arXiv:2301.11187v2 [stat.ML] 19 Mar 2024

用于分段仿射系统预测的平滑在线学习

Adam Block * MaxSimchowitz† Russ Tedrake‡麻省理工学院
麻省理工学院 麻省理工学院

摘要

分段仿射（PWA）回归与规划问题对于在线学习、控制和机器人学的研究具有基础性重要意义；它为研究动力学发生剧烈变化的系统提供了一个在理论和实证上均可处理的设置。遗憾的是，由于跨入不同“分段”时会产生不连续性，在一般序贯设置中进行学习是不可能的，实用算法不得不诉诸启发式方法。本文基于近期提出的平滑在线学习框架，在弱光滑性假设下，首次为分段仿射系统中的预测和仿真提供了遗憾关于所有相关问题参数均为多项式的算法；此外，我们的算法在调用优化预言机的次数方面是高效的。我们还将结果应用于分段仿射动力系统中的单步预测和多步仿真遗憾问题，其中学习者的任务是模拟轨迹，且遗憾以模拟数据与真实数据之间的 Wasserstein 距离来衡量。在此过程中，我们还开发了若干具有更广泛意义的技术工具。

目录

1 引言 **3**

2 设定 **5**

3 算法与保证**7**3.1 分段仿射系统单步预测的遗憾.**8**3.2 模拟遗憾的保证.9

4 分析**9**
4.1 参数恢复.**10**4.2 模式预测.11

5 讨论 **12**

I 通用工具
16A 记号 **16**B 下界 **16**B.1 命题 1 的证明 .**16**B.2 识别下界 .17

*ablock@mit.edu
†msimchow@csail.mit.edu
‡russt@mit.edu

C 平滑性性质 **18**C.1 高斯分布和均匀分布的方向光滑性 .18C.2 方向光滑性等价于勒贝格密度 .19C.3 拼接保持方向光滑性 .19C.4 参数的光滑性诱导分离 .20

II 补充证明 **21**

D 参数恢复 **21**
D.1 分歧覆盖 .22D.2 协方差下界 .24D.3 小球不等式 .27D.4 经验误差上界 .30D.5 定理12的证明 .36

E 修改分类器与模式预测 **38**
E.1 前瞻分类误差 .40E.2 界定排列分歧与 项$_1$ .43

F 证明定理 3 **44**

G 分段仿射动力系统的应用 **47**
G.1 引理 3.1 的证明 .47G.2 形式化模拟遗憾设定 .47G.3 算法修改 .47G.4 模拟遗憾的形式化保证 .48G.5 扩展.51

1 引言

在线学习、控制和机器人学领域的一个核心问题是如何在分段仿射（PWA）系统中高效地进行规划。这类系统由状态空间中的有限个互不相交的区域描述，在每个区域内，动力学都是仿射的。本文研究一个相关问题：当动力学未知时，如何学习在分段仿射系统中进行预测。近年来，我们对线性控制系统的理解取得了长足进展，但实际场景中遇到的绝大多数动力学都涉及非线性。在非线性系统中进行学习和预测通常要困难得多，因为与线性系统不同，非线性系统局部区域内的动力学并不能决定其全局动力学。

分段仿射系统允许不同区域（“片段”）之间存在不连续性，因此能够以一种简化的方式，对众多机器人操作和运动任务中出现的复杂现象进行建模 [Mason, 2001, Van Der Schaft and Schumacher, 2007, Marcucci and Tedrake, 2019], 例如涉及接触的动力学建模。此外，具有 ReLU 激活函数的深度神经网络 [Goodfellow et al., 2016] 属于分段仿射系统，这进一步推动了对其进行研究。仅仅是在这些系统上优化目标，就已经存在计算上的挑战，而这正是先前大量研究所关注的主题。在此，我们采取统计学视角，假设可以获得用于执行这一优化任务的有效启发式算法，这在在线学习中十分常见[Hazan and Koren, 2016, Block et al., 2022, Haghtalab et al., 2022]。由于定位某些空间区域需要进行艰苦的探索，因此通常不可能在所有片段上都准确地学习动力学；因此，我们转而考虑一种迭代预测设定，在每个时间 t，学习者预测后续的系统状态。基于此，我们进一步将其扩展到整个轨迹的预测：在回合 $t = 1.....T$ 中，学习者提出一个策略 π_t，并尝试学习动力学，从而最小化沿该轨迹的预测误差 π_τ induces。这一设定受到迭代学习控制的启发，其中，我们所定义的误差是规划器对策略性能的估计值与真实值之间差异的一个上界。

