arXiv:2301.11159v1 [math.DS] 26 Jan 2023

# 关于单位球迭代映射的注记

CHAITANYA GOPALAKRISHNA

Abstract. 令 $\mathcal{C}(S^m)$ 表示从单位球面 $S^m$ 中$\mathbb{R}^{m+1}$ 到其自身的连续映射集合，并赋予上确界范数。我们证明，迭代映射的集合 $\{f^n : f \in \mathcal{C}(S^m)$ 和 $n \geq 2\}$ 在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中不稠密。特别地，这证明了对于所有 $n \geq 2$，阶数为 $n$ 的迭代算子的周期点在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中不稠密，从而为以下结果提供了另一种证明：这些算子在 $\mathcal{C}(S^m)$ 上不是 Devaney 混沌。该结果证明见 [M. Veerapazham、C. Gopalakrishna、W. Zhang, 《连续自映射空间上的迭代算子动力学》, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(1) (2021), 217–229]。

迭代是指重复执行同一操作，它不仅是当代工业生产中的一项关键操作，也是计算机算法中的一种典型循环程序。许多作者通过探讨动力系统（[12, 24]）、迭代根（[3, 5, 14, 28]）以及迭代方程的解（[2, 13, 23, 27]）等不同方面，研究了这一操作的诸多有趣而复杂的特性。非空集合 $X$ 上的迭代映射，只是指其上具有如下形式的自映射 $f^n$ ：对某个定义在 $X$ 上的自映射$f$ 及整数 $n \geq 2$，其中 $f^k$ 表示 $f$ 的 $k$阶迭代，递归定义为 $f^0 =$id（ $X$ 上的恒等映射），且当 $k \geq 1$时有 $f^k = f \circ f^{k-1}$。令 $\mathcal{C}(X)$表示从局部紧豪斯多夫空间 $X$ 到其自身的连续映射在紧开拓扑下构成的集合，并令 $\mathcal{W}(X) := \cup_{n=2}^{\infty}\mathcal{W}(n; X)$ 表示 $\mathcal{C}(X)$ 中的迭代映射集合，其中对所有 $n \geq 2$， $\mathcal{W}(n; X) := \{f^n : f \in \mathcal{C}(X)\}$。正如 [14, 定理 1], 所示，甚至复二次多项式也不是 $\mathbb{C}$上的迭代映射；这一事实促使我们提出一个自然而有趣的问题： $\mathcal{W}(X)$在 $\mathcal{C}(X)$中有多大? 许多研究者从拓扑和测度论的角度探讨了这一问题, 目前已知的相关结果概述如下。

定理1. (i) (Humke 和 Laczkovich [9, 10]) $\mathcal{W}(2; [0,1])$ 的补集在 $\mathcal{C}([0,1])$ 中稠密； $\mathcal{W}(2; [0,1])$ 在 $\mathcal{C}([0,1])$ 中不稠密；并且对于 $n \geq 2$， $\mathcal{W}(n; [0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1])$ 的一个解析非博雷尔子集。(ii) (Simon [15, 16, 17, 18]) $\mathcal{W}([0,1])$ 是第一纲集且维纳测度为零； $\mathcal{W}(2; [0,1])$ 在 $\mathcal{C}([0,1])$ 中无处稠密；并且 $\mathcal{W}([0,1])$ 在 $\mathcal{C}([0,1])$ 中不稠密。(iii) (Blokh [5]) $\mathcal{W}([0,1])$ 在 $\mathcal{C}([0,1])$ 中无处稠密。(iv) (Bhat 和 Gopalakrishna [3, 4]) 在以下情形中， $\mathcal{C}(X)$ 的每个非空开集都包含一个映射，它甚至不是 $X$ 上某个不连续映射的迭代：(a)$X = [0,1]^{m+1}$ 对于 $m \geq 0$; (b) $X = \mathbb{R}^{m+1}$ 对于 $m \geq 0$; 以及 (c) $X = S^1$。特别地，在这些情形中， $\mathcal{W}(X)$ 的补集在 $\mathcal{C}(X)$ 中稠密。

我们的目标是证明以下结果，据我所知，此结果此前似乎尚未有人证明。

定理 2. 对所有 $m \geq 1$， $\mathcal{W}(S^m)$ 在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中都不稠密。

证明的关键在于运用 $\mathcal{C}(S^m)$ 中众所周知的映射的度这一概念，该概念最早由布劳威尔 [6] 引入。正如 [8, p.134], 所示，每个映射 $f \in \mathcal{C}(S^m)$ 都会诱导一个同态 $f_*$ ，将 $H_m(S^m)$ 的奇异同调群 $= \mathbb{Z}$ 中的元素映入其自身，其中 $S^m$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 39B12；次要分类 37B02；55M25。

*Key words and phrases.* 迭代映射、迭代根、单位球面、奇异同调群、度、德瓦尼混沌。作者获印度国家高等数学委员会资助，项目编号：0204/3/2021/R&D-II/7389。作者非常感谢其导师 B. V. Rajarama Bhat 教授所进行的有益讨论。

