$ 次多项式，表示为

$$P_k(x,\eta;\psi,a) = \sum_{k_1+k_2=k}\tilde{P}_{k_1}(x,\eta;\psi)\times\left(\frac{1}{k_2!}d^{k_2}a(x_1,\xi_0)((x,\eta)^{\otimes k})\right)$$

对于 $p\in\mathbb{N}$,

$$r_p^a(x,\eta;h) = \frac{h^{-p/2}}{p!}\int_0^1 (1-t)^{p-1}\frac{d^p}{dt^p}a(x_1+th^{1/2}x,\xi_0+th^{1/2}\eta)dt$$

将 (2.20) 连同 $u = \mathcal{M}_1(\kappa)(P\Psi_0)$ 代入 (2.17)，我们得到关于 $h^{1/2}$ 的幂展开式，其中 $\Lambda_h^* T(\rho_1)^* S T(\rho_0)\Lambda_h u$。

首项的确定。展开式的首项为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}a(x_1,\xi_0)u(y)dyd\eta$$

对该关系求导

$$F\left(\partial_\eta\psi(x,\eta),\eta\right)=(x,\partial_x\psi(x,\eta))$$

不难看出

$$d_{\rho_0}F=\frac{1}{\partial^2_{x\eta}\psi(x_1,\xi_0)}\begin{pmatrix}1 & -\partial^2_{\eta\eta}\psi(x_1,\xi_0)\\ \partial^2_{xx}\psi(x_1,\xi_0) & \left(\partial^2_{x\eta}\psi(x_1,\xi_0)\right)^2-\partial^2_{\eta\eta}\psi(x_1,\xi_0)\partial^2_{xx}\psi(x_1,\xi_0)\end{pmatrix}$$

A因此，与 (2.7) 比较可知

$$v\mapsto\frac{1}{2\pi}|\partial_{x\eta}\psi(x_1,\xi_0)|^{1/2}\int_{T^*\mathbb{R}} e^{i(\frac{1}{2}D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta)-y\eta)}v(y)dyd\eta$$

是与 $d_{\rho_0}F$ 相关联的元辛算子，记作 $\mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F)$，因此我们看到

$$ST(\rho_0)\mathcal{M}(\kappa)\Lambda_h[P\Psi_0]=T(\rho_1)\mathcal{M}(d_{\rho_0}F\circ\kappa)\Lambda_h\left[\frac{a(x_1,\xi_0)}{|\partial_{x\eta}\psi(x_1,\xi_0)|^{1/2}}P\Psi_0\right]+(\text{smaller terms})$$

这给出了 $Q_0(P)$ 所需的形式。

高阶项的识别。 对于 (2.17) 展开式中阶为 k 的项，根据 (2.20)，我们需要理解

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}P_k(x,\eta;\psi,a)u(y)dyd\eta$$

因此，我们关注以下形式的项

$$S_{l,m}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}x^l\eta^m u(y)dyd\eta$$

其中 $l+m\le 3k$。项 x^l 可以移到积分号前面。对于 η 项，通过反复分部积分（或等价地，利用傅里叶变换的通常性质），我们得到

$$S_{l,m}(u)=x^l\mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F)((i\partial_y)^m u))$$

现在，结合亚辛算子的标准交换性质，我们写出

$$\begin{aligned}S_{l,m}(\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0])&=\mathrm{Op}_1(x^l)\mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F)\mathrm{Op}_1((-\xi)^m)\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0])\\&=\mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F\circ\kappa)\mathrm{Op}_1\left((x\circ(dF(\rho_0)\circ\kappa)^l\right)\mathrm{Op}_1\left((-\xi\circ\kappa)^m\right)[P\Psi_0])\end{aligned}$$

最后，$\mathrm{Op}_1\left((x\circ(d_{\rho_0}F\circ\kappa)^l\right)\mathrm{Op}_1((-\xi\circ\kappa)^m)$ 将 $P\Psi_0$ 变换为另一种形式的态 $Q\Psi_0$，其中 Q 的次数为 $\deg P+l+m$； Q 的系数线性地依赖于 P的系数，而线性组合中的系数依赖于 κ和 $d_{\rho_0}F$。展开幂 $\left(x\circ(d_{\rho_0}F\circ\kappa)\right)^l$ 和 $(-\xi\circ\kappa)^m$后，我们看到 Q 的系数有界于$C_{l,\ m}||d_{\rho_0}F||^l||\kappa||^{l+m}$，其中某个常数$C_{l,\ m}$。

因此，我们可以将整个阶为 k 的项写成如下形式： $T(\rho_1)\mathcal{M}(d_{\rho_0}F\circ\kappa)\Lambda_h(Q_k(P)\Psi_0))$，其中 $Q_k(P)$ 是阶数为 $\deg P+3k$ 的多项式，映射 $P\mapsto Q_k(P)$ 是线性的，其系数取决于 κ、 ψ 和 a 在 $(x_1,\ \xi_0)$ 处直到 $3k$ 阶的导数。这就得到了所需多项式。将项 $||d_{\rho_0}F||^l$ 代入 $C_{3k}(\psi)$，并利用 P_k 的特殊形式，我们便得到所需估计

$$N_\infty(Q_k(P))\le C_{3k}(\psi)||a||_{C^k}||\kappa||^{3k}N_\infty(P).$$

余项的控制。证明的最后一步是证明余项具有所需的界。正如(2.20)中的大括号所示，这个余项可以分解为两项：它们具有不同的性质。我们先从第一项开始，并将其记为 $\tilde{r}_{N,\ 1}$。

在形如 (2.19) 的乘积中，将因子 $r^{\psi}_{3+\alpha}$ 合并为一项，并将多项式 ψ_k 合并为一个多项式，我们看到，出现在 $\tilde{r}_N$ 中的项 $r_{N,\ 1}$ 是形如 $Q^{\psi}_j(x,\ \eta)R^{\psi}_j(x,\ \eta;h)$ 的各项之和，其中 $0 \leq j \leq k$；Q^{ψ}_j 是次数为 $3j$ 的多项式，而 $R^{\psi}_j(x,\ \eta;h)$ 对于 $\alpha \in \mathbb{N}^2$ 满足：

$$|\partial^{\alpha} R^{\psi}_j(x,\eta;h)| \leq C_{3N-3j+|\alpha|}(\psi)\langle (x,\eta)\rangle^{3N-3j}$$

其中 $C_{3N-3j+|\alpha|}(\psi)$ 取决于 ψ 的最高 $3N-3j+|\alpha|$ 阶导数。[4] 利用对 r^a 的同类估计 $_{N-k}(x,\ \eta;a;\ h)$，我们看到 $\tilde{r}_{N,\ 1}$ 满足：

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, (x,\eta) \in \mathbb{R}^2\ ,\ |\partial^{\alpha}\tilde{r}_{N,1}(x,\eta)| \leq C_{3N+|\alpha|}(\psi)||a||_{C^{N+|\alpha|}}\langle (x,\eta)\rangle^{3N} \tag{2.21}$$

现在我们关注于控制

$$\tilde{R}_{N,1}u(x) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{T^*\mathbb{R}} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}\tilde{r}_{N,1}(x,\eta)u(y)dyd\eta$$

我们将使用以下引理，该引理已在附录 A.1 中证明：

引理 2.5。设 $\tilde{b}$ 是 $S(\langle\rho\rangle^N)$ 中的一个符号。则存在一个符号 $b \in S(\langle\rho\rangle^N)$，使得对所有 $0 < h \leq 1$,

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{T^*\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}\tilde{b}(x,\eta)u(y)dyd\eta = \mathcal{M}(d_{\rho_0}F)\,\mathrm{Op}_h(b)u(x)$$

此外，存在一个与 $M' \in \mathbb{N}$ 无关的整数，使得 b 满足：对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^2$,

$$\langle\rho\rangle^N|\partial^{\alpha}b(\rho)| \leq C_{\alpha}\sup_{|\beta|\leq|\alpha|+M'}\sup_{\rho\in T^*\mathbb{R}}\left(|\partial^{\beta}\tilde{b}(\rho)|\langle\rho\rangle^N\right)$$

其中 C_{α} 取决于 $d_{\rho_0}F$。

B应用引理 2.5（在引理中取 $h=1$ 的情形），我们可以找到一个符号 $r_{N,\ h}$ 使得 t

$$\tilde{R}_{N,1} = \mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F)\mathrm{Op}_1(r_{N,h})$$

为了完成对余项第一部分的处理，我们计算：

$$\begin{aligned}||\tilde{R}_{N,1}\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0]||_{L^2} &= ||\mathcal{M}_1(d_{\rho_0}F)\mathrm{Op}_1(r_{N,h})\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0]||_{L^2}\\ &\leq ||\mathrm{Op}_1(r_{N,h})||_{H_1(\langle\rho\rangle^{3N})\to L^2}\times||\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0]||_{H_1(\langle\rho\rangle^{3N})}\\ &\leq C_M(r_{N,h})||\kappa||^{3N}K_{N,degP}N_{\infty}(P)\end{aligned}$$

通过推论 2.1，其中 $C_M(r_{N,h})$ 取决于 $r_{N,h}$ 在 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 中的前 M 个半范数；而根据引理 2.5，这又取决于 $\tilde{r}_{N,h}$ 在 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 中的前 $M+M'$ 个半范数。由 (2.21)，这可以由某个常数 $C_{3N+M+M'}(\psi)||a||_{C^{N+M+M'}}$ 控制。

接下来讨论 (2.20) 中的第二个余项。我们希望控制

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))-y\eta\right)}\tilde{r}_N(x,\eta)u(y)dyd\eta$$

回顾 $\tilde{r}_N$ 在 (2.18) 中的精确描述，对于 $s \in [0,1]$，我们设：

$$_{R_s}u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}(D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta))+ish^{1/2}r_3^{\psi}(x,\eta;h)-y\eta\right)}r_3^{\psi}(x,\eta;\ h)^N a(x_1+h^{1/2}x,\xi_0+h^{1/2}\eta)u(y)dyd\eta$$

˜我们希望对 $||R_s\mathcal{M}_1(\kappa)[P\Psi_0]||_{L^2}$ 在 $s \in [0,1]$ 上进行一致估计。该符号

$$b_N(x,\eta) \coloneqq r_3^{\psi}(x,\eta;h)^N a(x_1+h^{1/2}x,\xi_0+h^{1/2}\eta)$$

[4]These estimates comes from (2.16) and in fact, we can take

$$C_{3N-3j+|\alpha|}(\psi) = \sup_{3N-3j\leq|\beta|\leq 3N-3j+|\alpha|} h^{(|\beta|-3N+3j)/2}||\partial^{\beta}\psi||_{\infty}$$

属于符号类 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$，其半范数可由（2.16）控制。我们承认以下引理，其证明也见附录 A.1。

引理 2.6。对于每个 $s\in[0,1]$，存在 $B_s(\cdot)\in S\left(\langle\rho\rangle^{6N}\right)$ 使得：

- $\tilde{R}_s^*\tilde{R}_s=\mathrm{Op}_1(B_s)$；
- 存在一个通用 $M\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}^2$、所有 $s\in[0,1]$，以及某些通用常数 C_α，

$$\sup_\rho|\partial^\alpha B_s(\rho)|\le C_\alpha\left(\sup_{\rho,|\beta|\le|\alpha|+M}d^\beta b_N(\rho)\langle\rho\rangle^{-3N}\right)^2\langle\rho\rangle^{6N}$$

这个引理使我们能够控制

$$\begin{aligned}||\tilde{R}_s||^2_{H_1(\langle\rho\rangle^{3N})\to L^2}&\le||\tilde{R}_s^*\tilde{R}_s||_{H_1(\langle\rho\rangle^{3N})\to H_1(\langle\rho\rangle^{-3N})}\\&\le||\mathrm{Op}_1(B_s)||_{H_1(\langle\rho\rangle^{3N})\to H_1(\langle\rho\rangle^{-3N})}\\&\le C_N\sup_{|\alpha|\le M}\sup_\rho|\left(\partial^\alpha B_s(\rho)\right)\langle\rho\rangle^{-6N}|\\&\le C_N\left(\sup_{|\beta|\le 2M}\sup_\rho d^\beta b_N(\rho)\langle\rho\rangle^{-3N}\right)^2\\&\le\left(C_{3N+M'}(\psi)||a||_{C^{N+M'}}\right)^2\end{aligned}$$

最后，利用推论 2.1，我们按照之前的方式对 $R_{N,\,1}$ 得出结论。这就完成了命题 2.10 的证明。□

3. Dynamical preliminaries

3.1. 双曲动力学。我们假设 F 在俘获集 $\mathcal{T}$ 上是双曲的。如前所述，我们可以在 U 上固定一个适配的黎曼度量，使得对于某个 $\lambda_0>0$，以下更强形式的双曲估计成立：对于每个 $\rho\in\mathcal{T}$、$n\in\mathbb{N}$，

$$v\in E_u(\rho)\implies||d_\rho F^{-n}(v)||\le e^{-\lambda_0 n}||v|| \tag{3.1}$$

$$v\in E_s(\rho)\implies||d_\rho F^{n}(v)||\le e^{-\lambda_0 n}||v|| \tag{3.2}$$

记号。现在我们使用 U 上诱导的黎曼距离，并将其记为 d。

若 $\rho\in\mathcal{T}$、$n\in\mathbb{Z}$，我们使用该黎曼度量在 ρ 处定义不稳定雅可比 $J_n^u(\rho)$ 和稳定雅可比 $J_n^s(\rho)$，其定义为：

$$v\in E_u(\rho)\implies||d_\rho F^{n}(v)||=J_n^u(\rho)||v|| \tag{3.3}$$

$$v\in E_s(\rho)\implies||d_\rho F^{n}(v)||=J_n^s(\rho)||v|| \tag{3.4}$$

这些雅可比刻画了映射的局部双曲性。由于 F 保体积，$J_n^u(\rho)J_n^s(\rho)\sim 1$。

备注。如果我们使用另一黎曼度量定义不稳定雅可比 J_n^u 和稳定雅可比 J_n^s，那么，对于每个 $n\in\mathbb{Z}$ 和 $\rho\in\mathcal{T}$，

$$\tilde{J}_n^u(\rho)\sim J_n^u(\rho)\quad;\quad\tilde{J}_n^s(\rho)\sim J_n^s(\rho)$$

由 $\mathcal{T}$ 的紧性可知，存在满足以下条件的 $\lambda_1\ge\lambda_0$

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\rho\in\mathcal{T}\,;\;e^{n\lambda_0}\le J_n^u(\rho)\le e^{n\lambda_1}\;\text{ and }\;e^{-n\lambda_1}\le J_n^s(\rho)\le e^{-n\lambda_0} \tag{3.5}$$

特别地，以下李雅普诺夫指数是定义良好的

$$\lambda_{max}=\sup_{\rho\in\mathcal{T}}\limsup_n\frac{1}{n}\log J_n^u(\rho)$$

$$\lambda_{min}=\inf_{\rho\in\mathcal{T}}\liminf_n\frac{1}{n}\log J_n^u(\rho)>0$$

我们在此引用关于稳定流形和不稳定流形的标准事实（例如参见 [HK95],第 6 章）。

引理 3.1. 对于任意 $\rho \in \mathcal{T}$，存在局部稳定流形和不稳定流形 $W_s(\rho)$ $W_u(\rho) \subset U$满足，对于某个 $\varepsilon_1 > 0$ （仅依赖于 F）：

(1) $W_s(\rho)$ $W_u(\rho)$ 是 C^∞-嵌入曲线，且嵌入的 C^∞ 范数在 ρ 中一致有界。(2) $W_u(\rho)$ 和 $W_s(\rho)$ 的边界不与 $B(\rho, \varepsilon_1)$ [5]和 $W_{u/s}(\rho) \subset B(\rho, 2\varepsilon_1)$ 相交（这些是局部不稳定/稳定流形）。(3) $W_s(\rho) \cap W_u(\rho) = \{\rho\}$， $T_\rho W_{u/s}(\rho) = E_{u/s}(\rho)$ (4) $F(W_s(\rho)) \subset W_s(F(\rho))$ 和 $F^{-}(W_u(\rho)) \subset W_u\left(F^{-1}(\rho)\right)$(5) (a) 对每个 $\rho' \in W_s(\rho)$ $d(F^n(\rho)\ F^n(\rho')) \to 0$。(b) 对每个 $\rho' \in W_u(\rho)$ $d(F^{-n}(\rho)\ F^{-n}(\rho')) \to 0$。(6) 令 $\theta > 0$ 满足 $e^{-\lambda_0} < \theta < 1$。存在与 ε_1 无关的 $C > 0$，使得以下结论成立：(a) 如果 $\rho' \in U$满足 $d(F^i(\rho)\ F^i(\rho')) \leq \varepsilon_1$对所有 $i = 0, \dots, n$成立，则 $d(\rho', W_s(\rho)) \leq C\theta^n\varepsilon_1$，并且对于 $0 \leq i \leq n$， $d(F^i(\rho)\ F^i(\rho')) \leq C\varepsilon_1\theta^{\min(i,n-i)}$。(b) 如果 $\rho' \in U$ 满足 $d(F^{-i}(\rho)\ F^{-i}(\rho')) \leq \varepsilon_1$对所有 $i = 0, \dots, n$成立，则 $d(\rho', W_u(\rho)) \leq C\theta^n\varepsilon_1$，并且对于 $0 \leq i \leq n$， $d(F^{-i}(\rho)\ F^{-i}(\rho')) \leq C\varepsilon_1\theta^{\min(i,n-i)}$。

(7) 如果 ρ， $\rho' \in \mathcal{T}$满足 $d(\rho,\ \rho') \leq \varepsilon_1$，那么 $W_u(\rho) \cap W_s(\rho')$ 恰好由 $\mathcal{T}$ 中的一个点组成。

下面，我们将要求 $C\varepsilon_1 < 1$。在将 ε_1 取足够小时，可以假设这一点成立。

针对我们的目的，我们需要这些结果的一个更精确版本。下面的引理是将 [DJN21] 中的引理 2.1 适用于我们的情形所得的改编版本；它们也出现在 [Vac22], 中，其中部分结果已经得到证明。

引理 3.2。 存在仅依赖于 $(U,\ F)$ 的常数 $\varepsilon_1 > 0$和 $C > 0$，使得对所有ρ， $\rho' \in U$，

(1) 如果 $\rho \in \mathcal{T}$和 $\rho' \in W_s(\rho)$ 满足 $d(\rho,\ \rho') \leq \varepsilon_1$，则

$$C^{-1}J_n^s(\rho)d(\rho,\rho') \leq d\left(F^n(\rho), F^n(\rho')\right) \leq CJ_n^s(\rho)d(\rho,\rho') \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

(2) 如果 $\rho \in \mathcal{T}$和 $\rho' \in W_u(\rho)$ 满足 $d(\rho, \rho') \leq \varepsilon_1$，那么

$$C^{-1}J_{-n}^u(\rho)d(\rho,\rho') \leq d\left(F^{-n}(\rho), F^{-n}(\rho')\right) \leq CJ_{-n}^u(\rho)d(\rho,\rho') \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

证明。 我们证明 (1)。(2) 可通过反转时间方向以类似方式证明。设 $\rho \in \mathcal{T}, \rho' \in W_s(\rho)$。由于 $T_\rho(W_s(\rho)) = E_s(\rho)$ 且 $d_\rho F\left(E_s(\rho)\right) = E_s(F(\rho))$，沿着 $FW_s(\rho)$ 的泰勒展开给出：

$$d(F(\rho), F(\rho')) = J_1^s(\rho)d(\rho,\rho') + O\left(d(\rho,\rho')^2\right) = J_1^s(\rho)d(\rho,\rho')\left(1 + O\left(d(\rho,\rho')\right)\right) \tag{3.8}$$

因为 $J_1^s \geq e^{-\lambda_1}$。将 ρ 和 ρ'分别替换为 $F^k(\rho)$ 和 $F^k(\rho')$ 应用这个等式，并回想一下，根据引理 3.1，$d(F^k(\rho)\ \ F^k(\rho')) \leq C\theta^k d(\rho,\rho')$，我们可以写成，

$$d(F^{k+1}(\rho), F^{k+1}(\rho')) = J_1^s(F^k(\rho))d(F^k(\rho), F^k(\rho'))(1 + O(\theta^k\varepsilon_1)) \tag{3.9}$$

由最后这个不等式和链式法则，我们得到

$$J_n^s(\rho)d(\rho,\rho')\prod_{k=0}^{n-1}(1 - C\theta^k\varepsilon_1) \leq d(F^n(\rho), F^n(\rho')) \leq J_n^s(\rho)d(\rho,\rho')\prod_{k=0}^{n-1}(1 + C\theta^k\varepsilon_1) \tag{3.10}$$

最后我们指出，

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1 + C\theta^k\varepsilon_1) \leq \prod_{k=0}^{+\infty}(1 + C\theta^k\varepsilon_1) < +\infty\,; \prod_{k=0}^{n-1}(1 - C\theta^k\varepsilon_1) \geq \prod_{k=0}^{\infty}(1 - C\theta^k\varepsilon_1) \geq C^{-1}$$

（请注意，在最后一个不等式和 (3.10) 中，我们需要确保 $\varepsilon_1 C < 1$，以便该乘积实际上非零。）□

下面的引理给出了引理 3.1 中 (6) 的一个更强版本（该结果已在 [Vac22]- 引理 3.10- 中得到证明，如下面的推论 - 推论 3.11 所示）。

[5]换言之，存在一条光滑曲线 $\gamma : [-\delta, \delta] \to U$，使得 $\gamma(0) = \rho$，$\mathrm{ran}(\gamma) \subset W_{u/s}(\rho)$，且$B(\rho,\ \varepsilon_1) \cap W_{i/s}(\rho) = \gamma([-\delta/2, \delta/2])$：这意味着不稳定流形和稳定流形的大小有一个统一的下界。

引理 3.3。 存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_1>0$，它们仅依赖于 $(U,\ F)$，使得对于所有 $\rho,\ \rho'\in U$ 和 $n\in\mathbb{N}$：如果 $\rho\in\mathcal{T}$ 且 $d\left(F^i(\rho),\ F^i(\rho')\right)\leq\varepsilon_1$ 对所有 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 都成立，那么

$$d\left(\rho',W_s(\rho)\right)\leq\frac{C}{J_n^u(\rho)}d\left(F^n(\rho'),W_s(F^n(\rho))\right) \tag{3.11}$$

$$d\Big(F^n(\rho'),W_u(F^n(\rho))\Big)\leq\frac{C}{J_n^u(\rho)}d\left(\rho',W_u(\rho)\right) \tag{3.12}$$

and

$$||d_{F^n(\rho')}F^{-n}||,||d_{\rho'}F^n||\leq CJ_n^u(\rho) \tag{3.13}$$

作为此引理的直接推论，我们得到：

推论 3.1. 存在 $C>0$ 和 $\varepsilon_1>0$（仅依赖于（U,F））， 使得对所有 $\rho,\rho'\in\mathcal{T}$ 和 $n\in\mathbb{N}$：

(1) 若 $d\left(F^i(\rho),\ F^i(\rho')\right)\leq\varepsilon_1$ 对所有 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 均成立，则

$$C^{-1}J_n^u(\rho)\leq J_n^u(\rho')\leq CJ_n^u(\rho) \tag{3.14}$$

(2) 若 $d\left(F^{-i}(\rho),\ F^{-i}(\rho')\right)\leq\varepsilon_1$ 对所有 $i\in\{0,\ldots,n\}$ 均成立，则

$$C^{-1}J_{-n}^s(\rho)\leq J_{-n}^s(\rho')\leq CJ_{-n}^s(\rho) \tag{3.15}$$

我们还记录以下事实（例如参见 [DJN21] - 引理 2.4）。

引理 3.4。 存在 $\varepsilon_1>0$ 和 $C>0$，使得以下结论成立：对于任意 $\rho\in\mathcal{T}$，存在一个辛坐标图 κ_ρ：$V_\rho\to W_\rho\subset\mathbb{R}^2$，使得

- $B(\rho,\varepsilon_1)\ \subset V_\rho$;
- $\kappa_\rho(\rho)\ =(0,\ 0)$
- $\kappa_\rho\left(W_u(\rho)\ \cap V_\rho\right)\ =\{(u,\ 0)\ u\in\mathbb{R}\}\cap W_\rho$
- $d\kappa_\rho(E_s(\rho))\ =\mathbb{R}(0,\ 1)$
- 对于任意 $N\in\mathbb{N}$，κ_ρ 的 C^N 范数关于 ρ一致有界。

最后，我们以一个关于线性化动力学的引理作结。若 $\rho\in\mathcal{T}$和 $\rho'\in W_u(\rho)$，则切空间 $T_{\rho'}W_u(\rho)$自然记作 $E_u(\rho')$；若 $v\in T_{\rho'}U$，我们记 $d(v,E_u(\rho'))$ 为 v 和 $E_u(\rho')$ 之间关于 $T_{\rho'}U$ 上黎曼度量的距离。

引理 3.5. 存在 $\varepsilon_1>0,\gamma\in(0,1)$ 和 $C>0$，使得以下结论成立。假设 $\rho\in\mathcal{T}$, $\rho'\in W_u(\rho)$、 $v_0\in T_{\rho'}U$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 满足： $\forall i\in\{0,\ldots,n\}$, $d(F^i(\rho)\ F^i(\rho'))\ \leq\varepsilon_1$。另假设 $||v_0||=1$，且 $d(v_0,E_u(\rho'))\ \leq\gamma$。记

$$v_n=\frac{d_{\rho'}F^n(v_0)}{||d_{\rho'}F^n(v_0)||}\in T_{F^n(\rho')}U$$

那么（见图 5），

$$d\Big(v_n,E_u(F^n(\rho'))\Big)\leq CJ_n^u(\rho)^{-2}d(v_0,E_u(\rho'))$$

备注。 这是一种倾斜引理：切向量在演化过程中会被吸引向不稳定方向。我们给出了一个定量表述。假设$d(v_0,\ E_u(\rho'))\ \leq\gamma$ 是一个横截性假设：它表示 v_0 必须与稳定方向充分横截。

证明。 首先注意到，由于关于 ρ 和 ρ' 的假设以及引理 3.2，

$$d(F^i(\rho),F^i(\rho')\leq C\theta^{n-i}d(F^n(\rho),F^n(\rho'))\leq C\theta^{n-i}\varepsilon_1$$

对于某个 $0<\theta<1$ 以及 $0\leq i\leq n$。我们使用引理 3.4 给出的、以 $F^i(\rho)$为中心的坐标图 κ_i （对于 $0\leq i\leq n$）。记（$u^i,\ s^i$）为 κ_i中的坐标。由于 $\kappa_i(W_u(F^i(\rho))\ =\{(u^i,\ 0)\}$，坐标图 κ_{i-1} 与 κ_i 之间的映射 F 表示为：

$$\kappa_i\circ F\circ\kappa_{i-1}^{-1}(u^{i-1},s^{i-1})=(\nu_iu^{i-1}+\alpha_i(u^{i-1},s^{i-1}),\mu_is^{i-1}+\beta_i(u^{i-1},s^{i-1}))$$

对于 $\beta_i(u^{i-1},\ 0)\ =0$、 $d\alpha_i(0,\ 0)\ =0$ 以及 $d\beta_i(0,\ 0)\ =0$。备注：对于 $\nu_1\ldots\nu_i\sim J_i^u(\rho)$， $\sim(\mu_1\ldots\mu_i)^{-1}$ 适用于 $1\leq i\leq n$。

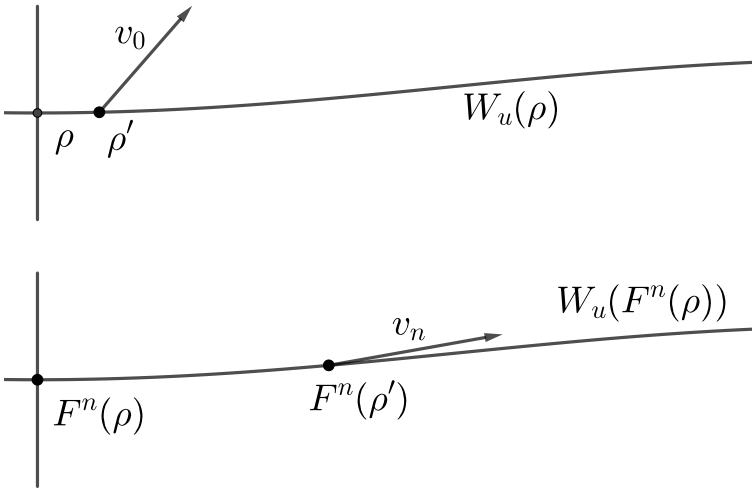


图 5。线性化动力学使该向量越来越接近不稳定流形的切空间。参见引理 3.5。竖直方向对应稳定方向，动力学在该方向上收缩。

注意 $w_0 = d_{\rho'}\kappa_0(v_0)$ 和 $\tilde{w}_n = d_{F^n(\rho')}\kappa_n(v_n)$。因此，我们希望证明 $d(\tilde{w}_n, \mathbb{R}e_u) \leq CJ_n^u(\rho)^{-1}d(w_0, \mathbb{R}e_u)$，其中 $\mathbb{R}e_u = \{(u, 0)\}$。这里，为了计算距离，包括点之间以及切向量之间的距离，我们可以直接使用 $\mathbb{R}^2$ 中通常的欧氏距离。我们还引入$w_i = d_{\rho'}(\kappa_i \circ F^i)(v_0)$，并记 $w_i = (w_i^u, w_i^s)$。采用这些记号，我们有 $w_n = ||d_{\rho'}F^n(v_0)||\tilde{w}_n$以及

$$d(\tilde{w}_n, \mathbb{R}e_u) = \frac{w_n^s}{||d_{\rho'}F^n(v_0)||}$$

由于 $||d_{\rho'}F^n(v_0)|| \sim ||w_n||$，我们只需证明 that

$$\frac{|w_n^s|}{||w_n||} \leq CJ_n^u(\rho)^{-2}|w_0^s| \tag{3.16}$$

如果 γ足够小，我们可以根据关于 v_0的横截性假设推导出 $|w_0^u| \geq \frac{1}{2}|w_0^s|$。特别是，$||w_0||^2 \geq \frac{4}{3}|w_0^s|^2$。请注意 $(u^i, 0)$ $F^i(\rho')$ 在坐标图 κ_i中的坐标，并回顾 $|u^i| \leq C\theta^{n-i}\varepsilon_1$。我们有以下关系

$$w_i^u = \nu_i w_{i-1}^u + d\alpha_i(u^{i-1}, 0) \cdot w_{i-1}$$
$$w_i^s = \mu_i w_{i-1}^s + d\beta_i(u^{i-1}, 0) \cdot w_{i-1}$$

由于 $\beta_i(u, 0) = 0$，$d\beta_i(u^{i-1}, 0) \cdot w_{i-1} = \partial_{s^i}\beta_i(u^{i-1}, 0)w_{i-1}^s$。此外，$d\beta_i(0,0) = 0$，因此，$|\partial_{s^i}\beta_i(u^{i-1}, 0)w_{i-1}^s| \leq C|u^{i-1}||w_{i-1}^s| \leq C\theta^{n+1-i}\varepsilon_1|w_{i-1}^s|$。这给出，

$$|w_i^s| \leq (\mu_i + C\theta^{n+1-i}\varepsilon_1)\dots(\mu_1 + C\theta^n)|w_0^s|$$

$$|w_i^s| \leq \mu_1 \dots \mu_i \prod_{k=1}^{i}\left(1 + \frac{C\varepsilon_1\theta^{n+1-k}}{\mu_k}\right)|w_0^s|$$

由于对于某个 $c > 0$ 有 $\mu_k \geq c$，且对所有 $1 \leq k \leq n$ 都成立，我们可以估计

$$\prod_{k=1}^{i}\left(1 + \frac{C\varepsilon_1\theta n + 1 - k}{\mu_k}\right) \leq \prod_{k=0}^{i-1}\left(1 + C\varepsilon_1 c^{-1}\theta^k\right) \leq \prod_{i=0}^{\infty}\left(1 + C\varepsilon_1 c^{-1}\theta^i\right) < +\infty$$

因此，$|w_i^s| \leq CJ_i^u(\rho)^{-1}|w_0^s|$。现在我们转而讨论 $||w_n||$的下界。由 $w_i^u = \nu_i w_{i-1}^u + O(|u^{i-1}||w_{i-1}|)$，可得

$$|w_i^u| \geq \nu_i|w_{i-1}^u| - C|u^{i-1}||w_{i-1}|| \geq \nu_i|w_{i-1}^u| - C\theta^{n+1-i}||w_{i-1}||$$

我们注意到 $||w_{i-1}|| \leq |w_{i-1}^u| + |w_{i-1}^s| \leq |w_{i-1}^u| + CJ_{i-1}^u(\rho)^{-1}|w_0^s|$，由此可得

$$|w_i^u| \geq |w_{i-1}^u|(\nu_i - C\theta^{n+1-i}) - C\theta^{n+1-i}J_{i-1}^u(\rho)^{-1}|w_0^s|$$

回想一下，对于 $\theta_1 = e^{-\lambda_1}$，有 $J_i^u(\rho)^{-1} \le \theta_1^i$，因此对于某个 $\theta_2 \in]\max(\theta, \theta_1)\ 1[$, $\theta^{n+1-i} J_i^u(\rho)^{-1} \le C\theta_2^n$。迭代此公式可得

$$|w_n^u| \ge (\nu_1 - C\theta^n)\dots(\nu_n - C\theta)|w_0^u| - \sum_{i=1}^{n-1}(\nu_n - C\theta)\dots(\nu_i - C\theta^{n+1-i})\theta_2^n|w_0^s|$$

与 $|w_n^s|$的情形采用类似论证，我们可以证明 $(\nu_n - C\theta)\dots(\nu_1 - C\theta^n) \ge C^{-1}J_n^u(\rho)$ 且 $|(\nu_n - C\theta)\dots(\nu_1 - C\theta_n)| \le \nu_1\dots\nu_n \le CJ_n^u(\rho)$。因此，利用$|w_0^u| \ge 1/4||w_0||$ 这一事实（由横截性假设可知），我们得到

$$|w_n^u| \ge C^{-1}(1-\theta_2^n)J_n^u(\rho)||w_0|| \ge C^{-1}J_n^u(\rho)||w_0||.$$

我们得出 $||w_n|| \ge |w_n^u| \ge C^{-1}J_n^u(\rho)||w_0||$，从而得到 (3.16)。 □

3.2. **拓扑压力。维数。**

3.2.1. 拓扑压力。我们回顾与连续函数 $\varphi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ 相关的拓扑压力的定义及若干公式。我们考虑的动力系统是 F 在 $\mathcal{T}$ 上的限制。我们在 $\mathcal{T}$ 上考虑距离函数 d。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$, 若子集 $E \subset \mathcal{T}$ 满足以下条件，则称其为 (n, ϵ) 分离集：对于每个 $x, y \in E, x \ne y$，都存在 $0 \le i \le n-1$,$d(F^i(x)\ F^i(y)) > \epsilon$。

定义 3.1。若 φ 是 $\mathcal{T}$上的连续函数，则与$\varphi \in C(\mathcal{T}, \mathbb{R})$相关的拓扑压力定义为

$$P(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P_0(\varphi, n, \epsilon)$$

其中

$$P_0(\varphi, n, \epsilon) = \sup\left\{ \sum_{x \in E} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \right) \ ; \ E \text{ is } (n, \epsilon) \text{ separated} \right\}$$

本文将使用压力的另一个公式。为陈述该公式，先引入一些记号：若 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{T}$的有限开覆盖，记 $\operatorname{diam}\mathcal{Q} = \sup_{A \in \mathcal{Q}} \operatorname{diam} A$；对于 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}^{\wedge n}$ 是由集合 $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$ 构成的 $\mathcal{T}$的开覆盖，其中 $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{Q}$。对于 φ: $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ 连续、$n \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathcal{T}$的开覆盖 $\mathcal{Q}$，定义

$$P_1(\varphi, n, \mathcal{Q}) = \inf\left\{ \sum_{A \in \alpha} \sup_{x \in A} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \right) \ ; \ \alpha \subset \mathcal{Q}^{\wedge n}, \mathcal{T} \subset \bigcup_{A \in \alpha} A \right\}$$

P命题 3.1。 [Wal75]（定理1.6）。以下公式成立：对于任意 $\varphi \in C(\mathcal{T}, \mathbb{R}$),

$$P(\varphi) = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{Q} \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_1(\varphi, n, \mathcal{Q}) \tag{3.17}$$

特别要注意的是，这说明对于所有开覆盖 $\mathcal{Q}$, n 中的极限都存在。

3.2.2. 维数。让我们回顾一下紧致度量空间 $(X,\ d)$ 的上盒维数定义。我们用 $N_X(\varepsilon)$ 表示覆盖X 所需的半径为 ε 的开球的最小数量。那么， X 的上盒维数定义为:

$$\overline{\dim} X \coloneqq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_X(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \tag{3.18}$$

特别地，如果 $\delta >$ 维数$_X$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $N_X(\varepsilon) \le \varepsilon^{-\delta}$.