我们对学习问题的迭代式表述，等价于在线学习领域所青睐的遗憾度量；近期研究已将其应用于在线/自适应控制和滤波问题。关键在于，遗憾无需对系统参数进行一致辨识，而这通常是不可能的。其核心病态之处在于，策略可能在两个区域的边界两侧来回振荡，由于这两个区域之间的动力学存在尖锐的不连续性，从而累积显著的预测误差；这一问题在在线学习领域早已为人熟知[Littlestone, 1988]。此外，这种病态并非仅仅是理论上的假象：不连续性和非光滑性给富接触动力学的规划与建模带来了重大挑战，例如机器人操作中遇到的此类动力学 [Suh 等人, 2022a, b, Posa 等人, 2014]。

我们的解决方案从两个颇为不同的领域汲取灵感，并建立了它们之间的联系。机器人学和控制领域近期的研究借助随机平滑，改善了在具有不连续性和非光滑动力学下的规划 [Suh 等人, 2022a,b, Lidec 等人, 2022, Pang 等人, 2022]。此外，在线学习领域研究了平滑在线学习 [Rakhlin 等人, 2011, Haghtalab 等人, 2021, 2022, Block 等人, 2022, Block 和 Simchowitz, 2022, Block 和 Polyanskiy, 2023], , 以规避上述阈值效应病态。

我们证明，如果动力学和控制输入经过随机平滑，就可以实现低遗憾。我们指出，随机平滑方法在某种意义上是应对前述病态现象的典型做法：策略在两个区域的边界间振荡；平滑通过确保系统通常远离这些边界来避免这种病态现象。更重要的是，我们提出的无遗憾算法在优化预言机调用次数方面十分高效，这也是在线学习领域中一种广受欢迎的计算效率衡量方式 [Hazan 和 Koren, 2016, Kalai 和 Vempala, 2005, Block 等人, 2022, Haghtalab 等人,2022]。在我们的设定中，所需的优化预言机用于从一批给定数据中找出拟合效果最佳的分段仿射系统。尽管这一问题难解 [Amaldi 和 Mattavelli, 2002], 但已有大量文献提出了广受欢迎的启发式方法 [Garulli 等人, 2012, Paoletti 等人, 2007, Ferrari-Trecate 等人, 2003]。与这些工作不同，我们研究的是：在具备此类预言机的情况下，如何应对泛化到新数据这一统计挑战。我们指出，在许多实际情形中，我们的光滑性假设无需额外付出即可满足，因为 Suh 等人 [2022a] 用于平滑梯度的高斯噪声已足以保证我们的结果成立。

我们强调，我们研究的是分段仿射系统的在线学习，以适应控制智能体与动力系统交互并更新自身行为时产生的分布偏移。在PAC学习设定下，可以通过界定分段仿射函数的伪维数来推导分布内泛化界 [Balcan 等人, 2021]。此外，我们的函数类不满足“离散条件” [Balcan 等人, 2018], 而该条件反而会使函数类无需平滑即可在线可学习；更进一步，这仍然是一个悬而未决的

如何基于 dispersio 开发预言机高效在线学习算法的问题 n.

