群移位上的有效投影：判定群元胞自动机的性质

Pierre B´eaur[1] 和 Jarkko Kari[2]

[1]数值科学跨学科实验室，巴黎-萨克雷大学´数学与统计学系，图尔库大学，芬兰´巴黎-萨克雷大学[2]数学与统计学系，图尔库大学，芬兰

arXiv:2301.11133v1 [cs.FL] 26 Jan 2023

摘要

关于元胞自动机的许多判定问题，在代数元胞自动机的情形下已知是可判定的；也就是说，状态集具有代数结构，且自动机的作用是同态。研究最多的情形包括有限域、有限交换环和有限交换群。本文提出了将这些结果推广到更一般的群元胞自动机情形的方法，即状态集为有限群（可能非交换）的情形。构型空间甚至不一定是满移位，而可以是一个子移位——称为群移位——它是任意维数 d 下 $\mathbb{Z}^d$上的满移位的子群。我们特别证明，群元胞自动机的单射性、满射性、等度连续性、敏感性和幂零性均可判定，而非传递性是半可判定的。单射性总是蕴含满射性，且联合周期点在极限集中稠密。Garden-of-Eden 定理的 Moore 方向对所有群元胞自动机都成立，而 Myhill方向在某些情形下不成立。证明基于群移位上的有效投影运算，尤其将这些运算应用于群元胞自动机的合法时空图集合。这使得能够有效构造群元胞自动机的迹和极限集。本文的初步版本曾在2020年计算机科学数学基础会议上发表。

关键词——群元胞自动机；群移位；符号动力系统；可判定性

1 引言

代数群移位和群元胞自动机作用于无限网格 $\mathbb{Z}^d$ 上的构型，这些构型是由有限群 $\mathbb{G}$ 的元素组成的着色，有限群 $\mathbb{G}$ 称为状态集。所有构型的集合 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 称为满移位，它作为 $\mathbb{G}$ 的无限笛卡尔幂，继承了群结构。子移位（即避开一组固定禁有限图案的构型集合）若同时是 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 的子群，则称为群移位。已知群移位均为有限型，即可以通过禁用有限个图案来定义。元胞自动机是定义在子移位上的动力系统，由统一的状态局部更新规则定义。定义在群移位上的元胞自动机若同时是群同态，则称为群元胞自动机。

在本文中，我们证明任意高维的群移位和群元胞自动机 d 都适用于有效操作和算法判定过程。这与一般的多维有限型子移位和元胞自动机形成鲜明对比：在那些情形下，大多数性质都不可判定。

其充斥着不可判定性。我们的研究将一系列关于线性元胞自动机（其状态集是有限交换环）和加性元胞自动机（其状态集是有限阿贝尔群）算法的既有结果推广到非交换群和任意维数，并从满移位推广到任意群移位——例如参见 [1, 2]及其中的引文。我们的方法基于关于群移位的两个经典结果：任意维数下的所有群移位都是有限型的，并且它们的周期点集稠密 [3, 4]。通过标准论证，这些结果提供了一种判定任意群移位中语言成员资格的过程。我们展示了如何利用该过程有效构造给定群移位的任意低维投影（推论 3），以及给定群移位在任意给定群元胞自动机下的像（推论 4）。

为了证明 d 维群元胞自动机的可判定性结果，我们将所有有效时空图组成的集合视为一个 $(d+1)$ 维群移位。元胞自动机的局部更新规则给出了这个群移位的一种表示。时间方向上的一维投影是该自动机的迹子移位，它们提供了有限单元格定义域内所有可能的时间演化；而空间维度上的 d 维投影则是该自动机的极限集。这些都可以有效构造。从迹子移位（它们本身也是一维群移位）出发，可以分析元胞自动机的动力学，并判定例如它是否具有周期性（定理 7）、是否等度连续或对初始条件敏感（定理 8）。等度连续性与敏感性之间存在二分性（引理 12）。我们可以半判定混合性质不成立的情形，即元胞自动机非传递或非混合的情形（定理 9）。极限集揭示了该自动机是否幂零（定理 7）、满射或单射（定理 4）。请注意，以上所有论述都适用于定义在任意群移位（而不仅是满移位）上的群元胞自动机，且适用于所有维数。还要注意，在我们的设定中，单射性蕴含满射性（推论 6），而满射性蕴含预单射性（定理 6）；一般而言，这两个蕴含的逆命题均不成立。此外，在所有满射情形下，时空周期点都是稠密的（推论 5）。

本文结构如下。首先介绍移位空间和元胞自动机所需的术语及经典结果；先讨论多维符号动力系统的一般情形，再特别讨论代数情形。第 3 节定义群移位上的投影运算，并给出实现这些运算的有效算法。这部分包含本文的主要技术性证明。第 4 节将这些投影应用于元胞自动机的时空图，以有效构造其迹和极限集。随后利用这些结果，为群元胞自动机的若干性质提供判定算法。

我们在数学基础与计算机科学会议（MFCS 2020）上报告了本工作的初步版本 [5]。本文新增了第 3 节的主要证明，说明如何有效构造这些投影；并在第 4 节新增了关于伊甸园定理的内容。

2 预备知识

我们先给出与一般子移位和元胞自动机相关的定义，然后讨论群移位和群元胞自动机特有的概念与性质。

符号动力系统

有限字母表 A 上的 d 维构型是将 A 中的符号赋值给无限网格 $\mathbb{Z}^d$上的各个位置。我们称 A 中的元素为状态。对于任意构型 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$和任意元胞$\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，我们用 $c_{\mathbf{u}}$ 表示 c在元胞$\mathbf{u}$处的状态 $c(\mathbf{u})$。对于任意 $a \in A$，我们用 $a^{\mathbb{Z}^d}$ 表示由 $a^{\mathbb{Z}^d}{}_{\mathbf{u}} = a$ 对所有$\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$定义的均匀构型。

对于向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$，平移 $\tau^{\mathbf{t}}$ 会对构型 c 进行移位，使元胞$\mathbf{t}$ 移至元胞$\mathbf{0}$，即对于所有$\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，均有 $\tau^{\mathbf{t}}(c)_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}$。如果 c 满足 $\tau_{\mathbf{t}}(c) = c$，则称其为周期

其中$\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$非零。在这种情况下，$\mathbf{t}$ 称为周期向量，而 c 也称为$\mathbf{t}$-周期。如果存在 d 个线性无关的周期向量，则称 c 为全周期。我们用 $\mathbf{e}_i = (0, \ldots\ldots, 0, 1, 0, \ldots\ldots, 0)$ 表示第 i 个基本坐标单位向量，其中$i = 1, \ldots\ldots, d$。全周期的 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 自动具有某个 $k > 0$，其周期向量为 $k\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_2, \ldots\ldots, k\mathbf{e}_d$，分别沿着 d 个坐标方向。

设 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 是一个由元胞构成的有限集，即一种形状。D-图案是指将符号赋给形状 D 中各位置的一种方式。（有限）图案是某个形状 D 上的 D-图案。我们称 D 为该图案的定义域。如果存在某个 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$，使得 $\tau^{\mathbf{t}}(c)|_D = p$，那么我们就说形状为 D 的有限图案 p 在构型c 中出现。我们也说 c 包含该图案 p。对于固定的 D，构型 c 中出现的 D-图案集合记作 $\mathcal{L}_D(c)$。我们用 $\mathcal{L}(c)$ 表示在 c 中出现的所有有限图案的集合，即对所有有限 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$， $\mathcal{L}_D(c)$ 的并集。

设 $p \in A^D$ 是一个形状为 D 的有限图案。构型中在定义域 D 上具有 p 的集合 $[p] = \{c \in A^{\mathbb{Z}^d} \mid c|_D = p\}$ 称为由 p 确定的柱集。柱集族 $[p]$ 是 $A^{\mathbb{Z}^d}$ 上紧拓扑的一个基，该拓扑称为积离散拓扑。有关详情，例如请参见 [6] 的前几页。该拓扑也可以等价地由 $A^{\mathbb{Z}^d}$ 上的一个度量来定义：如果两个构型在元胞$\mathbf{0}$周围的大区域内彼此一致，那么它们就彼此接近。柱集在该拓扑下既开又闭：它们既是开集也是闭集。

X 是 $A^{\mathbb{Z}^d}$ 的一个子集，若它在拓扑意义下是闭集且对平移封闭，则称为子移位。需要注意的是，虽然这不太符合惯例，我们允许 X 为空集。根据紧致性论证，每个不属于 X 的构型 c 都包含一个有限图案 p，使得它无法属于 X：没有任何包含 p 的构型属于 X。因此，我们也可以用禁用图案来定义子移位：给定一个有限图案集合 P，我们定义

$$\mathcal{X}_P = \{c \in A^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{L}(c) \cap P = \emptyset\},$$

不包含 P中任何图案的构型集合。集合 $\mathcal{X}_P$ 是一个子移位，而每个子移位都可表示为某个 P所对应的 $\mathcal{X}_P$。如果对某个有限 P，有 $X = \mathcal{X}_P$，那么 X 就是一个有限型子移位（SFT）。对于子移位 $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$，我们分别用 $\mathcal{L}_D(X)$和 $\mathcal{L}(X)$表示 X中元素出现的 D-图案集合和所有有限图案的集合。集合 $\mathcal{L}(X)$称为该子移位的语言。

连续函数 $F: X \longrightarrow Y$在 d维子移位 $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$ 与 $Y \subseteq B^{\mathbb{Z}^d}$之间是移位同态，当且仅当它是平移不变的，也就是说，$\tau_Y^{\mathbf{t}} \circ F = F \circ \tau_X^{\mathbf{t}}$ 对每个 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$都成立，其中我们用带有下标的向量 $\mathbf{t}$ 表示平移 $\tau^{\mathbf{t}}$，下标用于指明空间。从子移位 X 到其自身的移位同态（即移位自同态）称为 X上的元胞自动机。Curtis-Hedlund-Lyndon定理 [7]指出，移位同态恰好是由如下局部规则定义的函数 $X \longrightarrow Y$。设 $N \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为一个有限邻域，$f: \mathcal{L}_N(X) \longrightarrow B$ 为一个局部规则，它为 X中出现的每个 N-图案指定 B 中的一个字母。在每个元胞处应用 f，即可得到函数$F_f: X \longrightarrow B^{\mathbb{Z}^d}$，它按照 $F_f(c)_{\mathbf{u}} = f(\tau^{\mathbf{u}}(c)|_N)$ 对每个 c进行映射，其中所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$均如此。移位同态 $X \longrightarrow Y$恰好是满足 $F_f(X) \subseteq Y$的这类函数 F_f。