我们回顾以下众所周知的结果（例如参见 [Bar08], 定理 4.3.2）：

命题 3.2。令 s_0 为方程 $P(-s\varphi_u) = 0$ 的唯一根； $s \in \mathbb{R}$。那么，对于每个 $\rho \in \mathcal{T}$，$\dim(\mathcal{T} \cap W_u(\rho)) = \dim(\mathcal{T} \cap W_s(\rho)) = s_0$。此外，$\dim\mathcal{T} = 2s_0$。

备注。事实上，这对于豪斯多夫维数和下盒维数同样成立，但出于实际和技术方面的原因，我们主要使用上盒维数。在下文中，我们记 $s_0 = d_H$。

我们还需要下面这个稍微更精确的结果，它可以对 $N_{W_{u/s}(\rho) \cap \mathcal{T}}$ 关于 ρ 进行一致控制:

命题 3.3. 存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得以下结论成立。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在$C_\varepsilon > 0$，使得对于每个 $\rho \in \mathcal{T}$，若 $X_\rho = W_{u/s}(\rho) \cap \mathcal{T}$，

$$N_{X_\rho}(r) \leq C_\varepsilon r^{-(d_H+\varepsilon)};\ \forall r \leq \varepsilon_1$$

证明。显然，这对每个 $\rho \in \mathcal{T}$ 都成立，其中 C_ε 先验地取决于 ρ。一致性源于全纯映射是 Lipschitz 的这一事实；由于 $\mathcal{T}$ 的紧致性，它们具有一致的 Lipschitz 范数（例如参见 [Vac 22], 推论 3.3）。然后，由于 $\mathcal{T}$ 的紧致性，可以只选取有限条（非）稳定叶作为参照来估计 $N_{W_{u/s}(\rho)\cap\mathcal{T}}(\varepsilon)$，并应用以下结论：设 (X, d) 和 (Y, d') 是紧致度量空间，且 $f\colon X \to Y$是C-*Lipschitz* 的。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$N_{f(X)}(\varepsilon) \leq N_X(\varepsilon/C)$$

□

最后，我们给出一个引理，用于估计覆盖 $\mathcal{T} \cap W_u(\rho_0)$ 所需的大小为 δ 的球的数量，$\cap J$其中 $J \subset W_u(\rho_0)$ 是一个大小为 l 的区间。它与命题 3.3 的区别在于，J 的大小可能远小于 ε_1。

引理 3.6。令 $\rho_O \in \mathcal{T}$。令 $\kappa\colon\ U_0 \to V_0 \subset \mathbb{R}$ 为一个光滑坐标图，使得经过 ρ_0 的局部不稳定流形的像由一个函数图像给出

$$\kappa(W_u(\rho_O) \cap U_0) = \{(x, g(x)), x \in I\}$$

对于某个开区间 I。对于 $J \subset I$，记

$$X(J) = \{x \in J, \kappa^{-1}(x, g(x)) \in \mathcal{T}\}$$

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个仅取决于 ε、F 和 κ 的 $C_\varepsilon > 0$，使得：对于所有长度为 l 的 $J \subset I$区间，以及所有 $\delta \in]0,\ l]$,

$$N_{X(J)}(\delta) \leq C_\varepsilon \left(\frac{\delta}{l}\right)^{-(d_H+\varepsilon)}.$$

证明。记 $N = N_{X(J)}(\delta)$。若 $N = 0$，则显然无需证明。因此，设 $N \neq 0$，并固定参考点 $x_0 \in X(J)$：x_0 对应于点 $\rho_0 = \kappa^{-1}(x_0,\ g(x_0)) \in \mathcal{T}$，我们所关注的是 ρ_0 的一段长度为 l的不稳定流形。

我们知道，每个 $\mathcal{T} \cap W_u(\rho)$的上盒维数都等于 d_H。然而，由于这里我们关注的是一个大小为 l 的不稳定流形的小片段，因此我们将扩展这个片段，使其大小达到1的量级。我们记 $J_0 = \kappa^{-1}\big(\{(x,\ g(x))\ x \in J\}\big)$，并且对于 $m \in \mathbb{N}$，记 $\rho_m = F^m(\rho_0)$，并引入

$$T := \max\{m \in \mathbb{N}, F^m(J) \subset W_u(\rho_m) \text{ and } \mathrm{diam} F^m(J_0) \leq \varepsilon_1\}$$

特别地，T 的定义意味着，对于所有 $\rho \in J_0$，$F^m(\rho)$在 $0 \leq m \leq T$上都有定义，并且满足 $d(F^m(\rho)\ F^m(\rho_0)) \leq \varepsilon_1$。

断言：我们首先断言，如果 $J' \subset J$ 是一个满足 $X(J') \neq \emptyset$的子区间，那么

$$\mathrm{diam}\ J'_T \sim \frac{\mathrm{diam} J'}{J^u_{-T}(\rho_T)}$$

其中，对于 $J'_0 = \kappa^{-1}\big(\{(x,\ g(x))\ x \in J'\}\big)$，有 $J'_T = F^T(J'_0)$。特别地，这对 $J' = J$成立。

证明该断言：让我们证明该断言，并设 $J' \subset J$ 是长度为 l' 的区间，考虑 $x' \in X(J')$。注意到 $\rho' = \kappa^{-1}(x',\ g(x')) \in \mathcal{T}$。如果 $\hat{x} \in J'$ 和 $\hat{\rho} = \kappa^{-1}(\hat{x},\ g(\hat{x})) \in W_u(\rho')$，则有

$$d(F^T(\rho'), F^T(\hat{\rho})) \sim \frac{d(\rho', \hat{\rho})}{J^u_{-T}(F^T(\rho'))} \sim \frac{|x' - \hat{x}|}{J^u_{-T}(F^T(\rho'))}$$

由于对于 $0 \leq m \leq T$，$d(F^m(\rho')\ F^m(\rho_0)) \leq \varepsilon_1$，我们有

$$J^u_{-T}(F^T(\rho')) \sim J^u_{-T}(\rho_T)$$

特别地，如果我们选择 $\hat{x}$ 使得 $|x' - \hat{x}| \geq$ 直径 $J'/3$，则有

$$\mathrm{diam}\ J'_T \geq C^{-1} \frac{|x' - \hat{x}|}{J^u_{-T}(\rho_T)} \geq C^{-1} \frac{\mathrm{diam}\ J'}{J^u_{-T}(\rho_T)}$$

对于反向不等式，假设 ρ_1， $\rho_2 \in J_0'$。

$$d(F^T(\rho_1), F^T(\rho_2)) \le d(F^T(\rho_1), F^T(\rho')) + d(F^T(\rho'), F^T(\rho_2)) \le C\frac{|x_1 - x'| + |x' - x_2|}{J^u_{-T}(\rho_T)} \le C\frac{\text{diam } J'}{J^u_{-T}(\rho_T)}$$

对 ρ_1 和 ρ_2取上确界，最终得到所需的不等式。

证明结束。我们有， $J^u_{-T}(\rho_T)$直径 $J_T \sim$直径 $J \sim l$。根据 T的定义，

$$\text{diam } F^{T+1}(J_0) \ge \varepsilon_1$$

因此

$$\text{diam } F^T(J_0) \ge C^{-1}\varepsilon_1$$

因此， $J^u_{-T}(\rho_T) \le Cl$ （这也依赖于 ε_1，但这并不成问题，因为 ε_1 只依赖于 F）。我们先固定 $k > 0$，其值稍后确定。根据命题3.1，我们可以用 N个直径至多为 $k\delta$的球覆盖 $J_T \cap \mathcal{T}$，其中 $N \le C_\varepsilon(k\delta)^{-d_H-\varepsilon}$。我们选取 ρ_1，.....， $\rho_N \in \mathcal{T} \cap J_T$，使得

$$\mathcal{T} \cap J_T \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\rho_i, k\delta).$$

记 J中的点为 x_i，使得 $\rho_i = F^T(\rho_i)$，且 $\kappa(\rho_i) = (x_i, g(x_i))$。如果 $x \in X(J)$，那么$\rho := F^T(\kappa^{-1}(x, g(x)))$ $\in \mathcal{T} \cap J_T$，并且存在 $i \in \{1, \dots, N\}$使得 $d(\rho_i, \rho) \le k\delta$。因此，对于某个依赖于 F和 κ的常数 C'，有 $|x - x_i| \le CJ^u_{-T}(\rho_T)d(\rho_i, \rho) \le C'lk\delta$。现在我们固定 $k = (2C'l)^{-1}$，使得 $X(J)$可以被 N 个长度为 δ的区间覆盖。因此，

$$N_{X(J)}(\delta) \le N \le C_\varepsilon\left(\frac{\delta}{2C'l}\right)^{-d_H-\varepsilon} = C'_\varepsilon\left(\frac{\delta}{l}\right)^{-d_H-\varepsilon}$$

□

3.3.逃逸函数。 本小节记录 ‹ ˜[NSZ14]，中逃逸函数的构造，并将其专门应用于我们的开映射 $F : D \subset U \to A \subset U$。我们不提供证明，因为证明已完全包含在 [NSZ14] (引理 4.1 - 4.4) 中。

引理 3.7。 假设 $\mathcal{V}_2$ 是 $\mathcal{T}$的一个小邻域，在其中 F 定义良好。那么，存在 $C_0 > 0$ 和 $\mathcal{T}$的一个邻域 $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$ ，使得以下结论成立：对于每个$\epsilon > 0$，都存在函数 $\hat{}\varphi_\pm = \hat{}\varphi_{\pm,\epsilon} \in C^\infty(\mathcal{V}_1 \cup F(\mathcal{V}_1)\ [\varepsilon, +\infty[)$，使得

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_\pm(\rho) \sim d(\rho, \mathcal{T}_\pm)^2 + \epsilon;\\
&\pm(\hat{\varphi}_\pm(\rho) - \hat{\varphi}_\pm(F(\rho)) + C_0\epsilon \sim \hat{\varphi}_\pm(\rho);\\
&\hat{\varphi}_+(\rho) + \hat{\varphi}_-(\rho) \sim \epsilon;\\
&\partial^\alpha\hat{\varphi}_\pm(\rho) = O\left(\hat{\varphi}_\pm(\rho)^{1-|\alpha|/2}\right).
\end{aligned}$$

$\sim$ 和 O 中的常数与 $\rho \in \mathcal{V}_1 \cup F(\mathcal{V}_1)$ 和 ϵ无关。

利用这两个函数，我们构造如下逃逸函数

$$\hat{g}_\epsilon = \log(M\epsilon + \hat{\varphi}_-) - \log(M\epsilon + \hat{\varphi}_+) \tag{3.19}$$

其中 $M \gg 1$ 是一个与 ϵ 无关且足够大的常数，使得下列引理成立：

引理 3.8. 当M 足够大时，存在 $C_1 > 0$ ，使得关于 ϵ一致地，

$$\rho \in \mathcal{V}_1 \cup F(\mathcal{V}_1), d(\rho, \mathcal{T}) \ge C_1\epsilon \implies \hat{g}_\epsilon(F(\rho)) - \hat{g}_\epsilon \ge 1/C_1.$$

由于我们关注 $\mathcal{T}$邻域内的动力学，我们固定一个与 ϵ无关的光滑截断函数 $\hat{}\chi \in C^\infty_c(\mathcal{V}_1 \cup F(\mathcal{V}_1))$，使得 $\hat{}\chi = 1$ 位于 $\mathcal{T}$的一个邻域内，并令

$$g_\epsilon = \hat{\chi}\hat{g}_\epsilon \tag{3.20}$$

作为构造 $\hat{}\varphi_\pm$ 的结果，还可以验证

引理 3.9。 g_ϵ 满足以下估计：存在 $C>0$、 $\mu>0$ 以及一个常数族 $C_\alpha>0$、 $\alpha\in\mathbb{N}^2$，它们与 ϵ 无关，使得对所有 $\rho,\ \zeta\in U$，

$$|g_\epsilon(\rho)|\leq C|\log\epsilon|$$
$$|\partial^\alpha g_\epsilon(\rho)|\leq C_\alpha\left(\epsilon^{-|\alpha|/2}\right)$$
$$\frac{\exp(g_\epsilon(\rho))}{\exp(g_\epsilon(\zeta))}\leq C\left\langle\frac{\rho-\zeta}{\sqrt{\epsilon}}\right\rangle^\mu$$

最后这个不等式使得 e^{g_ϵ} 成为缩放变量 $\rho/\sqrt{\epsilon}$ 中的阶函数。

我们将专门讨论 $\epsilon=h^{2\delta}$ 的情形，其中 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$。因此，常数不依赖于 ϵ 十分重要。

4. Proof of Theorem 3

从现在起， $M_h(z)=M(z;\,h)$ 是一个满足定理 3 假设的开放双曲量子映射。回顾一下，我们记 $\alpha_h(z)$ 为 $M_h(z)$ 的振幅。我们的目标是理解 Fredholm 行列式的零点

$$\det\left(\mathrm{Id}-M_h(z)\right)$$

由于 $M_h(z)$ 的谱在共轭变换下不发生变化，我们将转而研究

$$M_t(z;h):=e^{-tG}M_h(z)e^{tG}\tag{4.1}$$

其中 t 将在下文选定，且 $G=\mathrm{Op}_h(g)$，其中 $g=g_{h^{2\delta}}$ 是构造于 (3.20) 的逃逸函数，并专门取 $\epsilon=h^{2\delta}$ 的情形，其中 $\delta=1/2-\varepsilon$，对于某个固定的 ε。为简化记号，下面不再写出 $M_t(z)$ 对 h 的依赖关系。进行这一共轭变换的作用，是将量子映射在俘获集的一个小邻域之外加以阻尼，从而使新的算子具有更好的微局部性质。为了利用 F 的双曲性以及俘获集的特殊结构，我们注意到，$\det(\mathrm{Id}-M_t(z))$ 的零点（按重数计）包含于下式的零点之中

$$\det\left(\mathrm{Id}-M_t(z)^{2N}\right)$$

我们将使用这一备注，其中指数 $N(h)$ 以受控方式依赖于 h，并假设对于某个 $C>0$，有 $N(h)\leq C\log\frac{1}{h}$。稍后将给出 $N(h)$ 的精确值。

4.1. Jensen 公式的应用。定理 3 的证明依赖于以下命题，其证明将在本节末尾给出。回顾一下，$\Omega=]-R,\ R[+i]-R,\ R[$，其中 R 固定但足够大（特别是 $R\geq 4$）。

命题 4.1。设 $\varepsilon>0$。令 $g=g_{h^{2\delta}}$ 为 (3.20) 中定义的逃逸函数（其中 $1/2-\delta=\varepsilon>0$）。注意到 $M_t(z)=e^{-t\,\mathrm{Op}_h(g)}M_h(z)e^{t\,\mathrm{Op}_h(g)}$。固定 $\beta\in]0,\ R[$。那么，存在 $t=t_\varepsilon>0$、 $C=C_\varepsilon>0$、 $\nu_\varepsilon>0$、 $\vartheta_\varepsilon>0$ 以及 $N=N_\varepsilon(h)\in\mathbb{N}$，使得

- 当 $\varepsilon\to 0$ 时，
$$\nu_\varepsilon=d_H+O(\varepsilon)\ ;\ \vartheta_\varepsilon=\frac{1-O(\varepsilon)}{6\lambda_{\max}}$$
- 在 ε 固定时，当 $h\to 0$， $N_\varepsilon(h)\sim\vartheta_\varepsilon\log(1/h)$
- 对所有充分小的 h，以及所有满足 $\mathrm{Im}(z)\in[-\beta,4]$ 的 $z\in\Omega$，

$$\mathrm{tr}\left(\left(M_t(z)^N\right)^*M_t(z)^N\right)\leq Ch^{-\nu_\varepsilon}h^{-\vartheta_\varepsilon P(-2\,\mathrm{Im}\,zt_{ret}-\varphi_u)}\tag{4.2}$$

备注。由于 $\mathrm{Im}\ z\geq-\beta$，且由于函数 $s\mapsto P(-2st_{ret}-\varphi_u)$ 是非增的，右端可估计为 $h^{-\nu_\varepsilon}h^{-\vartheta_\varepsilon P(2\beta t_{ret}-\varphi_u)}=h^{-d_H+p(\beta)-O(\varepsilon)}$。这正是函数 $p(\beta)=-\frac{1}{6\lambda_{\max}}P(2\beta t_{ret}-\varphi_u)$ 出现的地方。

借助这一命题，我们可以通过谱理论和复分析中的标准论证（主要借用了 [DD12]，[Dya19] 中的论证）完成定理 3 的证明。

定理 3 的证明。指数 d_H 已由 [NSZ14] 中的定理 4 给出。我们将重点讨论由 $p(\gamma+\varepsilon)-\varepsilon$ 带来的势函数改进。

我们固定 $0<r<R$ 和 $\gamma>0$，并注意到 $\Omega_0=\{|\,\mathrm{Re}\ z|\leq r,\mathrm{Im}(z)\in[-\gamma,2]\}$。对于 $\eta>0$，我们也注意到 $\Omega_\eta=\{|\,\mathrm{Re}\ z|<R,\mathrm{Im}\ z\in]-\gamma-\eta,4[\}$。由于 $\det(\mathrm{Id}-M(z;\,h))=\det(\mathrm{Id}-M_t(z))$，且由于

关系：$\mathrm{Id}-A^{2N}=(\mathrm{Id}-A)(\mathrm{Id}+A+\dots A^{2N-1})$，我们有（我们记 $m_T(\Omega_1)$ 为 $\det(I-T)$ 在 Ω_1，中按重数计数的零点个数），

$$m_M(\Omega_0)\le m_{M_t}(\Omega_0)\le m_{M_t^{2N}}(\Omega_0)$$

也就是说，只需估计 $f(z)=\det\left(\mathrm{Id}-M_t(z)^{2N}\right)$ 的零点数。

我们断言，若 H 是某个希尔伯特空间，且 $A:H\to H$ 是一个迹类算子，那么 $\log|\det(I-A^2)|\le\|A\|_{HS}^2=\mathrm{tr}(A^*A)$。事实上，若将 $\lambda_j(A)$（分别将 $\sigma_j(A)$）记作 A 的特征值（分别记作奇异值），并按重数重复计算，则有：

$$\log|\det(I-A^2)|=\sum_j\log(|1-\lambda_j(A^2)|)=\sum_j\log|1-\lambda_j(A)^2|\le\sum_j\log(1+\lambda_j(A)^2)\le\sum_j\lambda_j(A)^2$$

由韦尔不等式可知（例如，参见 [DZ19],附录 B.5.1）：

$$\sum_j\lambda_j(A)^2\le\sum_j\sigma_j(A)^2=\|A\|_{HS}^2=\mathrm{tr}(A^*A)$$

这就得到了所需结果。因此，我们有：

$$\log|\det\left(\mathrm{Id}-M_t(z)^{2N}\right)|\le\mathrm{tr}\left((M_t^N(z))^*M_t^N(z)\right)\tag{4.3}$$

已知命题 4.1 给出了它的控制。记 $z_0=i\in\Omega_0$。由黎曼映射定理，对于任意 $\eta>0$，存在一个保角映射 $c:\Omega_\eta\to\{|z|<1\}$，使得$c(z_0)=0$。$c(\Omega_0)\Subset c(\Omega_\eta)$，因此存在 $\delta>0$，使得 $c(\Omega_0)\subset\{|z|<1-\delta\}$。现在我们对函数 $f\circ c$应用詹森公式。设 $n(t)$ 表示 $f\circ c$ 在半径为 t 的圆盘内的零点个数（按重数计）。由詹森公式，有：

$$\int_0^{1-\delta/2}\frac{n(t)}{t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f\circ c((1-\delta/2)e^{i\theta})|d\theta-\log|f(z_0)|$$

因此，

$$\begin{aligned}m_M(\Omega_0)\le m_{M_t^{2N}}(\Omega_0)&\le n(1-\delta)\\&\le\frac{2}{\delta(1-\delta)}\int_{1-\delta}^{1-\delta/2}\frac{n(t)}{t}dt\\&\le\frac{2}{\delta(1-\delta)}\int_0^{1-\delta/2}\frac{n(t)}{t}dt\\&\le\frac{2}{\delta(1-\delta)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f\circ c((1-\delta/2)e^{i\theta})|d\theta-\log|f(z_0)|\right)\\&\le\frac{2}{\delta(1-\delta)}\left(\sup_{z\in\Omega_\eta}\log|f(z)|-\log|f(z_0)|\right)\end{aligned}$$

我们对依赖于 ε 的小参数 ε' 应用命题 4.1，从而得到指数 $\nu_{\varepsilon'}$，$\vartheta_{\varepsilon'}$。由于 $\nu_{\varepsilon'}=d_H+O(\varepsilon')$ 且 $\vartheta_{\varepsilon'}=\frac{1}{6\lambda_{\max}}+O(\varepsilon')$，我们可以将 ε' 取足够小，使得 $\nu_{\varepsilon'}-6\lambda_{\max}\vartheta_{\varepsilon'}p(\gamma+\eta)\le d_H-p(\gamma+\eta)+\varepsilon$。因此，我们有

$$\sup_{z\in\Omega_\eta}\log|f(z)|\le\sup_{z\in\Omega_\eta}h^{-\nu_{\varepsilon'}}h^{-\vartheta_{\varepsilon'}P(-2\operatorname{Im}zt_{ret}-\varphi_u)}\le h^{-d_H-\varepsilon+p(\gamma+\eta)}$$

由于映射 $\beta\mapsto p(\beta)$ 是非增的（回忆一下 (1.10) 中 $p(\beta)$ 的定义）。为处理项 $-\log|f(z_0)|$，由于 $\alpha_h(z_0)<1$ 在 $\mathcal{T}$ 附近，通过将 t 取得足够大，我们可以确保存在 $\rho\in[0,1[$，使得当 h 足够小时，$\|M_t(z_0)\|\le\rho$（参见 [NSZ14] 中引理 5.3 的证明）。因此，$\|M_t^{2N(h)}(z_0)\|\le C_t\rho^{2N}$，所以当 h 足够小时，$\|M_t^{2N}\|<1/2$。特别地，对于这样的 h，$\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}$ 可逆，并且

$$\left\|\left(\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}\right)^{-1}\right\|\le 2.$$

因此，有

$$\begin{aligned}
-\log|\det\left(\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}\right)| &= \log\left|\det\left(\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}\right)^{-1}\right| \\
&= \log\left|\det\left(\mathrm{Id}+M_t(z_0)^{2N}\left(\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}\right)^{-1}\right)\right| \\
&\leq \left|\left|M_t(z_0)^{2N}\left(\mathrm{Id}-M_t(z_0)^{2N}\right)^{-1}\right|\right|_{tr} \\
&\leq ||M_t(z_0)^{2N}||_{tr}\left|\left|\left(\mathrm{Id}-M_t(z)^{2N}\right)^{-1}\right|\right| \\
&\leq 2||M_t(z_0)^N||_{HS} \leq Ch^{-d_H-\varepsilon+p(\gamma+\eta)}
\end{aligned}$$

证明至此完成。

□

4.2. **命题 4.1 的证明**。我们开始证明命题 4.1。我们固定某个 $\varepsilon>0$，并固定复变量 z，记 M_h 和 α_h 代替 $M_h(z)$和 $\alpha_h(z)$：我们暂时忽略这种依赖关系，但记住对于某个 $\beta>0$，$\mathrm{Im}(z)\in[-\beta,4]$。特别地，$\alpha_h(z)=e^{-\mathrm{Im}\, zt_{ret}}+O\left(h^{-1}S_{0^+}\right)$ 在 $\mathcal{T}$的一个邻域内，并且下文估计中的常数可以选取得与 z无关。

约化为作用于 $\mathbb{R}$。我们记 $\mathbb{R}_J=\bigsqcup_{j=1}^J\mathbb{R}$ 和 $L^2(\mathbb{R}_J)=\bigoplus_{j=1}^J L^2(\mathbb{R})$。回忆一下，根据构造（见 2.2.3），$M_h$ 是形如（$M_{ij}(h)$）的算子，其中 $M_{ij}(h):L^2(Y_j)\to L^2(Y_i)$。对我们而言，在 $L^2(\mathbb{R})$ 上工作会更方便。为此，回忆一下，对于所有i，j，存在 $M_{ij}(h)\in I_{0^+}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathrm{Gr}(F_{ij})')$ 以及截断函数 Ψ_i，Ψ_j，使得作为算子有$L^2(Y_j)\to L^2(Y_i)$。

$$M_{ij}(h)=\Psi_i\tilde{M}_{ij}(h)\Psi_j+O(h^\infty)$$

并且作为算子 $L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$,

$$\tilde{M}_{ij}(h)=\Psi_i\tilde{M}_{ij}(h)\Psi_j+O(h^\infty)$$

其中，在上述两个等式中，$O(h^\infty)$ 对迹范数成立。注意，$M_\psi(h)=(\Psi_iM_{ij}(h)\Psi_j)_{ij}$。一旦 $N\leq C\log\frac{1}{h}$，$M(h)^N=M_\Psi(h)^N+O(h^\infty)$ 就作为算子 $L^2(Y)\to L^2(Y)$，而 $M_\Psi(h)^N=\tilde{M}(h)^N+O(h^\infty)$ 则作为算子 $L^2(\mathbb{R}_J)\to L^2(\mathbb{R}_J)$。经 e^{tG} 共轭变换后同样成立。特别地，这表明

$$\mathrm{tr}_{L^2(Y)}\left((M_t^N)^*M_t^N\right)=\mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}_J)}\left((\tilde{M}_t^N)^*\tilde{M}_t^N\right)+O(h^\infty)$$

Since 中的 $O(h^\infty)$ 最终会被吸收到我们所需的不等式中，因此只需处理 $M(h)$ 而不是 M_h。

从现在起，我们用 M_h 表示算子 $\tilde{M}_h:L^2(\mathbb{R}_J)\to L^2(\mathbb{R}_J)$。存在 Ψ_A,Ψ_D 使得

$$\mathrm{supp}\,\Psi_A\Subset\widetilde{A}\quad;\quad\mathrm{supp}\,\Psi_D\Subset\widetilde{D}$$

and

$$\Psi_AM_h=M_h+O(h^\infty);\quad M_h\Psi_D=M_h+O(h^\infty)$$

此外，当半经典算子的 h 依赖性显而易见时，我们将在记号中省略这一依赖性。特别地，我们将分别简写为 M、α 或 M_t，而不写成 M_h、α_h 和 $M_t(h)$。

记号。$T^*\mathbb{R}_J=\bigsqcup_{j=1}^J T^*\mathbb{R}$ 上的函数 a 是由函数组成的 J 元组 $(a_1,\dots,a_J)$。量子化算子 $\mathrm{Op}_h(a)$ 是一个对角矩阵，其对角线元素为 $\mathrm{Op}_h(a_j)$。a 的支集是各个 a_j 的支集的不交并，$\mathrm{Op}_h(a)$ 的波前集也是如此。

4.2.1. 精细量子划分。根据命题3.1，取 $\varphi=-2\,\mathrm{Im}\, zt_{ret}-\varphi_u$ 应用该命题，可知存在 $\eta>0$，使得对于 $\mathcal{T}$ 的任意开覆盖 $\mathcal{Q}$，若其直径小于 η，则有

$$\left|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log P_1(\varphi,n,\mathcal{Q})-P(\varphi)\right|\leq\varepsilon/3 \tag{4.4}$$

我们考虑某个 $\varepsilon_0>0$，并假设它足够小，从而满足下文将要出现、并将在本章余下部分始终沿用的所有假设。特别地，我们首先施加 $\varepsilon_0<\eta$。

由于 $\mathcal{T}$ 是全不连通的，因此存在一个由有限个两两不相交开集（属于 U）构成的 $\mathcal{T}$ 的开覆盖，其直径小于 ε_0：

$$\mathcal{T} \subset \bigcup_{\mathfrak{A}\in\mathcal{Q}} \mathfrak{A}$$

我们固定一些 $\rho_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{T} \cap \mathfrak{A}$，并假设对于所有 $\mathfrak{A} \in \mathcal{Q}$，存在 $j_{\mathfrak{A}}$，$l_{\mathfrak{A}}$，$m_{\mathfrak{A}} \in \{1, \dots, J\}$使得

$$\mathfrak{A} \subset B(\rho_{\mathfrak{A}}, 2\varepsilon_0) \subset \widetilde{A}_{j_{\mathfrak{A}} l_{\mathfrak{A}}} \cap \widetilde{D}_{m_{\mathfrak{A}} j_{\mathfrak{A}}} \subset U_{j_{\mathfrak{A}}}$$

ε_0 应当足够小，以便：

对于所有足够小的 h，• $e^{-\tau_m} \leq \alpha_h \leq e^{\tau_M}$位于某个 τ_m，τ_M 的 $B(\rho_{\mathfrak{A}}, 2\varepsilon_0)$ 中。

• 如果 ε_1 表示引理 3.4 中出现的那个 $2\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$，那么存在一个坐标图 $\kappa_{\mathfrak{A}}$：$B(\rho_{\mathfrak{A}}, 2\varepsilon_0) \to W_{\mathfrak{A}} = \kappa_{\mathfrak{A}}(B(\rho_{\mathfrak{A}}, 2\varepsilon_0))$，由引理 3.4 给出，并适应于该动力学，其中 $W_{\mathfrak{A}}$ 是以 0 为中心的 $T^*\mathbb{R}$ 的一个子集。

• 存在傅里叶积分算子 $B_{\mathfrak{A}}$，$B'_{\mathfrak{A}} \in I_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \overline{\mathrm{Gr}'(\kappa_{\mathfrak{A}})}) \times I_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \overline{\mathrm{Gr}'(\kappa_{\mathfrak{A}}^{-1})})$，在 $\kappa_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\right) \times \mathfrak{A}$ 的邻域内对 $\kappa_{\mathfrak{A}}$ 进行量化。

记号。我们仍将 $B_{\mathfrak{A}}$ 和 $B'_{\mathfrak{A}}$ 记作算子

$B_{\mathfrak{A}} = \mathrm{Diag}(0, \dots B_{\mathfrak{A}}, \dots, 0)$：$L^2(\mathbb{R}_J) \to L^2(\mathbb{R}_J)$；$B'_{\mathfrak{A}} = \mathrm{Diag}(0, \dots, B'_{\mathfrak{A}}, \dots, 0)$：$L^2(\mathbb{R}_J) \to L^2(\mathbb{R}_J)$，其中非零元素位于位置 $j_{\mathfrak{A}}$。当我们说 $(B_{\mathfrak{A}}, B'_{\mathfrak{A}})$ 在 $\kappa_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\right) \times \mathfrak{A}$ 的邻域内对 $\kappa_{\mathfrak{A}}$ 进行量化时，是指 $\overline{B'_{\mathfrak{A}} B_{\mathfrak{A}}} = I + O(h^\infty)$ 在 $\mathfrak{A}$ 的邻域内微局部地成立（也就是说，如果 $\mathrm{supp}(c)$ 包含于 $\mathfrak{A}$ 的该邻域内，并且 $C = \mathrm{Op}_h(c)$，那么 $B'_{\mathfrak{A}} B_{\mathfrak{A}} C = C + O(h^\infty)$；$\overline{C B'_{\mathfrak{A}} B_{\mathfrak{A}}} = C + O(h^\infty)$），并且 $B_{\mathfrak{A}} B'_{\mathfrak{A}} = I + O(h^\infty)$ 在 $\kappa_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ 的邻域内微局部地成立。

根据方程（4.4），存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|\frac{1}{n_0} \log P_1(\varphi, n_0, \mathcal{Q}) - P(\varphi)\right| \leq 2\varepsilon/3$$

因此，存在一个子划分 $(\mathcal{W}_q)_{q\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{Q}^{n_0}$，使得 $\mathcal{T} \subset \bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{W}_q$ 并且

$$\sum_{q\in\mathcal{A}} \sup_{\rho\in\mathcal{W}_q\cap\mathcal{T}} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(\rho))\right) \leq e^{n_0(P(\varphi)+\varepsilon)} \tag{4.5}$$

对于 $q \in \mathcal{A}$，我们可以找到一个开集 $\mathcal{V}_q \Subset \mathcal{W}_q$，使得 $\mathcal{T} \cap \mathcal{W}_q \subset \mathcal{V}_q$。$(\mathcal{V}_q)_{q\in\mathcal{A}}$ 仍然是 $\mathcal{T}$的一个覆盖。我们用以下内容补充该覆盖：

$$\mathcal{V}_\infty = \mathbb{R}_J \setminus \bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{V}_q \tag{4.6}$$

我们注意到 $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$。还要注意，对于 $q \in \mathcal{A}$，$\mathcal{W}_q$ 具有以下形式：

$$\mathfrak{A}_0 \cap F^{-1}(\mathfrak{A}_1) \cap \cdots \cap F^{-(n-1)}(\mathfrak{A}_{n-1})$$

特别地 $\mathcal{W}_q \subset \mathfrak{A}_0$：我们注意到 j_q、l_q、m_q、ρ_q、κ_q、B_q、B'_q、W_q，而不是 $j_{\mathfrak{A}_0}$、$l_{\mathfrak{A}_0}$、$m_{\mathfrak{A}_0}$、$\rho_{\mathfrak{A}_0}$、$\kappa_{\mathfrak{A}_0}$、$B_{\mathfrak{A}_0}$、$B'_{\mathfrak{A}_0}$、$W_{\mathfrak{A}_0}$。然后，对于 $q \in \mathcal{A}$，我们考虑一个截断函数 $\chi_q \in \mathsf{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}_J, [0,1])$，使得 $\mathrm{supp}(\chi_q) \subset \mathcal{W}_q$，并且 $\chi_q \equiv 1$在 $\mathcal{V}_q$的某个邻域内。最后，我们注意到 $\chi_\infty = 1 - \sum_{q\in\mathcal{A}} \chi_q$。我们注意到，当 $q \in \mathcal{A}$ 时，χ_q 仅支集于 $\mathbb{R}_J$ 中 $\mathbb{R}$ 的一个副本内，而 χ_∞ 在 $\mathbb{R}_J$中 $\mathbb{R}$ 的所有副本内均具有非零分量。此外，$\mathrm{supp}(\chi_\infty) \subset \mathcal{V}_\infty$。

然后我们将符号 χ_q、$q \in \mathcal{A}_\infty$ 量化：

$$A_q = \mathrm{Op}_h(\chi_q) \tag{4.7}$$

注意，对于 $q \in \mathcal{A}$、A_q，这是一个仅含一个非零系数的对角矩阵。族 $(A_q)_{q\in\mathcal{A}_\infty}$ 满足以下性质：

$$\sum_{q\in\mathcal{A}_\infty} A_q = \mathrm{Id} \quad ; \quad \forall q \in \mathcal{A}_\infty, ||A_q|| \leq 1 + O(h) \tag{4.8}$$

由于 $M^{n_0} = \sum_{q\in\mathcal{A}_\infty} M^{n_0} A_q$，我们可以写成

$$M^{nn_0} = \sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}_\infty^n} M_{\mathbf{q}}$$