贡献。我们对所研究设定的形式化描述推迟至第2节。非正式地说，我们考虑在时域 T 步上的分段仿射系统预测问题，其中区域由半空间的交集决定；我们将分段仿射动力系统中的预测作为一个特例。我们的目标是实现关于 T 超额平方损失误差（遗憾）的次线性增长，其中 $O\left(T^{1-\alpha}\right)$ 相对于知晓系统动力学的最优预测器，而 $\alpha > 0$为常数，且遗憾的前因子至多关于所有问题参数呈多项式增长。我们的结果源自在线分段仿射回归的一般性保证，该保证涵盖在线分段仿射系统辨识设定。我们证明，当动力学和控制输入受到满足 σ_{dir}-方向光滑性条件的随机平滑处理时，该条件由Block 和 Simchowitz [2022], 提出，我们的遗憾界关于 σ_{dir}、维度及其他自然问题参数呈多项式增长。尽管关于时域的精确依赖关系可能远非最优，但我们强调，在分段仿射系统这一困难设定下，我们的算法首次实现了关于所有参数均至多呈多项式增长的遗憾。此外，按照 Hazan 和 Koren [2016] 的意义，我们的工作首次为非连续函数类中的预言机高效平滑在线学习提供了关于维度呈多项式依赖的遗憾界，且不作可实现性假设并允许存在过程噪声。

作为进一步的应用，我们调整算法，在每个时刻 t 预测动力系统演化过程中接下来 H 步的轨迹。我们给出模拟遗憾的界，即所提出轨迹的分布与实际轨迹的分布之间 Wasserstein 距离的累积误差。假设满足 Lyapunov 条件，我们证明修改后的算法可实现模拟遗憾 $O\left(\text{poly}(H) \cdot T^{1-\alpha}\right)$，从而能够高效仿真。

关键挑战。如上所述，由于不同区域之间的回归变量存在不连续性，在我们的设定中，若没有方向光滑性，就不可能实现遗憾趋于零。关键挑战在于利用光滑性来减轻这些不连续性的影响。请注意，如果学习者除了状态之外还能观察到所在区域，那么只需将问题分解为 K 若干独立的仿射回归实例即可轻松完成回归；难点在于不明确标记哪些点属于哪些区域的情况下，模仿这种方法。我们指出，如果我们只关心低遗憾而不考虑效率，那么采用维度相关的指数规模的简单离散化方案，并结合标准的专家学习算法[Cesa-Bianchi 和 Lugosi, 2006] 便可实现低遗憾；而实现预言机高效算法则要困难得多。

我们采用一种自然的基于轮次的方法：在轮次之间调用优化预言机，估计底层系统，并在后续轮次中使用该估计值将数据点分配到各个区域。这带来了三个新的挑战，每个挑战都需要付出大量技术工作才能克服。首先，我们需要控制预言机在回归任务上的表现，以下将其称为参数恢复。其次，我们必须确保不同轮次中学到的区域彼此一致，以便能够预测后续协变量所属的正确区域；为此，需要细致分析估计参数在轮次之间如何变化。最后，我们需要调整预言机的输出，以确保对于在尚未见过的数据上正确预测当前所处模式这一分类问题，能够实现较低的遗憾。

我们的方法。我们的算法按轮次进行，并在每轮结束时调用经验风险最小化（ERM）预言机，根据可用数据计算最佳拟合的分段仿射近似。对这一最佳拟合结果的分析表明，我们能够恢复该轮次中经常访问的相关区域（“片段”）的参数和决策边界。根据鸽巢原理，这最终覆盖了在整个时域内被访问次数达到不可忽略程度的所有区域 $t \quad T$。在此，我们利用基于两种现代鞅最小二乘技术的细致分析：自归一化集中界 [Abbasi-Yadkori 等人, 2011] 用于证明在由区域内经验协方差矩阵所诱导的范数下实现恢复；以及分块鞅小球方法 [Simchowitz 等人, 2018] 以高概率为经验协方差矩阵的最小特征值建立下界。此外，我们还引入并界定了一个新的复杂度参数——分歧覆盖，以便使我们的陈述对可能的决策边界集合一致成立。