子移位在移位同态 F 下的像 $F(X)$ 显然也是子移位。有限型子移位的像称为索菲。关于符号动力系统的更多概念和结果，请参阅 [8, 9]。

群移位与群元胞自动机

设 $\mathbb{G}$ 是一个有限（不一定是交换的）群。在 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 这个 d维构型空间上存在一种自然的群结构，其中群运算逐元胞进行：$(ce)_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}} e_{\mathbf{u}}$ 对所有 $c, e \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$均成立。群移位 是 $\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 的一个子移位，同时也是一个子群。特别地，群移位非空。群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 上的元胞自动机 $F: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$若为群同态，则称为群元胞自动机：$F(ce) = F(c)F(e)$对所有 $c, e \in \mathbb{X}$均成立。更一般地，移位同态 $F: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$

若同时也是群移位 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 之间的群同态，则称为群移位同态。

群移位具有两项重要性质，这两项性质是算法可判定性 [10]的核心：每个群移位都是有限型的，并且全周期构型在所有群移位中稠密 [3, 4]。

定理 1 ([3])。 每个群移位都是有限型子移位。

由此定理可知，每个群移位 $\mathbb{X}$ 都可以用一组有限的 P 禁有限图案进行有限表示 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$。这是所有涉及给定群移位的算法问题所假定的表示方式。此外，当我们说有效地构造一个群移位 $\mathbb{X}$ 时，意思是我们给出一个有限集 P，其中包含有限图案，使得 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$。

定理 2 ([3])。 全周期构型在群移位中稠密，也就是说，对于每个$p \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$，都存在一个全周期 $c \in \mathbb{X}$，使得 $p \in \mathcal{L}(c)$。

作为这两项基本性质的直接推论，我们得到群移位的语言是（统一）可递归的。

推论 1. 存在一种算法，可针对任意给定的群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 以及任意给定的有限图案 $p \in \mathbb{G}^D$，判定 p 是否属于 $\mathbb{X}$ 的语言 $\mathcal{L}(\mathbb{X})$。

证明。 这是王浩 [11] 提出的一种标准论证：存在一种用于正成员判定 $p \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ 的（非确定性）半算法，它会猜测一个全周期构型 $c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，验证 c 是否包含图案 p，最后验证 c 不包含给定集合 P 中定义 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$ 的任何禁用图案。根据定理 2，当且仅当 $p \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ 时，这样的构型 c 存在。反过来，对于任意有限型子移位，也存在一种用于否定情形 $p \notin \mathcal{L}(\mathbb{X})$ 的半算法：它会猜测一个数 n，确保 $p \in \mathbb{G}^D$ 的定义域 D 是 $E = \{-n, \dots, n\}^d$ 的子集，枚举所有定义域为 E 且满足 $q|_D = p$ 的有限多个图案 q，并验证所有此类 q 都包含一个禁型 P 的副本，而该禁型定义了 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$。根据紧致性，当且仅当 $p \notin \mathcal{L}(\mathbb{X})$ 时，这样的数 n 存在。 □

有限型子移位用禁型表示的方式并不唯一。不过，只要语言是可递归的，我们就能有效检验给定的表示是否定义了相同的有限型子移位。

推论 2. 存在算法可以判定

(a) 对给定的群移位 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，$\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}_2$ 是否成立；*(b)* 对给定的群移位 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$ 是否成立，

证明。 为证明 (a)，设 $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ 是定义 $\mathbb{X}_2 = \mathcal{X}_P$ 的给定禁型集合。当且仅当 $p_1, \dots, p_k \notin \mathcal{L}(\mathbb{X}_1)$ 时，$\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}_2$ 成立，因此 (a) 可由推论 1 得出。现在，(b) 可由 (a) 以及如下事实直接推出：$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$ 当且仅当 $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}_2$ 且 $\mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}_1$。 □

另一个重要的已知性质是，不存在无限严格递减的群移位链$\mathbb{X}_1 \supsetneq \mathbb{X}_2 \supsetneq \mathbb{X}_3 \supsetneq \dots$ [3]。这是显而易见的，因为这类链的交集 $\mathbb{X}$ 是一个群移位，因此根据定理 1，存在一个有限集 P 使得 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$。如果某个图案 p 属于链中所有 $\mathbb{X}_k$ 的语言，那么 p 也属于交集 $\mathbb{X}$的语言，这就证明了当 k 足够大时，$\mathbb{X}_k$ 的语言不包含 P中的任何禁型。这意味着 $\mathbb{X}_k = \mathbb{X}$，且链不再继续递减。（不过请注意，虽然我们在此将递减链性质表述为定理 1 的推论，但实际上，该性质的证明与定理 1 的证明交织在一起，见 [3]。）

定理 3 ([3])。不存在由群移位组成的无限链 $\mathbb{X}_1 \supsetneq \mathbb{X}_2 \supsetneq \mathbb{X}_3 \supsetneq \dots \mathbb{X}_i \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$。

我们还要提及一个显而易见的事实：群移位在群移位同态 $F: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$ 下的原像都是群移位，并且可以有效地构造出来。特别地，这适用于 F 的核 $\ker(F) = F^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{Z}^d})$。（我们用 $\mathbf{1}_{\mathbb{G}}$ 表示任意群 $\mathbb{G}$ 的单位元；如果上下文中群是明确的，也可以简单地用 $\mathbf{1}$ 表示。）

引理 1. 对于任意给定的 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$，以及给定的群移位同态 $F: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$，集合 $F^{-1}(\mathbb{Y})$ 是一个可以有效构造的群移位。特别地，核 $\ker(F)$ 是一个可以有效构造的群移位。

证明。 集合 $F^{-1}(\mathbb{Y})$ 显然是拓扑闭的、平移不变的，且构成一个群，因此它是一个群移位。设 P 和 Q 是分别定义 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$ 和 $\mathbb{Y} = \mathcal{X}_Q$ 的有限禁用图案集。设 $f: \mathcal{L}_N(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{H}$ 是给定的局部规则，其邻域为 $N \subseteq \mathbb{Z}^d$，并定义 $F = F_f$。对于 Q 中的每个禁型 $q \in \mathbb{H}^D$，我们禁用局部规则映射为 q 的所有模式。此外，我们还禁用所有模式 $p \in P$。所得的有限型子移位为 $F^{-1}(\mathbb{Y})$。 □

3 群移位算法

为了有效地处理群移位，我们需要一些用于执行基本操作的算法。我们考虑的主要操作是进行投影：要么降低空间的维数，要么投影到状态集的某个子群，同时保持维数不变。由此还可得到一种算法，用于计算给定群移位在给定群元胞自动机下的像。对于从 $\mathbb{Z}^d$投影到低维网格，我们使用符号 π 的导数；对于保持 $\mathbb{Z}^d$ 维数不变、但改变状态集的投影，则使用符号 ψ 的导数。

投影到低维空间的记号

首先定义投影算子：它从 d维构型中截取有限宽度的（$d-1$）维切片，并沿第一维截取。设 $d \geq 1$ 为维数，$n \geq 1$ 为切片的宽度。对于字母表为A 的任意 d维构型 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$，其 n切片 $\pi^{(n)}(c)$ 是一个以字母表 A^n 为字母表的（$d-1$）维构型；对任意元胞 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^{d-1}$，其中的符号为元组 $(c(1,\mathbf{u}) \ldots, c(n,\mathbf{u})) \in A^n$。子移位 $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$的 n切片，则是集合 $\pi^{(n)}(X)$，由所有 $c \in X$的 n切片构成。由于 X具有平移不变性，在第一坐标位置 $1, \ldots, n$ 处截取切片这一事实并不重要：我们也可以使用任意 n个连续的第一坐标位置。显然，$\pi^{(n)}(X)$ 是一个子移位；如果 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$是群移位，那么 $\pi^{(n)}(\mathbb{X})$ 也是群 $\mathbb{G}^n = \mathbb{G} \times \cdots \times \mathbb{G}$上的群移位，其中 $\mathbb{G}^n = \mathbb{G} \times \cdots \times \mathbb{G}$是 $\mathbb{G}$的n重笛卡尔幂。注意，有限型子移位的投影 $\pi^{(n)}(X)$ 不一定是有限型——基本上，任何有效闭子移位都可以由此产生 [12]——因此群移位的表现尤其良好，因为它们的投影都是有限型的。

厚度为 n 的 $(d-1)$ 维切片中的图案，可以自然地解释为第一维宽度为 n 的 d 维图案。我们引入记号 $\hat{}p$，表示对图案 p 的这种解释。更确切地说，对于任意 $D \subseteq \mathbb{Z}^{d-1}$ 和字母表 $\mathbb{G}^n$ 上的 $(d-1)$ 维图案 $p \in (G^n)^D$，我们用 $\hat{}p \in \mathbb{G}^E$ 表示相应的、定义域为 $E = \{1, \ldots, n\} \times D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 的字母表 $\mathbb{G}$ 上的 d 维图案，并且对每个 $\mathbf{u} \in D$，都有 $p(\mathbf{u}) = (\hat{}p(1,\mathbf{u}), \hat{}p(2,\mathbf{u}) \ldots, \hat{}p(n,\mathbf{u}))$。于是，对于子移位 X，有 $p \in \mathcal{L}(\pi^{(n)}(X))$ 当且仅当 $\hat{}p \in \mathcal{L}(X)$。特别地，利用一个用于判定图案是否属于 $\mathcal{L}(X)$ 的算法，我们也可以判定任意给定有限图案是否属于 $\mathcal{L}(\pi^{(n)}(X))$。基于推论 1，我们立即得到关于群移位的以下事实。

引理 2。 对于任意给定的 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$、任意给定的 $n \geq 1$ 以及任意给定的 $(d-1)$ 维有限图案 $p \in (G^n)^D$，都可以有效判定$p \in \mathcal{L}(\pi^{(n)}(\mathbb{X}))$是否成立。