其中，对于$\mathbf{q} = q_0 \dots q_{n-1} \in \mathcal{A}_\infty^n$，

$$M_{\mathbf{q}} := M^{n_0} A_{q_{n-1}} \dots M^{n_0} A_{q_0} \tag{4.9}$$

对于$\mathbf{q} = q_0 \dots q_{n-1} \in \mathcal{A}_\infty^n$，我们还定义了一族精细邻域，形成了 $\mathcal{T}$的精细覆盖，

$$\mathcal{V}_{\mathbf{q}}^- = \bigcap_{i=0}^{n-1} F^{-in_0}(\mathcal{V}_{q_i}) \quad ; \quad \mathcal{V}_{\mathbf{q}}^+ = F^{nn_0}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{q}}^-\right) = \bigcap_{i=0}^{n-1} F^{(n-i)n_0}(\mathcal{V}_{q_i}) \tag{4.10}$$

并且将 $\mathcal{V}$ 替换为 $\mathcal{W}$，采用相同的定义。粗略地说，我们预期每个算子 $M_{\mathbf{q}}$ 都从 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$ 作用到 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^+$，在其他地方则可忽略。结合 (4.8)、$\alpha_h \le e^{\tau_M}$ 属于 $B(\rho_{\mathfrak{A}})$ 这一事实，以及关于 M 的界，以下估计成立：

$$||M_{\mathbf{q}}||_{L^2 \to L^2} \le \left(e^{\tau_M} + O(h^{1-})\right)^{nn_0} \tag{4.11}$$

一旦 $|n| \le C_0|\log h|$，我们就有 $||M_{\mathbf{q}}||_{L^2\to L^2} \le Ce^{nn_0\tau_M}$，其中某个 C 依赖于 C_0 和 α_h 的有限个半范数，进而

$$||M_{\mathbf{q}}|| \le Ch^{-K}$$

其中某个 $C, K > 0$ 依赖于 C_0 和 α_h。

4.2.2. 局部不稳定雅可比。 我们希望定义与这些细化划分相关联的不稳定雅可比。固定一个字 $\mathbf{q} = q_0 \dots q_{n-1} \in \mathcal{A}^n$，并假设 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^- \neq \emptyset$。固定 $\rho \in \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$。根据 $\mathcal{W}_{q_i}$的定义，存在 $\mathfrak{A}_{0,i}, \dots, \mathfrak{A}_{n_0-1,i} \in \mathcal{Q}$，使得

$$\mathcal{W}_{q_i} = \bigcap_{j=0}^{n_0-1} F^{-j}(\mathfrak{A}_{j,i})$$

因此，对于 $0 \le l \le n' = n \times n_0 - 1$，存在 $\rho_l \in \mathcal{T}$使得 $d(\rho_l, F^l(\rho)) \le 2\varepsilon_0$。因此 e,

$$d(F(\rho_l), \rho_{l+1}) \le d(F(\rho_l), F^{l+1}(\rho)) + d(F^{l+1}(\rho), \rho_{l+1}) \le C\varepsilon_0$$

也就是说，$(\rho_0, \dots, \rho_{n'})$ 是一个 $C\varepsilon_0$ 伪轨道。假设 $\delta_0 > 0$ 是一个较小的固定参数。根据影子引理（见 [HK95], 第 18.1 节），如果 ε_0 足够小，则$(\rho_0, \dots, \rho_{n'})$可由 F的一条轨道δ_0 跟踪：存在 $\rho' \in \mathcal{T}$，使得对于 $i \in \{0, \dots, n'\}$，$d(\rho_i, F^i(\rho')) \le \delta_0$。因此，$d(F^i(\rho), F^i(\rho')) \le \delta_0 + C\varepsilon_0$。若 ρ_2是 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$中的另一点，对于 $i = 0, \dots, n'$，$d(F^i(\rho_2), F^i(\rho')) \le 2\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 + \delta_0$。为方便起见，令 $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0 + \delta_0 + C\varepsilon_0$，并注意到 ε_2可以根据 ε_0任意小。因此，我们证明了以下结论

引理4.1。 若 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^- \neq \emptyset$，则存在 $\rho' \in \mathcal{T}$使得 $\forall l \in \{0, \dots, nn_0 - 1\}$，并且对于任意 $\rho \in \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$，$d(F^l(\rho), F^l(\rho')) \le \varepsilon_2$。

我们固定任意一个满足该引理结论的 ρ'，并任意设定（另请回忆式（3.3）中对于 $\rho \in \mathcal{T}$ 的 $J_n^u(\rho)$ 定义）

$$J_{\mathbf{q}}^u := J_{nn_0}^u(\rho') = \prod_{j=0}^{n-1} J_{n_0}^u(F^{jn_0}(\rho')) \tag{4.12}$$

若 ρ_1' 是另一个满足该结论的点，则对于 $i \in \{0, \dots, n'\}$，我们有 $d(F^i(\rho'), F^i(\rho_1')) \le 2\varepsilon_2$，并且根据推论（3.1），

$$J_{nn_0}^u(\rho') \sim J_{nn_0}^u(\rho_1')$$

因此，除一个全局乘法常数外，该不稳定雅可比的定义与 ρ' 的选择无关。注意，若 $\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^- \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$，任意 $\rho' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$ 都满足引理4.1的结论，并且 $J_{\mathbf{q}}^u \sim J_{nn_0}^u(\rho')$。

关于这些局部不稳定雅可比，我们有以下事实：

引理 4.2. 如果 ε_0 足够小，则有以下结论：存在 $C > 0$，使得对于所有$\mathbf{q} \in \mathcal{A}^n$ 以及所有 $\rho \in \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$，都有

- $||d_\rho F^{nn_0}|| \le CJ^u{}_{\mathbf{q}}$
- $d(F^{nn_0-1}(\rho), \mathcal{T}_+) \le C\left(J^u{}_{\mathbf{q}}\right)^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+)$
- $d(\rho, \mathcal{T}_-) \le C\left(J^u{}_{\mathbf{q}}\right)^{-1} d(F^{nn_0-1}(\rho), \mathcal{T}_-)$

证明。这三点是引理3.3的直接推论。第一点很容易证明。关于另外两点，首先回忆一下， $\mathcal{T}_+$ （分别地， $\mathcal{T}_-$）在 $\mathcal{T}$的某个邻域内等于局部不稳定流形（分别为稳定流形）的并。考虑第二个不等式。第三个不等式的证明类似，只需反转时间方向即可。固定 $\zeta \in \mathcal{T}$使得 $d(\rho,\mathcal{T}_+) = d(\rho,W_u(\zeta))$以及 $d(\zeta,\rho) \le 2\varepsilon_0$。回忆由引理4.1可知，存在 ρ'使得 $\forall i \in \{0,\dots,nn_0-1\}$且$d(F^i(\rho)\ F^i(\rho')) \le \varepsilon_2$。因此，我们考虑唯一的点 $\zeta' \in W_u(\zeta) \cap W_s(\rho')$。由于 $\zeta' \in W_s(\rho')$， $d(F^i(\zeta')\ F^i(\rho')) \le CJ_i^s(\rho)d(\rho',\zeta')$对所有 $0 \le i \le nn_0-1$均成立。如果 ε_0足够小，我们可以假设对于 $0 \le i \le n-1$ （其中 ε_1出现在引理3.3中），$CJ_i^s(\rho)d(\rho',\zeta') \le \frac{1}{2}\varepsilon_1$。因此， $J^u_{nn_0}(\zeta') \sim J^u_{nn_0}(\rho') \sim J^u_{\mathbf{q}}$。此外， $d(F^i(\rho)\ F^i(\zeta')) \le \frac{1}{2}\varepsilon_1+\varepsilon_2$对所有 $0 \le i \le nn_0-1$均成立。因此，如果$\varepsilon_2 \le \frac{1}{2}\varepsilon_1$,

$$d(F^{nn_0-1}(\rho),\mathcal{T}_+) \le d(F^{nn_0-1}(\rho),W_u(F^n(\zeta'))) \le CJ^u_{nn_0}(\zeta')d(\rho,W_u(\zeta')) \le CJ^u_{\mathbf{q}}d(\rho,\mathcal{T}_+)$$

□

4.2.3. 参数说明。 本小节中，我们介绍将要使用的参数。回想一下，ε 已固定。我们令 $\delta = 1/2-\varepsilon$： 它与逃逸函数 g的正则性有关。出于技术原因，我们还引入

$$\delta_0 = \frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2};\ \delta_1 = \delta-\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}-\frac{3\varepsilon}{2} \tag{4.13}$$

满足 $\delta_1 < \delta < \delta_0 < 1/2$。回想一下， n_0 已在 (4.5) 中选定，并且

$$\lambda_{\max} = \sup_{\rho\in\mathcal{T}} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log J_n^u(\rho)$$

我们将命题 4.1 中出现的参数 ϑ_ε 精确定义为

$$\vartheta_\varepsilon = \frac{1-4\varepsilon}{6\lambda_{\max}(1+\varepsilon)^2} \tag{4.14}$$

ϑ_ε 的精确值将在下文中用到：重要的是 $\vartheta_\varepsilon = \frac{1}{6\lambda_{\max}} - O(\varepsilon) < 1/6\lambda_{\max}$。最后，我们令——

$$n = n(h) = \left\lfloor \frac{\vartheta_\varepsilon}{n_0}\log\frac{1}{h} \right\rfloor$$

它满足

$$e^{\lambda_{\max}(1+\varepsilon)nn_0} \le h^{-\frac{1-4\varepsilon}{6(1+\varepsilon)}}$$

特别地，我们假设 ε 足够小，以确保

$$h^{\delta_0}h^{-\frac{1-4\varepsilon}{6(1+\varepsilon)}} \le h^{1/3}$$

这将限制演化后相干态的宽度。

4.2.4. 将 L^2界约化为演化后相干态的界。 我们可以找到一个统一的 $T_0 \in \mathbb{N}$ ，使得如果 $\rho \in \mathcal{V}_\infty$，则存在 $k \in \{-T_0,\dots,T_0\}$，使得 $F^k(\rho)$“落入”孔洞中——也就是说，要么存在 $k \in \{1,\dots,T_0\}$，使得 $F^i(\rho) \in \text{‹}D$，对 $1 \le i \le k-1$ 成立，并且 $F^k(\rho) \in U \setminus \text{‹}D$；要么存在 $k \in \{1,\dots,T_0\}$，使得 $F^{-i}(\rho) \in \widetilde{A}$，对 $1 \le i \le k-1$ 成立，并且 $F^{-k}(\rho) \in U \setminus \widetilde{A}$。根据傅里叶积分算子的标准性质， M^{T_0} 的每个分量 $(M^{T_0})_{ij}$ 都是一个傅里叶积分算子，并与 F^{T_0}的分量 $(F^{T_0})_{ij}$ 相关联。特别地，$\mathrm{WF}_h'(M^{T_0}) \subset \mathrm{Gr}(F^{T_0})$。

让我们研究 $M^{2T_0+nn_0} = M^{T_0}M^{nn_0}M^{T_0}$，并将 $M^{nn_0} = \sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}_\infty^n} M_{\mathbf{q}}$ 分解。如果 $\mathbf{q} = q_0\dots q_{n-1} \in \mathcal{A}_\infty^n$，并且存在一个指标 $i \in \{0,\dots,n-1\}$ 使得 $q_i = \infty$，则可以提取出该指标 i ，并将 A_{q_i} 夹在两个傅里叶积分算子 M_1， M_2之间；这两个算子属于与 F^{T_0}相关的有限族傅里叶积分算子，因此可以写成

$$M^{T_0}M_{\mathbf{q}}M^{T_0} = B_1M_1A_\infty M_2B_2$$

其中 B_1， B_2 满足 L^2-界：

$$||B_1|| \times ||B_2|| \le C(||\alpha_h||_\infty)^{nn_0-1} = O(h^{-K})$$

对于某个整数 K，并且我们有 $M_1 A_\infty M_2 = O(h^\infty)$，其中的常数可以选取得与$\mathbf{q}$无关。因此，$M^{T_0} M_{\mathbf{q}} M^{T_0}$也同样成立。所以，记住$|\mathcal{A}|^n = O(h^{-K})$对某个 $K > 0$ 成立，我们可以写成：

$$\begin{aligned} M^{nn_0+2T_0} &= \sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}_\infty^n} M^{T_0} M_{\mathbf{q}} M^{T_0} \\ &= \sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n} M^{T_0} M_{\mathbf{q}} M^{T_0} + O(h^\infty) \\ &= M^{T_0} \left(\sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n} M_{\mathbf{q}} \right) M^{T_0} + O(h^\infty) \end{aligned}$$

注意

$$\mathfrak{M} = M^{n_0}(\mathrm{Id} - A_\infty) = M^{n_0} \sum_{q\in\mathcal{A}} A_q \tag{4.15}$$

我们证明了以下引理：

引理 4.3. 存在 $T_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$M^{2T_0+nn_0} = M^{T_0} \mathfrak{M}^n M^{T_0} + O(h^\infty)$$

现在我们来看看这个等式对 $M^{2T_0+nn_0}$ 的迹意味着什么。在以下计算中，我们使用：如果 A 是希尔伯特–施密特算子且 B 有界，

(i) $\mathrm{tr}(A^*A) = ||A||_{HS}^2$；(ii) $||AB||_{HS} \leq ||B|| \times ||A||_{HS}$；$||BA||_{HS} \leq ||B|| \times ||A||_{HS}$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\left(M_t^{2T_0+nn_0} \right)^* M_t^{2T_0+nn_0} \right) &= ||M_t^{2T_0+nn_0}||_{HS}^2 \\ &= \left|\left| M_t^{T_0} \mathfrak{M}_t^n M_t^{T_0} \right|\right|_{HS}^2 + O(h^\infty) \\ &\leq ||M_t^{T_0}||^4 ||\mathfrak{M}_t^n||_{HS}^2 + O(h^\infty) \\ &\leq ||M_t^{T_0}||^4 \,\mathrm{tr}\left((\mathfrak{M}_t^n)^* \mathfrak{M}_t^n \right) + O(h^\infty) \end{aligned}$$

因此，只需为 $\mathrm{tr}\left((\mathfrak{M}_t^n\right)$ 找到预期的上界 (4.2)，即可为 $\mathrm{tr}\,\ddot{A}\ \left(M_t(z)^N\right)^* M_t(z)^N\ddot{a}$ 获得同类上界。

局部适配坐标图中的演化。我们将关注相干态在 $\mathfrak{M}$ 的作用下的演化。使用坐标图 κ_q 会更加方便，在这些坐标图中， F 的作用很好地适配于位置–动量坐标 $(x,\ \xi)$。为此，我们首先写出

$$\mathfrak{M}_t^n = e^{-tG} \mathfrak{M}^{n-1} \sum_{q\in\mathcal{A}} M^{n_0} A_q e^{tG}$$

回顾一下， $B_q' B_q = I + O(h^\infty)$ 在 $\mathrm{supp}(a_q)$ 附近是微局部地成立的，因此，

$$\mathfrak{M}_t^n = e^{-tG} \mathfrak{M}^{n-1} \sum_{q\in\mathcal{A}} M^{n_0} A_q B_q' B_q e^{tG} B_q' B_q + O(h^\infty)$$

注意到

$$\tilde{E}_t = B_q e^{tG} B_q' \tag{4.16}$$

我们还固定 $\widetilde{A}_q = \mathrm{Op}_h(\tilde{a}_q)$，使得 $\mathrm{WF}_h(\quad \widetilde{A}_q) \subset \mathcal{W}_q$ 并且 $\tilde{a}_q = 1$ 靠近 $\mathrm{supp}(\chi_q)$。这给出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(\left(\mathfrak{M}_t^n\right)^* \mathfrak{M}_t^n\right) &= \sum_{q,p\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}\left(\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_pB_p'\tilde{E}_tB_p\widetilde{A}_p\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_tB_q\widetilde{A}_q\right) + O(h^\infty) \\
&= \sum_{q,p\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}\left(B_p^*\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_pB_p'\tilde{E}_t\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_tB_q\widetilde{A}_q\widetilde{A}_p^*\right) + O(h^\infty) \\
&= \sum_{q\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}\left(B_q^*\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_tB_q\widetilde{A}_q\widetilde{A}_q^*\right) + O(h^\infty) \\
&\leq CQ \sup_{q\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}\left(\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right) + O(h^\infty)
\end{aligned}$$

其中 C 满足：对所有 $q \in \mathcal{A}$（以及 $0 < h \leq 1$），都有 $C_0||B_q|| \times ||B_qA_qA_q^*|| \leq C$，并且 $Q = |\mathcal{A}|$。从第二行到第三行的推导成立，因为当 $q \neq p$ 时，$A_qA_p^* = O(h^\infty)$，这是由于 $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{W}_q \neq \emptyset$。这些计算表明，只需对 q 一致地控制迹

$$\mathrm{tr}\left(\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right) \tag{4.17}$$

因为我们现在有：

$$\mathrm{tr}\left(\left(M_t^{2T_0+nn_0}\right)^* M_t^{2T_0+nn_0}\right) \leq CQ \sup_{q\in\mathcal{A}} \mathrm{tr}\left(\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right) + O(h^\infty) \tag{4.18}$$

从现在起，我们将用 ρ，ζ 等表示 U 中的点，并用 $\hat{\rho}$，ζ 等表示它们在局部坐标图κ_q中的像。引理 2.2 的单位分解在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子层面成立，并可推广到作用于 $L^2(\mathbb{R}_J)$ 的矩阵算子，具体如下：

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2\pi h} \int_{T^*\mathbb{R}} < A_{jj}\varphi_{\hat{\rho}}, \varphi_{\hat{\rho}} > d\hat{\rho}$$

因此，如果 $K = e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(K^*K\right) &= \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2\pi h} \int_{T^*\mathbb{R}} < (K^*K)_{jj}\varphi_{\hat{\rho}}, \varphi_{\hat{\rho}} > d\hat{\rho} \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq J} \frac{1}{2\pi h} \int_{T^*\mathbb{R}} < K_{ij}\varphi_{\hat{\rho}}, K_{ij}\varphi_{\hat{\rho}} > d\hat{\rho}
\end{aligned}$$

由于 A_qB_q' 是对角矩阵，除非 wh 之外，仅在位置 j_q, $B_{ij} = 0$ 处有一个非零对角元 a_{j_q}，我们可以写成：

$$\mathrm{tr}\left(\left(e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}MA_qB_q'\right)^* e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\right) = \frac{1}{2\pi h} \int_{T^*\mathbb{R}} \left|\left|e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\tilde{\varphi}_{\hat{\rho}}\right|\right|^2 d\hat{\rho} \tag{4.19}$$

其中，$\tilde{\varphi}_{\hat{\rho}}$ 是仅有一个非零项的列向量，该项在位置 j_q 的值为 $\varphi_{\hat{\rho}}$。

4.2.5. 证明结束。改进的分形韦尔定律证明的主要要素，也是本文的主要创新之处，是对

$$w(\hat{\rho}) := \left|\left|e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t\tilde{\varphi}_{\hat{\rho}}\right|\right|^2 \tag{4.20}$$

该权重 w 取决于参数 t，该参数控制逃逸函数的权重。我们省略对这种依赖关系的显式说明：事实上，重要的是，一旦 t 固定得足够大，w 就会满足命题 4.2 中预期的衰减。为陈述这一界，令我们针对$\rho \in \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$引入，

$$\Pi_{\alpha,\mathbf{q}}(\rho) = \prod_{i=0}^{nn_0-1} \alpha\left(F^i(\rho)\right)$$

其中

$$\alpha(\rho) = \exp\left(-\operatorname{Im} z t_{ret}(\rho)\right) \ ; \ \rho \in \bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{W}_q \tag{4.21}$$

因此，对于 $\rho \in \bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{W}_q$，我们有 $\alpha_h(\rho) = \alpha(\rho) + O\ddot{A}h^{1^-} S_{0^+}\ddot{a}^{\infty}_{h}\ddot{a}$。我们还引入以下 $\mathcal{T}$ 的邻域

$$\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} = \left\{\rho\,;\, d(\rho,\mathcal{T}_-) \le h^{\delta}, d(\rho,\mathcal{T}_+) \le h^{\delta_1}\right\} \subset U \subset T^*\mathbb{R}_J \tag{4.22}$$

命题 4.2. 对于任意 $L > 0$，存在 $t = t(\varepsilon, L)$，使得以下结论成立。设 $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^2$。若 $\hat{\rho} \notin \kappa_q(\mathcal{W}_q)$，则 $w(\hat{\rho}) = O\ddot{A}\ddot{a}^{\infty}_{\langle\rho\rangle^{\wedge}}\ddot{a}$，且常数是一致的。否则，假设 $\hat{\rho} = \kappa_q(\rho) \in \kappa_q(\mathcal{W}_q)$。我们有

(1) 若对所有 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}^{n+1}$, $\rho \notin \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$，则 $w(\hat{\rho}) = O(h^{\infty})$，且常数是一致的。(2) 否则，存在唯一的 $\mathbf{q} \in \mathcal{A}^{n+1}$，使得 $\rho \in \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$。在这种情况下，对于某个 e
存在与参数无关的常数 $C > 0$ 和 $h_0 > 0$，对于 $0 < h \le h_0$，
有：(i) 若 $\rho \notin \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$, $w(\hat{\rho}) \le h^L$ ；(ii) 若 $\rho \in \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$,

$$w(\hat{\rho}) \le C\left(\Pi_{\alpha,\mathbf{q}}(\rho)\right)^2 \left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{d_H-1+\varepsilon} h^{(\delta_0-\delta)(d_H+\varepsilon)+\delta-1/2}.$$

这一关键命题将在第 5 节中证明。我们还需要以下命题：

命题 4.3。设 $\mathbf{q} = q_0 \dots q_n \in \mathcal{A}^{n+1}$，满足 $n = n(h)$，并假设 $\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}} \neq \emptyset$。那么，存在某个与参数无关的常数 $C > 0$，当 h 足够小时，以下估计成立：

$$\operatorname{Vol}\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} \cap \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}\right) \le Ch^{2\delta_1} h^{-(\delta+\delta_1)(d_H+\varepsilon)} \left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-(d_H+\varepsilon)}.$$

证明。我们假设 $\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}} \neq \emptyset$。根据引理 4.2，存在 $\rho_- \in \mathcal{T}$，使得对于所有$\rho \in \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$，

$$d(\rho, W_s(\rho_-)) \le C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} \varepsilon_0 \tag{4.23}$$

我们还考虑满足 $d(\rho,\ \rho_+) \le 2h^{\delta_1}$ 的 $\rho_+ \in \mathcal{T}$。特别地，$d(\rho_-,\ \rho_+) \ll \varepsilon_0$，因此我们可以取一点 $\rho_O \in W_s(\rho_-) \cap W_u(\rho_+)$，并决定在以 ρ_O 为中心的适配坐标图 κ 中进行工作。我们希望估计 $\kappa\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} \cap \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}\right)$ 的体积。假设 $\mathcal{W}_q$ 包含在该坐标图的定义域中（$\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$ 也是如此），并选择该坐标图，使得 $W_s(\rho_-) = W_s(\rho_O)$ 的像为 $\{(0,\ \xi)\ \xi \in V\}$：根据引理 3.4，这是可能的（用 F^{-1} 替代 F，即可将不稳定流形变为稳定流形）[6]。根据 (4.23)，存在某个与参数无关的常数 $C' > 0$，使得

$$(x,\xi) \in \kappa_q(\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}) \implies |x| \le C'\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} \varepsilon_0$$

考虑 $\Xi(\mathcal{T}) = \{\xi \in V, \kappa_q^{-1}(0,\ \xi) \in \mathcal{T}\}$，并用以 ξ_1、……、$\xi_{N_s} \in \Xi(\mathcal{T})$ 为中心、大小为 $2h^{\delta_1}$ 的 N_s 个区间覆盖它。由于 $\dim \mathcal{T} \cap \overline{W_s(\rho_-)} = d_H$，根据命题 3.3，我们可以选取 N_s 使得

$$N_s \le Ch^{-\delta_1(d_H+\varepsilon)} \tag{4.24}$$

其中某个一致常数为 $C > 0$。对于 $1 \le i \le N_s$，注意到 $\sigma_i = \kappa^{-1}(0,\ \xi_i)$。经过 σ_i 的局部不稳定流形可以在坐标图 κ中写成函数图像 $\{(x,\ g_i(x))\ x \in U_i\}$。注意到

$$X_i(\mathcal{T}) = \{x \in U_i, \kappa^{-1}(x, g_i(x)) \in \mathcal{T}, |x| \le 2C'\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1}\varepsilon_0\}$$

并且我们用以 $x_{i,\ j}$、$1 \le j \le N_{i,\ u}$为中心、大小为 $2h^{\delta}$的 $N_{i,\ u}$ 个区间覆盖 $X_i(\mathcal{T})$。引理 3.6 表明，我们可以取 $N_{i,\ u}$ 使得对所有 $1 \le i \le N_s$,

$$N_{i,u} \le C\left(h^{\delta} J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-d_H-\varepsilon} \tag{4.25}$$

对于某个统一常数 C。

对于 $1 \le i \le N_s$ 和$1 \le j \le N_{i,\ u}$，我们还要注意到 $\xi_{i,\ j} = g_i(x_{i,\ j})$。我们断言，存在一个与之无关的常数 $C > 0$，使得

[6]事实上，无需假设 κ 是辛的，我们可以假设 $W_s(\rho_O)$ 和 $W_u(\rho_O)$ 都已校正。

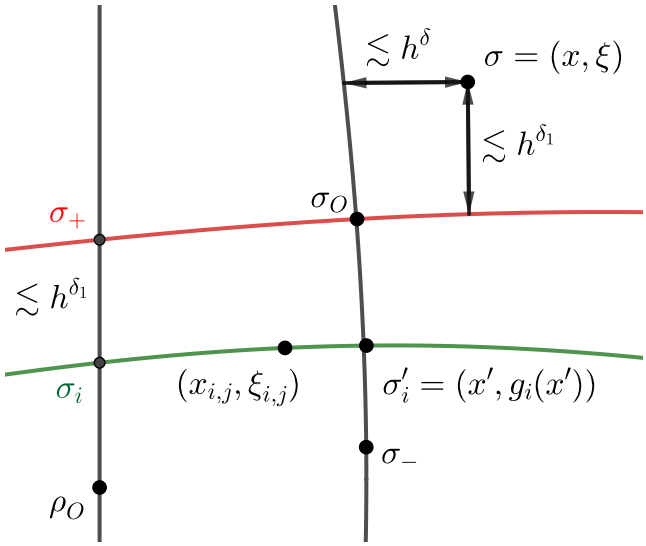


图 6. 命题 4.26 的证明中引入的不同点。为简化图示，我们对点 σ 及其经 κ 映射后的像使用相同的记号。

$$\kappa\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} \cap \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^{-}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{N_s} \bigcup_{j=1}^{N_{i,u}} [x_{i,j} - Ch^{\delta_1}, x_{i,j} + Ch^{\delta_1}] \times [\xi_{i,j} - Ch^{\delta_1}, \xi_{i,j} + Ch^{\delta_1}] \tag{4.26}$$

将该断言与关于 N_s (4.24) 以及 $N_{i,u}$ (4.25) 的界结合起来，便可立即推出该命题。现在我们转而证明这一断言。

考虑 $(x, \xi) = \kappa(\sigma) \in \kappa\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} \cap \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^{-}\right)$。我们引入若干不同的点（建议读者结合图 6 跟进各个步骤）：

- 由于 $d(\sigma, \mathcal{T}_+) \le h^{\delta_1}$，存在 $\sigma_+ \in \mathcal{T}$ 使得 $d(\sigma, W_u(\sigma_+)) \le h^{\delta_1}$。我们可以用交集 $W_u(\sigma_+) \cap W_s(\rho_O)$ 中的唯一一点替换 σ_+，并记 $\kappa(\sigma_+) = (0, \xi_+)$。
- 由于 $\xi_+ \in \Xi(\mathcal{T})$，存在 $i \in \{1, \dots, N_s\}$ 使得 $|\xi_i - \xi_+| \le h^{\delta_1}$。特别地，$d(\sigma_i, \sigma_+) \le Ch^{\delta_1}$。
- 由于 $d(\sigma, \mathcal{T}_-) \le h^{\delta}$，存在 $\sigma_- \in \mathcal{T}$ 使得 $d(\sigma, W_s(\sigma_-)) \le h^{\delta}$。我们注意到 σ_O $W_s(\sigma_-) \cap W_u(\sigma_+)$ 中的唯一点。
- 我们还注意到 σ_i' $W_s(\sigma_-) \cap W_u(\sigma_i)$ 中的唯一点。由于全纯映射具有 Lipschitz 连续性（且 Lipschitz 常数一致），

$$d(\sigma_O, \sigma_i') \le Cd(\sigma_+, \sigma_i) \le Ch^{\delta_1}$$

- 由于 σ_O 附近的局部乘积结构，我们有 $d(\sigma, \sigma_O)^2 \sim d(\sigma, W_s(\sigma_O))^2 + d(\sigma, W_u(\sigma_O))^2 \sim h^{2\delta_1} + h^{2\delta}$。由此得到 $d(\sigma, \sigma_O) \le Ch^{\delta_1}$，因此 $d(\sigma_i', \sigma) \le Ch^{\delta_1}$。
- 记 $\sigma_i' = (x', g_i(x'))$。由于 $x' \in X_i(\mathcal{T})$，存在 $j \in \{1, \dots, N_{i,u}\}$ 使得 $|x_{i,j} - x'| \le h^{\delta}$。于是我们有

$$d(\sigma_i', \kappa((x_{i,j}, \xi_{i,j})) \le C|x_i' - x_{i,j}| \le Ch^{\delta}$$

- 我们得出，$d(\sigma, \kappa((x_{i,j}, \xi_{i,j})) \le Ch^{\delta_1}$，从而得到 $|x - x_{i,j}| \le Ch^{\delta_1}$，$|\xi - \xi_{i,j}| \le Ch^{\delta_1}$。

□

现在我们可以完成主要迹估计的证明。令 $N = 2T_0 + n(h)$。我们希望将命题 4.2 的估计代入（4.18）和（4.19）中。对于 $q \in \mathcal{A}$，注意到

$$O_q = \kappa_q \left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} \cap \bigcup_{\mathbf{q} \in \mathcal{A}^{n+1}} \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^{-} \right)$$

并记为

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\left(M_t^N\right)^* M_t^N\right) &\leq C \sup_{q\in\mathcal{A}} \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} w(\hat{\rho})d\hat{\rho}\\ &\leq \frac{C}{h}\sup_{q\in\mathcal{A}}\left(\int_{O_q} w(\hat{\rho})d\hat{\rho}+\int_{\mathbb{R}^2\setminus O_q} w(\hat{\rho})d\hat{\rho}\right)\\ &\leq \sup_{q\in\mathcal{A}}\left(Ch^{(\delta-\delta_0)(d_H+\varepsilon)+\delta-3/2}\sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^{n+1}}\int_{\kappa_q\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1}\cap\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-\right)}\left(\Pi_{\alpha,\mathbf{q}}(\rho)\right)^2\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{d_H-1+\varepsilon}d\hat{\rho}\right)+O(h^L)\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，因为 O_q 之外的积分可以变为 $O(h^L)$，通过正确选择t，使 L 任意大。确实，利用命题 4.2，$\kappa_q(\mathcal{W}_q)$之外的部分为 $O(h^\infty)$，而 $\kappa_q(\mathcal{W}_q)$上的积分 $\setminus O_q$ 为 $O(h^L)$。

令 $\mathbf{q}=q_0\dots q_{n-1}\in\mathcal{A}^n$。记 $\mathcal{W}_{q_i}=\bigcap_{j=0}^{n_0-1}F^{-1}(\mathfrak{A}_{i,j})$，其中 $\mathfrak{A}_{i,j}\in\mathcal{Q}$，且对于 $\rho\in\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$。注意 $\varphi=-2\operatorname{Im} zt_{ret}-\varphi_u$，并回顾 $\alpha=\exp(-\operatorname{Im} zt_{ret})$。关于 $\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n$ 和 $\rho\in\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-$，我们一致有，

$$\begin{aligned}\left(\Pi_{\alpha,\mathbf{q}}(\rho)\right)^2\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1} &\leq C\left(\Pi_{\alpha,\mathbf{q}}(\rho)\right)^2\left(J_{nn_0}^u(\rho)\right)^{-1}\\ &\leq C\prod_{i=0}^{n-1}\left(\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^{in_0+j}(\rho))\right)\right)\\ &\leq C\prod_{i=0}^{n-1}\left(\sup_{\rho_i\in\mathcal{W}_{q_i}}\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^j(\rho_i))\right)\right)\\ &\leq C\prod_{i=0}^{n-1}\left(C_0\sup_{\rho_i\in\mathcal{W}_{q_i}\cap\mathcal{T}}\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^j(\rho_i))\right)\right)\end{aligned}$$

最后一个不等式对某个 $C_0>0$ 成立，且与 n_0（以及 z）无关，因为 φ 是赫尔德连续的（其常数关于 z 一致）。事实上，如果 ε_0 足够小，根据引理 3.2，存在 $\theta\in[0,1)$ 和 $C>0$，使得当 $\rho_1\in\mathcal{W}_{q_i}$ 且当 $\rho_2\in\mathcal{W}_{q_i}\cap\mathcal{T}$ 时，$d(F^j(\rho_1),F^j(\rho_2))\leq C\theta^{n-j}$。因此，$|\varphi(F^j(\rho_1))-\varphi(F^j(\rho_2))|\leq C\theta_1^{n-j}$（其中对于某个 $0<\beta\leq 1$ 有 $\theta_1=\theta^\beta$）。由于 $\sum_{j=0}^{n-1}\theta_1^{n-j}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\theta_1^j<+\infty$，我们得到

$$\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^j(\rho_1)\right)\sim\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^j(\rho_2))\right)$$

对于 $q\in\mathcal{A}$，我们称其为

$$p_q=\sup_{\rho\in\mathcal{W}_q\cap\mathcal{T}}\exp\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\varphi(F^j(\rho))\right)$$

并回忆一下，由于我们对划分 $(\mathcal{W}_q)_q$（见 (4.5)）的特殊选择，我们有 $\sum_{q\in\mathcal{A}}p_q\leq e^{n_0(P(\varphi)+\varepsilon)}$。我们可以假设 n_0 足够大，使得 $C_0\leq e^{n_0\varepsilon}$，因此 $\sum_{q\in\mathcal{A}}C_0p_q\leq$

$e^{n_0(P(\varphi)+2\varepsilon)}$。由此可得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\left(M_t^N\right)^* M_t^N\right) &\le Ch^{(\delta-\delta_0)(d_H+\varepsilon)+\delta-3/2}\sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n}\operatorname{Vol}\left(\mathcal{T}_{\delta,\delta_1}\cap\mathcal{W}_{\mathbf{q}}^-\right)\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{d_H+\varepsilon}\prod_{i=0}^{n-1}C_0p_{q_i}\\ &\le Ch^{(\delta-\delta_0)(d_H+\varepsilon)+\delta-3/2}\sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n}h^{2\delta_1}h^{-(\delta+\delta_1)(d_H+\varepsilon)}\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-(d_H+\varepsilon)}\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{d_H+\varepsilon}\prod_{i=0}^{n-1}C_0p_{q_i}\\ &\le Ch^{-\nu_\varepsilon}\sum_{\mathbf{q}\in\mathcal{A}^n}\prod_{i=0}^{n-1}C_0p_{q_i}=Ch^{-\nu_\varepsilon}\left(\sum_{q\in\mathcal{A}}C_0p_q\right)^n\le Ch^{-\nu_\varepsilon}e^{nn_0(P(\varphi)+2\varepsilon)}\end{aligned}$$

其中

$$\nu_\varepsilon=d_H+(\delta_0-\delta)(d_H+\varepsilon)+(1/2-\delta)+(\delta_1+\delta)\varepsilon+(2\delta_1-1)-d_H(\delta+\delta_1-1)=d_H+O(\varepsilon)$$