在估计阶段之后，每一轮次都会利用该估计值，对新到达的数据进行预测。关键挑战在于判定每个新观测数据点所属的区域。在没有光滑性的情况下，这一过程尤其棘手，因为位于区域边界上或边界附近的点很容易被错误分类，而正确的预测是不连续的。为了利用光滑性，我们提出将问题归约为采用惰性更新、针对合页损失的在线凸优化，并通过对损失进行细致分解，证明我们的分类误差可以

根据所假设的方向光滑性加以控制。将这一分类误差界与前一段所述的参数恢复相结合，即可得到我们的次线性遗憾保证。

我们将单步预测视为更一般的在线线性回归问题的一个特例，表明上述方法可直接应用于所考虑的第一个问题。最后，为了模拟轨迹，我们使用该轮次中学习到的参数来预测系统演化的下 H 步。随后，我们利用主要算法能够恢复定义分段仿射系统的参数这一事实，证明模拟遗憾有界，从而解决第二个主要问题，并实现对此类系统的模拟。

2 设定

本节将正式描述在线PWA回归的问题设定。假设存在真实分类器 $g_\star:\ \mathbb{R}^d \to [K]$，以及矩阵 $\left\{\mathbf{\Theta}_i^\star \mid i \in [K] \text{ 和 } \mathbf{\Theta}_i^\star \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}\right\}$，使得

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Theta}_{i_t}^\star \cdot \bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \quad i_t = g^\star(\bar{\mathbf{x}}_t), \quad \bar{\mathbf{x}}_t = [\mathbf{x}_t^\top|1]^\top, \quad ||\boldsymbol{\delta}_t|| \le \varepsilon_{\text{crp}}, \tag{2.1}$$

其中，$\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$ 为协变量，$\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^m$ 为响应变量，$\mathbf{e}_t \in \mathbb{R}^m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的零均值噪声向量，$\boldsymbol{\delta}_t$ 为范数至多为 $\varepsilon_{\text{crp}} \ll 1$ 的（小幅）非随机扰动，而 $i_t \in [K]$ 为回归模式，它们取决于协变量 $\mathbf{x}_t$。将模型扩展到 $\bar{\mathbf{x}}_t$ 后，可容纳仿射回归器。假设学习者可以获取数据对 $(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$，但关键在于，它并不知道回归模式 i_t。不过，我们确实假设 $g_\star$ 是一个仿射分类器；也就是说

$$g^\star \in \mathcal{G} = \left\{\mathbf{x} \mapsto \underset{1\le i\le K}{\arg\max} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x}\rangle + b_i | \mathbf{w}_i \in S^{d-1}, b_i \in [-C, C]\right\}, \tag{2.2}$$

其中 S^{d-1} 是单位球面。可以证明，许多自然的物理系统确实可以建模为具有仿射边界的分段仿射系统[Marcucciand Tedrake，2019]，在这些情况下，模型预测控制（MPC）的闭环动力学也属于分段仿射系统[Borrelliet al.，2017]。我们将始终假设可以访问一个经验风险最小化预言机 ERMORACLE，它满足以下保证：

假设 1（ERMORACLE 保证）。给定数据 $(\bar{\mathbf{x}}_{1:s}, \mathbf{y}_{1:s})$，ERMORACLE 返回 $\left\{\widehat{\mathbf{\Theta}}_i | i \in [K]\right\}, \hat{g}$，满足

$$\sum_{t=1}^{s} \left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\hat{g}(\mathbf{x}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 - \inf_{g\in\mathcal{G},\,\{\mathbf{\Theta}_i|i\in[K]\}} \sum_{t=1}^{s} \left|\left|\mathbf{\Theta}_{g(\mathbf{x}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 \le \varepsilon_{\text{orac}}. \tag{2.3}$$