□

投影 $\pi^{(n)}(X)$ 是基本切片操作，可以彼此复合，也可以与坐标置换复合，从而得到将子移位投影到低维网格中的更一般投影。一般而言，对于任意子集 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，我们将限制 $c|_E$ 称为 c 在 E 上的投影，而子移位 X 在 E 上的投影为 $\pi_E(X) = \{c|_E \mid c \in X\}$。我们主要将操作 π_E 应用于形如 $E = D \times \mathbb{Z}^k$ 的集合，其中 $k < d$ 且为有限$D \subseteq \mathbb{Z}^{d-k}$，并且主要将 π_E 应用于群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$。于是，投影 $\pi_E(\mathbb{X})$ 以自然方式被视为定义在有限群 $\mathbb{G}^D$ 上的 k 维群移位。本节的主要结果之一是推论 3，它指出，对于给定的 $\mathbb{X}$ 和 $E = D \times \mathbb{Z}^k$，我们可以有效构造 $\pi_E(\mathbb{X})$。

保持维数的投影记号

设 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ 是两个有限群的笛卡尔积。对于任意 $c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，我们令$\psi^{(1)}(c) \in \mathbb{G}_1^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $\psi^{(2)}(c) \in \mathbb{G}_2^{\mathbb{Z}^d}$ 分别为到 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$的逐胞投影，其定义为 $c_{\mathbf{u}} = (\psi^{(1)}(c)_{\mathbf{u}}, \psi^{(2)}(c)_{\mathbf{u}})$, 对所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$均成立。滥用记号，对于任意 $c^{(1)} \in\mathbb{G}_1^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $c^{(2)} \in \mathbb{G}_2^{\mathbb{Z}^d}$，我们用 $(c^{(1)}, c^{(2)})$ 表示构型 $c \in (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^d}$，使得对于 $i = 1,2$，有$\psi^{(i)}(c) = c^{(i)}$。我们也对有限图案使用类似记号，并默认采用显然的方式将 $\mathbb{G}_1^D \times \mathbb{G}_2^D$与 $(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^D$对应起来。

显然，对于任意群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，集合 $\psi^{(1)}(\mathbb{X})$ 和 $\psi^{(2)}(\mathbb{X})$ 分别是 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$ 上的群移位。图案 $p \in (\mathbb{G}_1)^D$ 属于 $\psi^{(1)}(\mathbb{X})$ 的语言，当且仅当存在图案 $q \in (\mathbb{G}_2)^D$，使得 $(p,\ q) \in \mathcal{L}_D(\mathbb{X})$。因此，我们得到引理 2 的以下对应结论。

引理 3. 对于任意给定的 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq (\mathbb{G}_1 \times\mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^d}$，以及任意给定的 d 维有限图案 $p \in (\mathbb{G}_1)^D$，都可以有效判定 $p \in \mathcal{L}(\psi^{(1)}(\mathbb{X}))$ 是否成立。 □

令 D，E 为有限集，$D \subseteq E$，并令 $\mathbb{X} \subseteq (\mathbb{G}^E)^{\mathbb{Z}^d}$ 为群 $\mathbb{G}$ 的有限笛卡尔幂 $\mathbb{G}^E$ 上的群移位。群 $\mathbb{G}^E$ 以自然方式同构于 $\mathbb{G}^D \times \mathbb{G}^{E\setminus D}$，于是 $\psi^{(1)}$ 投影为 $\mathbb{X}$ 到 $(\mathbb{G}^D)^{\mathbb{Z}^d}$。我们将此投影记为 ψ_D。注意到 $\pi_{D\times\mathbb{Z}^k} = \psi_D \circ \pi_{E\times\mathbb{Z}^k}$，因此投影到 $D \times \mathbb{Z}^k$ 可以通过投影的复合获得，其中包括投影到切片 $\pi^{(n)}$、坐标置换，以及 $\psi^{(1)}$ 类型的投影。

有效构造

我们的主要技术结果是，可以有效构造群移位的投影。我们将其表述为一个包含两部分的引理。引理之后的推论3和推论4给出了简洁的表述，我们将在本文余下部分中使用这些表述。

引理 4. 设 $d \geq 1$ 为一个维数，$\mathbb{G}$ 以及 $\mathbb{G}_1$、$\mathbb{G}_2$ 为有限群。

(a) 对于任意给定的 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 以及任意给定的 $n \geq 1$，都可以有效构造 $d-1$ 维群移位 $\pi^{(n)}(\mathbb{X}) \subseteq (\mathbb{G}^n)^{\mathbb{Z}^{d-1}}$。*(b)* 对于任意给定的 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^d}$，都可以有效构造 d 维群移位 $\psi^{(1)}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{G}_1^{\mathbb{Z}^d}$。

证明。 证明采用按维数 d归纳。我们先在假设 (b) 对维数 $d-1$成立的前提下证明 (a) 对维数 d 成立，然后在假设 (a) 对维数 d 成立且 (b) 对维数 $d-1$成立的前提下，证明 (b) 对维数 d成立。为开始归纳，我们注意到 (b) 对维数 $d = 0$显然成立：在这种情况下，$\mathbb{G}$ 上的群移位恰好是 $\mathbb{G}$的子群。

证明维数 d 的情况，假设维数 $d-1$满足 *(b)*：给定宽度 $n \geq 1$和群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$（由有限个禁用图案 P 定义，且满足 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$）。首先假设 n 至少等于 P 中图案的宽度，这样我们可以假设 P中的所有图案都具有相同的定义域 $\{1,\dots,n\} \times D$，其中 $D \subseteq \mathbb{Z}^{d-1}$ 为某个有限集。（注意，我们可以有效地扩展每个禁型的定义域

，方法是改为禁用所有定义域更大的、且扩展原图案的图案。因此，可以为 P中的所有元素取一个公共定义域。我们也可以移动图案的定义域。）

为构造 $(d-1)$ 维投影 $\mathbb{Y}=\pi^{(n)}(\mathbb{X})$，我们通过有效枚举，禁止不属于 $\mathbb{Y}$ 的语言中的图案。我们将这些禁用图案累积在集合 Q 中，并在过程开始时将其初始化为空集。令 D_1, $D_2,\ldots$为 $\mathbb{Z}^{d-1}$ 的所有满足 $D_1=D$ 的有限子集的一个有效枚举。依次对每个 $i=1,2,\ldots$，我们遍历所有形状为 D_i 、定义在 $\mathbb{G}^n$ 上的（有限多个）图案 q，并利用引理 2 检查 q 是否属于 $\mathcal{L}(\mathbb{Y})$。若不属于，就将 q 加入集合 Q。这样一来，在任何时刻， Q 只包含 $\mathcal{L}(\mathbb{Y})$ 之外的图案，因此禁止 Q 中的图案便得到一个上近似 $\mathcal{X}_Q\supseteq\mathbb{Y}$。由于 $\mathbb{Y}$ 是一个群移位，因而是有限型的，通过系统地枚举 $\mathcal{L}(\mathbb{Y})$ 补集中的图案，我们最终会得到一个集合 Q，使得 $\mathbb{Y}=\mathcal{X}_Q$。

我们对每种形状的所有模式进行处理 D_i，然后再处理下一种形状 D_{i+1}，原因在于这一观察：完成处理后 D_i，子移位 $\mathcal{X}_Q$ 必定是群移位。我们有以下一般事实：

断言 1. 设 $\mathbb{X}\subseteq\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 是任意维数 d上的任意群移位，且 $D\subseteq\mathbb{Z}^d$ 是有限的。对于 $Q=\mathbb{G}^D\setminus\mathcal{L}_D(\mathbb{X})$，子移位 $\mathcal{X}_Q$ 是群移位，且 $\mathbb{X}\subseteq\mathcal{X}_Q$。

断言 *1* 的证明. 显然， $\mathcal{X}_Q$ 是一个子移位，且 $\mathbb{X}\subseteq\mathcal{X}_Q$。我们只需证明 $\mathcal{X}_Q$ 是一个群。我们有：$c\in\mathcal{X}_Q$ 当且仅当 $\mathcal{L}_D(c)\subseteq\mathcal{L}_D(\mathbb{X})$。结论由以下事实立即得出： $\mathcal{L}_D(\mathbb{X})$ 是 $\mathbb{G}^D$的一个子群。 □

群移位的交集仍是群移位，因此断言 1 确实意味着，在完整处理任意多个定义域 D_1、.....、D_i 后，得到的子移位 $\mathcal{X}_Q\supseteq\mathbb{Y}$ 是群移位。还要注意， $D_1=D$ 保证了第一轮 $i=1$ 结束后，我们就已在 Q 中拥有 P的所有模式。

如上所述，我们可以确定，最终在Q 中会有足够多的禁型，从而得到 $\mathbb{Y}=\mathcal{X}_Q$。问题在于如何判断我们是否已经枚举了足够多的模式，并到达了这样的集合 Q。幸运的是，可以通过检查上近似 $\mathcal{X}_Q$ 中宽度为 $n-1$ 的左切片和右切片是否彼此相同来判断，详情如下。

我们引入记号 ψ_L 和 ψ_R，分别表示提取宽度为 $n-1$的左切片和右切片的操作。更确切地说，对于厚度为 n的构型 $c=(c^{(1)},\ .....,\ c^{(n)})\in(\mathbb{G}^n)^{\mathbb{Z}^{d-1}}$，其中 $c^{(i)}\in\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^{d-1}}$ 是 c的单元宽度切片，我们分别定义$\psi_L(c)=(c^{(1)},\ .....,\ c^{(n-1)})$ 和 $\psi_R(c)=(c^{(2)},\ .....,\ c^{(n)})$。二者都是 $(\mathbb{G}^{n-1})^{\mathbb{Z}^{d-1}}$的元素。

命题 2. $\mathcal{X}_Q=\mathbb{Y}$ 当且仅当 $\psi_L(\mathcal{X}_Q)=\psi_R(\mathcal{X}_Q)$。