其形式为 $f_*(a) = ka$，其中某个 $k \in \mathbb{Z}$。整数 $k$ 称为 $f$ 的度，记作 $\deg(f)$。直观地说，$\deg(f)$ 表示 $f$ 绕 $S^m$ 本身的次数，其正负号则表明 $f$ 是否保持定向。有趣的是，与定理1中两个既技术性强又复杂的结果的证明不同，定理 2 的证明很简单，不需要任何复杂的工具，如下所示。

定理 2 的证明。由于 $\mathcal{C}(S^m)$ 上的度映射满足 $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$，如 [8, p. 134], 所示，我们看到每个 $f \in \mathcal{W}(S^m)$ 的度都具有 $k^n$ 的形式，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $n \geq 2$。考虑一个 $f_0 \in \mathcal{C}(S^m)$，使得 $\deg(f_0) = 2$；根据 [8], 中的例2.31，这样的对象确实存在。令 $B_1(f_0)$ 为 $\mathcal{C}(S^m)$ 中以 $f_0$ 为中心的单位球。那么，对于每个 $g \in B_1(f_0)$，映射 $H_g \colon S^m \times [0,1] \to S^m$ 定义为

$$H_g(x,t) = \frac{(1-t)f_0(x) + tg(x)}{\|(1-t)f_0(x) + tg(x)\|_2}, \quad \forall (x,t) \in S^m \times [0,1]$$

这是 $f_0$ 和 $g$ 之间的一个同伦，这意味着根据 [8, p.134], 中的性质(d)，$\deg(g) = \deg(f_0)$；该性质指出，同伦映射具有相同的度。因此，由于对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $n \geq 2$，$2 \neq k^n$，我们有 $B_1(f_0) \cap \mathcal{W}(S^m) = \emptyset$。□

在定理 2 的证明中，选择度为 $= 2$ 的 $f_0$（$\deg(f_0)$）并无特殊之处。事实上，对于任何不是完全幂的整数 $l$，即使选择度为 $= l$ 的 $f_0$（$\deg(f_0)$），这一论证仍然成立。这表明，在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中存在无穷多个开球，其中每个元素都不是 $\mathcal{C}(S^m)$ 中的迭代映射。此外，尽管定理 2 的结果看起来仅凭奇异同调中的一些众所周知的结果便可轻易得到，我们仍认为值得记录，因为它与迭代开方问题（即对于给定的自映射 $F$ 和整数 $n \geq 2$，寻找满足 $f^n = F$ 的自映射 $f$ 的问题）有关。该问题源自 Babbage 的经典著作 [1]，且定理 1 中有类似结果与之相辅相成。此外，尽管目前已知的结果，尤其是关于球面的结果（参见 [11, 19, 20, 21, 22, 25, 26] 及其中的参考文献），要么局限于 $S^1$，要么基于旋转数的概念，但我们的结果讨论的是所有 $m \geq 1$ 的 $S^m$，并采用了映射的度这一不同工具。

另一方面，定理 2 在动力系统理论中也具有重要意义，原因如下：如 [7], 所示，若离散半动力系统 $(X, f)$ 中的 $X$ 是配备度量 $d$的度量空间，则称其为拓扑传递的，如果对于 $X$ 中的任意一对开集 $U, V$，都存在 $x \in U$和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $f^n(x) \in V$。若存在 $\delta > 0$，使得对于每个 $x \in X$和每个 $\epsilon > 0$，都存在 $y \in X$和 $n \in \mathbb{N}$，满足 $d(x,y) < \epsilon$且 $d\big(f^n(x)\ f^n(y)\big) > \delta$，则称 $f$对初始条件具有敏感依赖。若满足以下条件，则称 $f$ 在 Devaney 意义下是混沌的：(i) $f$ 的周期点集在 $X$中稠密；(ii) $f$ 是拓扑传递的；(iii) $f$ 对初始条件具有敏感依赖。 [24] 的作者研究了 $\mathcal{J}_n := f^n$ 的 $n \geq 1$ 阶迭代算子的动力学，并证明这些算子既不拓扑传递，也不表现出对初始条件的敏感依赖，从而确立了它们在紧致度量空间 $X$ 上并非 $\mathcal{C}(X)$ 中的 Devaney 混沌映射（参见 [24, 定理 5.1]）。然而，正如证明中所示，由于 $B_1(f_0)$ 中没有映射是迭代映射，定理 2 通过证明 $\mathcal{J}_n$ 的周期点在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中不稠密，为球面 $S^m$ 和 $n \geq 2$ 上的这一结果提供了另一种证明。

此外，尽管定理 2 中的结果针对球面 $S^m$ 给出，但我们可以预期，对于连通、闭、可定向的 $k$ 维流形，也有类似结果及其推论（涉及迭代开方问题和迭代算子的动力学）；在此背景下，连续映射的度是有定义的（见 [8, p.258] 中的练习 7）。此外，我们认为，定理 2 可以在同调理论的第一门课程中，于介绍奇异同调群之后立即讲授，作为其在迭代根理论中的典型应用之一，让研究生有机会尽早探索迭代理论，并将其视为一个潜在的研究方向。最后，我们以以下留待今后讨论的开放问题结束本文；该问题受定理 1 的结果 (iii) 启发：对于 $m \geq 1$，$\mathcal{W}(S^m)$ 在 $\mathcal{C}(S^m)$ 中是否无处稠密?