(s参见（4.13）中这些指数的定义）。回想起 $nn_0\le\vartheta_\varepsilon\log 1/h$，我们发现 at

$$\operatorname{tr}\left(\left(M_t^N\right)^* M_t^N\right)\le Ch^{-\nu_\varepsilon}h^{-\vartheta_\varepsilon(P(-2\operatorname{Im}zt_{ret}-\varphi_u)+2\varepsilon)}$$

最后，我们可以将项 $2\vartheta_\varepsilon\varepsilon$ 代入 ν_ϵ，从而得到

$$\operatorname{tr}\left(\left(M_t^N\right)^* M_t^N\right)\le Ch^{-\nu_\varepsilon}h^{-\vartheta_\varepsilon P(-2\operatorname{Im}zt_{ret}-\varphi_u)}$$

命题 4.1 的证明至此完成。

5. 命题 4.2 的证明。

在本节中，我们固定一些 $q=q_0$，并旨在证明命题 4.2。正如我们将要解释的，如果 $\hat{}\rho\notin\kappa_q(\mathcal{W}_q)$，则 OÄÄ$\overset{h}{\langle\rho\rangle}$ä$^{\infty}$ä 中的估计不过是 $\mathrm{WF}_h(B_qA_qB_q')\Subset\kappa_q(\mathcal{W}_q)$ 这一事实的结果，因此例如可以在 [CR12], 第 2 章、第 3 节中应用引理 15。

命题 4.2 的主要部分涉及点 $\hat{}\rho=\kappa_q(\rho)\in\kappa_q(\mathcal{W}_q)$。为了证明该命题，我们分别研究 $e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'\tilde{E}_t$ 中不同算子的作用。

- 首先，我们分析 E_t 的作用。我们证明，它本质上由乘以 $e^{tg(\rho)}$ 给出。
- 我们继续研究高斯相干态在 $\mathfrak{M}$反复作用下的传播。轨线的双曲性导致高斯态发生形变。我们得到的结果与 [CR12] 在哈密顿流下的结果有关。特别地，这正是我们使用 $\vartheta_\varepsilon<1/6$这一事实的地方。我们所采用的近似在更长的对数时间内会失效。
- 最后，我们分析 e^{-tG} 对演化后的相干态的作用。在某种意义上，我们将这个演化后的态视为具有快速振荡振幅的拉格朗日态，其形式为$a(x)e^{i\phi(x)/h}$。a 的振荡尺度大于 h^δ的振荡尺度，而 $\overline{g}$ 正是在该尺度上振荡的。我们证明，在首阶近似下，e^{-tG} 的作用可以很好地由乘法 $e^{-tg(x,\phi'(x))}$ 来近似。

记号。在下文中，我们将考虑形如 $u\in L^2(\mathbb{R}_J)$的态，其中 u 的所有分量都是 $O(h^\infty)$，但有一个分量等于某个 $v\in L^2(\mathbb{R})$。不妨记作 v，而不记作 u，只要上下文明确指出 u 非零的分量。比如，只要我们明确说明$\hat{}\rho\in\kappa_q(\mathcal{W}_q)$，就可以简单地记作$\varphi_{\hat{\rho}}$，而不记作 $\tilde{\varphi}_{\hat{\rho}}$。再举一例：对于任意 $u\in L^2(\mathbb{R}_J)$和 $q\in\mathcal{A}$，B_qA_qu 在 j_q 处只有一个非零分量，因此我们可以用该分量将其记作 u_*。下文将广泛使用这一记号，因为大多数时候我们都会考虑这类元素。

5.1. **准备工作**。根据傅里叶积分算子的标准性质，我们可以考虑一个伪微分算子 Ξ_q，使得 $\mathrm{WF}_h(\Xi_q)\subset W_q$，$T^*\mathbb{R}\setminus\mathrm{WF}_h(1-\Xi_q)\subset\kappa_q(\mathcal{W}_q)$ 以及 $\Xi_qB_q'B_q=\Xi_q+O(h^\infty)$（回忆一下，$W_q=\kappa_q(B(\rho_q,2\varepsilon_0))$，并且 $\mathcal{W}_q\Subset B(\rho_q,2\varepsilon_0)$ 是由构造得到的）。由这些性质，特别可得 $A_qB_q'E_t=A_qB_q'E_t\Xi_q+O(h^\infty)$。这

allo ˜ ˜使我们可以无害地将 E_t 改为 $E_t := E_t\Xi_q$ 在下面的所有计算中。我们首先写出

$$\begin{aligned} e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB_q'E_t &= \sum_{(q_1,\dots,q_{n-1})\in\mathcal{A}^{n-1}} e^{-tG}M^{n_0}A_{q_{n-1}}\dots M^{n_0}A_{q_1}M^{n_0}A_qB_q'E_t \\ &= \sum_{(q_1,\dots,q_n)\in\mathcal{A}^n} A_{q_n}e^{-tG}M^{n_0}A_{q_{n-1}}\dots M^{n_0}A_{q_1}M^{n_0}A_qB_q'E_t + O(h^\infty) \\ &= \sum_{(q_1,\dots,q_n)\in\mathcal{A}^n} A_{q_n}e^{-tG}B_{q_n}'M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_2,q_1}M_{q_1,q}E_t + O(h^\infty) \end{aligned}$$

其中

$$M_{p,q} = B_pM^{n_0}A_qB_q' \tag{5.1}$$

若 $F^{n_0}(\mathcal{W}_q)\cap\mathcal{W}_p\neq\emptyset$，则称数对 $(p,\ q)$ 是可容许对。根据傅里叶积分算子的标准性质，若 $(p,\ q)$ 不可容许，则 $M_{p,\ q}=O(h^\infty)$。若一个词 $(q_1,\ \dots\dots,\ q_n)\in\mathcal{A}^n$ 的所有数对 $(q_i,\ q_{i-1})$ 都是可容许对（满足 $q_0=q$），则称该词为可容许词。因此，由于 $n=O\left(\log\frac{1}{h}\right)$，上面求和中的指标可以限制为可容许词。 −

假设 $(p,\ q)$ 是一个可容许对。由傅里叶积分算子的复合性质，$M_{p,\ q}$是一个与辛映射 $F_{p,\ q}:=\kappa_p\circ F^{n_0}\circ\kappa_q^{-1}$相关联的傅里叶积分算子。由于 $\operatorname{diam}(\mathcal{W}_q)\leq\varepsilon_0$，通过取足够小的 ε_0，我们可以假设 $F^{n_0}(\mathcal{W}_q)$ 包含于 κ_p 的定义域中。事实上，存在 $\tilde{\rho}_q\in\mathcal{W}_q$ 使得 $F^{n_0}(\tilde{\rho}_q)\in\mathcal{W}_p$，因此若 $\rho\in\mathcal{W}_q$，

$$d(F^{n_0}(\rho),\rho_p)\leq d(F^{n_0}(\rho),F^{n_0}(\tilde{\rho}_q))+d(F^{n_0}(\tilde{\rho}_q),\rho_p)\leq C\varepsilon_0$$

我们注意到（$y,\ \eta$）坐标图中的变量以及（$\partial_y,\ \partial_\eta$）$\mathbb{R}^2$ 的典范基，并且有

- $F_{p,q}(0)=\kappa_p\circ F^{n_0}(\rho_q)=O(\varepsilon_0)$;
- $d_0F_{p,\ q}=d_{F(\rho_q)}\kappa_p\circ d_{\rho_q}F^{n_0}\circ\left[d_{\rho_q}\kappa_q\right]^{-1}$;
- $d_{\rho_q}F^{n_0}(E_u(\rho_q))=E_u(F^{n_0}(\rho_q))$ 且 $\rho\mapsto E_u(\rho)$ 是 Lipschitz 的。因此，若记 $e_u(\rho_q)=\left(d_{\rho_q}\kappa_q\right)^{-1}(\partial_y)\in E_u(\rho_q)$，根据引理 3.4 中适配坐标图的定义，存在 $\lambda_{p,\ q}\in\mathbb{R}^*$ 使得

$$d_{\rho_q}(\kappa_p\circ F^{n_0})(e_u(\rho_q))=\lambda_{p,q}\partial_y+O(\varepsilon_0)$$

- 同样，$d_0F_{p,q}(\partial_\eta)=\mu_{p,q}\partial_\eta+O(\varepsilon_0)$ 对某个 $\mu_{p,q}\in\mathbb{R}^*$

最终，我们利用 $F_{p,q}-F_{p,q}(0)-d_0F_{p,q}=O(\varepsilon_0)_{C^1(W_q)}$ 这一事实，得到

$$F_{p,q}(y,\eta)=(\lambda_{p,q}y+y_r(y,\eta),\mu_{p,q}\eta+\eta_r(y,\eta)),(y,\eta)\in W_q \tag{5.2}$$

其中 $y_r(y,\eta)$ 和 $\eta_r(y,\eta)$ 是 $O(\varepsilon_0)_{C^1}$。特别地，若 ε_0 足够小，则 $(x,\xi,y,\eta)\in\operatorname{Gr}(F_{p,q})\mapsto(x,\eta)$ 在 $(0,0,0,0)$ 附近是一个局部微分同胚。于是，存在一个相位函数 $\psi_{p,q}$，它在 $(0,0,0,0)$ 的某个邻域 Ω 内生成 $F_{p,q}$。假设 ε_0 足够小，我们可以假设$F_{p,q}(W_q)\times W_q\subset\Omega$。

A因此（例如参见 [Ale08], [Zwo12]第10章），傅里叶积分算子 or $M_{p,q}$ 可以写成形式（2.2），相差 $O(h^\infty)$，即

$$M_{p,q}u(x)=\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2}e^{\frac{i}{h}(\psi_{p,q}(x,\eta)-y\eta)}\alpha_{p,q}(x,\eta)u(y)dyd\eta \tag{5.3}$$

其中 $\alpha_{p,q}$ 是 $S_{0^+}(\mathbb{R}^2)$ 中的一个符号。它有一个渐近展开式

$$\alpha_{p,q}\sim\sum_{j\geq0}h^j\alpha_{p,q}^{(j)} \tag{5.4}$$

其中 $\alpha_{p^{(j)},q}\in h^{0^-}S_{0^+}$，对所有 $j\geq1$（即 $\alpha_{p^{(j)},q}\in\bigcap_{\eta>0}h^{-\eta}S_{0^+}$）均成立，并且我们有

$$|\alpha_{p,q}^{(0)}(x,\eta)|=|\partial_{x,\eta}^2\psi(x,\eta)|^{1/2}\chi_q(\rho)\times\left(\prod_{i=0}^{n_0-1}\alpha\circ F^i(\rho)\right)\quad;\quad\rho=\kappa_q^{-1}(y,\eta)\ ;\ (x,\xi)=F_{p,q}(y,\eta) \tag{5.5}$$

这里，我们利用 W_q、$\alpha_h=\alpha+O\ddot{A}h^{1^-}S_{0^+}\ddot{a}$ 中的事实，将 $O\ddot{A}h^{1^-}S_{0^+}\ddot{a}$ 放入 $\alpha_{p^{(1)}_{q,}}$。此外，我们有如下支集性质：对于 $j\in\mathbb{N}$,

$$(x,\eta)\in\operatorname{supp}(\alpha_{p,q}^{(j)})\implies(y,\eta)\in\kappa_q\left(\operatorname{supp}(\chi_q)\right)\quad;\quad(x,\xi)=F_{p,q}(y,\eta) \tag{5.6}$$

现在我们选取一个可容许词（$q_1, \ldots, q_n$），并且对于 $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^2$，我们旨在研究

$$||A_{q_n} e^{-tG} B'_{q_n} M_{q_n,q_{n-1}} \ldots M_{q_2,q_1} M_{q_1,q} E_t \tilde{\varphi}_{\hat{\rho}}||$$

我们有 $M_{q_1,\,q} E_t = B_{q_1} M^{n_0} A'_q B'_q B_q e^{tG} B'_{q_0}$ 由于 $\mathrm{WF}_h\left(A'_q B'_q B_q e^{tG}\right) \subset \mathrm{supp}(\chi_q)$ 且 B'_q 是一个与 κ_q^{-1}相关的傅里叶积分算子，我们可以找到 $\tilde{\chi}_q$，使得 $\mathrm{supp}(\tilde{\chi}_q) \subset \kappa_q(\mathcal{W}_q) \subset W_q$并且

$$AB'_q B_q e^{tG} B'_q = AB'_q B_q e^{tG} B'_q \operatorname{Op}_h(\tilde{\chi}_q) + O(h^\infty)$$

为了证明 $O\ddot{A}\ddot{A}_{\langle\rho\rangle}^{h}\ddot{a}\ddot{a}$中的估计，我们调用 [CR12, 第 2 章第 3 节中的引理 15，据此，如果 $\hat{\rho} \notin \kappa_q(\mathcal{W}_q)$,

$$\operatorname{Op}_h(\tilde{\chi}_q)\varphi_{\hat{\rho}} = O\left(\left(\frac{h}{\langle\hat{\rho}\rangle}\right)^\infty\right).$$

由于 $M_{q_n,\,q_{n-1}} \ldots M_{q_1,\,q}$以及求和中的项数对于某个 $K > 0$ 都是 $O(h^{-K})$，我们得出命题 4.2 的第一部分：

引理 5.1. 对于$\hat{\rho} \notin \kappa_q(\mathcal{W}_q)$，$w(\hat{\rho}) = O\ddot{A}\ddot{A}_{\langle\rho\rangle}^{h}\ddot{a}^\infty\ddot{a}$，以上结论一致成立。

现在我们关注$\hat{\rho} \in \kappa_q(\mathcal{W}_q) \Subset W_q$，对于它，$F_{p,\,q}(\hat{\rho})$是良定义的。我们以一项重要计算结束本预备小节。首先注意到，邻域 $\bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{W}_q$ 已由动力学方面的考虑确定。我们可以假设，在构造 g时，式（3.20）中使用的截断函数$\hat{\chi}$ 满足 $\mathrm{supp}\,\hat{\chi} \Subset \bigcup_{q\in\mathcal{A}} \mathcal{W}_q$。因此，我们可以应用命题2.5，得到：

引理 5.2. 对于所有 $q \in \mathcal{A}$，存在$(g_{j,\,q})_{j\geq 1} \in S_\delta$，使得对于所有 $N \in \mathbb{N}$，以下结论成立：

$$B_q G B'_q = \operatorname{Op}_h\left(g \circ \kappa_q^{-1}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} h^{j(1-2\delta)} \operatorname{Op}_h(g_{j,q}) + R_N$$

其中$||R_N||_{L^2\to L^2} \leq C_{2N+M,\,g} h^{N(1-2\delta)}$，对于某些常数 $C_{2N+M,\,g}$，它们取决于 g 在 S_δ 中直到 $2N+M$ 阶的半范数。

备注。 即使 $g \notin S_\delta$，它仍满足$|\partial^\alpha g| \leq C_{|\alpha|,\,g} h^{-\delta|\alpha|}$只要 $\alpha \neq 0$。这使我们能够合理地定义这些半范数。

证明。 注意到 $g \in \log\frac{1}{h} S_\delta$，因此我们可以将命题2.5应用于 $\left(\log\frac{1}{h}\right)^{-1} g$。我们可以找到微分算子 $L_{j,\,q}$ 使得

$$B_q G B'_q = \operatorname{Op}_h(g \circ \kappa_q^{-1}) + \sum_{j=1}^{N-1} h^j \operatorname{Op}_h\left((L_{j,q} g) \circ \kappa_q^{-1}\right) + O_{L^2\to L^2}\left(h^N ||g||_{C^{2N+M}}\right)$$

事实上，由于 $\hat{g}$, $\partial^\alpha g \in h^{-\delta|\alpha|} S_\delta$ 的性质，只要 $\alpha \neq 0$ 以及项 $g_{j,\,q} := h^{2\delta j}(L_{j,\,q} g) \circ \kappa_q^{-1} \in S_\delta$ 对于 $j \geq 1$成立。此外，O 实际上是一个 $O(C_{2N+M,\,g} h^{N(1-2\delta)})$，其中 $C_{2N+M,\,g}$ 取决于 g 在 S_δ 中直到 $2N+M$ 阶的半范数。□

5.2. 关于 E_t的作用。我们从 E_t的作用开始。回顾式 (4.16) 中 $E_t = B_q e^{tG} B'_q \Xi_q$ 的定义。

引理 5.3. 对于任意 $N \in \mathbb{N}$和 $\hat{\rho} = \kappa_q(\rho) \in \kappa_q(\mathcal{W}_q)$，存在 $\psi_0, \ldots, \psi_{2N-1}$和 r_N，使得

$$E_t \varphi_{\hat{\rho}} = \sum_{j=0}^{2N-1} h^{j(1/2-\delta)} \psi_j + r_N$$

满足：

- $\psi_0 = e^{tg(\rho)} \varphi_{\hat{\rho}}$；
- 对于 $1 \leq j \leq 2N-1$，ψ_j 具有如下形式

$$\psi_j = e^{tg(\rho)} T(\hat{\rho}) \Lambda_h\left(P_{t,h}^{(j)} \Psi_0\right)$$

其中 $P_{t\,h}^{(j)}$，是次数至多为 $2j$ 的多项式，其系数取决于 t、g（因此也取决于 h）和 $\hat{\rho}$。它满足 $N_\infty(P_{t\,h}^{(j)}) \leq C_{j,\,t}$其中常数与 h 无关，但取决于 g 的导数。

- $||r_N||_{L^2} \leq C_N(1+|t|)^{2N+1}h^{N(1-2\delta)}h^{-K_0 t}$ for some $K_0 > 0$ depending on g.

证明。 固定 $\hat{\rho} = \kappa_q(\rho) \in \kappa_q(\mathcal{W}_q)$， $N \in \mathbb{N}$ 并令 $\phi(t) = E_t\varphi_{\hat{\rho}}$。 ϕ 满足方程

$$\phi'(t) = B_q G e^{tG} B_q' \Xi_q \varphi_{\hat{\rho}}$$

由于 $B_q B_q' = I$ 在 Ξ_q 的 WF_h 附近微局部地，我们有 $e^{tG}B_q'\Xi_q = B_q' B_q e^{tG} B_q' \Xi_q + O(h^\infty)$。因此，$\tilde{}$ $\tilde{}$在 $O(h^\infty)$ 意义下， $\psi(t)$ 是方程 $\phi'(t) = G\phi(t)$ 的解，其中 $G = B_q G B_q'$。只需找到该方程解的一个展开式。根据引理 5.2，存在 C_N （取决于 g），使得令$G_j = \mathrm{Op}_h(g_{j,\ q})$ 且 $G_0 = \mathrm{Op}_h(g \circ \kappa_q^{-1})$，

$$\left|\left| \tilde{G} - \sum_{j=0}^{N-1} h^{j(1-2\delta)} G_j \right|\right| \leq C_N h^{N(1-2\delta)}$$

$\tilde{}$令 $\psi(t) = T(\hat{\rho})^* \phi(t)$。它满足方程： $\psi'(t) = T(\hat{\rho})^* G T(\hat{\rho})\psi(t)$。我们还令 $u(t) = \Lambda_h^* \psi(t)$，它满足方程 $\tilde{}$ $\tilde{}u'(t) = Au(t)$，其中 $A = \Lambda_h^* T(\hat{\rho})^* G T(\hat{\rho}) \Lambda_h$。另注意 $A_j = \Lambda_h^* T(\hat{\rho})^* G_j T(\hat{\rho})$ $\Lambda_h = \mathrm{Op}_1(a_j)$，其中 $a_j(\hat{\zeta}) = g_{j,q}(\hat{\rho} + h^{1/2}\hat{\zeta})$。我们希望将附录 A.2 的形式体系应用于 $H = L^2(\mathbb{R})$，其中算子 A： $H \to H$, $\mathcal{C} = \{P\Psi_0, P \in \mathbb{C}[X]\}$ 具有初始态 $u(0) = \Psi_0$。附录 A.2 中的参数 h 由 $\tilde{h} = h^{1/2-\delta}$ 替代。若 $P \in \mathbb{C}[X]$，我们将 A 对.....的作用近似为

$$\begin{aligned} A(P\Psi_0) &= \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{h}^{2j} \tilde{A}_j (P\Psi_0) + O_N\left(\tilde{h}^{2N}||P\Psi_0||\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{h}^{2j} \left(\sum_{k=0}^{2N-1-2j} \tilde{h}^k A_{j,k}(P\Psi_0) + R_{N,j}(P\Psi_0) \right) + O_N\left(\tilde{h}^{2N}||P\Psi_0||\right) \end{aligned}$$

根据引理 2.4,

$$A_{j,k} = \mathrm{Op}_1\left(\sum_{\alpha+\beta=k} h^{\delta k} \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta h_j}{\alpha!\beta!}(0) x^\alpha \xi^\beta \right) \quad ; \quad R_{N,j}(P\Psi_0) = O_{N,j,\deg P}\left(\tilde{h}^{2N-2j} N_\infty(P)\right)$$

其中，$O_{N、\ j、\ \deg P}$ 中的常数通过其半范数依赖于 g，但与 h无关。将同阶项归并在一起，可写为

$$A(P\Psi_0) = \sum_{l=0}^{2N-1} \tilde{h}^l A_l(P\Psi_0) + O_{N,\deg P}\left(\tilde{h}^{2N} N_\infty(P)\right)$$

此处 $A_l = \sum_{2j+k=l} A_{j、\ k}$。不难看出， $A_l(P\Psi_0) = P_l\Psi_0$，其中 $P \mapsto P_l$ 是线性的，且 $\deg P_l \leq \deg P + 2l$。由于 $g_{j、\ q} \in S_\delta$ 当 $j \geq 1$ 时成立，并且根据 $h^{|\gamma|\delta}\partial^\gamma g = O(1)$，我们注意到，只要 $l \geq 1$，就存在一个 C_l，它通过有限个半范数依赖于 g，但与h无关，使得

$$N_\infty(P_l) \leq C_l N_\infty(P)$$

关于 A_0，显然它实际上是 $g(\rho)\,\mathrm{Id}$。现在我们应用附录 A.2 中给出的公式，并使用该附录中引入的记号，即

$$R_{2N-1}(t) = e^{tA}\Psi_0 - e^{tA_0} \sum_{l=0}^{2N-1} \tilde{h}^l v_l(t)$$

其中 v_l 由 (A.3) 和 $v_0 = \Psi_0$归纳地构造。由于 A_0 是一个乘法，对于所有 $s \in \mathbb{R}$， $A_k(s) = A_k$，并且我们通过归纳法可知， $v_k(t)$具有如下形式

$$v_k(t) = \sum_{l=0}^{k} t^l P_{l,k}\Psi_0 = P_k(t)\Psi_0$$

其中 $P_{l,k} \in \mathbb{C}[X]$ 的次数至多为 $2k$。特别地，对于某个与 h无关且依赖于 g的 c_k， $N_\infty(P_k(t)) \leq c_k(1+|t|)^k$。关于余项，我们有

$$\begin{aligned}||\tilde{r}_{k,2N}(t)|| &= e^{tg(\rho)} \left|\left| \left(A - \sum_{j=0}^{2N-k-1} \tilde{h}^j A_j \right) v_k(t) \right|\right| \\ &= O_{N,k}\left(e^{tg(\rho)}\tilde{h}^{2N-k} N_\infty(P_k(t))\right) \\ &\leq C_{N,k}(1+|t|)^k e^{tg(\rho)}\tilde{h}^{2N-k}\end{aligned}$$

最后，我们回顾 $R'_{2N-1}(t) = AR_{2N-1}(t) + \sum_{j=0}^{2N-1} \tilde{h}^j \tilde{r}_{j,\ 2N}(t)$。因此，对这个不等式进行积分可得

$$||R_{2N-1}(t)|| \leq \int_0^t ||A|| \times ||R_{2N-1}(s)||ds + C_N \tilde{h}^N e^{tg(\rho)}(1+|t|)^{2N-1}$$

根据 Gronwall引理的一个版本，我们可以找到一个常数 C_N 使得

$$||R_{2N-1}(t)|| \leq C_N \tilde{h}^{2N} e^{t\max(|g(\rho)|,||A||)} t^{2N+1}$$

（其中 C_N 取决于 g的有限个半范数）。由于 $g \in \log(1/h)S_\delta$，我们可以找到 $K_0 > 0$使得 $\max(|g(\rho)|, ||A||) \leq K_0 \log(1/h)$。回到 $\phi(t)$，我们就证明了该引理。□

备注。 t 应当是固定的，因此涉及 t 的唯一有意义的项是 h^{-Bt}。 t 的其他出现都可以并入常数 C_N中。所有多项式还取决于 h，我们将不在下标中明确提及这一点，但要牢记，在下文中，所有多项式都可能取决于 h。不过，它们的 N_∞-范数可以以一种与 h无关的方式加以控制。

5.3. 重复作用于 $M_{q_i,\ q_{i-1}}$。 我们固定某个 $\mathbf{q} = qq_1 \dots q_n \in \mathcal{A}^{n+1}$。 $E_t\varphi_{\hat{\rho}}$ 的展开式中的每一项都是形如

$$e^{tg(\rho)} T(\hat{\rho}) \Lambda_h(P_0 \Psi_0)$$

其中某个 $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ 取决于 h。现在我们关注这些项中的每一项在$M_{q_i,\ q_{i-1}}$的重复作用下的演化。我们回顾一下，这个算子具有如下形式

$$M_{p,q}u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(\psi_{p,q}(x,\eta)-y\eta)} \alpha_{p,q}(x,\eta) u(y) dy d\eta \tag{5.7}$$

with

$$\alpha_{p,q} \sim \sum_{j \geq 0} h^j \alpha_{p,q}^{(j)} \tag{5.8}$$

这将使我们能够使用命题 2.10，但我们必须处理两种不同尺度的渐近展开： h 和 $h^{1/2}$。为简化这一语境下的记号，对于 $1 \leq i \leq n$，我们记作

$$\begin{aligned} M_{q_i,q_{i-1}} &= M_i \\ \psi_{q_i,q_{i-1}} &= \psi_i \\ F_{q_i,q_{i-1}} &= F_i \\ F^{(i)} &= F_i \circ \dots \circ F_1 = \kappa_{q_i} \circ F^{n_0 i} \circ \kappa_q^{-1} \\ \alpha^{(j)}_{q_i,q_{i-1}} &= \alpha_i^{(j)} \end{aligned}$$

对于 $0 \leq i \leq n$，我们还记$\hat{}\rho_i = F_i \circ \dots \circ F_1(\hat{}\rho)$（其中$\hat{}\rho_0 = \hat{}\rho$），并令$\hat{}\rho_i = (x_i,\ \xi_i)$。

我们固定一个参数 N，并从一个初始态开始

$$u_0 = T(\hat{\rho}_0)\Lambda_h\left(P_0\Psi_0\right) \tag{5.9}$$

其中 P_0 是一个次数为 d_0的多项式。我们的目标是证明，关于$u_i = M_i \dots M_1 u_0$，我们有如下形式的渐近展开

$$u_i = \sum_{2j+k<2N} h^j h^{k/2} u_i^{(j,k)} + r_i^{(N)}$$

其中 $u_i^{(j,k)}$ 具有如下形式

$$T(\hat{\rho}_i)\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(i)}\right)\Lambda_h\left(P_i^{(j,k)}\Psi_0\right)$$

其中 $P_i^{(j,k)}$ 是多项式，并且对 $r_i^{(N)}$ 有良好的控制。对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $0 \leq j \leq N-1$，我们将命题 2.10 应用于算子

$$(M_i^{(j)}u)(x) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(\psi_i(x,\eta)-y\eta)}\alpha_i^{(j)}(x,\eta)u(y)dyd\eta$$

并且对于形如以下形式的态

$$u = T(\hat{\rho}_{i-1})\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(i-1)}\right)\Lambda_h\left(P\Psi_0\right)$$

对于每个这样的多项式 P，我们可以找到一个多项式族 $Q_i^{(j,k)}(P)$，使得

- $Q_{(j,0)\,i}(P) = \frac{\alpha_{(j)\,i}(x_i,\xi_{i-1})}{|\partial_{x\eta}^2\psi_i(x_i,\xi_{i-1})|^{1/2}}P$（省略了一个范数为 1 的乘法因子）；
- $Q_{(j,k)\,i}(P)$ 是一个次数为 $\deg\, P+3k$ 的多项式，并且映射 $P \mapsto Q_{(j,k)\,i}$ 是线性的，其系数取决于 $F_{(i)}$</style>以及 和 $_{(j)\,i}$ 在 (x_i,ξ_{i-1}) 处直到第 $3k$ 阶的导数，并且我们有

$$N_\infty(Q_i^{(j,k)}) \leq C_{3k}(\psi_i)||\alpha_i^{(j)}||_{C^k}||d_{\hat{\rho}}F^{(i)}||^{3k}N_\infty(P)$$

此外，如果 $(x_i,\xi_{i-1}) \notin \operatorname{supp}\alpha_i^{(j)}$，那么 $Q_i^{(j,k)} = 0$.

- 对于每个 $N \in \mathbb{N}$,

(5.10)

$$M_i^{(j)}\left(T(\hat{\rho}_{i-1})\mathcal{M}(d_{\hat{\rho}}F^{(i-1)})\Lambda_h[P\Psi_0]\right) = T(\hat{\rho}_i)\mathcal{M}(d_{\hat{\rho}}F^{(i)})\Lambda_h\left[\sum_{k=0}^{N-1}h^{k/2}Q_i^{(j,k)}(P)\Psi_0\right] + R_i^{(j,N)}(P)$$

with

$$||R_i^{(j,N)}(P)||_{L^2} \leq h^{N/2}C_{3N+M}(\psi_i)||\alpha_i^{(j)}||_{C^{N+M}}||d_{\hat{\rho}}F^{(i)}||^{3N}K_{N,\deg P}N_\infty(P)$$

备注。鉴于 $\alpha_i^{(j)}$ 的性质，条件 $(x_i,\ \xi_{i-1}) \in \operatorname{supp}\ \alpha_i^{(j)} \iff F^{in_0}(\rho) \in \operatorname{supp}(\chi_q\alpha)$。

对于每个 N，我们还将 M_i 的展开式写成以下形式：

$$M_i = \sum_{j=0}^{N-1}h^jM_i^{(j)} + \widetilde{S}_i^{(N)} \tag{5.11}$$

with

$$||\widetilde{S}_i^{(N)}|| \leq \widetilde{C}_{i,N,\varepsilon}h^{N(1-\varepsilon)}$$

‹ ‹ ‹ 由于 M_i 属于有限族 $(M_{p,\ q})$，我们可以用 $C_{N,\ \varepsilon} = \sup_i C_{i,\ N,\ \varepsilon}$ 替换 $C_{i,\ N,\ \varepsilon}$。

现在我们给出所需展开式的迭代公式。对于 $(j,\ k)$ 的其他取值，我们给出 $P_0^{(0,0)} = P_0$ 和 $P_{(j,\ k)\,0} = 0$。对于 $2j+k<2N$，我们通过以下公式归纳地定义 $P_{(j,\ k)\,i} = P_{(j,\ k)\,i,\ P_0}$（为简化记号，在不必要时我们将省略说明其对 P_0 的依赖）：

$$P_i^{(j,k)} = \sum_{j_1+j_2=j}\ \sum_{k_1+k_2=k}Q_i^{(j_2,k_2)}\left(P_{i-1}^{(j_1,k_1)}\right) \tag{5.12}$$

关于余项，我们令

$$\begin{aligned} r_i^{(N)} = r_{i,P_0}^{(N)} = M_i\left(r_{i-1}^{(N)}\right) &+ \sum_{2j+k<2N}h^{j+k/2}\widetilde{S}_i^{(N-j-\lceil k/2\rceil)}\left(u_{i-1}^{(j,k)}\right) \\ &+ \sum_{2j_1+2j_2+k_1<2N}h^{N-j_1-j_2-k_1/2}R_i^{(j_1,2(N-j_1-j_2)-k_1)}\left(P_{i-1}^{(j_1,k_1)}\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

引理 5.4. 根据上述记号，对于 $1 \leq i \leq n$，我们有：

$$u_i = \sum_{2j+k<2N}h^jh^{k/2}u_{i,P_0}^{(j,k)} + r_{i,P_0}^{(N)} \quad ; \quad u_i^{(j,k)} = T(\hat{\rho}_i)\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(i)}\right)\Lambda_h\left(P_{i,P_0}^{(j,k)}\Psi_0\right)$$

现在我们分析这些公式，以更准确地理解这些项，并对余项进行良好控制。特别是，对于多项式 $P_i^{(j,k)}$，我们希望控制其次数及其系数的范数。

Lead项。首先注意，首项（即项 (0，0)）具有一种简洁的形式。确实，至多相差一个范数为 1 的因子，它可表示为

$$\begin{aligned} P_i^{(0,0)} &= P_0 \times \prod_{l=1}^{i} \frac{\alpha_l^{(0)}(x_l, \xi_{l-1})}{|\partial_{x\eta}^2 \psi_l(x_l, \xi_{l-1})|^{1/2}} \\ &= P_0 \times \prod_{l=0}^{i-1} \left[\left(\chi_{q_l} \prod_{j=0}^{n_0-1} \alpha \circ F^j \right) (F^{ln_0}(\rho)) \right] \end{aligned}$$

右侧的乘积在分析中起着关键作用。注意到

$$p_{\alpha,l}(\rho) = \left(\chi_{q_l} \prod_{j=0}^{n_0-1} \alpha \circ F^j \right) (F^{ln_0}(\rho)) \quad ; \quad \pi_{\alpha,i}(\rho) = \prod_{l=0}^{i-1} p_{\alpha,l}(\rho)$$

我们注意到

$$\pi_{\alpha,i}(\rho) \leq \Pi_{\alpha,q_0\dots q_{i-1}}(\rho)$$

回想一下 $\Pi_{\alpha,\,\mathbf{q}}(\rho) = \prod_{i=0}^{nn_0-1} \alpha\left(F^i(\rho)\right)$。为简化记号，记 $\Pi_{\alpha,\,i} = \Pi_{\alpha,\,q_0\dots q_{i-1}}$。

此外，结合 $\alpha_i^{(j)}$ 的支集性质 (5.6)、备注 5.3 以及命题 2.10 给出的 $Q_i^{(j,k)}$ 的性质，我们可知，对于 $\mathbf{q} = q_0 \dots q_{i-1}$，

$$\rho \notin \mathcal{W}_{\mathbf{q}}^- \implies \forall j,k \in \mathbb{N}, \quad Q_i^{(j,k)} = 0 \tag{5.14}$$

多项式 $P_{i\,P_0}^{(j,k)}$ 的分析。根据 (5.14)，我们假设 $\rho = \kappa_q^{-1}(\hat{\rho}) \in \mathcal{W}_{q_0\dots q_{i-1}}^-$。否则便无须再说什么。我们从最简单的分析部分开始：

引理 5.5。对于所有 $0 \leq i \leq n$ 以及所有满足 $2j + k < 2N$，$P_{i,\,P_0}$ 的 $(j,\ k)$，$(j,\ k)$ 的次数至多为 $3k + \deg P_0$。

证明。我们对 i使用归纳法。当 $i = 0$时，结论显然成立。为了从 $i-1$ 过渡到 i，我们使用 (5.12)，由此可得

$$\begin{aligned} \deg P_i^{(j,k)} &\leq \max_{j_1+j_2=j, k_1+k_2=k} \deg Q_i^{(j_2,k_2)} \left(P_{i-1}^{(j_1,k_1)} \right) \\ &\leq \max_{j_1+j_2=j, k_1+k_2=k} 3k_2 + \deg P_{i-1}^{(j_1,k_1)} \\ &\leq \max_{j_1+j_2=j, k_1+k_2=k} 3k_2 + 3k_1 + d_0 \\ &\leq 3k + d_0 \end{aligned}$$