命题 2 的证明。 $\psi_L(\mathbb{Y})=\psi_R(\mathbb{Y})=\pi^{(n-1)}(\mathbb{X})$，因此从左到右的蕴含显然成立。反过来，任取 $c\in\mathcal{X}_Q$。根据假设 $\psi_L(\mathcal{X}_Q)=\psi_R(\mathcal{X}_Q)$，存在一个由构型组成的双无限序列 $\ldots,c_{-1},c_0,c_1,\ldots$，使得 $c_0=c$，且对所有 $i\in\mathbb{Z}$，都有 $c_i\in\mathcal{X}_Q$ 和 $\psi_R(c_i)=\psi_L(c_{i+1})$。构型 c_i 和 c_{i+1} 恰好重叠，因此存在一个 d 维构型 $c'\in\mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$，其连续的 n 切片为 $\ldots,c_{-1},c_0,c_1,\ldots$，也就是说，对所有 $i\in\mathbb{Z}$，都有 $c_i=\pi^{(n)}(\tau_{i\mathbf{e}_1}(c'))$。图 1 展示了 c'。由于 P 中的每个禁型也属于 Q，所以这些切片均不包含此类禁型，因此 $c'\in\mathbb{X}$。现在 $c=c_0=\pi^{(n)}(c')$，故 $c\in\pi^{(n)}(\mathbb{X})=\mathbb{Y}$。我们已经证明了 $\mathcal{X}_Q\subseteq\mathbb{Y}$。反向包含成立，因为 $\mathcal{X}_Q$ 是 $\mathbb{Y}$的上近似。 □

ψ_L 和 ψ_R 都是本引理中类型（b）的投影运算，因此根据归纳假设以及 $\mathcal{X}_Q$ 是一个 $(d-1)$ 维群移位这一事实，可以有效地构造群移位 $\psi_L(\mathcal{X}_Q)$ 和 $\psi_R(\mathcal{X}_Q)$。此外，群移位的相等性是可判定的，因此可以有效地检查条件 $\psi_L(\mathcal{X}_Q)=\psi_R\mathcal{X}_Q$。总之，每当我们的算法完成向 Q中添加形状为 D_i 的模式后，它都会检查

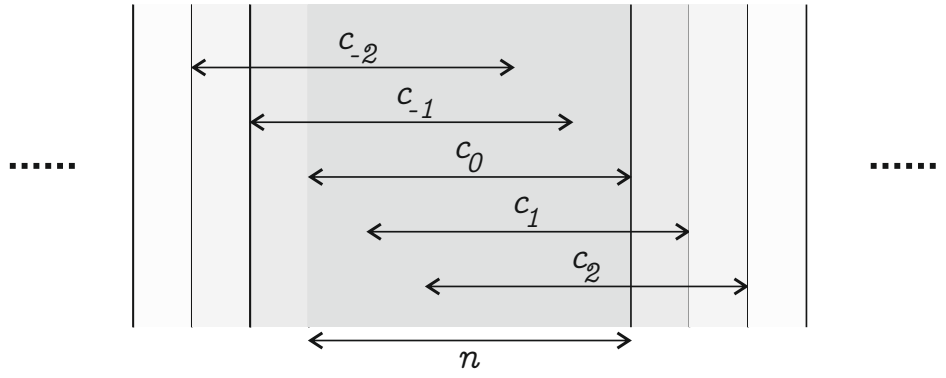

图 1：在命题 2 的证明中，重叠的 n-切片形成构型 c' 的示意图。

当前群移位 $\mathcal{X}_Q$是否满足 $\psi_L(\mathcal{X}_Q) = \psi_R\mathcal{X}_Q$。一旦达到相等，算法就停止并返回集合 Q。至此，情形（a）的算法描述完成，前提是 n 足够大，以便在宽度为 n的切片中包含所有 P。如果 n 较小，我们首先针对足够大的宽度 $m > n$ 执行算法，并有效地计算进一步的投影 $\pi^{(n)}(\mathbb{X}) = \psi_L^{m-n}\,\pi^{(m)}(\mathbb{X})$ 到宽度为 n的切片上。根据归纳假设，可以有效地计算该投影，因为它是本引理中类型（b）的一个（$d-1$）维运算。

证明维数 d 时的 ***(b)***，假设维数 d 时的 ***(a)*** 成立，且维数 $d-1$时的 ***(b)*** 成立：给定 $\mathbb{X} \subseteq (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^d}$（由一个禁用图案有限集 P 给出，且满足 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$）。为了构造 d 维投影 $\mathbb{Y} = \psi^{(1)}(\mathbb{X})$，我们仿照上文情形 (a) 的证明，使用引理 3 有效枚举不属于 $\mathbb{Y}$ 的语言的图案，从而得到 $\mathbb{Y}$ 的子移位上近似$\mathcal{X}_Q$。我们先处理形状为 D_i 的所有图案，再继续处理下一个形状 D_{i+1}。这保证了——正如上文断言 1 中所证明的——处理完每个形状 D_i 后，移位 $\mathcal{X}_Q$ 是一个群移位。

最终，我们会到达一个满足 $\mathbb{Y} = \mathcal{X}_Q$ 的集合 Q，但难点仍在于确定何时到达了这样的集合 Q。我们通过证明可以有效计算一个数 n 来确立这一点，使得当且仅当 $\pi^{(n)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(n)}(\mathbb{Y})$ 时，$\mathbb{Y} = \mathcal{X}_Q$。

一旦已知数值 n，便可根据归纳假设有效地构造投影 $\pi^{(n)}(\mathcal{X}_Q)$；该归纳假设指出，本引理的情形 (a) 在维数 d 下成立。事实上，$\mathcal{X}_Q$ 是一个已知的 d 维群移位。由于投影 $\psi^{(1)}$ 和 $\pi^{(n)}$ 可交换，因此也可以有效地构造投影 $\pi^{(n)}(\mathbb{Y})$：我们可以先构造 $\pi^{(n)}(\mathbb{X})$（使用本引理的情形 (a) 在维数 d 下成立这一归纳假设），然后将 $\psi^{(1)}$ 应用于 $(d-1)$ 维群移位 $\pi^{(n)}(\mathbb{X})$（使用本引理的情形 (b) 在维数 $d-1$ 下成立这一归纳假设），从而得到 $\pi^{(n)}(\mathbb{Y})$。

剩下要做的就是计算一个足够大的 n，使得蕴含关系

$$\pi^{(n)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(n)}(\mathbb{Y}) \Longrightarrow \mathcal{X}_Q = \mathbb{Y}$$

成立。

首先说明一下记号：回想一下，对于任意的 $c \in \mathbb{G}_1^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $e \in \mathbb{G}_2^{\mathbb{Z}^d}$，我们用 (c, e) 表示 $(\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^d}$ 中的构型，使得 $\psi^{(1)}(c, e) = c$ 且 $\psi^{(2)}(c, e) = e$。此外，对于任意的 $c \in (\mathbb{G}^n)^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $c' \in (\mathbb{G}^m)^{\mathbb{Z}^d}$，我们用 (c, c') 表示 $(\mathbb{G}^{n+m})^{\mathbb{Z}^d}$中的拼接构型，约定 $\mathbb{G}^{n+m} = \mathbb{G}^n \times \mathbb{G}^m$。下文将混用这两种拼接方式。例如，对于 $c \in (\mathbb{G}_1^n)^{\mathbb{Z}^d}$、$c' \in (\mathbb{G}_1^m)^{\mathbb{Z}^d}$、$e \in (\mathbb{G}_2^n)^{\mathbb{Z}^d}$ 和 $e' \in (\mathbb{G}_2^m)^{\mathbb{Z}^d}$，我们可以用 $((c, e), (c', e'))$ 表示 $((\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{n+m})^{\mathbb{Z}^d}$中的拼接构型，也可以用 $((c, c'), (e, e'))$ 表示同一构型，此时它表示为 $(\mathbb{G}_1^{n+m} \times \mathbb{G}_2^{n+m})^{\mathbb{Z}^d}$中的构型。为了帮助

读者解析这类表达式，我们用记号 $[c|c']$ 表示第二种拼接方式，其含义是 n切片可以想象成沿垂直方向延伸的条带，而竖线 | 是拼接后的垂直条带之间的“分隔符”。因此，上述两个例子将分别写作 $[(c,\ e)|(c',\ e')]$ 和 $([c|c'],\ [e|e'])$。

另请注意，对于同一群移位中的构型 c 和 e，例如 $c,\ e \in (\mathbb{G}^n)^{\mathbb{Z}^d}$，记号 ce 并不表示条带的串接，而表示这些构型的逐胞元乘积，即群 $(\mathbb{G}^n)^{\mathbb{Z}^d}$中的乘积。

对于字母表 $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ 上的任意群移位 $\mathbb{U}$，我们用 $\mathrm{cut}(\mathbb{U})$ 表示满足 $(\mathbf{1},\ c) \in \mathbb{U}$ 的 $\mathbb{G}_2$ 上的构型 c 所组成的集合。由于 $\mathrm{cut}(\mathbb{U}) = \psi^{(2)}(\ker(\psi^{(1)}) \cap \mathbb{U})$，且投影 $\psi^{(i)}$ 是群移位同态，因此集合 $\mathrm{cut}(\mathbb{U})$ 是一个群移位。

命题 3。 对于任意给定的群移位 $\mathbb{U} \subseteq (\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2)^{\mathbb{Z}^k}$，在任意维数 k下，都可以有效地构造 $\mathrm{cut}(\mathbb{U})$。

命题 3 的证明。 由引理 1 可知，我们可以有效地构造 $\ker(\psi^{(1)})$。有限型子移位的交集可以有效地构造（只需取两个有限型子移位所定义的禁型集合的并集）。这意味着 $\mathbb{U}' = \ker(\psi^{(1)}) \cap \mathbb{U}$ 可以有效地构造。设 R 为所构造的有限图案集合，使得 $\mathbb{U}' = \mathcal{X}_R$。$\mathbb{U}'$ 中的所有构型的第一个分量都是$\mathbf{1}$，因此，要定义 $\psi^{(2)}(\mathbb{U}')$，只需对所有满足 $(\mathbf{1},\ p) \in R$ 的情形禁用图案 p。 □