## References

1. Babbage, C.（1815）。《函数微积分随笔》， *Philos. Trans.* 389–423。2. Baron, K., Jarczyk, W.（2001）。《单变量函数方程的最新成果：展望与开放问题》， *Aequationes Math.* 61: 1–48。3. Bhat, B. V. R., Gopalakrishna, C.（2022 *Ergodic Theory Dynam.* ）。《函数的迭 *Systems* 1 27 代平方根》，，第 – 页。4. Bhat, B. V. R., Gopalakrishna, C.（2022）。《非迭代映射在连续自映射空间中稠密》， https://arxiv.org/abs/2208.04093。5. Blokh, A. M.（1992 $C$ $[0,1],[0,1]$ *Trans. Amer. Math. Soc.* ）。《所有迭代 333 2 787 798 的集合在 ( ) 中无处稠密》， ( ): –。6. Brouwer, L. E. J.（2011）。《关于流形的映射》， *Math. Ann.* 71(1): 97–115。7. Devaney, R. L.（2003）。《 *An introduction to chaotic dynamical systems*》，《非线性研究》，Westview出版社，科罗拉多州博尔德。8. Hatcher, A.（2002）。《 *Algebraic topology*》，剑桥：剑桥大学出版社。9. Humke, P. D., Laczkovich, M.（1989 *Proc.* ）。《连续 *Edinburgh Math. Soc.* 32 483 494 函数迭代的博雷尔结构》，：–。10. Humke, P. D., Laczkovich, M.（1990 *Ergodic* ）。《用平方逼 *Theory Dynam. Systems* 10 2 361 366 近连续函数》， ( ): –。11. Jarczyk, W.（2003）。《圆上的巴贝奇方程》， *Publ. Math. Debrecen* 63: 389–400。12 992, 13 1975 10 985 1990 32 . Li, T. Y., Yorke, J. A.（）。《周期三意味着混沌》， *Amer. Math. Monthly* 82( ): –。Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.（）。《 *Iterative functional equations*》，《数学及其应用百科全书》卷册，剑桥：剑桥大学出版社。14. Rice, R. E., Schweizer, B., Sklar, A.（1980 $f\ f\ z\ = az^2+bz+c$ *Amer. Math. Monthly* ）。当 ( ( )) ?, 87 4 252 263 ( ): –。15. Simon, K.（1989 *Proc. Amer.* ）。《关于维纳 *Math. Soc.* 106 2 455 463 测度和贝尔纲的若干对偶命题》， ( ): –。16. Simon, K.（1990）。《典型函数不是迭代》， *Acta Math. Hungar.* 55: 133–134。17. Simon, K.（1991）。《二次迭代集合在 $C$ 中无处稠密》， *Proc. Amer. Math. Soc.* 111: 1141–1150。18. Simon, K.（1991）。《迭代在 $C$ 中不稠密》， *Math. Pannon.* 2: 71–76。19. Solarz, P.（2002）。《具有无理旋转数的圆周同胚的迭代根》， *Math. Pannon.* 13: 137-145。20. Solarz, P.（2003）。《圆上的若干迭代根》， *Publ. Math. Debrecen* 63: 677–692。21. Solarz, P.（2006 *Aequationes* ）。《具有有理 *Math.* 72 152 171 旋转数的某些同胚的迭代根》，：–。22. Solarz, P.（2012）。《具有周期点的同胚存在迭代根的一般定理》， *J. Math. Anal. Appl.* 394: 391–399。23. Targonski, G.（1981）。《 *Topics in iteration theory*》， G¨ottingen: Vandenhoeck and Ruprecht出版社。24. Veerapazham, M., Gopalakrishna, C., Zhang, W.（2021）。《连续自映射空间上的迭代算子动力学》， *Proc. Amer. Math. Soc.* 149(1): 217–229。25. Zdun, M. C.（2000 *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* ）。《圆周同胚 48 203 213 的迭代根》，：–。26. Zdun M. C.（2008 *J.* ）。《具有周期 *Math. Anal. Appl.* 342 340 348 点的圆周同胚的分解》，：–。27. Zdun, M. C., Solarz, P.（2014）。《迭代理论最新成果：实数情形下的迭代群与半群》， *Aequationes Math.* 87: 201–245。28. Zhang, W.（1997 *Ann. Polon. Math.* ）。《PM函数、 65 2 119 128 其特征区间及迭代根》， ( ): –。

Indian Statistical Institute, Stat-Math. Unit, R V College Post, Bengaluru 560059, India
*Email address*: cberbalaje@gmail.com, chaitanya_vs@isibang.ac.in