□

N_∞ ÄP$_i^{(j,k)}$ ä 的分析稍微繁琐一些。

Le引理 5.6。对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个常数族 $C_{j,k,\varepsilon}$，它依赖于动力学 al system 以及 M_h，使得：对于所有 $0 \leq i \leq n$ 以及所有满足 $2j + k < 2N$ 的 (j,k)，我们有

$$N_\infty \left(P_{i,P_0}^{(j,k)} \right) \leq C_{j,k,\varepsilon} h^{-k\varepsilon} i^{2j+k} \Pi_{\alpha,i}(\rho) \left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}} \right)^{3k} N_\infty(P_0)$$

备注。对 i 的依赖至关重要。这里，$i \leq n = O(\log 1/h)$。因此，与第二部分$\Pi_{\alpha,i}(\rho)$ Ä $J^u_{q_0\dots q_{i-1}}$ ä^{3k} $h^{-k\varepsilon}$相比，i^{2j+k} 项基本上无关紧要。因子$\Pi_{\alpha,i}(\rho)$不依赖于 k，并且对所有项都相同。它可以放在整个展开式的前面。相反，$J^u_{q_0\dots q_{i-1}}$ 的增长会影响展开式的精度和有效性。为了使展开式成立，我们需要要求

$$\left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}} \right)^3 h^{-\varepsilon} \ll h^{-1/2}$$

因此，这里需要作出假设

$$\vartheta_\varepsilon < \frac{1-4\varepsilon}{6\lambda_{\max}}$$

（其定义见（4.14））很重要，并能得到一个有效的展开式。

备注。常数 $C_{j,k,\varepsilon}$ 通过其振幅 α_h 依赖于 M_h，其中该振幅是属于某个类 $I_\eta(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathrm{Gr}(F)')$（对于某个 $\eta=\eta(\varepsilon)$），并且它只依赖于有限多个导数 $N_{j,k}$。

证明。为简化记号，我们对 P_0 进行重整化，使得 $N_\infty(P_0)=1$。我们固定 (j,k)，使得$2j+k<2N$。通过迭代（5.12），我们得到

$$P_i^{(j,k)} = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_i=j\\ k_1+\cdots+k_i=k}} Q_i^{(j_i,k_i)}\circ\cdots\circ Q_1^{(j_1,k_1)}(P_0)$$

我们现在采用以下简单思路：当 i 很大，也就是当 $i\gg 2j+k$ 时，并且当$j_1+\cdots+j_i=j$和 $k_1+\cdots+k_i=k$ 时，大多数配对 (j_l,k_l) 都等于 $(0,0)$。从更定量的角度来看，我们有

$$\#\{1\le l\le i,(j_l,k_l)\neq(0,0)\}\le 2j+k$$

事实上，

$$2j+k=2(j_1+\cdots+j_i)+(k_1+\cdots+k_i)\ge\#\{1\le l\le i,(j_l,k_l)\neq(0,0)\}$$

记 $\mathcal{P}(i,2j+k)$ 为 $\{1,\dots,i\}$ 中基数小于 $2j+k$ 的子集的集合。对于 $\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)$，我们定义指标集合 $\mathcal{I}_\mathcal{L}\subset\mathbb{N}^i\times\mathbb{N}^i$ 为

$$(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})=\big((j_1,\dots,j_i),(k_1,\dots,k_i)\big)\in\mathcal{I}_\mathcal{L}\iff\begin{cases}j_1+\cdots+j_i=j\\ k_1+\cdots+k_i=k\\ \forall 1\le l\le i,(j_l,k_l)\neq(0,0)\iff l\in\mathcal{L}\end{cases}$$

使用这些记号，我们有

$$P_i^{(j,k)}=\sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)}\sum_{(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})\in\mathcal{I}_\mathcal{L}} Q_i^{(j_i,k_i)}\circ\cdots\circ Q_1^{(j_1,k_1)}(P_0)$$

固定 $\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)$ 和 $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})\in\mathcal{I}_\mathcal{L}$。记 $\mathcal{L}=\{l_1<\cdots<l_m\}$。由于 $Q_l^{(0,0)}$ 只是乘以 $p_{\alpha,l}(\rho)$，因此我们有：

$$Q_i^{(j_i,k_i)}\circ\cdots\circ Q_1^{(j_1,k_1)}(P_0)=\left(\prod_{l\notin\mathcal{L}}p_{\alpha,l}\right)\times Q_{l_m}^{(j_{l_m},k_{l_m})}\circ\cdots\circ Q_{l_1}^{(j_{l_1},k_{l_1})}(P_0)$$

利用命题 2.10，我们可以估计

$$N_\infty\left(Q_{l_m}^{(j_{l_m},k_{l_m})}\circ\cdots\circ Q_{l_1}^{(j_{l_1},k_{l_1})}(P_0)\right)\le N_\infty(P_0)\times\prod_{p=1}^m C_{3k_{l_p}}(\psi_{l_p})||\alpha_{l_p}^{(j_{l_p})}||_{C^{k_{l_p}}}||d_{\hat\rho}F^{(l_p)}||^{3k_{l_p}}$$

对于 $1\le l\le i$，ψ_l（分别为 $\alpha_l^{(\cdot)}$）属于一个有限函数族（对应于允许转移的有限数量）。因此，回忆 $\alpha_l^{(j)}\in S_{0^+}$ 当 $j=0$ 时以及 $h^{0^-}S_{0^+}$ 当 $j\ge 1$时，我们可以找到一个依赖于动力系统以及 $N_{j,k}$ 的某个数量的 α 阶导数的全局一致常数，使得对于所有 $j'\le j$、$k'\le k$ 以及所有 l，

$$C_{3k'}(\psi_l)||\alpha_l^{(j')}||_{C^{k'}}\le C_{j,k,\varepsilon}\begin{cases}h^{-k'\varepsilon/2}\text{ if }j'=0\\ h^{-k'\varepsilon/2}h^{-\eta_{k,j}}\text{ if }j'\ge 1\end{cases}.$$

其中我们人为地选择$\eta_{k,\,j}=\frac{k\varepsilon}{2j}$并利用以下事实：若 $j'=0$（分别为 $j'\ge 1$），则有 $\alpha_l^{(j)}\in S_{\varepsilon/2}$（分别为 $h^{-\eta_{j,\,k}}S_{\varepsilon/2}$）。因此，由于 $j_{l_1}+\cdots+j_{l_m}=j$和 $k_{l_1}+\cdots+k_{l_p}=k$，我们得到

$$N_\infty\left(Q_{l_m}^{(j_{l_m},k_{l_m})}\circ\cdots\circ Q_{l_1}^{(j_{l_1},k_{l_1})}(P_0)\right)\le C_{j,k,\varepsilon}^m N_\infty(P_0)h^{-k\varepsilon/2}h^{-j\eta_{k,j}}\left(\sup_{1\le l\le i}||d_{\hat\rho}F^{(l)}||\right)^{3k}$$

由于 $m\le 2j+k$，存在一个全局常数，仍记作$C_{j,k,\varepsilon}$，使得关于 $\mathcal{I}_\mathcal{L}$一致地成立，

$$N_\infty\left(Q_{l_m}^{(j_{l_m},k_{l_m})}\circ\cdots\circ Q_{l_1}^{(j_{l_1},k_{l_1})}(P_0)\right)\le C_{j,k,\varepsilon}N_\infty(P_0)h^{-k\varepsilon}\left(\sup_{1\le l\le i}||d_{\hat\rho}F^{(l)}||\right)^{3k}$$

我们指出，对于 $1 \le l \le n$， $||d_{\hat{\rho}}F^{(l)}|| \le C||d_{\hat{\rho}}F^{n_0 l}|| \le CJ^u_{q_0\dots q_{l-1}}$。最后，由于 $|\alpha| \ge e^{-\tau_m}$ 属于 $\mathcal{T}$ 的 $\bigcup_{q\in\mathcal{A}}\mathcal{W}_q$ 邻域内，我们可知，对于每个 $(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}) \in \mathcal{I}_{\mathcal{L}}$，都有

$$N_\infty\left(Q_i^{(j_i,k_i)}\circ\cdots\circ Q_1^{(j_1,k_1)}(P_0)\right) \le C_{j,k,\varepsilon}N_\infty(P_0)h^{-k\varepsilon}\Pi_{\alpha,i}(\rho)\left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}}\right)^{3k}$$

现在我们可以得出证明结论。事实上，我们有

$$N_\infty\left(P_i^{(j,k)}\right) \le \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)} \#\mathcal{I}_{\mathcal{L}} \times \left(C_{j,k,\varepsilon}N_\infty(P_0)h^{-k\varepsilon}\Pi_{\alpha,i}(\rho)\left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}}\right)^{3k}\right)$$

若 $\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,\ 2j+k)$，我们粗略估计 $\mathcal{I}_{\mathcal{L}}$ 的基数为

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{L}} \le (j+1)^{\#\mathcal{L}}(k+1)^{\#\mathcal{L}} \le (j+1)^{2j+k}(k+1)^{2j+k}$$

最后，

$$i \mapsto \sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)} 1 = \sum_{m=0}^{2j+k}\binom{i}{m}$$

是关于 i 的次数为 $2j+k$ 的多项式函数。因此，存在 $C_{j,\ k}$，使得

$$\left|\sum_{\mathcal{L}\in\mathcal{P}(i,2j+k)}\binom{i}{\#\mathcal{L}}\right| \le C_{j,k}i^{2j+k}$$

证明至此完成。 □

控制余项。借助引理 5.6 和迭代公式 (5.13)，我们可以得到对余项的控制。考虑满足 $B \ge 1$ such that$|M_{q,\ p}|| \le B$ 对所有可容许对 $(q,\ p)$ 都成立的情形（可以取 $B \le (1+\varepsilon)||\alpha||_\infty$，甚至让 ε 在 $h\to 0$时趋于 0，但 B 的精确值对该项并不重要）。因此，我们也将不再考虑 $\Pi_{\alpha,\ i}$ 的精确值，并假设 $||\alpha||_\infty \le B$，从而$||\Pi_{\alpha,\ i}|| \le B^i$。

将前面的估计代入 (5.13)，得到

$$||r_i^{(N)}|| \le B||r_{i-1}^{(N)}|| + \sum_{2j+k<2N} h^{j+k/2}\widetilde{C}_{N-j-\lceil k/2\rceil,\varepsilon}h^{(N-j-\lceil k/2\rceil)(1-\varepsilon)}||u_{i-1}^{(j,k)}||$$

$$+ \sum_{2j_1+2j_2+k_1<2N} h^N C_{3(2N-2j_1-2j_2-k_1)+M}(\psi_{i-1})h^{-\varepsilon M}\left(h^{-\varepsilon}||d_{\hat{\rho}}F^{(i)}||^3\right)^{2N-2j_1-2j_2-k_1}K_{3k_1,3k_1+\deg P_0}N_\infty(P_{i-1}^{(j_1,k_1)})$$

回顾一下，$||P\Psi_0||_{L^2} \le K_{\deg P}N_\infty(P)$，其中 K_n 是仅依赖于 n的某个常数族。根据 $u_i^{(j,k)}$ 的表达式，我们有

$$||u_i^{(j,k)}||_{L^2} = ||P_i^{(j,k)}\Psi_0||_{L^2} \le K_{3k+\deg P_0}N_\infty\left(P_i^{(j,k)}\right)$$

我们还记得，可以用某个全局常数 C将 $||d_{\hat{\rho}}F^{(i)}||$ 估计为 $CJ_{q_0\dots q_{i-1}}$。

$$||r_i^{(N)}|| \le B||r_{i-1}^{(N)}|| + \sum_{2j+k<2N} h^{N(1-\varepsilon)}\widetilde{C}_{N-j-\lceil k/2\rceil,\varepsilon}K_{3k}C_{j,k,\varepsilon}B^i i^{2j+k}\left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}}\right)^{3k}$$

$$+ \sum_{2j_1+2j_2+k_1<2N} h^N C_{N,j,\varepsilon}h^{-M\varepsilon}K_{3k_1}C_{j_1,k_1,\varepsilon}B^i i^{2j_1+k_1}\left(h^{-\varepsilon}\left(J^u_{q_0\dots q_{i-1}}\right)^3\right)^{2(N-j_1-j_2)}$$

最后，我们将界 $J^u_{q_0\dots q_{i-1}} \le C_\varepsilon e^{i\lambda_{\max}\ (1+\varepsilon)}$ 代入前面的不等式中。可以找到一个常数 $C_{N,\ \deg P_0,\ \varepsilon}$ 使得

$$||r_i^{(N)}|| \le B||r_{i-1}^{(N)}|| + C_{N,\deg P_0,\varepsilon}B^i i^{2N}e^{6Ni\lambda_{\max}(1+\varepsilon)}h^{N(1-2\varepsilon)}h^{-M\varepsilon}$$

由于这对所有 $1\le i\le n$ 都成立，由对 i 的归纳法可得

$$||r_i^{(N)}|| \le \sum_{l=0}^{i} B^{i-l}\times C_{N,\deg P_0,\varepsilon}B^l l^N e^{6Nl\lambda_{\max}(1+\varepsilon)}h^{N(1-2\varepsilon)}h^{-M\varepsilon}$$

$$\le C_{N,\deg P_0,\varepsilon}B^i\sum_{l=0}^{i} l^N e^{6Nl\lambda_{\max}(1+\varepsilon)}h^{N(1-2\varepsilon)}h^{-M\varepsilon}$$

令 $c_{N,\varepsilon}>0$ 满足 $\sum_{l=0}^{i} l^N e^{6Nl\lambda_{\max}(1+\varepsilon)} \leq c_{N,\varepsilon} e^{6Ni\lambda_{\max}(1+\varepsilon)^2}$ 对所有 $i\in\mathbb{N}$ 均成立。这意味着，对于某个常数 $C_{N,\deg P_0,\varepsilon}$，

$$||r_i^{(N)}|| \leq C_{N,\deg P_0,\varepsilon} B^i e^{6Ni\lambda_{\max}(1+\varepsilon)^2} h^{N(1-2\varepsilon)} h^{-M\varepsilon}$$

最后，回顾 $n(h) \leq \vartheta_\varepsilon \log 1/h$ with $\vartheta_\varepsilon = \frac{1-4\varepsilon}{6\lambda_{\max}(1+\varepsilon)^2}$。因此，只要 $i \leq n(h)$，$e^{6Ni\lambda_{\max}(1+\varepsilon)^2} \leq h^{-N(1-4\varepsilon)}$，便可得到以下引理

引理 5.7. 存在常数 $C_{N,d,\varepsilon}$，使得对任意 $N\in\mathbb{N}$ 以及任意 $P_0\in\mathbb{C}[X]$，对所有 $1\leq i\leq n(h)$，均有

$$||r_{i,P_0}^{(N)}|| \leq C_{N,\deg P_0,\varepsilon} h^{2N\varepsilon} h^{-K} N_\infty(P_0)$$

其中 $K=\vartheta_\varepsilon \log B + M\varepsilon$。

若干推论。由于 N 可以任意大，我们重新得到一个已知事实：以 $\hat{\rho}$ 为中心的波包经过 n 步后，会变成以$F^{(n)}(\hat{\rho})$为中心的激发压缩态。压缩由沿着 ρ 轨道的不稳定雅可比控制。特别地，我们得到以下预期的推论，它给出了命题 4.2 的第一点。

推论 5.1。记 $\mathbf{q}=q_0\dots q_n\in\mathcal{A}^{n+1}$。令 $\hat{\rho}\in\kappa_q(\mathcal{W}_q)$，并记 $\rho=\kappa_q^{-1}(\hat{\rho})$。

- 若 $\rho\notin\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$，则 $A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n}M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_1,q}E_t\varphi_{\hat{\rho}}=O(h^\infty)$。
- 若 $\rho\in\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$，

$$e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_qB'_qE_t\varphi_\rho = A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n}M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_1,q_0}E_t\varphi_\rho + O(h^\infty)$$

其中常数与$\mathbf{q}$ 和 ρ无关。

证明。这是先前结果以及 $\mathrm{WF}_h(B_{q_n}A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n})\Subset\kappa_{q_n}(\mathcal{W}_{q_n})$ 这一事实的推论。□

此外，结合引理 5.3（引理 5.3 公式中的求和指标原为 j，在下面的求和中变为 l）和引理 5.4，我们得到：

命题 5.1。假设 $\hat{\rho}=\kappa_q(\rho)\in\kappa_q(\mathcal{W}_q)$，其中 $\rho\in\mathcal{W}^-_{q_0\dots q_n}$。那么，对于任意 $N\in\mathbb{N}$，我们有如下展开式（其中 $n=n(h)$）

$$M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_1,q_0}E_t\varphi_{\hat{\rho}} = \sum_{2j+k+l<2N} h^{j+k/2}h^{l(1/2-\delta)}u_n^{(j,k,l)} + R_n^{(N)}$$

其中

$$u_n^{(j,k,l)} = e^{tg(\rho)}T(\hat{\rho}_n)\mathcal{M}(d_{\hat{\rho}}F^{(n)})\Lambda_h\left(P_n^{(j,k,l)}\Psi_0\right)$$

$P_n^{(j,k,l)}$是一个次数至多为 $3k+2l$ 的多项式，并且

$$N_\infty\left(P_n^{(j,k,l)}\right) \leq C_{j,k,l,\varepsilon} n^{2j+k}\Pi_{\alpha,n}(\rho)\left(J^u_{q_0\dots q_{n-1}}\right)^{3k} h^{-k\varepsilon}$$

关于首项，$P_n^{(0,0,0))}=\pi_{\alpha,\,n}(\rho)$。关于余项 $R_n^{(N)}$，我们有

$$||R_n^{(N)}||_{L^2} \leq C_{N,\varepsilon}h^{-(K+K_0t)}h^{2N\varepsilon}$$

证明。我们只需陈述 $P_{(j,\,k,\,l)\,n} = P_{(j,\,k)\,n,\,P^{(l)}_{t\,h}}$ 其满足关于次数的所需界，并且N_∞。这里，$P^{(l)}_{t\,h}$ 出现在引理 5.3 的展开式中。引理 5.3 和引理 5.4 表明

$$M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_1,q_0}E_t\varphi_\rho = \sum_{2j+k+l<2N} h^{j+k/2}h^{l(1/2-\delta)}u_n^{(j,k,l)} + R_n^{(N)}$$

其中 $u_n^{(j,k,l)}$由所需公式给出，且

$$R_n^{(N)} = M_{q_n,q_{n-1}}\dots M_{q_1,q_0}r_{2N} + \sum_{l=0}^{2N-1} h^{l(1/2-\delta)} r^{(N-\lfloor l/2\rfloor)}_{n,P^{(l)}_{t,h}}$$

我们可以使用界 $||r_{2N}|| \leq C_N h^{N(1-2\delta)}$ 以及引理 5.7 中关于 $r_{n\ P,}^{(N)}$ 的界。由于多项式 $P_{(l)\,t,\ h}$ 的次数有上界 $4N$，因此在引理 5.7 的估计中，我们可以忽略对 deg P的依赖，从而得到

$$||R_n^{(N)}|| \leq C_{N,\varepsilon} h^{-K} h^{-K_0 t} \sum_0^{2N} h^{l(1/2-\delta)} h^{2(N-l/2)\varepsilon} \leq C_{N,\varepsilon} h^{-(K+K_0 t)} h^{2N\varepsilon}$$

其中，最后一个不等式由 $\varepsilon = 1/2 - \delta$ 得出。 □

备注。这个展开式混合了不同的尺度：

- 尺度 $h^{1-2\delta} = h^{2\varepsilon}$ ：它来自 g 所属的符号类；
- 第二个尺度，即当 n 独立于 h 时的尺度 $h^{1/2}$ 。在我们的语境中，更适合将这个第二个尺度视为 $h^{1/2}(J^u_{q_0\dots q_n})^3 h^{-\varepsilon}$。这个尺度取决于起点 $\rho_\circ$ ϑ_ε 的定义保证高阶项小于首项。

由于我们可以任意增大 N，因此可以确保余项关于 h 衰减，并且首项控制整个展开式。还要注意，常数 $C_{j,\ k,\ l,\ \varepsilon}$ 和 $C_{N,\ \varepsilon}$ 取决于 g 和 $M = M_h(z)$，并且可以选取得关于 $z \in \Omega(h) \cap \{\operatorname{Im} z \in [-\beta, 4]\}$ 一致。

5.4. 的最终作用 $A_{q_n} e^{-tG} B'_{q_n}$。从现在起，直到本节结束，我们假设$\rho \in \mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}$，并证明命题 4.2 中尚未证明的部分。

我们需要理解 $e^{-tG} B'_{q_n}$ 对最后一个展开式中的项 $u_n^{(j,k,l)}$的作用。由于所有这些项的形式都相同，我们考虑一个次数为 d 的一般多项式 P，并希望理解

$$e^{-tG} B'_{q_n} \left(T(\hat{\rho}_n) \mathcal{M} \left(d_{\hat{\rho}} F^{(n)} \right) \Lambda_h(P\Psi_0) \right)$$

再也无法重复使用引理 5.3 的策略。事实上，如果 g 仍以尺度 h^δ振荡，那么$\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}} F^{\ (n)}\right) \Lambda_h(P\Psi_0)$ 不再是尺寸为 $h^{1/2}$的盒子中的波包。为在模型情形下说明这一点，假设 $d_{\hat{\rho}} F^{(n)}$ 由对角矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \lambda_h & 0 \\ 0 & \lambda_h^{-1} \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_h \sim J^u_{q_0\dots q_{n-1}} \sim h^{-\alpha}$，这里

$$\lambda_{\min} \vartheta_\varepsilon \leq \alpha \leq \lambda_{\max} \vartheta_\varepsilon = \frac{1-4\varepsilon}{6(1+\varepsilon)^2}$$

那么 $\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}} F_{(n)}\right)$ 不过就是 $\Lambda_{\lambda_h^2}$，因此，$\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}} F_{(n)}\right) \Lambda_h(P\Psi_0) = \Lambda_{h\lambda_h^2}(P\Psi_0)$。这些态沿 x方向以尺度 $h^{1/2-\alpha} \gg h^\delta$振荡。

5.4.1. 的精确描述 $d_{\hat{\rho}} F^{(n)}$。无法在标准位置/动量变量中将 $d_{\hat{\rho}} F_{(n)}$ 精确写成对角矩阵。然而，下面的引理表明，$d_{\hat{\rho}} F^{(n)}$始终接近一个对角矩阵：

引理 5.8。存在 ε_2，其可根据 ε_0 取得任意小，使得以下结论成立。存在 $\lambda_{n、\ \mathbf{q}}$、$\mu_{n、\ \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^+$，使得对于所有 n、$\mathbf{q} = q_0 \dots q_n$和 $\hat{\rho} \in \kappa_q\left(\mathcal{W}^-_{\mathbf{q}}、\ \right)$，存在某个全局常数 $C > 0$，使得：

- $C^{-1} J^u_{\mathbf{q}} \leq \lambda_{n,\mathbf{q}} \leq C J^u_{\mathbf{q}}$；
- $C^{-1} \leq \mu_{n,\mathbf{q}} \lambda_{n,\mathbf{q}} \leq C$；
- $d_{\hat{\rho} F_{(n)}}$ 接近一个对角矩阵：

$$\left\| d_{\hat{\rho}} F^{(n)} - \begin{pmatrix} \lambda_{n,\mathbf{q}} & 0 \\ 0 & \mu_{n,\mathbf{q}} \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon_2 J^u_{\mathbf{q}}$$

证明。注意到 $\rho_i = F^{in_0}(\rho) = \kappa_{q_i}^{-1} \circ F^{\ (i)}(\hat{\rho})$。另外回忆 $F^{\ (i)} = \kappa_{q_i} \circ F^{in_0} \circ \kappa_{q_0}^{-1}$。

步骤 1：约化为 $\rho \in \mathcal{T}$。根据 $\mathcal{W}_{q_i}$ 的定义，对于 $i \in \{0, \dots, n\}$，有 $d(\rho_{q_i}, \rho_i) \leq 2\varepsilon_0$。因此，

$$d(F^{n_0}(\rho_{q_i}), \rho_{i+1}) \leq d(F^{n_0}(\rho_{q_i}), F^{n_0(i+1)}(\rho)) + d(F^{n_0(i+1)}(\rho), \rho_{i+1}) \leq C\varepsilon_0$$

对于一个仅取决于 F 的常数 C。也就是说，$(\rho_0, \dots, \rho_n)$ 是 F^{n_0} 的 $C\varepsilon_0$ 伪轨道。假设 $\delta_0 > 0$ 是一个足够小的固定参数。根据影子引理（[HK95] , 第 18.1 节），如果 ε_0 足够小，则 $(\rho_0, \dots, \rho_n)$ 被 F^{n_0} 的一条轨道所 δ_0 逼近，也就是说，存在 $\rho' \in \mathcal{T}$，使得对于 $i \in \{0, \dots, n\}$，$d(\rho_i, F^{in_0}(\rho')) \leq \delta_0$。因此，$d(F^{in_0}(\rho) F^{in_0}(\rho')) \leq \delta_0 + C\varepsilon_0$。为方便起见，设 $\varepsilon_2 = \delta_0 + C\varepsilon_0$，并注意到 ε_2 可以取为任意小，只要取决于 ε_0。根据引理 3.3，对于 $1 \leq i \leq n$，

$$||d_\rho F^{in_0}|| \leq C J^u_{in_0}(\rho') \quad ; \quad C^{-1} J^u_{q_0 \dots q_{i-1}} \leq J^u_{in_0}(\rho') \leq C J^u_{q_0 \dots q_{i-1}}$$

因此，利用该关系

$$d_\rho F^{nn_0} - d_{\rho'} F^{nn_0} = \sum_{k=0}^{n-1} d_{F^{n_0(k+1)}(\rho')} F^{n_0(n-k-1)} \circ \left(d_{F^{n_0 k}(\rho)} F^{n_0} - d_{F^{n_0 k}(\rho')} F^{n_0} \right) \circ d_\rho F^{n_0 k}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
||d_\rho F^{nn_0} - d_{\rho'} F^{nn_0}|| &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} J^u_{n_0(n-k-1)} \left(F^{n_0(k+1)}(\rho') \right) \left|\left| d_{F^{n_0 k}(\rho)} F^{n_0} - d_{F^{n_0 k}(\rho')} F^{n_0} \right|\right| J^u_{n_0 k}(\rho') \\
&\leq C \sum_{k=0}^{n-1} d\left(F^{n_0 k}(\rho), F^{n_0 k}(\rho') \right) J^u_{nn_0}(\rho') \\
&\leq C J^u_{\mathbf{q}} \sum_{k=0}^{n-1} \theta^{\min(k, n-k)} \varepsilon_0 \\
&\leq C J^u_{\mathbf{q}} \varepsilon_0
\end{aligned}$$

其中，第三个等式使用了引理 3.1，最后一个等式由 $\sum_{k=0}^{n-1} \theta^{\min(k,n-k)} \leq 2 \sum_{k=0, \lceil n/2 \rceil} \theta^k \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k < +\infty$ 得出。由此不难推出

$$||d_{\hat{\rho}} F^{(n)} - d_{\kappa_q(\rho')} F^{(n)}|| \leq C J^u_{\mathbf{q}} \varepsilon_0$$

因此，只需证明对于 $d_{\kappa_q(\rho')} F^{(n)}$，该引理成立。

步骤2：情形 $\rho \in \mathcal{T}$。假设 $\rho \in \mathcal{T}$。空间 $E_u(\rho)$ $E_s(\rho)$ $E_u(F^{nn_0}(\rho))$ 以及 $E_s(F^{nn_0}(\rho))$ 定义良好。对于 $q \in \mathcal{A}$ 和 $\bullet = s, u$，映射 $\zeta \in \mathcal{W}_q \cap \mathcal{T} \mapsto d_\zeta \kappa_q(E_\bullet(\zeta))$ 是 Lipschitz 的。由于 $d_\rho \kappa_q(E_u(\rho_q)) = \mathbb{R}\partial_y$，$d_\rho \kappa_q(E_s(\rho_q)) = \mathbb{R}\partial_\eta$ 且 $d(\rho_{q_0}, \rho) \leq C\varepsilon_2$，$d(\rho_{q_n}, F^{nn_0}(\rho)) \leq C\varepsilon_2$，我们可以固定单位向量

$$e_0^u \in d_\rho \kappa_{q_0} \left(E_u(\rho) \right) \ , \ e_0^s \in d_\rho \kappa_{q_0} \left(E_s(\rho) \right)$$

$$e_n^u \in d_{F^{nn_0}(\rho)} \kappa_{q_n} \left(E_u(F^{nn_0}(\rho)) \right) \quad e_n^s \in d_{F^{nn_0}(\rho)} \kappa_{q_n} \left(E_s(F^{nn_0}(\rho)) \right)$$

使得 $e_0^u, e_n^u = \partial_y + O(\varepsilon_2)$ 和 $e_0^s, e_n^s = \partial_\eta + O(\varepsilon_2)$。若记 P_0（分别记 P_n）为从 $\mathbb{R}^2$ 的自然基到 (e_0^u, e_0^s)（分别到 (e_n^u, e_n^s)）的基变换矩阵，则 $P_0, P_n = I_2 + O(\varepsilon_2)$（其中 O 中的全局常数不依赖于 n）。此外，由于 $d_{\hat{\rho}} F^{(n)}(e_0^u) \in \mathbb{R} e_n^u$ 且 $d_{\hat{\rho}} F^{(n)}(e_0^s) \in \mathbb{R} e_n^s$，矩阵 $P_n^{-1} d_{\hat{\rho}} F^{(n)} P_0$ 是对角矩阵。记它为

$$\begin{pmatrix} \lambda_{n,\mathbf{q}} & 0 \\ 0 & \mu_{n,\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{n,\mathbf{q}}$（分别为 $\mu_{n,\mathbf{q}}$）不过是 ρ 的不稳定（分别为稳定）雅可比矩阵，因此 $\lambda_{n,\mathbf{q}} \sim J^u_{\mathbf{q}}$。由于 $\det d_\rho F^{nn_0} = 1$, $\lambda_{n,\mathbf{q}} \mu_{n,\mathbf{q}} = \det(P_0)^{-1} \det(P_n) = 1 + O(\varepsilon_2)$。最后，

$$P_n^{-1} d_{\hat{\rho}} F^{(n)} P_0 = (I_2 + O(\varepsilon_2)) d_{\hat{\rho}} F^{(n)} (I_2 + O(\varepsilon_2)) = d_{\hat{\rho}} F^{(n)} + O\begin{pmatrix} ||d_{\hat{\rho}} F^{(n)}|| \varepsilon_2 \end{pmatrix} = d_{\hat{\rho}} F^{(n)} + O\left(\varepsilon_2 J^u_{\mathbf{q}} \right)$$

证明至此完成。 □

A由此引理可得，在标准位置/动量坐标中，我们可以写出 te

$$d_{\hat{\rho}}F^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \; ; \; a_n \sim J_{\mathbf{q}}^{u} \; ; \; b_n, c_n, d_n = O\left(\varepsilon_2 J_{\mathbf{q}}^{u}\right) \tag{5.15}$$

在这里， a_n， b_n， c_n， d_n 取决于 ρ，但由于 ρ 在本节结束前保持不变，我们不会精确说明这种依赖关系。由于我们希望理解 $\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(n)}\right)$ 对激发相干态的作用，因此还引入

$$\gamma_n = (c_n + id_n)(a_n + ib_n)^{-1} \; ; \; \beta_n = \mathrm{Re}(\gamma_n) \; ; \; \alpha_n = \mathrm{Im}(\gamma_n)^{-1} = |a_n + ib_n|^2 \tag{5.16}$$

我们得到了基本估计

$$\alpha_n \sim \left(J_{\mathbf{q}}^{u}\right)^2 ; \quad \beta_n = O(\varepsilon_2) \tag{5.17}$$

现在假设 $P \in \mathbb{C}[X]$ ，并将 P 分解到重整化厄米多项式（h_n）的基底中： $P = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k$（$P$） h_k。根据命题 2.9,

$$\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(n)}\right)\Lambda_h\left(h_k\Psi_0\right)(x) = (\alpha_n\pi h)^{-1/4}\left(\frac{a_n - ib_n}{a_n + ib_n}\right)^{k/2} h_k\left(\frac{x}{(\alpha_n h)^{1/2}}\right)e^{i\gamma_n\frac{x^2}{2h}} = c_{n,k}\Lambda_{\alpha_n h}\left(h_k\Psi_0\right)(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}$$

其中 $|c_{n,\ k}| = 1$。因此，存在线性映射 Φ_n ： $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ ，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathbb{C}[X]$,

- $\deg\ \Phi_n\left(P\right) = \deg\ P$对所有 $P \in \mathbb{C}[X]$ 成立;
- $N_\infty(\Phi_n(P)) \leq K_{次\,P} N_\infty(P)$，其中 $K_{次\,P}$仅依赖于 $\deg\ P$;
- 并且满足以下关系

$$\mathcal{M}\left(d_{\hat{\rho}}F^{(n)}\right)\Lambda_h\left(P\Psi_0\right) = \Lambda_{\alpha_n h}\left(\Phi_n(P)\Psi_0\right)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}} \tag{5.18}$$

备注。 我们可以将此态解释为与拉格朗日流形 $\{(x,\ \beta_n x)\}$相关联的（高度振荡的）拉格朗日态，其振幅为 $a(x) = \Lambda_{\alpha_n h}(\Phi_n(P)\Psi_0)(x)$。由于 $\alpha_n \sim \left(J_{\mathbf{q}}^{u}\right)^2$,$\alpha_n \sim h^{-\alpha}$ 对于某个 $\alpha \geq 2\lambda_{\min}\vartheta_\varepsilon$，振幅 a 以尺度 $h^{1/2-\alpha/2}$ 振荡。与在位置上局域于一个大小为 $h^{1/2}$ 的区间内的初始态 φ_0 相比，这个表达式显示出位置上的拉伸。此外，这个尺度大于符号 g 振荡所对应的尺度 h^δ 。

5.4.2. 指数函数的渐近展开。 我们现在旨在理解态 $A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n}u$，其中 u 具有以下形式

$$u(x) = T(\hat{\rho}_n)\left(\Lambda_{\alpha_n h}f\right)(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}$$

其中 $f = P\Psi$ 对某个 $P \in \mathbb{C}[X]$成立。我们首先断言

$$A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n} = A_{q_n}B'_{q_n}e^{-tB_{q_n}GB'_{q_n}} + O(h^\infty)$$

证明。 令 $A(t) = A_{q_n}e^{-tG}B'_{q_n}e^{tB_{q_n}GB'_{q_n}}$。 在 $t = 0$处， $A(0) = A_{q_n}B'_{q_n}$。我们进行微分:

$$\dot{A}(t) = A_{q_n}e^{-tG}\left[B'_{q_n}B_{q_n}GB'_{q_n} - GB'_{q_n}\right]e^{tB_{q_n}GB'_{q_n}}$$

算子 $A_{q_n}e^{-tG}$ 在 L^2 上有界，且其半经典波前集包含于 $\mathrm{supp}\,\chi_{q_n}$中。特别地， $A_{q_n}e^{-tG}\left(B'_{q_n}B_{q_n} - \mathrm{Id}\right) = O(h^\infty)$（对有界区间中的 t 一致成立）。这表明 $A'(t) = O(h^\infty)$。我们得出 $A(t) = A_{q_n}B'_{q_n} + O(h^\infty)$。□

因此，我们旨在理解 $e^{-tB_{q_n}GB'_{qn}}$的作用。我们利用引理 5.2，并对所有 $N \in \mathbb{N}$写成

$$G_{q_n} := B_{q_n}GB'_{q_n} = \mathrm{Op}_h\left(g \circ \kappa_{q_n}^{-1}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} h^{j(1-2\delta)}\,\mathrm{Op}_h(g_{j,q_n}) + R_N$$

其中 $||R_N|| \leq C_N h^{N(1-2\delta)}$。记 $g_{0,\ q_n} = g \circ \kappa_{q_n}^{-1}$。类似地，有

$$A_{q_n}B'_{q_n}e^{-tG_{q_n}}T(\hat{\rho}_n) = A_{q_n}B'_{q_n}T(\hat{\rho}_n)e^{-tT(\hat{\rho}_n)^*G_{q_n}T(\hat{\rho}_n)}$$