根据这些记号，我们可以继续证明。设 m 为一个数，使得集合 P中定义 $\mathbb{X}$ 的禁用图案都包含在厚度为 m的切片中，也就是说，P中每个禁用图案的定义域都是 $\{1,\dots,m\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$的子集。称正整数$r$ 为同步半径，如果对于所有 $w \in \mathbb{G}_2^{\{1,\dots,m\}\times\mathbb{Z}^{d-1}}$，以下蕴含关系都成立：

$$\begin{aligned}(\exists u, v \in \mathbb{G}_2^{\{1,\dots,r\}\times\mathbb{Z}^{d-1}})\ [u|w|v] \in \mathrm{cut}(\pi^{(m+2r)}(\mathbb{X})) \\ \implies \quad w \in \pi^{(m)}(\mathrm{cut}(\mathbb{X})).\end{aligned} \tag{1}$$

（示意图见图 2。）

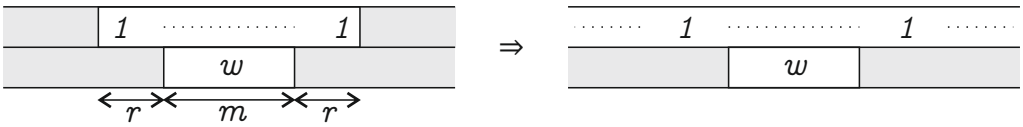

图 2：蕴含关系 (1) 的示意图。上层和下层分别是定义在 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$上的构型。若对于每个 w，只要 $\mathbb{X}$ 中存在左侧情形，$\mathbb{X}$中也存在右侧情形，那么字母 r 就是同步半径。图中仅展示第一维——每个字母都代表一个完整的 $(d-1)$ 维构型。

命题 4. 同步半径存在，而且我们可以有效地找到一个。

命题 4 的证明。 对于任意 r，记 $\mathbb{U}_r$ 为满足 (1) 中蕴含式左侧的 $w \in \mathbb{G}_2^{\{1,\dots,m\}\times\mathbb{Z}^{d-1}}$ 集合，记 $\mathbb{U}$ 为满足右侧的集合。现在，$\mathbb{U} = \pi^{(m)}(\mathrm{cut}(\mathbb{X}))$ 且 $\mathbb{U}_r = \psi(\mathrm{cut}(\pi^{(m+2r)}(\mathbb{X})))$，其中 ψ 是长度为 m 的中央线段上的投影。因此，$\mathbb{U}_r$ 和 $\mathbb{U}$ 是 $d-1$维群移位。群移位 $\mathbb{U}_r$ 构成下降链 $\mathbb{U}_1 \supseteq \mathbb{U}_2 \supseteq \dots$，因此根据定理 3，存在 k，使得对所有 $r \geq k$都有 $\mathbb{U}_r = \mathbb{U}_k$。由简单的紧致性论证可知，我们还有 $\mathbb{U} = \mathbb{U}_k$：如果 $w \in \mathbb{U}_k$，那么对于每个 $r \geq k$，都存在如图 2 左侧所示的 $c_r \in \mathbb{X}$，因此 $c_k, c_{k+1}, \dots$ 的某个收敛子序列的极限如图 2 右侧所示，这证明了 $w \in \mathbb{U}$。这就证明 k 是一个同步半径。

为了找到同步半径，我们枚举 $r = 1$、2、.....，并对每个 r 测试是否满足 $\mathbb{U}_r = \mathbb{U}$。这可以有效地进行测试：首先，根据命题 3，可以构造集合 $\mathrm{cut}(\mathbb{X})$

然后，根据归纳假设，(a) 在维数为 d 时成立，因此我们可以应用 $\pi^{(m)}$ 来构造 $\mathbb{U}$。其次，根据归纳假设，(a) 在维数为 d 时成立，因此我们可以构造 $\pi^{(m+2r)}(\mathbb{X})$；根据命题 3，我们可以构造 cut($\pi^{(m+2r)}(\mathbb{X})$)；最后，根据归纳假设，(b) 在维数为 $d-1$ 时成立，因此我们应用 ψ 来构造 $\mathbb{U}_r$。因此，$\mathbb{U}$ 和 $\mathbb{U}_r$ 都可以有效地构造出来，并且根据推论 2(b)，我们可以测试它们是否相等。

□

同步半径之所以重要，是因为足够宽的恒等映射切片**1** 可以延拓。

命题 5. 设 r 为一个同步半径。那么，对于任意宽度为 $x \in \pi^{(k)}(\mathbb{Y})$ 的任意切片 h k 成立的蕴含关系为

$$[x|\mathbf{1}^{m+2r}] \in \pi^{(k+m+2r)}(\mathbb{Y}) \quad \Longrightarrow \quad [x|\mathbf{1}^{m+2r+1}] \in \pi^{(k+m+2r+1)}(\mathbb{Y}).$$

命题 5 的证明。假设该蕴含关系的左侧成立。回想 $\mathbb{Y} = \psi^{(1)}(\mathbb{X})$，存在一个构型 $c \in \mathbb{X}$，使得 $\pi^{(k+m+2r)}(c) = [(x,y)|(\mathbf{1}^r,u)|(\mathbf{1}^m,w)|(\mathbf{1}^r,v)]$，其中切片 y、u、w、v（厚度分别为 k、r、m 和 r）位于 $\mathbb{G}_2$ 上。于是特别有 $[u|w|v] \in$ cut($\pi^{(m+2r)}(\mathbb{X})$)，因此由蕴含关系 (1) 可得 $w \in \pi^{(m)}$(cut($\mathbb{X}$))。根据 cut($\mathbb{X}$) 的定义，存在一个构型 $e \in \mathbb{X}$，使得 $\pi^{(k+m+2r+1)}(e) = [(\mathbf{1}^k,y')|(\mathbf{1}^r,u')|(\mathbf{1}^m,w)|(\mathbf{1}^r,v')|(1,a)]$，其中切片 y'、u'、v' 和 a 的厚度分别为 k、r、m、r 和 1。定义 $\mathbb{X}$ 的集合 P 中的禁用图案厚度至多为 m，因此我们可以在 c 和 e 的公共切片 $(\mathbf{1}^m,w)$ 处切开并交换尾部，而不会引入任何禁用图案。图 3 展示了沿公共切片切开并交换 c 与e 的示意图。这意味着厚度为 $k+m+2r+1$ 的切片 $[(x,y)|(\mathbf{1}^r,u)|(\mathbf{1}^m,w)|(\mathbf{1}^r,v')|(1,a)]$属于 $\pi^{(k+m+2r+1)}(\mathbb{X})$，从而得到 $[x|\mathbf{1}^{m+2r+1}] \in \pi^{(k+m+2r+1)}(\mathbb{Y})$。

□

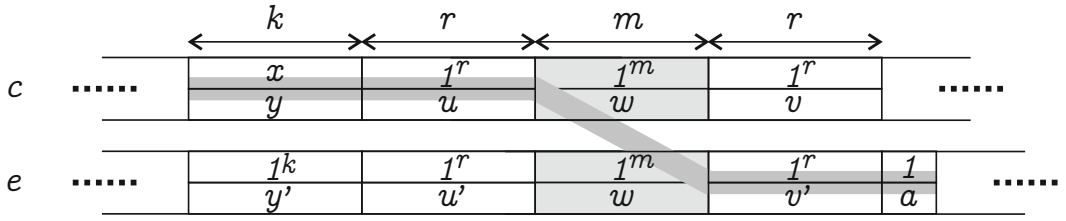

图 3：在命题 5 的证明中，沿着宽度为 m 的公共切片切割并重新连接构型 c 和 e 两半的示意图。

令 $n = m + 2r + 1$，其中 r 是我们为 $\mathbb{X}$ 计算出的同步半径。事实证明，这对于我们停止算法的目的而言是足够的厚度。

命题 6。 如果 $\pi^{(n)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(n)}(\mathbb{Y})$ 那么 $\pi^{(k)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(k)}(\mathbb{Y})$ 对所有 $k \geq n$ 都成立。

命题 *6* 的证明。我们对 k 使用归纳法进行证明。$k = n$ 的情形显然成立。对于归纳步骤，假设对于某个 $k \geq n$，$\pi^{(k)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(k)}(\mathbb{Y})$ 已知，并考虑宽度为 $k+1$ 的切片。包含关系 $\pi^{(k+1)}(\mathbb{Y}) \subseteq \pi^{(k+1)}(\mathcal{X}_Q)$ 显然成立，因为 $\mathbb{Y} \subseteq \mathcal{X}_Q$。我们只需证明 $\pi^{(k+1)}(\mathcal{X}_Q) \subseteq \pi^{(k+1)}(\mathbb{Y})$。

令 $c \in \pi^{(k+1)}(\mathcal{X}_Q)$，使得对于 a，$b \in \pi^{(1)}(\mathcal{X}_Q)$ 和 $x \in \pi^{(k-1)}(\mathcal{X}_Q)$，$c = [a|x|b]$。我们有 $[a|x]$，$[x|b] \in \pi^{(k)}(\mathcal{X}_Q)$，因此根据归纳假设 $[a|x]$，$[x|b] \in \pi^{(k)}(\mathbb{Y})$。由于 $[x|b]$ 是 $\mathbb{Y}$ 的一个构型中的切片，存在 $a' \in \pi^{(1)}(\mathbb{Y})$，使得 $[a'|x|b] \in \pi^{(k+1)}(\mathbb{Y})$。由于 $\mathbb{Y}$ 是一个群移位，乘积 $[a|x]\,[a'|x]^{-1} = [aa'^{-1}|\mathbf{1}^{k-1}]$ 属于 $\pi^{(k)}(\mathbb{Y})$。由于 $k-1 \geq m+2r$，根据命题 5 可得 $[aa'^{-1}|\mathbf{1}^k]$ 属于 $\pi^{(k+1)}(\mathbb{Y})$。但这正是我们所需要的：我们得到 $[aa'^{-1}|\mathbf{1}^k]\,[a'|x|b] = [a|x|b] = c$ 属于 $\pi^{(k+1)}(\mathbb{Y})$，如需证明。