$\hat{}$ 并且我们回忆起，对于任意 $a \in \mathcal{S}'$， $T(\hat{\rho}_n)^*\mathrm{Op}_h(a)T(\hat{\rho}_n) = \mathrm{Op}_h(a(\cdot + \hat{\rho}_n))$。注意到 $h_j(\zeta) = \hat{g}_{j,\ q_n}(\hat{\rho}_n + \zeta)$，因此

$$A := T(\hat{\rho}_n)^*G_{q_n}T(\hat{\rho}_n) = \sum_{j=0}^{\infty} h^{j(1-2\delta)}\,\mathrm{Op}_h(h_j) + O_N(h^{N(1-2\delta)})$$

回忆一下，根据引理 5.2，$h_0 \in \log(1/h) S_\delta$ 以及 $h_j \in S_\delta$（当 $j \geq 1$ 时）。

最后，我们需要理解 e^{-tA} 对态 $u(x) = \Lambda_{\alpha_n h} f(x) e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$ 的作用。我们希望将附录 A.2 中的形式体系应用于 $H = L^2(\mathbb{R})$ 和 A。我们感兴趣的元素类定义如下：我们称依赖于 h 的态族 $u = u_h \in L^2(\mathbb{R})$ 属于类 $\mathcal{C}$，如果 u 具有如下形式：

$$u(x) = a(x) e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$$

其中 $a = a_h \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足：对于所有 $p \in \mathbb{N}$，存在 C_p 使得

$$|a^{(p)}(x)| \leq C_p h^{-\delta p} (\alpha_n h)^{-1/4} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{-1} \tag{5.19}$$

这个类依赖于 h（以及 n，而 n 本身又依赖于 h）。对于这样的态 u，我们在 $\mathcal{C}$ 上定义自然半范数：

$$q_p(u) = \sup_{k \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|a^{(k)}(x)| h^{\delta k} (\alpha_n h)^{1/4} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)\right) \tag{5.20}$$

特别地，有 $||u|| \leq C q_0(u)$。

备注。事实上，引入带有因子 $(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h})^{-1}$ 的半范数 q_j 纯属技术需要：这样便可以在依赖于该阶函数的符号类中进行处理（参见附录 A.1.3 中引理 5.10 的证明）。最终，我们只需估计演化态 $e^{-tA}u$ 的展开式中每一项的半范数 q_0，但这需要控制初始态 u 的若干个（有限个）半范数 q_j。这就是引入 q_j 的原因。我们主要考虑具有指数衰减的态 u，重要的是，对于所有 $k, p \in \mathbb{N}$，都有 $\partial^k \Psi_0 \leq C_{k,p}(1 + x^2)^{-p/2}$。

下面的引理保证，只要 $h^{2\delta} \ll \alpha_n h$，我们所研究的态确实属于 $\mathcal{C}$。回忆一下，$\alpha_n \geq C h^{-\alpha_{\min}}$ 其中 $\alpha_{\min} = 2\lambda_{\min}\vartheta_\varepsilon$。于是，只需要求

$$\varepsilon = 1/2 - \delta \leq \alpha_{\min}/2.$$

This 这显然不是问题，因为我们希望研究非常接近 $1/2$ 的 $\delta = 1/2 - \varepsilon$ 和 w e assu我相信这是真的，也就是说，我们假设

$$\varepsilon \leq \alpha_{\min}/2.$$

引理 5.9. 假设 $u(x) = \Lambda_{\alpha_n h}(P\Psi_0) e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$ 其中 $P \in \mathbb{C}[X]$ 的次数为 d。那么 $u \in \mathcal{C}$，并且对所有 $j \in \mathbb{N}$，存在常数 $C_{d,j}$，它们仅依赖于 d 和 j，使得 $q_j(u) \leq C_{d,j} N_\infty(P)$

证明。

$$\begin{aligned}\left|\left(\Lambda_{\alpha_n h}(P\Psi_0)\right)^{(j)}(x)\right| &= \left|(\alpha_n h)^{-j/2} \Lambda_{\alpha_n h}((P\Psi_0)^{(j)})(x)\right| \\ &\leq h^{-\delta j} (\pi h \alpha_n)^{-1/4} \left|(P_j \Psi_0)((\alpha_n h)^{-1/2} x)\right|\end{aligned}$$

这里，我们利用 $\alpha_n h \gg h^{2\delta}$。并且 P_j 是一个关于 P 的线性多项式，其次数满足 $\deg P_j = \deg P + j$，且 $N_\infty(P_j) \leq C_{d,j} N_\infty(P)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} q_k(u) &\leq \sup_{j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|(P_j \Psi_0)((\alpha_n h)^{-1/2} x)\right| \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right) \\ &\leq \sup_{j \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(P_j \Psi_0)(x)| \left(1 + x^2\right) \\ &\leq \sup_{j \leq k} C_{d,j} N_\infty(P_j) \leq C_{d,k} N_\infty(P) \end{aligned}$$

□

为了应用附录 A.2 的形式体系，我们需要以下引理。这或多或少是驻相定理在二次情形下的直接应用。我们将其证明写在附录 A.1.3 中。该引理说明了如何计算 $\mathrm{Op}_h(m)u$，其中 $u \in \mathcal{C}$ 和 $m \in S_\delta$。

引理 5.10。 存在 $M > 0$ 使得以下结论成立。假设 $m \in S_\delta$ 或 $m = h_0$。那么，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 $A_k(m)$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$，使得对于 $u \in \mathcal{C}$，写成 $u(x) = a(x)e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$ 的形式时，我们有

- $A_0(m)u(x) = m(x, \beta_n x)u(x)$;
- 对于 $k \geq 1$, $A_k(m)$ 的形式为

$$A_k(m)u(x) = \sum_{l \leq 2k} c_l(x)\partial_x^l a(x)e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}} \tag{5.21}$$

其中 $|c_l^{(p)}(x)| \leq C_{l,k,p}h^{(l-p)\delta}$。

- 对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$，存在 $c_{j,k} > 0$ 使得对于所有 $u \in \mathcal{C}$, $q_j(A_k(m)u) \leq c_{j,k}q_{2k+j}(u)$;

- 对于所有 $N \in \mathbb{N}^*$ 且对于所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $C_{j,N} > 0$ 使得

$$q_j\left(\mathrm{Op}_h(m)u - \sum_{k=0}^{N-1} h^{k(1-2\delta)}A_k(m)u\right) \leq C_{j,N}q_{j+2N+M}(u)h^{N(1-2\delta)}$$

备注。 我们需要区分 $m = h_0$ 和 $m \in S_\delta$ 的情形，因为 h_0 不属于 S_δ（回想一下，我们只有 $h_0 = O(\log(1/h))$）。然而，只要 $|\alpha| \geq 1$, h_0 就满足 $|\partial^\alpha h_0| \leq C_\alpha h^{-|\alpha|\delta}$。这也解释了为什么在第三项中我们将限制条件设为 $(j,\ k) \neq (0,\ 0)$；但在 $m \in S_\delta$ 的情形下，第一项给出的表达式表明，对于 $(j,\ k) = (0,\ 0)$ 同样成立。

将 Lemma 5.10 给出的每个 $\mathrm{Op}_h(h_k)$ 的展开式中同阶的项汇集起来，我们可以构造算子族

$$A_k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\ ;\ A_k = \sum_{j+l=k} A_j(h_l).$$

每个 A_k 都具有与 (5.21) 相同的形式，并且对于所有 $u \in \mathcal{C}$，它们满足

- $A_0u(x) = h_0(x, \beta_n x)u(x)$.
- 对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$，存在 $c_{j,k} > 0$，使得对于所有 $u \in \mathcal{C}$, $q_j(A_ku) \leq c_{j,k}q_{2k+j}(u)$;

- 对于所有 $N \in \mathbb{N}^*$，以及所有 $j \in \mathbb{N}$，存在 $C_{j,N} > 0$，使得

$$q_j\left(Au - \sum_{k=0}^{N-1} h^{k(1-2\delta)}A_ku\right) \leq C_{j,N}q_{j+2N+M}(u)h^{N(1-2\delta)}$$

现在我们使用附录 A.2 中的公式和记号来证明：

命题 5.2。 设 $P \in \mathbb{C}[X]$ 的次数为 d，并考虑态 $u = \Lambda_{\alpha_n h}(P\Psi_0)e^{\frac{i\beta_n x^2}{2h}}$。那么，固定 t 后，存在一个函数族 (f_k) 和 $K_1 > 0$，使得，

- $v_0(x) = u(x)$;
- 对于所有 $N \in \mathbb{N}^*$，存在 $C_{N,d}$，使得

$$\left\| A_{q_n}\left(e^{-tG}B'_{q_n}T(\hat{\rho}_n)u - \sum_{k=0}^{N-1} h^{k(1-2\delta)}B'_{q_n}T(\hat{\rho}_n)u_k\right)\right\| \leq C_{N,d}h^{N(1-2\delta)}h^{-tK_1}N_\infty(P)$$

其中

$$u_k(x) = \exp\left(-th_0(x, \beta_n x)\right)v_k(x)\ ;\ v_k(x) = f_k(x)\left(\Lambda_{\alpha_n h}\Psi_0\right)(x)e^{\frac{i\beta_n x^2}{2h}}$$

- 对于所有 $k \in \mathbb{N}$，存在 $c_{k,d} > 0$ 使得对于所有 $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_k(x)| \leq c_{k,d}\left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{k/2} N_\infty(P)$$

备注。 特别是，最后这些估计意味着 $v_k \in \mathcal{C}$。

证明。 我们采用附录 A.2 中的记号和公式，其中参数为 $\tilde{h} = h^{1-2\delta}$。我们根据迭代公式 (A.3) 定义一个族 $(v_k(t))$。算子 A_0 不过是乘以

$$a_0(x) = h_0(x, \beta_n x)$$

因此， e^{sA_0} 是乘以 $\exp(sa_0)$。

注意$A_k(s)=e^{-sA_0}A_ke^{sA_0}$，并证明 $A_k(s)u(x)$ 具有与（5.21）相同的形式，其中函数 $c_l(x)$ 被函数 $\tilde{c}_l(s,\ x)$ 所替代。我们有

$$\begin{aligned}e^{-sa_0}c_l(x)\partial_x^l\left(e^{sa_0}a(x)\right)&=c_l(x)\sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}a_m(s,x)a^{(l-m)}(x)\\&=\sum_{m=0}^{l}\tilde{c}_{l,m}(s,x)\partial_x^m a(x)\end{aligned}$$

其中 $a_m(s,x)=e^{-sa_0}\partial_x^m(e^{sa_0})$ 是形如以下形式的各项的求和

$$s^i\prod_{j=1}^{i}a_0^{(k_j)}\text{ with }(k_1,\dots,k_i)\in(\mathbb{N}^*)^i\text{ and }k_1+\cdots+k_i=m$$

和 $\tilde{c}_{l,m}(s,x)=\binom{m}{l}c_l(x)a_{l-m}(s,x)$. 不难看出 $|\partial_x^p a_m(s,x)|\leq C_{m,p}(1+|s|)^m h^{-\delta(m}$ 在此我们有

$$\begin{aligned}|\partial_x^p\tilde{c}_{l,m}(x)|=&\binom{m}{l}\left|\sum_{p_1+p_2=p}\binom{p}{p_1}c_l^{(p_1)}(x)a_{l-m}^{(p_2)}(s,x)\right|\\&\leq C_{p,l,m}\sup_{p_1+p_2=p}h^{\delta(l-p_1)\delta}h^{-(l-m+p_2)\delta}\leq C_{p,l,m}h^{(m-p)\delta}\end{aligned}$$

这表明，∂_x^m 前面的项具有正确的行为，可写成 (5.21) 的形式，因此我们可以令 $\tilde{c}_m(s,x)=\sum_{l\leq 2k}\tilde{c}_{l,m}(s,x)$，使得

$$A_k(s)u(x)=\sum_{m\leq 2k}\tilde{c}_m(s,x)\partial_x^m\left(ue^{-i\beta_n x^2/2h}\right)e^{i\beta_n x^2/2h}$$

现在我们来分析 $A_k(s)$ 对形如 $c(x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}$ 的态的作用。我们声称可以写成

$$A_k(s)\left(c(x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}\right)=d_k(s,x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}\tag{5.22}$$

其中

$$|\partial_x^p d_k(s,x)|\leq C_{k,p}h^{-p\delta}(1+|s|)^k\sup_{y\in\mathbb{R},m\leq 2k+p}|c^{(m)}(y)|\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^k.\tag{5.23}$$

为此，我们写成

$$\begin{aligned}\tilde{c}_m(s,x)\partial_x^m\left(c(x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)\right)&=\tilde{c}_m(s,x)\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}c^{(m-l)}(x)\left(\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)\right)^{(l)}(x))\\&=\underbrace{\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\tilde{c}_m(s,x)c^{(m-l)}(x)\frac{Q_l((\alpha_n h)^{-1/2}x)}{(\alpha_n h)^{l/2}}\right)}_{C_m(s,x)}\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)\end{aligned}$$

其中，$Q_l\in\mathbb{R}[X]$ 是次数为 l的多项式。因此，我们有，

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^{(p)}C_m(s,x)\right|&=\left|\partial_x^p\left(\sum_{m_1+m_2=m}\binom{m}{m_1}\tilde{c}_m(s,x)c^{(m_1)}(x)\frac{Q_{m_2}((\alpha_n h)^{-1/2}x)}{(\alpha_n h)^{m_2/2}}\right)\right|\\&\leq C_{m,p}\sup_{\substack{m_1+m_2=m\\p_1+p_2+p_3=p}}|\partial_x^{p_1}\tilde{c}_m(s,x)||c^{(m_1+p_2)}(x)|(\alpha_n h)^{-m_2/2-p_3/2}|Q_{m_2}^{(p_3)}((\alpha_n h)^{-1/2}x)|(1+|s|)^m\\&\leq C_{m,p}\sup_{\substack{m_1+m_2=m\\p_1+p_2+p_3=p}}h^{(m-p_1)\delta}|c^{(m_1+p_2)}(x)|(\alpha_n h)^{-m_2/2-p_3/2}(1+|s|)^m\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{(m_2-p_3)/2}\\&\leq C_{m,p}\sup_{y\in\mathbb{R},l\leq m+p}|c^{(l)}(y)|\sup_{\substack{m_1+m_2=m\\p_1+p_2+p_3=p}}h^{(l-p_1)\delta}h^{-(m_2+p_3)\delta}(1+|s|)^m\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2}\\&\leq C_{m,p}\sup_{y\in\mathbb{R},l\leq m+p}|c^{(l)}(y)|h^{-\delta p}(1+|s|)^m\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2}\end{aligned}$$

从而命题得证，其中 $d_k(s,\ x)\ = \sum_{m\le 2k} C_m(s,\ x)$。

现在我们精确分析附录 A.2 中的迭代公式 (A.3)。我们使用本附录中的记号 f（尤其是对于余项 $\tilde{r}_{j,\ N}$ 和 R_N）。取 $K_0 > 0$ 使得$|h_0| \le K_0 \log 1/h$，从而 $|e^{ta_0}| \le h^{-tK_0}$。对于 $j \ge 0$，我们有

$$q_j(e^{ta_0}u) \le h^{-|t|K_0} c_{0,j} q_j(u)$$

当 $j = 0$ 时，这显然成立。对于 $j \ge 1$，这是因为 h_0 的导数满足$|\partial^\alpha h_0| \le C_\alpha h^{-|\alpha|\delta}$，其中 $\alpha \ne 0$，并且由 (5.20) 中 q_j 的定义可知。

Lea项。对于我们在命题 5.2 中希望得到的展开式首项，我们只需 ve

$$u_0(t) = e^{ta_0}u$$

因此，

$$q_j\left(\tilde{r}_{0,\ N}(t)\right) \le \mathcal{O}_{j,N}\tilde{h}^N q_{j+2N+M}\left(e^{ta_0}u\right) \le C_{j,N}\tilde{h}^N c_{0,j+2N+M}h^{-|t|K_0} q_{j+2N+M}(u) \le C_{d,j,N}\tilde{h}^N h^{-|t|K_0} N_\infty(P$$

迭代。通过归纳法，利用公式 (A.3) 和 (5.22)，可知若初始态为$u = \Lambda_{\alpha_n h}(P\Psi_0)e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$，则

$$v_k(t) = f_k(t,x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$$

其中 $|\partial_x^p f_k(s,x)| \le C_{k,p}h^{-p\delta}(1+|s|)^k \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{k/2} N_\infty(P)$。当 $p = 0$ 时，这给出了命题 5.2 中 $|f_k(x)|$ 的所需估计。由此可得

$$q_j(e^{tA_0}v_k(t)) \le h^{-|t|M_0} c_{0,j} q_j(v_k(t)) \le h^{-|t|M_0} c_{0,j}(1+|t|)^k h^{-|t|M_0}\tilde{C}_{d,j,k}(1+|t|)^k N_\infty(P)$$

此外，我们可以估计

$$q_j\left(\tilde{r}_{k,N}(t)\right) \le C_{j,N-k}\tilde{h}^{N-k} q_{j+2(N-k)+M}\left(e^{tA_0}v_k(t)\right) \le C_{d,N,j,k}\tilde{h}^{N-k}h^{-|t|M_0}(1+|t|)^k N_\infty(P)$$

结论。我们发现，对于 $j \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} q_j\left(\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{h}^k\tilde{r}_{k,N}(t)\right) &\le \tilde{h}^N h^{-|t|M_0}\sum_{k=0}^{N-1} C_{d,N,j,k}(1+|t|)^k N_\infty(P) \\ &\le C_{d,j,N}\tilde{h}^N h^{-|t|M_0}(1+|t|)^{N-1}N_\infty(P) \end{aligned}$$

对 (A.4) 积分，并回忆起 $||\cdot|| \le Cq_0$ 属于 $\mathcal{C}$，可得

$$||R_{N-1}(t)|| \le \int_0^{|t|} ||A||||R_{N-1}(s)||ds + C_{d,0,N}\tilde{h}^N h^{-|t|M_0}(1+t^2)^{N-1}N_\infty(P)$$

根据 Gronwall引理的一个变体，可找到常数 $C_{N,d}$，使得

$$||R_{N-1}(t)|| \le C_{N,d}\tilde{h}^N e^{|t|\max(K_0|\log h|, ||A||)}(1+t^2)^N N_\infty(P)$$

由于 $||A|| = O(\log\ h)$，存在 $K_1 > 0$使得 $e^{|t|\max(K_0|\log\ h|,\ ||A||)} \le\ h^{-|t|K_1}$，从而证明了命题 5.2。□

结合命题 5.1、(5.18) 和命题 5.2，我们得到如下展开式：

推论 5.2。

$$\begin{aligned} (5.24)\quad A_{q_n}e^{-tG}\mathfrak{M}^{n-1}M^{n_0}A_q B_q'\varphi_{\hat{\rho}} = A_{q_n}\sum_{2j+k+l+2m<2N} & h^{j+k/2+l\varepsilon+m\varepsilon}u_n^{(j,k,l,m)} \\ & + O\left(h^{-K-t(K_0+K_1)}h^{2N\varepsilon}\left(\log h\right)^N\right) \end{aligned}$$

其中

$$T(\hat{\rho}_n)^* u_n^{(j,k,l,m)}(x) = e^{tg(\rho)-th_0(x,\beta_n x)} f_n^{(j,k,l,m)}(x)\Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x)e^{\frac{i\beta_n x^2}{2h}}$$

其中，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，我们有

$$\left|f_n^{(j,k,l,m)}(x)\right| \le C_{j,k,l,m}n^{2j+k}\Pi_{\alpha,n}(\rho)\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{3k}h^{-k\varepsilon}\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2}$$

关于首项，$f_n^{(0,0,0,0)}$恒等于$\pi_{\alpha,\ n}(\rho)$。

证明。 在命题 5.1 的展开式中，我们使用公式 (5.18) 对态 $u_n^{(j,k,l)}$进行变换。最后，我们对每个这样的态使用命题 5.2。对于 $u_n^{(j,k,l)}$，我们保留展开式的$N_{j,\ k,\ l}$ 前几项，其中 $N_{j,\ k,\ l} = N - j - \lceil (k+l)/2 \rceil$。这给出了满足以下条件的余项 $r_n^{(j,k,l)}$

$$\begin{aligned}
||r_n^{(j,k,l)}||_{L^2} &\leq C_{N,j,k,l} h^{j+k/2+l\varepsilon} h^{2\varepsilon N_{j,k,l}} N_\infty \left(\Phi_n\left(P_n^{(j,k,l)}\right)\right) h^{-t(K_0+K_1)} \\
&\leq C_{N,j,k,l} h^{j+k/2+l\varepsilon} h^{2\varepsilon N_{j,k,l}} h^{-k\varepsilon} n^{2j+k} \Pi_{\alpha,n}(\rho) \left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{3k} h^{-t(K_0+K_1)} \\
&\leq C_{N,j,k,l} h^{j+k/2+l\varepsilon} h^{2\varepsilon N_{j,k,l}} n^{2j+k} h^{-k\varepsilon} h^{-k\frac{1-4\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} h^{-K-t(K_0+K_1)} \\
&\leq C_{N,j,k,l} \left(\log 1/h\right)^N h^{2\delta j} h^{2\varepsilon N} h^{k\left(1/2-2\varepsilon-\frac{1-4\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)} h^{-K-t(K_0+K_1)}
\end{aligned}$$

但我们有 $\frac{1}{2} - 2\varepsilon - \frac{1-4\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \geq 0$ （假设 $\varepsilon \leq 1/4$，这并不是问题，因为我们处理的是很小的 ε）。因此，$||r_n^{(j,k,l)}|| \leq C_{N,\ j,\ k,\ l} (\log 1/h)^N h^{-K-t(K_0+K_1)}$。因此，将所有余项 $r_n^{(j,k,l)}$合并后并加到 $e^{-tG} B'_{q_n} R_n^{(N)}$上，我们得到一个余项，其大小受 $C_N h^{-K-t(K_0+K_1)} h^{2N\varepsilon} (\log\ 1/h)^N$控制，正如预期。□

5.5. 展开式各项的关键估计。 在推论 5.2 的展开式中，首项由下式给出

$$u_n^0 \coloneqq T^*(\hat{\rho_n}) u_n^{(0,0,0,0)} = \exp\left(tg(\rho) - th_0(x, \beta_n x)\right) \Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x) e^{\frac{i\beta_n x^2}{2h}} \pi_{\alpha,n}(\rho)$$

作为推论 5.2 的结果，其余各项具有如下形式

$$T^*(\hat{\rho_n}) = u_n^{(j,k,l,m)}(x) = f_n^{(j,k,l,m)}(x) \frac{u_n^0(x)}{\pi_{\alpha,n}(\rho)}$$

with

$$\left| f_n^{(j,k,l,m)}(x) \right| \leq C_{j,k,l,m} n^{2j+k} \left(J^u_{q_0 \dots q_n}\right)^{3k} \Pi_{\alpha,n}(\rho) h^{-k\varepsilon} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2}$$

从而，记

$$v_n = \frac{u_n^0}{\pi_{\alpha,n}} = \exp\left(tg(\rho) - th_0(x, \beta_n x)\right) \Lambda_{\alpha_n h}(\Psi_0)(x) e^{\frac{i\beta_n x^2}{2h}}$$

我们有

$$\frac{\left|\left| h^{j+k/2+l\varepsilon+m\varepsilon} u_n^{(j,k,l,m)} \right|\right|_{L^2}}{\Pi_{\alpha,n}(\rho) \times \left|\left| \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} v_n \right|\right|_{L^2}} \leq C_{j,k,l,m} h^{j+k/2+l\varepsilon+m\varepsilon} n^{2j+k} \left(J^u_{q_0 \dots q_n}\right)^{3k} h^{-k\varepsilon} \tag{5.25}$$

回顾 $\left(J^u_{q_0 \dots q_n}\right)^{3k} h^{-k\varepsilon} \leq C_k e^{3kn\lambda_{\max}(1+\varepsilon)} h^{-k\varepsilon} \leq C_k h^{-k\frac{1-4\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \varepsilon} \ll C_k h^{-k/2}$，我们看到，上述不等式右端在 $h \to 0$ 时趋于 0。因此，只需控制

$$\left|\left| \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} v_n \right|\right|_{L^2}$$

这正是我们在本小节余下部分所做的工作。

5.5.1. 约化到一个紧区间。注意到由于 $\mathrm{WF}_h(A_q)$ 是紧的，存在 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$A_q B'_q = A_q B'_q \chi(x) + O(h^\infty)$$

并且可以为所有 A_q 选择同一个 χ。事实上，回顾 $\mathrm{WF}_h(A_q) = \mathrm{supp}(\chi_q) \Subset \mathcal{W}_q \subset B(\rho_q,\ 2\varepsilon_0)$，且 κ_q 在 ρ_q 的一个固定大小为 ε_1 、大于 ε_0 的邻域内有定义。存在一个 $\Xi_q \in \Psi_0(\mathbb{R}^2)$ 使得

$$A_q B'_q \Xi_q = A_q B'_q + O(h^\infty) \quad ; \quad \mathrm{WF}_h(\Xi_q) \Subset \kappa_q(\mathcal{W}_q)$$

特别地，$\mathrm{diam}\left(\mathrm{WF}_h(\Xi_q)\right) = O(\varepsilon_0)$。因此，只需固定 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得对于所有 $q \in \mathcal{A}$，$\chi = 1$ 都位于 $\left(\mathrm{WF}_h(\Xi_q)\right)$ 的一个邻域内，并且 $\mathrm{supp}\,\chi \subset [-C\varepsilon_0, C\varepsilon_0]$，其中某个大常数 C 与 ε_0 无关。因此，我们将重点放在 χv_n 上。

我们设

$$\boxed{\zeta_n(x) = \kappa_{q_n}^{-1}(\hat{\rho}_n + (x, \beta_n x)) \in \mathcal{W}_{q_n}} \tag{5.26}$$

它描述了一条曲线，即直线 $\hat{}\rho_n + (x,\ \beta_n x)$ 在 κ_{q_n} 作用下的原像。为确保 $\zeta_n(x)$定义良好，$\hat{}\rho_n + (x,\ \beta_n x)$必须与 $\kappa_{q_n}(\rho_{q_n}) = 0$的距离至多为 ε_1。我们声称，可以将 ε_0取得足够小，使得

$$x \in \operatorname{supp}(\chi) \implies \zeta_n(x) \text{ is well defined} \tag{5.27}$$

确实，$x \in \operatorname{supp}\chi \implies |x| \le C\varepsilon_0$，因此 $d(\hat{}\rho_n, \kappa_{q_n}(\rho_{q_n})) = O(\varepsilon_0)$，我们取 ε_0，从而保证 $\zeta_n(x)$ 定义良好。

5.5.2. 控制 v_n的范数。我们的目标是控制 χv_n 的范数，从而控制首项。事实上，正如前文所述，为了控制高阶项，还必须控制 χÄ$1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}$ä$^{m/2} v_n$ 的范数。注意‹ $\Psi_m(x) = \pi^{-1/4}(1+x^2)^{m/2} e^{-x^2/2}$。

$$\left\| \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} \chi v_n \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi(x)|^2 e^{2tg(\rho) - 2tg(\zeta_n(x))} |\Lambda_{\alpha_n h}(\widetilde{\Psi}_m)(x)|^2 dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left|\chi((\alpha_n h)^{1/2} x)\right|^2 e^{2tg(\rho) - 2tg(\zeta_n((\alpha_n h)^{1/2} x))} (1+x^2)^m e^{-x^2} dx$$

我们有

引理 5.11。

$$\mathbb{1}_{|x| \ge \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} \chi(x) v_n(x) = O(h^\infty)_{L^2}$$

T $O(h^\infty)$中的常数取决于 m 和 ε，但既不依赖于 ρ，也不依赖于 n，只要 $n \sim \vartheta_\varepsilon \log 1/\quad h.$

证明。由于 $g = O(\log h)$，我们有

$$e^{2tg(\rho) - 2tg(\zeta_n((\alpha_n h)^{1/2} x))} \le \exp(O(\log(h))) = O(h^{-C})$$

对于某个取决于 t 和 g的 C。我们还有 $|\chi| = O(1)$。因此，经过变量代换$x = \alpha_n^{1/2} h^{1/2} y$后，只需估计

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]} (\alpha_n^{1/2} h^{1/2} y)(1+y^2)^m e^{-y^2} dy = \int_{|y| \ge h^{\delta_0 - 1/2}} (1+y^2)^m e^{-y^2} dy$$

由于 $\delta_0 < 1/2$，利用标准估计即可得出结论

$$\int_{|y| > \lambda} (1+y^2)^m e^{-y^2} dy = O_m(\lambda^{-\infty})$$

□

该引理的一个非常重要的推论是，我们只需关注 $\zeta_n(x)$，其中$|x| \le \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}$。特别地，

$$|x| \le \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0} \implies d(\zeta_n(x), \rho_n) \le C\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}$$

回忆 $\alpha_n^{1/2} \le Ce^{n\lambda_{\max}(1+\varepsilon)} \le Ch^{-\frac{1-4\varepsilon}{6(1+\varepsilon)}}$，并回忆 δ_0 满足

$$\delta_0 - \frac{1-4\varepsilon}{6(1+\varepsilon)} \ge \frac{1}{3} \tag{5.28}$$

从而确保 $\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0} \le Ch^{1/3}$。事实证明，这一点将十分重要。

5.5.3. 对 $\mathcal{T}$的 h^δ-邻域之外的控制。我们首先讨论 ρ 位于 $\mathcal{T}$ 的h^δ-邻域之外的情形（事实上，在不稳定方向上我们会稍作放宽，见下文的引理）。下面的估计在很大程度上依赖于逃逸函数 g 的结构。g 的逃逸性质已被 [NSZ用于削弱傅里叶积分算子 $M(h)$ 的符号；他们证明，只要适当选取 t，$M_t(h)$ 在 $\mathcal{T}$ 的 h^δ-邻域之外的范数就可以小于任意给定的 ε。这里，我们希望对某个 $L = L(t)$ 得到形如 h^L 的强多项式衰减；只要 t 足够大，$L = L$ 就可以取得任意大。这之所以可行，是因为我们在对数时间 $n(h)$ 上进行传播。

我们关注的是控制以下项

$$d(x) := \exp\left(tg(\rho) - tg(\zeta_n(x))\right)$$

‹，该项控制着 χv_n 的范数。事实上，由于 $||\Psi_m||_\infty < +\infty$，我们有

$$\left|\left|\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2}\chi v_n\right|\right|_{L^2}^2 \leq \int_{|x|\leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} d(x)^2|\Lambda_{\alpha_n h}\widetilde{\Psi}_m(x)|^2dx + O(h^\infty)$$
$$\leq C_m(\alpha_n h)^{-1/2}\int_{|x|\leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} d(x)^2dx + O(h^\infty)$$

根据 (3.19) 中 g 的构造，我们有

$$d(x) = (R_-(x)R_+(x))^t\ ,\ R_-(x) \coloneqq \frac{Mh^{2\delta}+\hat{\varphi}_-(\rho)}{Mh^{2\delta}+\hat{\varphi}_-(\zeta_n(x))}\ ,\ R_+(x) \coloneqq \frac{Mh^{2\delta}+\hat{\varphi}_+(\zeta_n(x))}{Mh^{2\delta}+\hat{\varphi}_+(\rho)} \tag{5.29}$$

（这些项依赖于 ρ 和 h，但为简化记号，我们有意省略了这种依赖关系。还要回忆一下，$\rho_n = F^{nn_0}(\rho) = \kappa_{q_n}^{-1}(\hat{}\rho_n) = \zeta_n(0)$。）

命题 5.3. 关于 R_- 的估计。 存在一个全局常数 $C>0$（即，该常数仅通过单位分解的选取依赖于 F 和 ε，而与 ρ、h 及 $\mathbf{q}$ 无关），使得对所有 $x\in[-\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0},\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}]$，我们都有

- If $d(\rho,\mathcal{T}_-)\geq h^\delta$, $R_-(x)\leq C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-2}$;
- If $d(\rho,\mathcal{T}_-)\leq h^\delta$, $R_-(x)\leq C$.