□

现在，只需通过一个简单的紧致性论证即可证明：如果对于所有 $k \geq n$ ， $\pi^{(k)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(k)}(\mathbb{Y})$，那么 $\mathcal{X}_Q = \mathbb{Y}$。因此，我们的算法构造集合 Q ，直到条件 $\pi^{(n)}(\mathcal{X}_Q) = \pi^{(n)}(\mathbb{Y})$ 对于 $n = m + 2r + 1$ 得到满足。此时我们可以停止，因为我们知道已经达到 $\mathcal{X}_Q = \mathbb{Y}$ 的情形。这就完成了引理 4 的证明。□ □

引理 4 通过以下两个推论在本文其余部分中得到应用。第一个推论指出，可以在群移位上有效地实现任意投影。

推论 3. 给定一个 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ ，以及 $k < d$ 和一个有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^{d-k}$ ，我们可以有效地构造 k 维群移位 $\pi_{D \times \mathbb{Z}^k}(\mathbb{X}) \subseteq (\mathbb{G}^D)^{\mathbb{Z}^k}$。

证明。由 $\mathbb{X}$ 的移位不变性可知，我们可以任意平移 D，因此不失一般性地假设，对于某个 n， D 是 $E = \{1, \ldots, n\}^{d-k}$ 的子集。通过应用 $d - k$ 次引理 4(a)，并按需置换坐标，我们可以有效地构造 $\mathbb{X}' = \pi_{E \times \mathbb{Z}^k}(\mathbb{X})$。现在， $\pi_{D \times \mathbb{Z}^k}(\mathbb{X}) = \psi_D(\mathbb{X}')$，根据引理 4(b)，可以有效地实现从 $\mathbb{G}^E$ 到 $\mathbb{G}^D$ 的投影 ψ_D 。□

第二个推论指出，群移位在群元胞自动机作用下的像也可以有效构造。

推论 4. 给定一个 d 维群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 以及一个群移位同态 $F \colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$ ，可以有效构造群移位 $F(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{H}^{\mathbb{Z}^d}$。

证明。令 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$，其中 P 是定义 $\mathbb{X}$ 的给定有限禁用图案集；再令 $F = F_f$，其中 $f \colon \mathcal{L}_N(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{H}$ 是 F 的给定局部规则，其邻域为 N。我们可以在图案中填充符号以扩展其定义域，因此不失一般性，可以假设 P 中的所有图案具有相同的定义域 D，邻域是同一个集合 $N = D$，且 $\mathbf{0} \in D$。

我们首先有效构造 $\mathbb{X}' = \{(c, F(c)) \mid c \in \mathbb{X}\} \subseteq (\mathbb{G} \times \mathbb{H})^{\mathbb{Z}^d}$。这是群 $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ 上的一个群移位，因为 F 是同态。它由禁止所有满足以下条件的图案 $(p, q) \in (\mathbb{G} \times \mathbb{H})^D$ 定义：$p \notin \mathcal{L}_D(\mathbb{X})$，或 $p \in \mathcal{L}_D(\mathbb{X})$ 但 $q(\mathbf{0}) \neq f(p)$。因此，确实可以有效构造 $\mathbb{X}'$。接着，根据引理 4(b)，我们可以有效计算第二个投影 $F(\mathbb{X}) = \psi^{(2)}(\mathbb{X}')$。□

4 群元胞自动机的算法

在本部分中，我们将应用为群移位开发的算法来分析群元胞自动机。基本思路是将时空图集合视为更高维的群移位，并有效计算时间方向上的一维投影。由此可得迹子移位。由于这些是一维群移位，因此属于有限型，可以分析其长期动力学。在空间维度上进行投影，则可得到元胞自动机的极限集。

我们首先定义时空图、迹和极限集等核心概念，并说明如何有效地构造它们。随后，我们利用这些概念证明有关群元胞自动机若干动力学性质的性质与算法。关于我们所研究的动力学性质的更多细节和已知结果，请参阅 [13, 8]。

时空图

设 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个 d 维群移位，且 $F \colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是 $\mathbb{X}$ 上的群元胞自动机。F 的双无限 轨道是一个构型序列 $\ldots c^{(-1)}, \ c^{(0)}, \ c^{(1)}, \ \ldots\ldots c^{(i)} \in \mathbb{X}$，满足对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $c^{(i+1)} = F(c^{(i)})$。这样的轨道可以通过将构型 c_i 沿额外维度依次拼接，视为一个 $(d+1)$ 维构型 $c \in \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^{d+1}}$ ，即对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，都有 $c_{\mathbf{u},\ i} = c^{(i)}_{\mathbf{u}}$。前 d 个维度为空间维度，而第 $(d+1)$ 个维度为时间维度。

构型 c 是元胞自动机 F 的一个时空图。注意，轨道和时空图在时间维度上都是双无限的。F 的所有时空图组成的集合记为 $\mathrm{ST}(F)$。由于 F 是群同态，我们有如下结论。

引理 5. $\mathrm{ST}(F) \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^{d+1}}$ 是一个群移位。 □

给定 $\mathbb{X}$ 和 F，我们可以有效地构造 $\mathrm{ST}(F)$。实际上，我们只需在空间切片中禁用所有用于定义 $\mathbb{X}$的禁用图案，并在时间上连续的切片对中禁用违反 F 局部更新规则的图案。更准确地说，设 P 是给定的、用于定义 $\mathbb{X} = \mathcal{X}_P$的有限禁用图案集，设 $f\colon \mathcal{L}_N(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathbb{G}$ 是给定的局部更新规则，用于定义具有有限邻域 $N \subseteq \mathbb{Z}^d$的 F。对于任意 $p \in P$，我们禁用定义域为 $D \times \{0\}$ 的（$d+1$）维图案 $\hat{}p$，其中 $\hat{}p(\mathsf{u}, 0) = p(\mathsf{u})$，对所有 $\mathsf{u} \in D$均成立；也就是说，强制空间切片属于 $\mathbb{X}$。对于任意邻域图案 $q \in \mathcal{L}_N(\mathbb{X})$，以及任意满足 $a \neq f(q)$的 $a \in \mathbb{G}$，我们禁用定义域为 $N \times \{0\} \cup \{(0, 1)\}$的图案 q'_a，其中 $q'_a(\mathsf{u}, 0) = q(\mathsf{u})$，对所有 $\mathsf{u} \in N$均成立，且 $q'_a(0, 1) = a$；也就是说，根据局部规则 f，连续切片之间不会出现更新错误。令 P'为所有 $\hat{}p$和 q'_a构成的集合。那么显然 $\mathrm{ST}(F) = \mathcal{X}_{P'}$。

引理 6。 给定 $\mathbb{X}$ 和 F，可以有效地构造 $\mathrm{ST}(F)$。 □

迹

$D \subseteq \mathbb{Z}^d$是有限的。对于任意轨道 $\ldots, c^{(-1)}, c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots$，定义域 D中连续视图组成的序列 $\ldots, c^{(-1)}|_D, c^{(0)}|_D, c^{(1)}|_D, \ldots$是一个 D-迹。每个 $c^{(i)}|_D$ 都是有限群 $\mathbb{G}^D$ 的一个元素，因此该迹是群$\mathbb{G}^D$上的一维构型。我们将 F的所有 D-迹的集合记作 $\mathrm{Tr}_D(F) \subseteq (\mathbb{G}^D)^{\mathbb{Z}}$。

引理 7。 $\mathrm{Tr}_D(F)$是 $\mathbb{G}^D$上的一维群移位。它是 $\mathrm{ST}(F)$在 $D \times \mathbb{Z}$上的投影。

□

我们将 $\mathrm{Tr}_D(F)$ 称为 F的 D-迹子移位，或简称为 F的迹子移位。它可以有效地构造：给定 $\mathbb{X}$ 和 F，我们可以使用引理 6 有效地构造时空图的群移位 $\mathrm{ST}(F)$，然后根据推论 3，我们可以有效地构造 $\mathrm{ST}(F)$在 $D \times \mathbb{Z}$上的投影 $\mathrm{Tr}_D(F)$。

引理 8。 给定 $\mathbb{X}$ 和 F 以及任意有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，可以有效地构造 $\mathrm{Tr}_D(F)$。 □

极限集

元胞自动机的极限集 Ω_F 由所有出现在某个双无限轨道 $\ldots c^{(-1)}, c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots$中的构型 $c^{(0)} \in \mathbb{X}$ 组成。换言之，Ω_F是在 d 个空间维度中，$\mathrm{ST}(F)$ 厚度为一的d维切片的集合。作为群移位 $\mathrm{ST}(F)$ 的投影，集合 Ω_F 是一个群移位。

引理 9。 Ω_F 是一个定义在 $\mathbb{G}$上的 d维群移位。它是$\mathrm{ST}(F)$ 在$\mathbb{Z}^d \times \{0\}$上的投影。

□

利用推论 3，我们立即得到一个构造极限集的算法。

引理 10。 给定 $\mathbb{X}$和 F，可以有效地构造 Ω_F。 □

根据定义，显然 $F(\Omega_F) = \Omega_F$，因此 F在其极限集上是满射。通过简单的紧致性论证可得 $\Omega_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F^n(\mathbb{X})$，这表明任何具有任意长原像序列的构型，都有一个无限原像序列。注意，$\mathbb{X} \supseteq F(\mathbb{X}) \supseteq F^2(\mathbb{X}) \supseteq$是一个群移位的下降链。根据定理 3，不存在群移位的无限严格递减链，因此对于某个 k，有 $F^{k+1}(\mathbb{X}) = F^k(\mathbb{X})$。于是，对所有 $j > k$，都有 $F^j(\mathbb{X}) = F^k(\mathbb{X})$，从而 $\Omega_F = F^k(\mathbb{X})$。因此，所有群元胞自动机经过有限时间后都会到达其极限集：

引理 11. 群元胞自动机 $F\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是稳定的，即存在$k \in \mathbb{N}$ 使得 $F^k(\mathbb{X}) = \Omega_F$。

□

周期点

Blanchard 和 Tisseur 提出的一个著名未决问题是：在（一维）满移位上，每个满射元胞自动机是否都有稠密的时间周期点集。这个问题已在若干受限情形下得到证明，包括一维满移位 [1] 上的加性元胞自动机。事实上，定理 2 表明，对于任意维数、任意群移位上的所有群元胞自动机，这一结论都成立，而不仅限于满移位。甚至联合周期构型也是稠密的：如果一个构型既是某元胞自动机的时间周期构型，又是空间全周期构型，就称它对该元胞自动机联合周期。

推论 5. 设 $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是定义在 d 维群移位 $\mathbb{X}$ 上的群元胞自动机。联合周期构型在 Ω_F 中稠密。特别地，若 F 是满射的，则它们在 $\mathbb{X}$ 中稠密。

证明。 由引理 5，时空图 F 的集合 ST(F) 是一个 $(d+1)$ 维群移位；由定理 2，全周期元素在 ST(F) 中稠密。全周期时空图 c 在定义域 $\mathbb{Z}^d \times \{0\}$ 上的投影 $\pi(c)$ 是 Ω_F 中的全周期元素，同时也是时间周期的。全周期时空图 c 在 ST(F) 中的稠密性意味着，它们的投影 $\pi(c)$ 在 $\Omega_F = \pi(\mathrm{ST}(F))$ 中稠密。若 F 是满射的，则 $\Omega_F = \mathbb{X}$。

□

单射性与满射性

定理 2 的另一个直接推论是单满性：每个单射的群元胞自动机 $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 都是满射的。

推论 6。 **</style}设 :** $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是定义在 d 维群移位 $\mathbb{X}$ 上的群元胞自动机。若 F 是单射，则它是满射。

证明。 *</style}*若 是单射，则它在 的全周期构型中也是单射。对于任意固定的 ， 中对所有 均为 e_i-周期的构型只有有限多个。这些构型经 F 单射地映射到彼此之中。有限集上的任意单射也是满射，因此可知 F 在 $\mathbb{X}$ 的全周期构型中是满射。根据定理 2，全周期构型在 $\mathbb{X}$ 中稠密，因此 $F(\mathbb{X})$ 是 $\mathbb{X}$ 的稠密子集。由 F 的连续性可知，它也是闭集，这意味着 $F(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$。 □

我们知道，每个单射群元胞自动机都是双射的。回想一下，双射元胞自动机 F 自动可逆，也就是说，逆映射 F^{-1} 也是元胞自动机。若 F 是可逆群元胞自动机，那么显然 F^{-1} 也是如此。可逆元胞自动机特别值得关注，因为它们与微观物理学建模及其他应用领域 [14] 密切相关。对于给定的一维元胞自动机，判断其是否为单射（= 可逆）或满射是可判定的；但对于一般的二维元胞自动机，同样的问题则不可判定 [15]。不出所料，群元胞自动机的情况有所不同。

定理 4. </style}给定的群元胞自动机： $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 在给定的d维群移位 $\mathbb{X}$ 上是否为单射（满射）是可判定的。

证明。 根据引理 10，可以有效地构造极限集 Ω_F。元胞自动机 F 是满射，当且仅当 $\Omega_F = \mathbb{X}$。由于给定群移位之间的相等性是可判定的（推论 2(b)），因此满射性是可判定的。

关于单射性，回忆一下，群同态 F 是单射，当且仅当 ker(F) $=\{\mathbf{1}_{\mathbb{X}}\}$。由于 ker($F$) 是一个可以有效构造的群移位（引理 1），我们可以通过检验群移位 ker(F) 与 $\{\mathbf{1}_{\mathbb{X}}\}$ 是否相等来判断单射性。

□

伊甸园定理

伊甸园定理是元胞自动机理论中最古老的结果之一。它将单射性与满射性联系起来。若两个构型 c，$e \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 渐近，即其差集diff$(c, e) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d \mid c_{\mathbf{u}} \neq e_{\mathbf{u}}\}$ 为有限集，我们就称它们为渐近构型。若元胞自动机F：$X \longrightarrow X$ 作用于子移位 X，且对任意渐近构型 c，e 都满足：$c \neq e \Longrightarrow F(c) \neq F(e)$，则称其为预单射。因此，单射性只要求在彼此渐近的构型之间成立。显然，每个单射元胞自动机都是预单射的，但反之不成立。事实上，经典的伊甸园定理指出，在任意维数的全移位上，预单射性等价于满射性。

定理 5 (伊甸园定理 [16, 17])。 元胞自动机 F： $A^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow A^{\mathbb{Z}^d}$是预单射，当且仅当它是满射。

满射蕴含预单射最早由 E.F.Moore [16], 证明，而反向蕴含则由 J.Myhill [17]在一年后证明。此后，该定理被推广到许多其他情形。例如，已知伊甸园定理对所谓的强不可约有限型子移位上的元胞自动机成立 [18]。

请注意，Myhill方向蕴含单满性：若一个元胞自动机是单射，则它是预单射，根据 Myhill 定理，它也是满射。对于群移位，我们在推论 6 中利用周期点的稠密性，以不同方式证明了单满性。这是有充分理由的：事实上，对于群移位上的所有群元胞自动机，伊甸园定理的 Myhill方向并不成立，下面这个简单例子就说明了这一点。

例 1. 令 $\mathbb{X} = \{0^{\mathbb{Z}}, 1^{\mathbb{Z}}\}$ 为二元循环群 $\mathbb{Z}_2$上的二元群移位，并令 F：$\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 为群元胞自动机 $F(0^{\mathbb{Z}}) = F(1^{\mathbb{Z}}) = 0^{\mathbb{Z}}$。那么$F$ 是预单射的，但不是满射的。

回顾一下，判断给定的群元胞自动机是否为满射是可判定的（定理 4）。由于满射性和预单射性对于所有群元胞自动机而言并不等价，一个自然的后续问题是：给定的群元胞自动机是否为预单射是可判定的吗？这个问题的可判定性目前仍未解决。

问题 1. 判断给定的群元胞自动机是否为预单射是可判定的吗？

接下来我们证明，伊甸园定理的 Moore 方向对所有群元胞自动机都成立。证明基于这样一个事实：所有满射的元胞自动机都保持熵，而非预单射的群元胞自动机则不保持熵。 d 维子移位 X 的拓扑熵 定义为

$$h(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log |\mathcal{L}_{B_n}(X)|}{|B_n|}$$

其中， $B_n = \{1, \ldots, n\}^d$是大小为 $n \times \cdots \times n$的 d维盒子。根据Fekete次可加引理，极限存在。

定理6。 设 $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是群移位 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{G}^{\mathbb{Z}^d}$上的群元胞自动机。若 F 是满射，则 F 是预单射。

证明。假设 F 不是预单射，因此对于一个渐近对 x、$y \in \mathbb{X}$、$x \neq y$，有 $F(x) = F(y)$。于是， $c = xy^{-1} \in \mathbb{X}$ 与 $\mathbf{1}_{\mathbb{X}}$ 渐近，而 $c \neq \mathbf{1}_{\mathbb{X}}$ 和 $F(c) = F(\mathbf{1}_{\mathbb{X}}) = \mathbf{1}_{\mathbb{X}}$。由此可知， F 的核的熵严格为正，即 $h(\ker(F)) > 0$。然而，利用群第一同构定理，可以很容易地证明，对于群移位 $\mathbb{X}$、 $F(\mathbb{X})$ 和 $\ker(F)$ 的熵，以下加法公式成立：$h(\mathbb{X}) = h(F(\mathbb{X})) + h(\ker(F))$。于是我们得到 $h(\mathbb{X}) > h(F(\mathbb{X}))$，这意味着 $\mathbb{X} \neq F(\mathbb{X})$，即 F 不是满射。

□

幂零性、等度连续性与敏感性

如果极限集 Ω_F 中只有一个构型，则称元胞自动机为 幂零 。（显然，极限集从不为空。）即使对于定义在一维满移位上的元胞自动机，幂零性也是不可判定的 [19, 20]。对于群元胞自动机，恒等构型是不动点，因此自动属于极限集。通过有效构造极限集（引理 10）并检验其是否等同于单点群移位 $\{\mathbf{1}_{\mathbb{X}}\}$，可以轻松判定群元胞自动机的幂零性。

更一般地，若存在某个 n 和 $p \geq 1$，使得 F 是最终周期的；若存在某个 $p \geq 1$，使得 F^p 是恒等映射，则称其为周期的。显然，幂零元胞自动机是最终周期的，且 $p = 1$。注意，最终周期元胞自动机在极限集上是周期的；反过来，若 F 在其极限集上是周期的，则由于根据引理 11，对于某个 n，有 $\Omega_F = F^n(\mathbb{X})$，故 F 在 $\mathbb{X}$ 上是最终周期的。

定理 7. 对于给定的群元胞自动机 $G\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 和给定的 d 维群移位 $\mathbb{X}$，判定 F 是否幂零、周期或最终周期是可判定的。

证明。 我们有 F 是

- 幂零，当且仅当 $\Omega_F = \{\mathbf{1}_{\mathbb{X}}\}$,
- 最终周期，当且仅当 $\mathrm{Tr}^{\{0\}}(F)$ 是有限的,
- 当且仅当它是单射且最终周期。

群移位 Ω_F 和 $\mathrm{Tr}^{\{0\}}(F)$ 可以有效构造（引理 8 和引理 10）。可以检验 Ω_F 和 $\{\mathbf{1}_{\mathbb{X}}\}$ 是否等价（推论 2(b)），而给定的一维有限型子移位的有限性也很容易判定，因此幂零性和最终周期性都是可判定的。根据定理 4， F 的单射性是可判定的，因此周期性也可以判定。

□

构型 $c \in \mathbb{X}$ 是 $F\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 的等度连续点，如果对于每个有限$D \subseteq \mathbb{Z}^d$，都存在一个有限 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得 $e|_E = c|_E$ 蕴含 $F^n(e)|_D = F^n(c)|_D$，对所有 $n \geq 0$ 均成立。因此，即使初始构型并不完全确知，等度连续点的轨道仍可以可靠地模拟。令 $\mathrm{Eq}(F) \subseteq \mathbb{X}$ 为F的等度连续点集合。如果 $\mathrm{Eq}(F) = \mathbb{X}$，我们就称 F 为等度连续。

元胞自动机 $F\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 如果存在一个有限观测窗口 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得对于每个构型 $c \in \mathbb{X}$ 和每个有限 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，都存在 $e \in \mathbb{X}$，满足 $e|_E = c|_E$，但 $F^n(e)|_D \neq F^n(c)|_D$ 对某个 $n \geq 0$成立，则称其对初始条件敏感，或简称敏感。显然， c 不可能是等度连续点，因此对于所有敏感的 F，都有 $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$。对于群元胞自动机，反过来也成立。