证明。我们选取 $x\in[-\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0},\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}]$。

- 我们假设 $d(\rho,\mathcal{T}_-)\geq h^\delta$。由引理 4.2 和 (5.17)，$d(\rho_n,\mathcal{T}_-)\geq C^{-1}J^u{}_{\mathbf{q}}d(\rho,\mathcal{T}_-)\geq C^{-1}\alpha_n^{1/2}h^\delta$。于是，我们有

$$d(\zeta_n(x),\mathcal{T}_-)\geq d(\rho_n,\mathcal{T}_-)-d(\zeta_n(x),\rho_n)\geq C^{-1}\alpha_n^{1/2}d(\rho,\mathcal{T}_-)-C\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}\geq \tilde{C}^{-1}\alpha_n^{1/2}d(\rho,\mathcal{T}_-)$$

因为 $\delta<\delta_0$ 和 $h^\delta\leq d(\rho,\mathcal{T}_-)$。回想一下，$\hat{}\varphi_-(\zeta)\sim h^{2\delta}+d(\zeta,\mathcal{T}_-)^2$。因此，

$$R_-(x)\leq \frac{C_1 d(\rho,\mathcal{T}_-)^2}{C_2\alpha_n d(\rho,\mathcal{T}_-)^2}\leq C\alpha_n^{-1}\leq C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-2}$$

- 第二点要容易得多（事实上，在此阶段这是一个非常粗略的估计）：若 $d(\rho,\mathcal{T}_-)\leq h^\delta$，分子 $Mh^{2\delta}+\hat{}\varphi_-(\rho)$ 小于 $Ch^{2\delta}$。对于分母，我们只需利用 $\hat{}\varphi_-\geq 0$ 这一事实，将其下界估计为 $Mh^{2\delta}$，从而得到 $R_-(x)\leq C$。

□

现在我们来讨论 R_+ 的情形。首先，我们需要更精确地理解拉格朗日空间 $\{(x,\beta_n x)\}$。我们预期它是一个不稳定流形的良好一阶近似。以下引理给出了这一结论：

引理 5.12. 存在一个全局常数 $C>0$，使得以下结论成立：存在$\zeta_n^\star\in\mathcal{T}$，使得对所有 $x\in[-\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0},\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}]$，都有

$$d(\zeta_n(x),\mathcal{T}_+)\leq d(\zeta_n(x),W_u(\zeta_n^\star))\leq C\left(h^{1/3}+\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\right)d(\rho,\mathcal{T}_+)+Ch^{\delta_0}$$

备注。 上述误差中包含的不同项分别出现在证明的不同位置。其中一项源于它是不稳定流形的一阶近似：我们需要控制该近似中的误差项。事实证明，只要$|x|\leq\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}=O(h^{1/3})$，该误差就是 $O(|x|^2)=O(h^{2/3})$。根据 ρ（以及 $\mathbf{q}$）的不同，误差的主项可能有所差异。我们将看到，当 $d(\rho,\mathcal{T})\geq h^{\delta_1}$时，项 h^{δ_0} 可以忽略。

证明。**步骤 1：ρ_n 接近参考不稳定流形** $W_u(\zeta_n^\star)$。（见图 7）

在第一步中，我们希望证明 ρ_n 接近一个不稳定流形 $W_u(\zeta_n^\star)$。正如引理 4.2 的证明中所做的，我们考虑一点 $\zeta_+\in\mathcal{T}$，使得 $d(\rho,\mathcal{T}_+)=d(\rho,W_u(\zeta_+))$，并且对所有 $0\leq i\leq n$，$d(F^{in_0}(\zeta_+),F^{in_0}(\rho))\leq\varepsilon_2$，其中某个足够小的 ε_2 取决于 ε_0。还要注意，根据引理 4.2 的第三点，$d(\rho,\mathcal{T}_-)\leq C_2\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\varepsilon_0$。固定一点 ζ_-，使得$d(\rho,\mathcal{T}_-)=d(\rho,W_s(\zeta_-))$，并考虑 $\zeta_O\ W_u(\zeta_+)\cap W_s(\zeta_-)$ 中的唯一一点。于是，我们仍有 $d(\rho,\mathcal{T}_+)=d(\rho,W_u(\zeta_O))$，并且还有

$$d(\rho,\zeta_O)^2\sim d(\rho,\mathcal{T}_-)^2+d(\rho,\mathcal{T}_+)^2\leq C\left(\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\varepsilon_0\right)^2+d(\rho,\mathcal{T}_+)^2$$

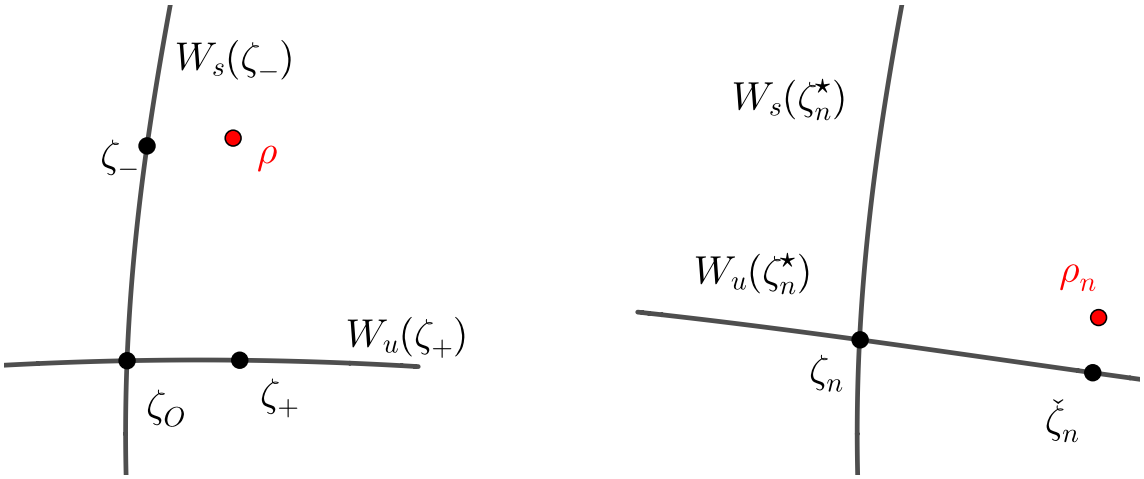


图 7. 引理 5.12 证明中步骤 1 引入的点。

对于 $0 \le i \le n$，令 $\zeta_i^\star = F^{in_0}(\zeta_O)$。我们有

$$d(\rho_n, W_u(\zeta_n^\star)) \le C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1} d(\rho, W_u(\zeta_O)) \le C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+)$$

and

$$d(\rho_n, \zeta_n^\star)^2 \le C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^2 d(\rho, \mathcal{T}_-)^2 + C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-2} d(\rho, \mathcal{T}_+)^2 \le C\varepsilon_0$$

˘我们固定 $\zeta_n \in W_u(\zeta_n^\star)$，使得

$$d(\rho_n, W_u(\zeta_n^\star)) = d(\rho_n, \check{\zeta}_n)$$

˘**步骤2：曲线 $\zeta_n(x)$ 接近（不稳定）切空间 $E_u(\zeta_n)$。**步骤*2-a*：首次近似。（见图8）。

现在我们要证明，该曲线很好地近似了 ˘$W_u(\zeta_n^\star)$ 在 ζ_n 处的切空间。为此，我们作如下观察（回顾（5.15）中的记号以及（5.16）中 β_n 的定义）。

$$\mathbf{v}_n := \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha_n^{-1/2} d_{\hat{\rho}} F^{(n)}(\mathbf{v}_n') \; ; \; \mathbf{v}_n' = \alpha_n^{-1/2} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

并注意到 $||\mathbf{v}_n'|| = 1$（因为 $\alpha_n^2 = a_n^2 + b_n^2$）。我们将该向量 $\mathbf{v}_n$ 与 $\mathbf{w}_n := \alpha_n^{-1/2} d_{\hat{\zeta}} F^{(n)}(\mathbf{v}_n')$ 进行比较，其中 ˆ$\zeta = \kappa_{q_0}(\check{}\zeta_0)$，且 ˘$\zeta_0 = F^{-nn_0}(\check{}\zeta_n)$。仿照引理 5.8 的证明，我们可以证明

$$||d_{\hat{\rho}} F^{(n)} - d_{\hat{\zeta}} F^{(n)}|| \le C J_{\mathbf{q}}^u d(\rho, \check{\zeta}_0)$$

˘˘根据三角不等式，$d(\rho, \zeta_0) \le d(\rho, \zeta_O) + d(\zeta_O, \zeta_0)$，其中第一项由$C\ddot{A}\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\varepsilon_0 + d(\rho, \mathcal{T}_+)$ä控制。对于第二项，我们利用以下事实：˘$\zeta_0 \in W_u(\zeta_O)$ 且 $d(\check{}\zeta_n, F^{nn_0}(\zeta_O)) \le C\varepsilon_0$，由此得到 $d(\zeta_O, \check{}\zeta_0) \le C\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\varepsilon_0$。因此，我们得到

$$||d_{\hat{\rho}} F^{(n)} - d_{\hat{\zeta}} F^{(n)}|| \le C J_{\mathbf{q}}^u d(\rho, \mathcal{T}_+) + C\varepsilon_0$$

最后，回想一下 $\alpha_n^{1/2} \sim J_{\mathbf{q}}^u$ - 因此 $\mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_n$ 都接近归一化 -，我们得到 $||\mathbf{v}_n - \mathbf{w}_n|| \le Cd(\rho, \mathcal{T}_+) + C\varepsilon_0\left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}$.˜现在定义 $\zeta_n(x)$ 为

$$\kappa_{q_n}\left(\tilde{\zeta}_n(x)\right) = \kappa_{q_n}\left(\check{\zeta}_n\right) + x\mathbf{w}_n$$

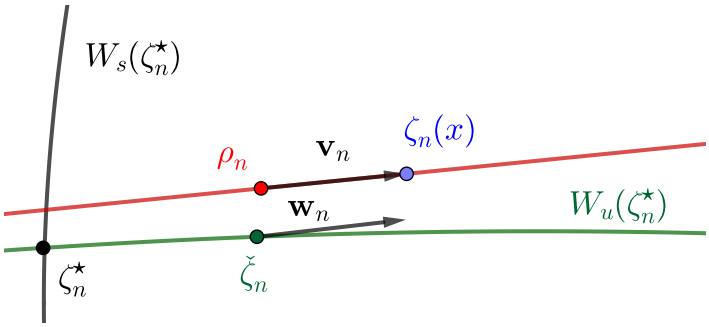


图8。经过 ρ_n 的曲线 $\zeta_n(x)$（红色）接近不稳定流形 $W_u(\zeta_n^\star)$（绿色）。在 $\check{}\,\zeta_n$ 附近，$W_u(\zeta_n^\star)$ 可由其在 ζ_n 处的切空间很好地近似，该切空间由一个接近 $\mathbf{w}_n$ 的向量张成。

我们有（回想一下 $\zeta_n(x) = \kappa_{q_n}^{-1}(\hat{}\rho_n + x\mathbf{v}_n)$）

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\zeta}_n(x), \zeta_n(x))) &\leq Cd(\kappa_{q_n}\left(\check{\zeta}_n\right) + x\mathbf{w}_n, \hat{\rho}_n + x\mathbf{v}_n) \\ &\leq Cd(\check{\zeta}_n, \rho_n) + |x|||\mathbf{w}_n - \mathbf{v}_n|| \\ &\leq C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+) + |x|\left(Cd(\rho, \mathcal{T}_+) + \varepsilon_0\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1}\right) \\ &\leq C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+) + CJ^u_{\mathbf{q}}h^{\delta_0}\left(d(\rho, \mathcal{T}_+) + C\varepsilon_0\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1}\right) \text{ if } |x| \leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0} \\ &\leq C\Big(\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} + h^{1/3}\Big)d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0} \end{aligned}$$

其中我们使用了 $J^u_{\mathbf{q}}h^{\delta_0} \leq Ch^{1/3}$ 这一事实。现在我们将控制 $\widetilde{\zeta}_n(x)$ 到 $\mathcal{T}_+$ 的距离。

步骤*2-b*：与切空间的比较。（见图8）。

在此步骤中，我们希望证明 $\mathbf{w}_n$ 接近一个张成 $d\kappa_{q_n}(T_{\check{\zeta}_n}W_u(\zeta_n^\star))$ 的向量。为此，我们使用引理 3.5。如果 ε_0 足够小（取决于引理 3.5 中出现的参数 ε_1），则可以确保向量 $\mathbf{v}_n$ 足够接近 $\mathbb{R}\times\{0\}$，从而 Ä $d_{\check{\zeta}_0}\kappa_0$ä$_{-1}\mathbf{v}'_n$ 足够接近 $T_{\check{\zeta}_0}W_u(\zeta_O)$，因此我们可以将该引理应用于初始向量 Ä $d_{\check{\zeta}_0}\kappa_0$ä$_{-1}\mathbf{v}'_n$。 $\check{}$ 为简化记号，记 $\mathcal{L} = \kappa_{q_n}(W_u(\zeta_n^\star))$， $m = \kappa_{q_n}(\zeta_n)$。应用引理 3.5 并将结果映射到坐标图 κ_{q_n} 中，我们得到

$$d\left(\frac{\mathbf{w}_n}{||\mathbf{w}_n||}, T_m\mathcal{L}\right) \leq C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-2}$$

由于 $||\mathbf{w}_n|| \leq C$，对于 $\mathbf{w}_n$，情况也相同。我们选取 $\mathbf{w}'_n \in T_m\mathcal{L}$，使得 $||\mathbf{w}_n - \mathbf{w}'_n|| \leq C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-2}$。现在，我们通过关系定义 $Z_n(x)$

$$\kappa_{q_n}\left(Z_n(x)\right) = \kappa_{q_n}\left(\widetilde{\zeta}_n(x)\right) + \mathbf{w}'_n x$$

若 $|x| \leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}$，显然

$$d(Z_n(x), \widetilde{\zeta}_n(x)) \leq |x|||\mathbf{w}_n - \mathbf{w}'_n|| \leq C\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-2}\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0} \leq C\alpha_n^{-1/2}h^{1/2} \ll h^{\delta_0}$$

综合步骤 2-a 和 2-b，可知

$$d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_+) \leq d(Z_n(x), \mathcal{T}_+) + C\Big(\left(J^u_{\mathbf{q}}\right)^{-1} + h^{1/3}\Big)d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0}$$

步骤 3：切空间是一个良好的近似。唯一尚待处理的是控制 $d(Z_n(x)\ \mathcal{T}_+)$。注意到 $\mathbf{w}'_n \in T_m\mathcal{L}$。因此，根据微分几何的标准结果， $d(m + x\mathbf{w}'_n, \mathcal{L}) \leq Cx^2$，其中 C 取决于 $||\mathbf{w}'_n||$ 以及 $\mathcal{L}$ 的曲率；该曲率~可以在不依赖此不稳定流形基点 ζ_n 的情况下加以控制。因此，若 $|x| \leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0} \leq h^{1/3}$，则 $d(m + x\mathbf{w}'_n, \mathcal{L}) \leq Ch^{2/3} \ll Ch^{\delta_0}$。这表明 $d(Z_n(x)\ \mathcal{T}_+) \leq Cd(m + x\mathbf{w}'_n, \mathcal{L}) \leq Ch^{\delta_0}$，从而完成引理的证明。□

鉴于该拉格朗日已得到充分理解，我们现在可以开始讨论 R_+ 的估计：

命题 5.4。关于 R_+ 的估计。 存在一个全局常数 $C > 0$，使得对于所有$x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$, 我们都有

- 若 $d(\rho, \mathcal{T}_+) \geq h^{\delta_1}$, $R_+(x) \leq Ch^{2\varepsilon}$；
- If $d(\rho, \mathcal{T}_+) \leq h^{\delta_1}$, $R_+(x) \leq C$

（对于某个常数 $C > 0$）。

证明。回忆 $\delta_1 = \delta - \varepsilon$。我们选取 $x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$。这里，我们将使用不等式$d(\rho_n, \mathcal{T}_+) \leq C \left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+)$ 以及前一个引理的结果，即

$$d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_+) \leq C \left(h^{1/3} + \left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{-1}\right) d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0}$$

回忆 $J_{\mathbf{q}}^u \geq C_\varepsilon e^{n(h)\lambda_{\min}(1-\varepsilon)} \geq C_\varepsilon h^{-\vartheta_\varepsilon \lambda_{\min}(1-\varepsilon)}$。
我们选取某个 $0 < \beta < \min(1/3, \vartheta_\varepsilon \lambda_{\min}(1-\varepsilon))$，这就保证了

$$d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_+) \leq Ch^\beta d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0}$$

注意，由于我们是在 ε 较小的情况下进行讨论，不妨假设 $\varepsilon < \beta$。我们分别处理这两个点：

- 对于第一个点，我们区分两种情况：

  第一种情况： $h^{\delta_1} \leq d(\rho, \mathcal{T}_+) \leq h^{\delta-\beta}$. 在此情形下，有 $d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_+) \leq Ch^\beta h^{\delta-\beta} + Ch^{\delta_0} \leq Ch^\delta$。因此，$\hat{\varphi}_+(\zeta_n(x)) \leq Ch^{2\delta}$。我们还有 $\hat{\varphi}_+(\rho) \geq C^{-1}(h^{2\delta} + h^{2\delta_1}) \geq C^{-1} h^{2\delta_1}$，由此可得

$$R_+(x) \leq \frac{(M+C)h^{2\delta}}{Mh^{2\delta} + C^{-1}h^{2\delta_1}} \leq Ch^{2(\delta-\delta_1)} = Ch^{2\varepsilon}$$

  第二种情况： $d(\rho, \mathcal{T}_+) \geq h^{\delta-\beta}$.. 在此情形下，我们有 $d(\rho, \mathcal{T}_+)^2 \gg h^{2\delta}$，因此可以将分母 $Mh^{2\delta} + \hat{\varphi}_+(\rho)$ 从下方估计为 $C^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+)^2$。关于分子，我们有

$$d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_+) \leq Ch^\beta d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0} \leq Ch^\beta d(\rho, \mathcal{T}_+)$$

  由于 $h^\beta d(\rho, \mathcal{T}_+) \geq h^\beta h^{\delta-\beta} \geq h^\delta \gg h^{\delta_0}$。我们还可推出，$\hat{\varphi}_+(\zeta_n(x)) \leq Ch^{2\beta} d(\rho, \mathcal{T}_+)^2$。因此，

$$R_+(x) \leq \frac{Ch^{2\beta} d(\rho, \mathcal{T}_+)^2}{C^{-1} d(\rho, \mathcal{T}_+)^2} \leq Ch^{2\beta} \ll h^{2\varepsilon}$$

- 现在假设 $d(\rho, \mathcal{T}_+) \leq h^{\delta_1}$。如同上面的第一种情况，我们可以将分子估计为 $Ch^{2\delta}$。对于分母，我们只需利用 $\hat{\varphi}_+ \geq 0$ 这一事实，将其从下方估计为 $Mh^{2\delta}$，这正如预期的那样给出

$$R_+(x) \leq C$$

□

让我们总结这两个估计及其关于 $d(x)$ 的含义（并回顾一下，根据定义，$\beta > \varepsilon$ 和 $J_{\mathbf{q}}^u \geq C^{-1} h^{-\beta}$）

$$d(\rho, \mathcal{T}_-) \geq h^\delta \implies d(x) \leq (Ch^{2\beta})^t \ll h^{2t\varepsilon}, \forall x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$$

$$d(\rho, \mathcal{T}_-) \leq h^\delta \text{ and } d(\rho, \mathcal{T}_+) \geq h^{\delta_1} \implies d(x) \leq \left(Ch^{2\varepsilon}\right)^t, \forall x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$$

因此，当 ρ 位于此前命题 4.2 所定义的 $\mathcal{T}$ 邻域之外时，χv_n 的范数非常小：

$$\mathcal{T}_{\delta,\delta_1} = \left\{\rho\,,\, d(\rho, \mathcal{T}_-) \leq h^\delta, d(\rho, \mathcal{T}_+) \leq h^{\delta_1}\right\} \tag{5.30}$$

事实上，显然有

命题 5.5. 对于所有 $L > 0$，存在 $t = t(\varepsilon, L)$，使得以下结论成立。假设 $\rho \notin \mathcal{T}_{\delta,\delta_1}$。那么，

$$\int_{|x| \leq \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}} d(x)^2 dx \leq Ch^L$$

5.5.4. 、中的关键估计。我们现在讨论一个关键估计，它有助于控制 χv_n 的范数，其中 L^2 在 $\rho \in \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$ 时。

命题 5.6。 设 $\rho \in \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$。 则，

$$\int_{|x|\leq \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}} d(x)^2 dx \leq C \left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{d_H+\varepsilon} h^{(\delta_0-\delta)(d_H+\varepsilon)} h^{\delta}$$

证明。 **步骤 0：对 $d(x)$ 的一个简单估计**。 首先根据命题 5.4 回忆可知， $\rho \in \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1} \Longrightarrow d(x) \leq C R_-(x)^t$。此外， $R_-(x)$ 中的分子被 $Ch^{2\delta}$ 所界定，并且由于 $\hat{}\varphi_-(\zeta_n(x)) \geq Ch^{2\delta} + Cd(\zeta_n(x)\ \mathcal{T}_-)^2,$，我们得到

$$d(x) \leq C \left(1 + \left(\frac{d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_-)}{h^{\delta}}\right)^2\right)^{-t}$$

步骤 1：质量支撑在 $\mathcal{T}$ 的一个 h^{δ}-邻域内。我们使用引理 5.12，该引理断言存在 $\zeta_n^\star$ 使得

$$d(\zeta_n(x), W_u(\zeta_n^\star)) \leq Ch^{\beta} d(\rho, \mathcal{T}_+) + Ch^{\delta_0} \ll h^{\delta} \tag{5.31}$$

其中 β 已在命题 5.4 的证明中定义。回忆在坐标图 κ_{q_n} 中， $\kappa_{q_n}(\zeta_n(x)) = \hat{}\rho_n + (x,\ \beta_n x)$。此外，如果 ε_0 足够小，我们可以假设 $\kappa_{q_n}(W_u(\zeta_n^\star))$ 可以写成如下函数的函数图像：

$$\kappa_{q_n}(W_u(\zeta_n^\star)) = \{(x, G_u(x)), x \in I_u\}$$

其中， I_u 是长度为 $\sim \varepsilon_0$ 的小区间，而 G_u 是一个范数 C^∞ 有界的光滑函数（界仅依赖于 F 和坐标图）。由于 $d(\rho_n, W_u(\zeta_n^\star)) \ll h^{\delta}$，经过平移后，我们可以假设 $\hat{}\rho_n = (0, \xi_n)$ 以及 $|G_u(0) - \xi_n| \ll h^{\delta}$。特别地，如果 h 足够小，我们可以假设 $[-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}] \subset I_u$。最后，如果 ε_0 足够小，我们还可以假设 $|G_u'(x)| \leq 1/4$ ，当 $|x| \leq 2\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0} \ll 1$ 时（回忆一下，坐标图 κ_q 以点 ρ_q 为中心，其中 $\kappa_q(E_u(\rho_q)) = \mathbb{R} \times \{0\}$）。现在令

$$X(\mathcal{T}) = \{x \in [-2\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, 2\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}], \kappa_{q_n}^{-1}(x, G_u(x)) \in \mathcal{T}\}$$

让我们用大小为 $2h^{\delta}$、以点 $x_1, \dots, x_N \in X(\mathcal{T})$ 为中心的 N 个区间覆盖 $X(\mathcal{T})$。根据引理 3.6，我们可以选取 N 使得

$$N \leq C \left(J_{\mathbf{q}}^u h^{\delta_0-\delta}\right)^{d_H+\varepsilon}$$

每个围绕 x_i 、大小为 $O(h^{\delta})$ 的区间都支撑着数量级为 $O(h^{\delta})$ 的质量。接下来的几行中，我们的目标是证明，支集位于距离 h^{δ} 的 x_i 之外的积分权重也为 $O(h^{\delta})$，这样我们就能用 Nh^{δ} 估计整个积分，从而完成证明。考虑 $x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$，并假设对所有 $1 \leq i \leq N$，都有 $|x - x_i| \geq 2h^{\delta}$。选择 i，使得 $|x - x_i| = \min_{1\leq k\leq N} |x - x_k|$。我们声称存在一个关于 ρ、 h 和 $x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}]$ 一致的 $\nu > 0$，使得

$$d(\zeta_n(x), \mathcal{T}_-) \geq \nu |x - x_i| \tag{5.32}$$

暂且承认这一点。对于 $i \in \{1, \dots, N\}$，我们记

$$J_i = \{x \in [-\alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2} h^{\delta_0}], |x - x_i| = \min_{1\leq k\leq N} |x - x_k|\}$$

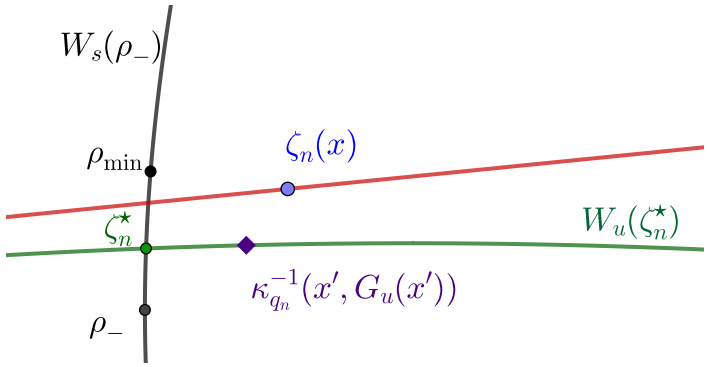


图9. 命题5.32证明中出现的点。曲线 $\zeta_n(x)$以红色标出。重要点（x'， $G_u(x')$）的像是一个紫色菱形。

这些区间构成了 $[-\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}, \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}]$的一个划分。

$$\begin{aligned}\int_{|x|\le\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} d(x)^2dx &\le \int_{|x|\le\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} C\left(1+\left(\frac{d(\zeta_n(x),\mathcal{T}_-)}{h^\delta}\right)^2\right)^{-2t} dx\\ &\le C\sum_{i=1}^N \int_{J_i}\left(1+\left(\frac{d(\zeta_n(x),\mathcal{T}_-)}{h^\delta}\right)^2\right)^{-2t} dx\\ &\le C\sum_{i=1}^N\left(\int_{|x_i-x|\le 2h^\delta} 1dx + \int_{|x_i-x|>2h^\delta}\left(1+\left(\frac{\nu|x-x_i|}{h^\delta}\right)^2\right)^{-2t} dx\right)\\ &\le C\sum_{i=1}^N\left(4h^\delta + \int_{|y|>2}\left(\frac{1}{1+(\nu y)^2}\right)^{2t} h^\delta dy\right)\\ &\le CNh^\delta\end{aligned}$$

这里， t 足够大，特别是我们可以确保 $t\ge 1$ ，从而使积分收敛。**步骤2：命题（5.32）的证明**。我们用反证法，假设对于某个足够小的 ν （条件将在下文说明），有 $d(\zeta_n(x)\ \mathcal{T}_-)\le\nu|x-x_i|$。由于 $\mathcal{T}_-$ 由 $\mathcal{T}$ 附近的局部稳定叶构成（且 $\zeta_n(x)$位于 $\mathcal{T}$的一个小邻域内），我们可以选取 $\rho_-\in\mathcal{T}$使得$d(\zeta_n(x)\ \mathcal{T}_-)=d(\zeta_n(x)\ W_s(\rho_-))$。仍记 $\rho_-\in\mathcal{T}$为 $W_u(\zeta_n^\star)\cap W_s(\rho_-)$的唯一点，并记 $\kappa_{q_n}(\rho_-)=(x_-,\ G_u(x_-))$。同样，如果 ε_0 足够小，则 κ_{q_n}中的所有稳定叶都可以表示为关于垂直变量的函数图像：记作

$$\kappa_{q_n}(W_s(\rho_-))=\{(H_s(\xi),\xi),\xi\in I_s\}$$

其中， I_s 是长度为 $O(\varepsilon_0)$的小区间， H_s 是一个光滑函数，其 C^∞ 范数有界，且界仅依赖于动力学和坐标图。经过平移后，我们可以假设$(H_s(0),\ 0)=\kappa_{q_n}(\rho_-)=(x_-,\ 0)$。至于 G_u，如果 ε_0足够小，我们可以假设对所有 $\xi\in I_s$， $|H_s'(\xi)|\le 1$。最后，注意到 $\rho_{\min}=\kappa_{q_n}^{-1}(H_s(\xi_{\min})\ \xi_{\min})$是 $W_s(\rho_-)$中的一点，满足$d(\zeta_n(x)\ \rho_{\min})=d(\zeta_n(x)\ W_s(\rho_-))$（见图 9）。

由于根据 (5.31)， $d(\zeta_n(x)\ W_u(\zeta_n^\star))\ll h^\delta$，我们可以找到 $x'\in I_u$，使得 $||(x,\ \beta_n x)-(x',\ G_u(x'))||\ll h^\delta$。这个不等式意味着

$$\begin{aligned}|x-x'|&\ll h^\delta,\\ |\beta_n x-G_u(x')|&\ll h^\delta,\\ |G_u(x)-G_u(x')|&\ll h^\delta,\\ |G_u(x)-\beta_n x|&\ll h^\delta.\end{aligned}$$

由于根据假设， $|x-x_i|\ge 2h^\delta$，当 h 足够小时，不等式 $|G_u(x)-\beta_n x|\le\nu|x-x_i|$成立。我们有

$$||(H_s(\xi_{\min}),\xi_{\min})-(x,\beta_n x)||\le Cd(\zeta_n(x),\rho_{\min})\le Cd(\zeta_n(x),\mathcal{T}_-)\le C\nu|x-x_i|$$

由此我们推得

$$\begin{aligned}|\xi_{\min}| &\leq |\xi_{\min} - G_u(x)| + |G_u(x)| = |\xi_{\min} - G_u(x)| + |G_u(x) - G_u(x_-)| \\ &\leq |\xi_{\min} - \beta_n x| + |\beta_n x - G_u(x)| + \frac{1}{4}|x - x_-| \\ &\leq ||(H(\xi_{\min}), \xi_{\min}) - (x, \beta_n x)|| + \nu|x - x_i| + \frac{1}{4}|x - x_-| \\ &\leq C\nu|x - x_i| + \frac{1}{4}|x - x_-|\end{aligned}$$

最后，我们发现，

$$\begin{aligned}|x_- - x| &\leq |x_- - H_s(\xi_{\min})| + |H_s(\xi_{\min}) - x| \\ &\leq |H(0) - H(\xi_{\min})| + ||(H(\xi_{\min}), \xi_{\min}) - (x, \beta_n x)|| \\ &\leq |\xi_{\min}| + C\nu|x - x_i| \text{ (recall that } |H'| \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{4}|x - x_-| + C\nu|x - x_i|\end{aligned}$$

由此，我们推得

$$|x - x_-| \leq \frac{4}{3}C\nu|x - x_i| \tag{5.33}$$

该不等式的一个直接推论是，若 ν 足够小，使得 $\frac{4\nu C}{3} \leq \frac{1}{4}$，则我们有 —— – e

$$|x_-| \leq |x| + \frac{1}{4}|x - x_i| \leq \frac{5}{4}|x| + |x_i| \leq \frac{5}{4}\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0} + \frac{2}{4}\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0} \leq 2\alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}$$

由于 $\kappa_{q_n}^{-1}(x_-, G_u(x_-)) = \rho_- \in \mathcal{T}$，我们推得 $x_- \in X(\mathcal{T})$。特别地，存在$j \in \{1, \dots, N\}$ 使得 $|x_- - x_j| \leq h^\delta$。但这样一来，我们就会有

$$|x_i - x| \leq |x_j - x| \leq |x_- - x_j| + |x_- - x| \leq h^\delta + \frac{1}{4}|x - x_i| \leq \frac{1}{2}|x - x_i| + \frac{1}{4}|x - x_i| < |x - x_i|$$

（回想一下，$|x - x_i| \geq 2h^\delta$）。这就得到了所需的矛盾，并完成了命题 (5.32) 的证明。

□

5.6. 证明结束。 我们可以利用引理 5.11、命题 5.5 和命题 5.6 得出‹命题 4.2 的证明。事实上，由于 $||\Psi_m||_\infty < +\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left|\left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} \chi v_n\right|\right|_{L^2}^2 &\leq \int_{|x| \leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} d(x)^2 |\Lambda_{\alpha_n h}\widetilde{\Psi}_m(x)|^2 dx + O(h^\infty) \\ &\leq C_m(\alpha_n h)^{-1/2} \int_{|x| \leq \alpha_n^{1/2}h^{\delta_0}} d(x)^2 dx + O(h^\infty)\end{aligned}$$

这给出了一个界 $C_m h^L$ 当 $\rho \notin \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$（通过将 t 取得足够大，可使 L 尽可能大），且当 $\rho \in \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$ 时，我们得到

$$\left|\left|\left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} \chi v_n\right|\right|_{L^2}^2 \leq C_m \left(J_{\mathbf{q}}^u\right)^{d_H - 1 + \varepsilon} h^{(\delta_0 - \delta)(d_H + \varepsilon) + \delta - 1/2}$$

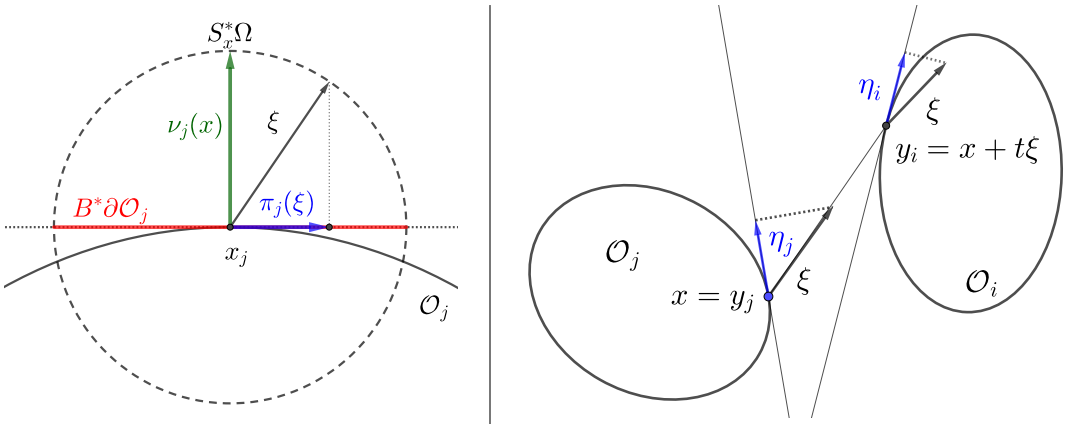
当 $m = 0$ 时，由于我们有以下关系，因此可以控制首项：

$$||u_n^0||_{L^2}^2 \leq \Pi_{\alpha,n}(\rho)^2 ||\chi v_n||_{L^2}^2$$

并且由于 $\Pi_{\alpha,\ n}(\rho)^2 = O(h^{-L_2})$，其中某个 $L_2 > 0$ 满足该条件，因此对于 $\rho \notin \mathcal{T}_{\delta,\ \delta_1}$，通过将 t 取得足够大，我们可以使 $||u_n^0||_{L^2}^2 = O(h^L)$ 对任意 L 成立。

它控制了推论 5.2 给出的展开式的第一项。我们回顾一下，这个展开式的项数由一个整数 $N \in \mathbb{N}$ 控制。对于推论 5.2 给出的展开式中的其他项，正如结合 (5.25) 已经解释的那样，它们的 L^2 范数都由某个

$$\varepsilon(h)\Pi_{\alpha,n}(\rho) \left|\left|\left(1 + \frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{m/2} \chi v_n\right|\right|_{L^2}$$



（a）用于定义台球映射和阴影映射的记号。liard 映射和阴影映射。

（b）台球 map. $B^+_{ij}(y_j, \eta_j) = (y_i, \eta_i)$。

图 10. 台球映射的定义

其中 $m \le N$ 和 $\varepsilon(h) \to 0$，当 $h \to 0$ 时。最后，我们可以选取 $N = N(\varepsilon)$，使得余项的 L^2 范数为 $O(h^{2L})$。由此完成命题 4.2 的证明，进而完成定理 3 的证明。

6. 障碍物散射与势散射中的分形韦尔上界证明

6.1. 定理 2 的证明。 下面说明定理 3 如何推出定理 2。假设障碍物 $\mathcal{O}_j$ 严格凸、边界光滑，并满足无遮挡的伊川条件。我们将利用 [NSZ14] 的结果，将定理 3 应用于 F 为台球映射的情形。具体而言，先引入以下记号。

对于 $j \in \{1, \dots, J\}$，令 $B^*\partial\mathcal{O}_j$ 为 $\partial\mathcal{O}_j$ 的余球丛，$S^*_{\partial\mathcal{O}_j}$ 为 $S^*\Omega$ 在 $\partial\mathcal{O}_j$ 上的限制，$\pi_j : S^*_{\partial\mathcal{O}_j} \to B^*\partial\mathcal{O}_j$ 为自然投影，$\nu_j(x)$ 为 $x \in \partial\mathcal{O}_j$ 处的外法向量（见图 10）。

$\mathcal{B}$ 随后是对应于在两个障碍物上反射的映射 $\mathcal{B}_{ij}$ 的并集：对于 $(\rho_i, \rho_j) \in B^*\partial\mathcal{O}_i \times B^*\partial\mathcal{O}_j$（其中 $\rho_i = (y_i, \eta_i)$ $\rho_j = (y_j, \eta_j)$）。

$$\rho_i = \mathcal{B}_{ij}(\rho_j) \iff \exists t > 0\,,\ \xi \in \mathbb{S}^1\,,\ x \in \partial\mathcal{O}_j$$
$$\pi_j(x,\xi) = \rho_j\,,\ \pi_i(x + t\xi, \xi) = \rho_i\,,\ \nu_j(x)\cdot\xi > 0\,,\ \nu_i(x+t\xi)\cdot\xi < 0.$$

在混沌台球的研究中，这是一个标准事实（例如参见 [CM00]）：由于严格凸性假设，台球映射是双曲的。Ikawa 条件确保动力系统在俘获集上的限制具有符号表示（[Mor91]）。可以将研究限制在俘获集的一个邻域内。由于 $\pi_y(\mathcal{T} \cap B^*\partial\mathcal{O}_j) \neq \partial\mathcal{O}_j$，可以使用一个区间 $Y_j \subset \partial\mathcal{O}_j$，而不是整个边界。此外，已知 $\mathcal{T}$ 是紧的且完全不连通，因此关系 $\mathcal{B}$ 满足定理 3 的假设。

在 [NSZ14], 中，作者证明了存在一个与 $\mathcal{B}$ 相关联的开放双曲量子映射族 $M_h(z)$，其全纯依赖于 $z \in \Omega(h) =] - R$、$R[+i] - C\log 1/h$、$R[$，其中 $R > 1$ 和 $C > 1$ 为某些固定量，并且当 h 足够小时，对于 $z \in \Omega(h)$，$\frac{1}{h} + z$ 是共振，当且仅当 $\det(1 - M_h(z)) = 0$；此外，该共振的重数与 z 作为 $\det(1 - M_h(z))$ 的零点的重数一致。该算子的构造依赖于对算子 $M_0(z) : \mathrm{C}^\infty(\partial\mathcal{O}) \to \mathrm{C}^\infty(\partial\mathcal{O})$ 的研究，这些算子定义如下：对于 $1 \le j \le J$，令 $H_j(z) : \mathrm{C}^\infty(\partial\mathcal{O}_j) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}_j)$ 为该问题的预解算子

$$\begin{cases} (-h^2\Delta - (1+hz)^2)(H_j(z)v) = 0 \\ H_j(z)v \text{ is outgoing} \\ H_j(z)v = v \text{ on } \partial\mathcal{O}_j \end{cases}.$$