引理 12. 设 $F\colon\ \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是定义在 d 维群移位 $\mathbb{X}$上的群元胞自动机。那么，以下两种情况恰有一种成立:

- $\mathrm{Eq}(F) = \mathbb{X}$ 且 F 是等度连续的，或者
- $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$ 且 F 是敏感的。

证明. 假设存在某个 $c \notin \mathrm{Eq}(F)$，这意味着存在一个有限 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得对于所有有限 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，都存在 $e \in \mathbb{X}$ 和 $n \geq 1$，满足 $e|_E = c|_E$，但 $F^n(e)|_D \neq F^n(c)|_D$。考虑任意一个 $c' \in \mathbb{X}$。对于 $c'' = c'ec^{-1} \in \mathbb{X}$，我们于是有 $c''|_E = c'|_E$，但 $F^n(c'')|_D \neq F^n(c')|_D$。这证明了 $c' \notin \mathrm{Eq}(F)$。

我们可以得出，对于群元胞自动机，要么 $\mathrm{Eq}(F) = \mathbb{X}$ or $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$。根据定义，$\mathrm{Eq}(F) = \mathbb{X}$等价于$F$的等度连续性。

如果 F是敏感的，那么 $\mathrm{Eq}(F) = \emptyset$ 成立。反过来，如果 F不敏感，那么根据定义，对于所有有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，都存在 $c \in \mathbb{X}$ 和一个有限的 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得 $e|_E = c|_E$ 意味着对于所有 $n \geq 0$，$F^n(e)|_D = F^n(c)|_D$。如上所述，我们可以用任意其他构型 c'替换 c，这意味着所有构型都是等度连续点，即 $\mathrm{Eq}(F) \neq \emptyset$。

□

我们可以判定等度连续性和敏感性。

定理 8. 对于给定的群元胞自动机 $G\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$，作用于给定的$d$维群移位 $\mathbb{X}$，可以判定 F 是否等度连续或对初始条件敏感。

证明。 根据引理 12 中的二分性，只需判定等度连续性。下面证明 F 等度连续当且仅当它是最终周期的，由此即可根据定理 7 得出可判定性。

如果 F 是最终周期的，那么它显然是等度连续的，因为不同的函数 F^k、 $k \geq 0$ 只有有限多个，而且这些函数都是连续的。反过来，如果 F 等度连续，那么不难看出 $\mathrm{Tr}^{\{0\}}(F)$ 中的不同迹只有有限多个。事实上，在构型 c 处的等度连续性意味着存在一个有限集 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得 $e|_E = c|_E$ 蕴含对于所有 $n \geq 0$，都有 $F^n(e)_{\mathbf{0}} = F^n(c)_{\mathbf{0}}$。如引理 12 的证明所示，同一个集合 E 对所有构型 c 都适用。但此时， $|\mathcal{L}_E(\mathbb{X})|$ 是 $\mathrm{Tr}^{\{0\}}(F)$ 中不同迹数量的一个上界，因为 $c|_E$ 唯一确定了 c 的正迹（并且根据迹子移位的平移不变性，任意 k 个不同的迹都可以平移，从而得到 k 个不同的正迹。）

若 $\mathrm{Tr}^{\{0\}}(F)$ 有限，则所有迹都是周期的，且具有一个共同周期，因此 t
元胞自动机 F 在其极限集上是周期的。因此， F 是最终周期的。 □

混合性质

若存在从每个非空开集到每个非空开集的轨道，则称元胞自动机 $F : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ 是传递 的；也就是说，对于任意有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 和所有 p， $q \in \mathcal{L}_D(\mathbb{X})$，都存在 $c \in \mathbb{X}$ 和 $n \geq 0$，使得 $c|_D = p$ 且 $G^n(c)|_D = q$。若对每个充分大的 n都存在这样的 c，则称其是混合 的；也就是说，对于所有如上所述的 D， p 和 q，都存在 m，使得对每个 $n \geq m$，都存在 $c \in \mathbb{X}$，令 $c|_D = p$ 且 $G^n(c)|_D = q$。

对于这些性质，我们只能针对否定情形得到半算法。可判定性仍未解决。

定理 9。 对于给定的群元胞自动机 $G\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$，在给定的 d 维群移位 $\mathbb{X}$ 上，判定 F 是否非传递或非混合是半可判定的。

证明。 一个非确定性半算法猜测一个有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，构造迹子移位 $\mathrm{Tr}_D(F)$，并验证该迹子移位不是传递的（分别为不是混合的）。显然，当且仅当存在这样的 D 选择时， F 才不是传递的（分别为不是混合的）。对于一维有限型子移位，例如 $\mathrm{Tr}_D(F)$，判定传递性和混合性质 [9]很容易。 □

问题 2。 给定的群元胞自动机是否具有传递性（或混合性）是可判定的吗？ *?*

5 结论

我们已经证明，多维有限型移位和元胞自动机的“不可判定性沼泽” [21] 在群的情形下大多并不存在。对于一般的元胞自动机，在一维满移位上，幂零性 [19, 20], 以及最终周期性、等度连续性和敏感性 [22] 都是不可判定的；即使仅考虑满移位上的可逆一维元胞自动机，周期性 [23], 以及敏感性、混合性和传递性 [24] 仍然不可判定；而在满移位上的二维元胞自动机，其单射性和满射性也不可判定 [15]。线性和加性元胞自动机的算法与刻画早已为人所知（在满移位上，有时取决于维数 [1, 2]）。我们的结果将这些结论推广到了非交换群以及定义在高维子移位上的元胞自动机这一更一般的情形。不过需要指出的是，文献中已有的刻画通常会给出易于检验的条件，用于根据元胞自动机的局部规则判断其是否具有所研究的性质；而从我们的证明中提取出的算法并不实用，其作用仅在于证明可判定性。

目前仍未解决：判断给定的群元胞自动机是否预单射、传递或混合，是否可判定。

参考文献

[1] Alberto Dennunzio、Enrico Formenti、Darij Grinberg 和 Luciano Margara。有限阿贝尔群上的加性元胞自动机的动力学行为。《理论计算机科学》，843：45–56，2020年。[2] A. Dennunzio、E. Formenti、L. Manzoni、L. Margara 和 A. E. Porreca。关于线性高阶元胞自动机的动力学行为及其可判定性。《信息科学》，486：73–87，2019年。[3] B. Kitchens 和 K. Schmidt。紧群的自同构。《遍历理论与动力系统》，9(4)：691–735，1989年。[4]K. Schmidt。代数起源的动力系统。《数学进展》。Birkh¨auser Verlag，1995年。[5] Pierre B´eaur 和 Jarkko Kari。群移位与群元胞自动机中的可判定性。载于 Javier Esparza 和 Daniel Kr´al' 编，2020年8月24日至28日在捷克共和国布拉格举行的第45届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS 2020），LIPIcs 第170卷，页码 12:1–12:13。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020年。[6] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert。《元胞自动机与群》。Springer 数学专著。Springer Berlin Heidelberg，2010年。[7] G. A. Hedlund。移位动力系统的端同态与自同构。《数学系统理论》，3(4)：320–375，1969年。[8] P. K˚urka。《拓扑动力学与符号动力学》。SMF 丛书。Soci´et´e math´ematique de France，2003年。[9] D. Lind 和 B. Marcus。《符号动力学与编码导论》。剑桥，1995年。[10] B. Kitchens 和 K. Schmidt。周期点、可判定性与马尔可夫子群。载于 J. C. Alexander 编，《动力系统》，页码 440–454，柏林、海德堡，1988年。Springer Berlin Heidelberg。[11] H. Wang。通过模式识别证明定理——II。《贝尔系统技术期刊》，40(1)：1–41，1961年。[12] M. Hochman。关于多维符号系统的动力学与递归性质。《数学新进展》，176(1)：131–167，2009年。[13] J. Kari。元胞自动机理论：综述。《理论计算机科学》，334(1- 3)：3–33，2005年。[14] J. Kari。可逆元胞自动机：从经典基础结果到近期进展。《新一代计算》，36(3)：145–172，2018年。[15] J. Kari。元胞自动机的可逆性与满射性问题。《计算机与系统科学杂志》，48(1)：149–182，1994年。[16] E. F. Moore。自我复制的机器模型。《应用数学研讨会论文集》，14：17–33，1962年。[17] J. Myhill。Moore 花园伊甸定理的逆命题。《美国数学会会刊》，14：685–686，1963年。[18] F. Fiorenzi。元胞自动机与强不可约有限型移位。《理论计算机科学》，299(1)：477–493，2003年。[19] J. Kari。一维元胞自动机的幂零性问题。《SIAM 计算杂志》，21(3)：571–586，1992年。[20] H. Lewis S. Aanderaa。线性抽样与判定问题的 ∀∃∀ 情形。《符号逻辑杂志》，39：519–548，1974年。[21] D. A. Lind。多维符号动力学。载于 S.G. Williams 编，《符号动力学及其应用》，AMS 短期课程讲义，页码 61–79。美国数学会

, 2004.

[22] B. Durand、E. Formenti 和 G. Varouchas. 关于元胞自动机等度连续性分类的不可判定性. 收录于 M. Morvan 和 E. R´emila 编，*复杂系统离散模型，DMCS'03*，法国里昂，*2003*年*6*月*16*日至*19*日，第 AB 卷，见*DMTCS*论文集，第 117–128 页。DMTCS，2003 年。[23] J. Kari 和 N. Ollinger. 可逆计算中的周期性与不朽性. 收录于 E. Ochmanski 和 J. Tyszkiewicz 编，*2008*年计算机科学数学基础，第*33*届国际研讨会，*MFCS 2008*，波兰托伦，*2008*年*8*月*25*日至*29*日，论文集，《计算机科学讲义》第 5162 卷，第 419–430 页。施普林格，2008 年。[24] V. Lukkarila. 可逆一维元胞自动机的敏感性和拓扑混合是不可判定的。《元胞自动机杂志》，5(3):241–272，2010 年。