令 γ_j 为光滑函数 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在 $C^\infty(\partial\mathcal{O}_j)$ 上的限制，并将 $M_0(z)$ 定义为：

$$M_0(z) = \begin{cases} 0 \text{ if } i = j \\ -\gamma_i H_j(z) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

利用 Gérard 的分析（[Gé88], 附录 II），并借助逃逸函数将研究限制在俘获集附近，作者将 M_0 变换为与台球映射相关的傅里叶积分算子（参见 [NSZ14]第 6 节）。此外，通过分析[Gé88], 附录 II）中给出的公式，我们看到， $M_h(z)$ 的振幅通过程函方程的解与两次碰撞之间的距离相关。特别是，在俘获集附近，它由下式给出

$$\alpha_h(z)(\rho) = \exp\left(-t_{ret}(\rho)\operatorname{Im} z\right) + O\left(h^{1-}S_{0^+}\right). \tag{6.1}$$

对于 $\rho \in \mathcal{T}$， $t_{ret}(\rho)$ 如下所述：假设 $\rho = (x,\xi)$ 且 $(y,\eta) = \mathcal{B}(x,\xi)$，则$t_{ret}(\rho) = |x-y|$。 t在 $\mathcal{T}$ 的某个邻域内光滑延拓，并称为 返回时间函数。

我们可以将定理 3 应用于这一族开放量子映射，并得到：对于任意固定的$\varepsilon > 0$ 以及 $r \gg 1$（其中 $h = r^{-1}$，回顾一下，共振由 $1/h + z$ 给出，其中z是 $\det(1 - M_h(z))$ 的一个极点），在 $[r, r+1] - i[0,\gamma]$ 中的共振数 $N(r,\gamma)$ 按重数计满足

$$N(r,\gamma) \leq m_M\left(\{|\operatorname{Re} z| < 2, \operatorname{Im} z \geq -\gamma\}\right) \leq C_{\varepsilon,\gamma} r^{d_H - p(\gamma+\varepsilon)_+ + \varepsilon}$$

这里， $p(\beta)$ 由下式给出:

$$p(\beta) = -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(2\beta t_{ret} - \varphi_u).$$

利用压强的连续性，我们可以选择 $\varepsilon' > 0$ 以确保

$$P(2(\gamma+\varepsilon')t - \varphi_u) \geq P(2\gamma t_{ret} - \varphi_u) + \varepsilon/2$$

并且我们可以假设 $\varepsilon' \leq \varepsilon/2$。应用上述公式并令 ε'，可得

$$N(r,\gamma) \leq C_{\varepsilon,\gamma} r^{d_H - \sigma(\gamma) + \varepsilon}$$

with

$$\sigma(\gamma) = \max\left(0, -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(-\varphi_u + 2\gamma t_{ret})\right). \tag{6.2}$$

为验证 σ 满足定理 3 中列出的性质，我们调用 Axiom A 流的理论（[BR75]）：映射 $s \mapsto P(-\varphi_u + st)$ 严格递增，并且具有唯一根 γ_{cl}。特别地，我们推得，当 $\gamma < \gamma_{cl}/2$ 时， $\sigma(\gamma) > 0$；当 $\gamma \geq \gamma_{cl}/2$ 时， $\sigma(\gamma) = 0$，正如预期。最后，由于界 $N(r,\gamma) = O(r^{d_H})$ 对任意 γ 都成立，我们可以将 $\sigma(\gamma) - \varepsilon$ 改写为 $(\sigma(\gamma) - \varepsilon)_+ = \max(\sigma(\gamma) - \varepsilon, 0)$。定理 2 得证。

6.2. **定理 4 的证明**。下面说明定理 3 如何推出定理 4。其思路与障碍物散射的情形相同，并且依赖于 [NSZ11] 中进行的约化。

我们考虑 $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$， $E_0 > 0$ 以及半经典伪微分算子 $P_h = -h^2\Delta + V - E_0$。我们注意到 $p(x,\xi) = \xi^2 + V - E_0$ 并假设

$$dp \neq 0 \text{ on } p^{-1}(0).$$

记 H_p 为与 p 相关联的哈密顿向量场，记 $\Phi_t = \exp(tH_p)$ 为相应的哈密顿流。记 K_0 为能量 0 处 Φ_t 的俘获集，并假设 Φ_t 在 K_0 上是双曲的，且 K_0 是拓扑一维的。更一般地，我们可以考虑具有欧氏端的流形上的更一般的薛定谔算子。关于更一般的假设，请参阅[NSZ11]（第 2.1 节）。

为应用定理 3，我们使用 [NSZ11]（定理 1 和定理 2）的结果。在上述假设下，流 Φ_t 在能量壳 $p^{-1}(0)$上、 K_0附近存在一个光滑的庞加莱超曲面 Σ。 Σ 由若干互不相交的部分 Σ_j、 $1 \leq j \leq J$构成。现在约化捕获集为$\mathcal{T} := K_0 \cap \Sigma$，若记 $2d_H + 1$ 为 K_0的维数，则 $\mathcal{T}$的维数为

$$\dim \mathcal{T} = \dim K_0 - 1 = 2d_H.$$

假设 Σ 是一个光滑的庞加莱超曲面，可确保存在 $\varepsilon_{\min} > 0$，使得映射

$$(\rho, t) \in \Sigma \times]-\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\min}[\mapsto \Phi_t(\rho)$$

是一个s到其像上的光滑微分同胚。我们记 t_{ret} 为 Σ 上的返回时间函数：对于 $\rho \in \Sigma$ ，

$$t_{ret}(\rho) = \inf\{t > \varepsilon_{\min}, \Phi_t(\rho) \in \Sigma\} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty]$$

$t_{ret} < +\infty$ 在 $\mathcal{T}$的一个邻域 $U \subset \Sigma$ 内。然后我们定义庞加莱返回映射 F，它是定义在 Σ 的一个开子集上的开放双曲映射：

$$F : \rho \in \Sigma \mapsto \Phi_{t_{ret}}(\rho) \in \Sigma$$

在 [NSZ11], 中，作者构造了一族有限维矩阵（$\mathbf{M}(z;h)$），对应于 $z \in \Omega(h) =] - R, R[+i] - C\log 1/h, R[$（其中 R固定但足够大），使得当 h 足够小时，对所有$z \in\Omega(h)$,

$$\det(I - \mathbf{M}(z;h)) = 0 \iff hz \text{ is a resonace of } P_h$$

矩阵$\mathbf{M}(z;h)$对于 $z \in \Omega(h)$以及足够小的 h ，一致满足：

$$\mathbf{M}(z;h) = \Pi_h M(z;h)\Pi_h + O(h^L) \tag{6.3}$$

其中， $L > 0$可以取得任意大， Π_h是一个有限秩投影算子，而 $M(z;\ h)$是一族与 F 相关的开放双曲量子映射（定义2.4意义下）。 $M(z;\ h)$的振幅满足

$$\alpha_h(z)(\rho) = \exp(-t_{ret}(\rho)\operatorname{Im} z) + O\left(h^{1-}S_{0^+}\right).$$

根据其构造， $M(z;\ h)$ 和 Π_h 满足：对于某个所需足够大的 $L > 0$，一致地对$z \in\Omega(h)$以及足够小的 h ，

$$\Pi_h M(z;h)\Pi_h = M(z;h) + O(h^L) \tag{6.4}$$

我们可以将定理 3 应用于开放量子映射的族 $M(z;\ h)$，并得到：对于任意固定的 $\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$（其中 $K < R$），以及对于 $h \ll 1$，$\det(\mathrm{Id} - M(z;\ h))$ 在 $\{|\operatorname{Re} z| < R, \operatorname{Im} z \in [-\gamma, 0]\}$ 中的零点数量 $N_M(R, \gamma;\ h)$ 满足

$$N_M(R, \gamma; h) \leq C_{R,\varepsilon,\gamma} h^{-d_H + p(\gamma+\varepsilon)_+ - \varepsilon}$$

这里， $p(\beta)$ 由下式给出

$$p(\beta) = -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(2\beta t_{ret} - \varphi_u)$$

其中， φ_u 是与 F 相关联的不稳定雅可比。这里，它也可以通过对流 Φ_t求导得到。事实上，通过检查定理 3 的证明，并利用 (6.3) 和 (6.4)，我们看到，对于 $\mathbf{M}$ 而非 M，同样的结论也成立。确实，在命题 4.1 中的公式 (4.2) 里，可以将 $M(z;\ h)$ 替换为 $\mathbf{M}(z;\ h)$，因为只要 $N(h) = O(\log h)$，就有 $M(z;\ h)^{N(h)} = \mathbf{M}(z;\ h)^{N(h)} + O(|\log h|h^L)$。现在，我们按照 6.1 节中障碍物散射的情形进行推导，并得到

$$N(R, \gamma; h) \leq C_{R,\gamma,\varepsilon} h^{-d_H + \sigma(\gamma) - \varepsilon}$$

其中

$$\sigma(\gamma) = \max\left(0, -\frac{1}{6\lambda_{\max}} P(-\varphi_u + 2\gamma t_{ret})\right) \tag{6.5}$$

Appendix A.

A.1. 涉及驻相展开式的缺失引理证明。 在本附录中，我们给出引理 2.5、2.6 和 5.10 的缺失证明。证明中采用了不同的驻相定理。

A.1.1. 引理 *2.5* 的证明。 为简化记号，记 $q(x,\eta) = \langle D^2\psi(x_1,\xi_0)(x,\eta),(x,\eta)\rangle$，并将其写作 $q(x,\eta) = ux^2 + 2vx\eta + w\eta^2$。亚纯辛算子 $\mathcal{M}(d_{\rho_0}F)$ 的核为

$$k(x,y) \coloneqq \frac{|v|^{1/2}}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}q(x,\eta) - y\eta\right)} d\eta$$

且 $k(\overline{y},\ x)$ 是 $\mathcal{M}(d_{\rho_0}F)^*$ 的核。我们还注意到

$$\mathcal{M}_b u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}q(x,\eta) - y\eta\right)} \tilde{b}(x,\eta) u(y) dy d\eta$$

我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}(d_{\rho_0}F)^*\mathcal{M}_b u)(x) &= \frac{|v|}{(2\pi h)^2}\int_{\mathbb{R}^4} e^{\frac{i}{h}\left(-\frac{1}{2}q(y,\eta)+x\eta+\frac{1}{2}q(y,\xi)-z\xi\right)}\tilde{b}(y,\xi)u(z)dyd\eta dzd\xi\\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} u(z)e^{\frac{i}{h}(x-z)\xi}\underbrace{\left(\frac{|v|}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}q(y,\xi)-\frac{1}{2}q(y,\eta)+x(\eta-\xi)\right)}\tilde{b}(y,\xi)dyd\eta\right)}_{\check{b}(x,\xi)}dzd\xi\\ &= \mathrm{Op}_h^R(\check{b})u(x)\\ &= \mathrm{Op}_h(b)u(x)\end{aligned}$$

其中，Op_h^R表示右量子化，并且根据 [Zwo12]（定理 4.13），$b(x,\ \xi) = e^{-\frac{ih}{2}\langle D_x,D_\xi\rangle}\check{b}(x,\ \xi)$。下面分析 b:

$$\begin{aligned}\check{b}(x,\xi) &= \frac{|v|}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}q(y,\xi)-\frac{1}{2}q(y,\eta+\xi)+x\eta\right)}\tilde{b}(y,\xi)dyd\eta\\ &= \frac{|v|}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}w\eta^2-w\eta\xi-vy\eta+x\eta\right)}\tilde{b}(y,\xi)dyd\eta\\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{2h}w\eta^2}e^{\frac{i}{h}(x-y)\eta}\tilde{b}(v^{-1}(y-w\xi),\xi)dyd\eta\ (\text{change of variable } vy+w\xi\mapsto y)\\ &= e^{\frac{ih}{2}wD_x^2}\tilde{b}(v^{-1}(x-w\xi),\xi)\end{aligned}$$

特别地，如果 $w=0$，我们可以直接得到 $\check{b}(x,\ \xi) = \tilde{b}(v^{-1}x,\ \xi)$。否则，它可由以下公式表示（[Zwo12], 定理 4.8）：

$$\check{b}(x,\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\frac{w}{|w|}}}{2\pi h|w|}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ih}{2w}y^2}\tilde{b}(v^{-1}(y+x-w\xi),\xi)dy$$

因此，我们看到，b 是通过依次施加以下 3 个作用从 $\tilde{b}$ 得到的：$e^{-\frac{ih}{2}\langle D_x,D_\xi\rangle}$的作用、变量代换 $(x,\ \xi)\mapsto(v^{-1}(x-w\xi),\ \xi)$，以及 $e^{\frac{ih}{2}wD_x^2}$。第二个作用显然是从 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 到 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 的连续映射。现在可以使用 [Zwo12] 定理 4.17（更确切地说，是其证明中给出的估计）：$e^{\frac{ih}{2}wD_x^2}$和 $e^{-\frac{ih}{2}\langle D_x,D_\xi\rangle}$的作用都是从 $S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 到$S(\langle\rho\rangle^{3N})$ 的连续映射；更确切地说，存在普适整数 M 和通用常数 C_α，使得对每个 $\alpha\in\mathbb{N}^2$，$(x,\ \xi)\in T^*\mathbb{R}$,

$$|\partial^\alpha(L\tilde{b})(x,\xi)| \le C_\alpha \sup_{|\beta|\le|\alpha|+M} ||\langle\rho\rangle^{-3N}\partial^\beta\tilde{b}||\langle\rho\rangle^{3N}$$

其中 L 可以是 $e^{\frac{ih}{2}wD_x^2}$ 或 $e^{-\frac{ih}{2}\langle D_x,D_\xi\rangle}$。变量代换同样成立。这就给出了符号 b 的所需估计，并完成了引理的证明。

□

A.1.2. 引理 *2.6* 的证明。固定 $s\in[0,1]$，并回忆一下，按照上文引入的记号 q

$$\tilde{R}_s u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\left(\frac{1}{2}q(x,\eta)+sh^{1/2}r_3^\psi(x,\eta;h)-y\eta\right)}b_N(x,\eta)u(y)dyd\eta$$

引入

$$R_s = \Lambda_h\tilde{R}_s\Lambda_h^*$$

并注意到 R_s 的 Schwartz 核由下式给出

$$k_s(x,y) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2}q(x,\eta)+s\rho_3^\psi(x,\eta;h)-y\eta\right)}\tilde{b}_N(x,\eta)u(y)d\eta$$

其中

$$\rho_3^\psi(x,\eta) = h^{3/2}r_3^\psi(h^{-1/2}x,h^{-1/2}\eta) = \psi(x_1+x,\xi_0+\eta)-\psi(x_1,\xi_0)-x\partial_x\psi(x_1,\xi_0)-\eta\partial_\eta(x_1,\xi_0)-\frac{1}{2}q(x,\eta)$$

以及 $\tilde{b}_N(x,\eta) = b_N(h^{-1/2}x,h^{-1/2}\eta)$，它位于 $S_{0+}(\langle\rho\rangle^{3N})$。注意 $\psi_s(x,\eta) = \frac{1}{2}q(x,\eta)+s\rho_3^\psi$，并指出

$$\partial_{x\eta}^2\psi_s = (1-s)\partial_{x\eta}^2\psi(x_1,\xi_0)+s\partial_{x\eta}^2\psi(x_1+x,\xi_0+\eta)$$

由于 $\partial_{x\eta}\psi$ 在 $\Omega_x \times \Omega\eta$ 上不为零，它的符号恒定，因此 $\partial^2_{x\eta}\psi_s(x,\eta)$ 在 $\Omega_x \times \Omega\eta$ 上。现在我们分析 $R_s^* R_s$ 的核 K_s，并发现这个核是

$$\begin{aligned} K_s(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{k}_s(z,x) k_s(z,y) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i}{h}(\psi_s(z,\eta) - \psi_s(z,\xi) - y\eta + x\xi)\right) \overline{\tilde{b}_N(z,\xi)} \tilde{b}_N(z,\eta) d\eta d\xi dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(\frac{i}{h}(\psi_s(z,\eta) - \psi_s(z,\xi) - y(\eta-\xi))\right) \overline{\tilde{b}_N(z,\xi)} \tilde{b}_N(z,\eta) d\eta dz}_{B_s(y,\xi)} \end{aligned}$$

它是 $\mathrm{Op}_h^R(B_s)$ 的核。为了分析 B_s，我们希望应用驻相定理，因此需要确定相位关于变量 (z,η) 的驻点。

$$\Phi_s(z,\eta,y,\xi) = \psi_s(z,\eta) - \psi_s(z,\xi) - y(\eta-\xi)$$

我们有

$$\partial_z \Phi_s(z,\eta,y,\xi) = \partial_x \psi_s(z,\eta) - \partial_x \psi_s(z,\eta) = \partial^2_{x\eta}\psi_s(z,\eta(z,\xi,\eta))(\eta-\xi)$$

对于某个 $\eta(z,\xi,\eta) \in [\eta,\xi]$。因此，由于 $\partial^2_{x\eta}\psi$ 不消失，

$$\partial_z \Phi_s(z,\eta,y,\xi) = 0 \iff \xi = \eta$$

我们还得到、

$$\partial_\eta \Phi_s(z,\eta,y,\xi) = \partial_\eta \psi_s(z,\eta) - y$$

从而方程 $\partial_\eta \Phi_s(z,\xi,y,\xi) = 0$ 至多有一个解，这里再次利用了 $\partial^2_{x\eta}\psi_s$不为零这一事实。没有驻点时，非驻相位论证给出$|B_s(y,\xi)| \le O(h^\infty)\langle\rho\rangle^{6N}$。若存在驻点，则在 (y,ξ) 附近，它局部由光滑函数 $z_s(y,\xi)$ 给出；驻相位论证表明，$|B_s(y,\xi)| \le C_M\langle\rho\rangle^{6N}$，其中$C_M$取决于 b_N的前 M个半范数（某个普适整数 M）。通过对积分号下求导并分部积分，我们可以处理 B_s 的导数，从而得到关于 $\partial^\alpha B_s$的相同估计，其中涉及 $\tilde{b}_N$直至 $|\alpha|+M$ 阶的导数。这表明 $B_s \in S(\langle\rho\rangle^{3N})$。最后，我们像引理 2.5 的证明中那样从 Op_h^R 转到 Op_h，并通过标准的缩放论证回到 $h=1$，从而完成证明。

□

A.1.3. 引理 *5.10* 的证明。令 $u(x) = a(x)e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$，其中 a满足 (5.19)。

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}_h(m)u(x) &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} m\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(y) e^{i\beta_n \frac{y^2}{2h}} dy d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} m\left(x+\frac{y}{2},\beta_n x+\xi\right) a(x+y) e^{-\frac{i}{h}y(\xi+\beta_n x)} e^{i\beta_n \frac{(x+y)^2}{2h}} dy d\xi \\ &= e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}} \underbrace{\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} m\left(x+\frac{y}{2},\beta_n x+\xi\right) a(x+y) e^{\frac{i}{2h}\left(\beta_n y^2 - 2y\xi\right)} dy d\xi}_{B(x)} \end{aligned}$$

为了分析 $B(x)$，我们使用二次情形下的驻相定理（参见 [Zwo12],定理 3.13），其中非奇异对称矩阵为 $Q_n = \begin{pmatrix} \beta_n & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，并遵循 [Zwo12], 定理 4.17 的证明。我们固定一个截断函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，使得 $\mathrm{supp}\,\chi \subset B(0,1)$，且 $\chi = 1$ 位于 0 的一个邻域内。我们写作（其中 $\chi_1 = \chi$，$\chi_2 = 1-\chi$）

$B(x) = B_1(x) + B_2(x)$；$B_i(x) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_i(y,\xi) m\left(x+\frac{y}{2},\beta_n x+\xi\right) a(x+y) e^{\frac{i}{2h}\left(\beta_n y^2 - 2y\xi\right)} dy d\xi$我们还设定了 $v_i(x) = B_i(x) e^{i\beta_n \frac{x^2}{2h}}$。根据驻相展开式，我们可以展开 B_1：对于每个$N \in \mathbb{N}$,

$$B_1(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h^k}{k!}\left(\frac{(Q_n^{-1}D, D)}{2i}\right)^k c(x,0,0) + R_N(x)$$

$$c(x,y,\xi)=\chi(y,\xi)m\left(x+\frac{y}{2},\beta_n x+\xi\right)a(x+y)\quad;\quad D=\begin{pmatrix}D_y\\D_\xi\end{pmatrix}$$

$$R_N(x)=O\left(h^N\sup_{y,\xi}\sup_{k+l\leq 2N+2}|\partial_y^k\partial_\xi^l c(x,y,\xi)|\right)$$

我们注意到：

- 展开式的首项为 $B_1\ m(x,\beta_n x)a(x)$；
- B_1 是光滑的，因为我们可以在积分号下求导，并得到同类展开式；
- 第 k 项，即 $c_k(x)=\frac{1}{k!}\left(\langle Q_n^{-1}D,\frac{D}{2i}\rangle\right)^k c(x,0,0)$，是形如 $c_\alpha\partial^\alpha m(x,\beta_n x)a^{(l)}(x)$ 的若干项之和，其中 $\alpha\in\mathbb{N}^2, l\in\mathbb{N}, |\alpha|+l\leq 2k$ 和 $c_\alpha\in\mathbb{R}$。该和的系数 c_α 取决于 Q_n。由于 $\beta_n=O(\varepsilon_0)$，这些系数关于 n 一致有界。因此，存在 $c_{k,p}=c_{k,p}(m)$，使得对于满足 $k+p>0$ 的 $p\in\mathbb{N}$，

$$q_p(c_k)\leq c_{k,p}h^{-2k\delta}q_{2k+p}(u)$$

因此，根据 $c_k(x)$ 的表达式，我们令 $A_k u(x)=h^{2k\delta}c_k(x)e^{i\beta_n\frac{x^2}{2h}}$，这具有所需的形式。

对于余项，我们有

$$R_N(x)\leq C_N(m)h^N h^{-(2N+2)\delta}\sup_{|y|\leq 1}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\alpha_n h}\right)^{-2}$$

不难看出

$$\sup_{|y|\leq 1}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\alpha_n h}\right)^{-2}\leq C\left(1+\frac{x^2}{\alpha_n h}\right)^{-2}$$

我们选择 $M>0$ 使得 $M(1-2\delta)-2\delta>0$，从而 $R_{N+M}(x)\leq C_N(m)h^{N(1-2\delta)}\sup_{|y|\leq 1}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\alpha_n h}\right)^{-2}$。通过写成 $B_1(x)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k(x)+\sum_{k=N}^{N+M-1}c_k(x)+R_{N+M}(x)$，我们看到

$$q_0\left(v_1-\sum_{k=0}^{N-1}h^k A_k u\right)\leq C_N h^{N(1-2\delta)}q_{2N+M}(u)$$

通过在积分号下求导，我们同样可以证明

$$q_j\left(v_1-\sum_{k=0}^{N-1}A_k u\right)\leq C_N h^{N(1-2\delta)}q_{j+2N+M}(u)$$

下面仍需分析 B_2。由于定义 B_2 的积分中不存在驻点，我们使用微分算子 $L(y,\xi)=\frac{\langle Q_n(y,\xi)D\rangle}{|Q_n(y,\xi)|^2}$ 反复进行分部积分，该算子满足 $Le^{\frac{i}{h}\langle Q_n(y,\xi),(y,\xi)\rangle}=e^{\frac{i}{h}\langle Q_n(y,\xi),(y,\xi)\rangle}$。令 $c_2(x,y,\xi)=(1-\bar{\chi}(y,\xi))m(x+y/2,\beta_n+y/2)a(x+y)$。由于在 $\mathrm{supp}(1-\chi)$ 上 $|Q(y,\xi)|\geq c(y^2+\xi^2)^{1/2}$，我们注意到对于 $M\in\mathbb{N}$。

$$\begin{aligned}(L^*)^{2M}c_2(x,y,\xi)&\leq C_M(1+y^2+\xi^2)^{-M/2}h^{2(1-\delta)M}q_{2M}(u)(\alpha_n h)^{1/4}\left(1+(x+y)^2/\alpha_n h\right)^{-2}\\&\leq C_M(1+y^2+\xi^2)^{-M/2}h^{2(1-\delta)M}q_{2M}(u)(\alpha_n h)^{1/4}\left(1+x^2/\alpha_n h\right)^{-2}\left(1+y^2/\alpha_n h\right)^{-2}\\&\leq C_M(1+y^2+\xi^2)^{-M/2}h^{2(1-\delta)M}q_{2M}(u)(\alpha_n h)^{1/4}\left(1+x^2/\alpha_n h\right)^{-2}\end{aligned}$$

对 $\mathbb{R}^2$ 积分可得，$|B_2(x)|\leq C_M h^{2(1-\delta)M}q_{2M}(u)(\alpha_n h)^{1/4}\left(1+x^2/\alpha_n h\right)^{-2}$。特别地，当 $M=N$ 时，$q_0(v_2)\leq C_N h^{N(1-2\delta)}q_{2N}(u)$。类似地，可以证明 $q_j(v_2)\leq C_{j,N}h^{N(1-2\delta)}q_{j+2N}(u)$。由于 $\mathrm{Op}_h(m)u=v_1+v_2$，引理 5.10 得证。

□

A.2. **指数函数的逼近公式**。我们考虑

- 一个希尔伯特空间 H ($H=L^2(\mathbb{R})$，用于本文中的应用)；
- 一个有界算子 $A\colon\ H\to H$；
- 一个参数 h；
- 一个 $\mathcal{C}$ 的“类”，即 H的子空间 H。

我们假设，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，存在 A_j： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$，使得以某种将在应用中具体说明的意义，$Au \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j A_j u$。更确切地说，我们假设，对于所有 $N \in \mathbb{N}$ 和所有 $u \in \mathcal{C}$，都可以写成

$$Au = \sum_{j=0}^{N-1} h^j A_j u + h^N R_N(u)$$

我们关注算子 e^{tA} 对 $\mathcal{C}$中元素的作用。回想一下，若$u_0 \in H$，则 $t \mapsto e^{tA}u_0$ 是柯西问题的解

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

此外，我们假设 A_0 可延拓为 H上的有界算子，因此 e^{tA_0} 是一个定义良好的算子；并且我们还假设，对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $e^{tA_0}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$。本附录中，我们引入公式和记号，以近似表示 $e^{tA}u$。当然，真正有趣的数学工作在于控制以下各项以及展开式的精度，这将在应用中完成。令整数 $N \in \mathbb{N}$ 和初始态 $u \in \mathcal{C}$固定。

首项。对于首项，我们只需写出 $u_0(t) = e^{tA_0}u$。接着，令 $R_0(t) = e^{tA}u - e^{tA_0}u$。我们有 $\dot{R}_0(t) = Ae^{tA}u - A_0e^{tA_0}u$。因此，我们有

$$\dot{R}_0(t) = AR_0(t) + \sum_{j=1}^{N-1} h^j A_j e^{tA_0}u + \tilde{r}_{0,N}(t) \quad ; \quad \tilde{r}_{0,N}(t) = h^N R_N(u_0(t)) \tag{A.1}$$

一阶修正项。当 $N = 1$ 时，我们停止。否则，可以用一个阶为 h的项来修正这一首次近似。当然，可以直接写出适用于每个 j 的一般公式，但作者认为， $j = 1$ 这一情形有助于理解一般情形。我们尝试采用试探形式 $u_1(t) = e^{tA_0}v_1(t)$，并令

$$R_1(t) = e^{tA}u - e^{tA_0}\left(u + hv_1(t)\right)$$

于是我们有，

$$\begin{aligned} \dot{R}_1(t) &= \dot{R}_0(t) - he^{tA_0}\left(A_0v_1(t) + v_1'(t)\right) \\ &= AR_0(t) + \sum_{j=1}^{N-1} h^j A_j e^{tA_0}u + \tilde{r}_{0,N}(t) - hAe^{tA_0}v_1(t) + h(A - A_0)e^{tA_0}v_1(t) - he^{tA_0}v_1'(t) \\ &= AR_1(t) + \sum_{j=1}^{N-1} h^j A_j e^{tA_0}u + \tilde{r}_{0,N}(t) + h(A - A_0)e^{tA_0}v_1(t) - he^{tA_0}v_1'(t) \end{aligned}$$

为了消去求和中阶为 h 的项，我们令

$$v_1(t) = \int_0^t e^{-sA_0}A_1e^{sA_0}u ds \tag{A.2}$$

为了继续展开式，我们需要假设对所有 $t \in \mathbb{R}$， $v_1(t) \in \mathcal{C}$ 均成立。在具体应用中，这一条件成立，并且可以对 $v_1(t)$进行精确控制。

高阶项。为方便起见，记 $A_j(s) = e^{-sA_0}A_je^{sA_0}$。我们可以通过归纳法构造一个函数族 $v_k(t)$，令 $v_0(t) = u$，并且对 $1 \le k \le N-1$,

$$v_k(t) = \sum_{l=0}^{k-1} \int_0^t A_{k-l}(s)v_l(s)ds \tag{A.3}$$

为使这些公式成立，我们假设该构造确保对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $v_k(t) \in \mathcal{C}$。在实际应用中，这一条件很容易满足。我们还设

$$\tilde{r}_{k,N}(t) = (A - A_0)e^{tA_0}v_k(t) - \sum_{j=1}^{N-k-1} h^j A_j e^{tA_0}v_k(t)$$

and

$$R_k(t) = e^{tA}u - e^{tA_0}\sum_{l=0}^{k} h^l v_l(t)$$

$\tilde{r}_{k,\ N}(t)$ 必须视为阶为 h^{N-k} 的项。这些公式确保

$$\dot{R}_k(t) = AR_k(t) + \sum_{j=k+1}^{N-1} h^j \left(\sum_{l=0}^{k} A_{k-l} e^{tA_0} v_l(t) \right) + \sum_{j=0}^{k} h^j \tilde{r}_{j,N}(t)$$

尤其是，当 $k = N-1$,

$$\dot{R}_{N-1}(t) = AR_{N-1}(t) + \sum_{j=0}^{N-1} h^j \tilde{r}_{j,N} \tag{A.4}$$

参考文献

[Ale08] I. Alexandrova。《半经典波前集与傅里叶积分算子》。《加拿大数学杂志》，60(2):241–263, 2008. [Bar08] L. Barreira。《双曲动力学中的维数与复现》，《数学进展》第272卷。巴塞尔：Birkhäuser，2008年。[BLR87] C. Bardos、G. Lebeau 和 J. Rauch。《散射频率与 Gevrey 3 奇点》。《数学创刊》，90:77–114, 1987. [Bor16] D. Borthwick。《无限面积双曲曲面的谱理论》，《数学进展》第318卷。Cham：Birkhäuser，第2版，2016年。[BR75] R. Bowen 和 D. Ruelle。《Axiom A 流的遍历理论》。《数学创刊》，29:181–202, 1975. [BWP+13] S. Barkhofen、T. Weich、A. Potzuweit、H.-J. Stöckmann、U. Kuhl 和 M. Zworski。《微波 n 圆盘系统中谱隙的实验观测》。《物理评论快报》，110(16), 2013年4月。[CM00] N. Chernov 和 R. Markarian。《混沌台球》，《数学调查与专著》第127卷。美国数学学会，2000年。[CR12] M. Combescure 和 D. Robert。《相干态及其在数理物理中的应用》。Springer，2012年。[DD12] K. Datchev 和 S. Dyatlov。《渐近双曲流形上的分形韦尔定律》。《几何与泛函分析》，23:1145–1206, 2012. [DJ17] S. Dyatlov 和 L. Jin。《开量子映射的共振与分形不确定性原理》。《数学物理通讯》，354(1):269–316, 2017年5月。[DJN21] S. Dyatlov、L. Jin 和 S. Nonnenmacher。《变曲率曲面上的特征函数控制》。《美国数学学会杂志》，2021年。[Dya19] S. Dyatlov。《双曲流形上改进的分形韦尔上界》。附 David Borthwick、Semyon Dyatlov 和 Tobias Weich 撰写的附录。《欧洲数学学会杂志》，21(6):1595–1639, 2019年2月。[DZ19] S. Dyatlov 和 M. Zworski。《散射共振的数学研究》，第200卷。美国数学学会，2019年。[GR89] P. Gaspard 和 S.A. Rice。《来自经典混沌排斥子的散射》。《化学物理学杂志》，90(4):2225–2241, 1989. [GS13] V. Guillemin 和 S. Sternberg。《半经典分析》。2013年。[Gé88] C. Gérard。《两个严格凸障碍物情形下散射矩阵极点的渐近式》。(31), 1988. [Hag98] G. A. Hagedorn。《半经典波包的升降算子》。《物理学年鉴》，269(1):77–104, 1998. [HK95] B. Hasselblatt 和 A. Katok。《现代动力系统理论导论》。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1995年。[HL94] T. Hargé 和 G. Lebeau。《凸体衍射》。《数学创刊》，118(1):161–196, 1994. [Ika82] M. Ikawa。《两个凸障碍物外部波动方程解的衰减》。《大阪数学杂志》，19(3):459–509, 1982. [Ika88] M. Ikawa。《多个凸体外部波动方程解的衰减》。《傅里叶研究所年刊》，38(2):113–146, 1988. [JN12] D. Jakobson 和 F. Naud。《凸余紧双曲曲面的临界线问题》。《几何与泛函分析》，22(2):352–368, 2012. [LSZ03] W.T. Lu、S. Sridhar 和 M. Zworski。《混沌开放系统的分形韦尔定律》。《物理评论快报》，91:154101, 2003年10月。[Mat68] J. Mather。《Anosov 微分同胚的刻画》。1968年。[Mor91] T. Morita。《无边界条件台球的符号表示》。《美国数学会汇刊》，325(2):819–828, 1991. [Nau12] F. Naud。《凸余紧双曲曲面上共振的密度与位置》。《数学创刊》，195:723–750, 2012. [Non11] S. Nonnenmacher。《开放量子混沌中的谱问题》。《非线性》，24(12):R123–R167, 2011年11月。[NR07] S. Nonnenmacher 和 M. Rubin。《量子化混沌系统的共振特征态》。《非线性》，20(6):1387–1420, 2007年5月。[NSZ11] S. Nonnenmacher、J. Sjöstrand 和 M. Zworski。《从开放量子系统到开放量子映射》。《数学物理通讯》，304(1):1–48, 2011年3月。[NSZ14] S. Nonnenmacher、J. Sjöstrand 和 M. Zworski。《开放量子混沌映射的分形韦尔定律》。《数学年刊》，179(1):179–251, 2014. [NZ09] S. Nonnenmacher 和 M. Zworski。《混沌散射中的量子衰减率》。《数学学报》，203(2):149–233, 2009. [PWB+12] A. Potzuweit、T. Weich、S. Barkhofen、U. Kuhl、H.-J. Stöckmann 和 M. Zworski。《韦尔渐近式：从封闭系统到开放系统》。《物理评论 E》，86:066205, 2012年12月。[Sjö90] J. Sjöstrand。《半经典问题中共振密度的几何上界》。《杜克数学杂志》，60(1):1–57, 1990. [SZ07] J. Sjöstrand 和 M. Zworski。《半经典共振密度的分形上界》。《杜克数学杂志》，137(3):381–459, 2007. [Vac22] L. Vacossin。《二维障碍物散射的谱隙》。《分析与偏微分方程》，即将发表，2022年。

[Wal75] P. Walters。连续变换的压强变分原理。《美国数学杂志》，97(4)：937–971，1975。[Zwo99] M. Zworski。凸余紧双曲曲面的极限集维数与共振密度。《数学创刊》，136(2)：353–409，1999。[Zwo12] M. Zworski。半经典分析，第138卷。美国数学学会，2012。[Zwo17] M. Zworski。散射共振的数学研究。《数学科学通报》，7 85，2017 1 1()：– 。

巴黎萨克雷大学，奥赛数学实验室，法国国家科学研究中心UMR 8628，307号楼，91405 奥赛 Cedex，电子邮件地址：lucas.vacossin@universite-paris-saclay.fr