尽管在最坏情况下，这种预言机在计算上并不高效[Amaldiand Mattavelli，2002]，但在实际应用中，人们常用许多启发式方法[Ferrari-Trecate et al.，2003，Garulli et al.，2012]。学习者旨在构造一种相对于上述预言机而言高效的算法，使其在每个时间步 t 生成 $\hat{\mathbf{y}}_t$，使得

$$\text{Reg}_T := \sum_{t=1}^{T} \left\|\hat{\mathbf{y}}_t - \mathbf{\Theta}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}^\star \bar{\mathbf{x}}_t\right\|^2 = o(T). \tag{2.4}$$

这种遗憾概念在在线学习领域中是标准概念，而且正如我们将看到的，它会立即导出对预测误差的界。

方向光滑性。如前所述，在没有进一步限制的情况下，次线性遗憾是不可行的，以下命题对此进行了形式化表述：

命题 1。在上述设置中，存在一个具有 $m = d = 1$、K=*2* 的对手，它选择 $\mathbf{\Theta}^\star$ 和 $g_\star$，以及 $\mathbf{x}_1$、...、$\mathbf{x}_T$，使得任何学习者都会经历

$$\mathbb{E}\left[\text{Reg}_T\right] \ge \frac{T}{2}.$$

命题1 源于一个系统的构造：该系统在一条线性边界两侧存在不连续性，而状态$\mathbf{x}_t$ 会在其两侧振荡。因此，这一界是经典事实的推论：采用线性阈值的在线分类会遭受线性遗憾；形式化证明见附录B.1，为求完整，特此附上。

关键在于，每当决策边界被错误确定时，动力学中的不连续性就会导致遗憾增加$\Omega(1)$。为避免这种病态情况，我们假设上下文是光滑的；然而，由于标准光滑性[Haghtalab 等人， 2020] 会导致遗憾随维度呈指数级增长 [Block 和 Simchowitz， 2022], 因此我们转而考虑一种相关条件——“方向光滑性”。[1]

定义 2 (Block 和 Simchowitz [2022]中的定义 52)。 给定一个标量 $\sigma_{\mathrm{dir}}>0$，若随机向量 $\mathbf{x}$ 满足σ_{dir}-方向光滑性，即对所有 $\mathbf{w}\in S^{d-1}:=\{w\in\mathbb{R}^d:\ \|w\|=1\}$，$c\in\mathbb{R}$，且 $\delta>0$，均有

$$\mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w},\mathbf{x}\rangle - c|\le\delta\right)\le\frac{\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}}. \tag{2.5}$$

例如，对于任意向量 $\mathbf{z}_t$，若 $\mathbf{w}_t\sim\mathcal{N}(0,\sigma_{\mathrm{dir}}^2\mathbf{I})$，则 $\mathbf{z}_t+\mathbf{w}_t$ 具有 $\frac{\sigma_{\mathrm{dir}}}{\sqrt{2\pi}}$-方向光滑性；证明以及其他噪声分布下方向光滑性的示例见附录 C.1。关键在于，方向光滑性与维度无关，这与标准光滑性形成对比；在前述示例中，我们只能得到（标准意义下的）$\Theta\left(\sigma_{\mathrm{dir}}^d\right)$-光滑性。我们指出，方向光滑性是一个较弱的条件，在许多自然场景中都成立。事实上，只要噪声注入到动力学中，就自然具备方向光滑性。这种噪声注入可能源于位置不确定性，这在机器人应用中很常见；此时，我们可以将这种不确定性本身视为随机的，这正是算法平滑分析最初的动机 [Spielmanand Teng， 2004]。此外，尽管方向光滑性确保系统在边界附近停留的时间很短，但由于时间的离散性，对模式切换的次数并无限制；一般而言，其次数可以是 $\Theta(T)$。

我们将关于该假设的进一步讨论留待附录 C.1。我们要求光滑性条件在条件意义下成立：

假设 2. 令 $\mathscr{F}_t$ 表示由 $\mathbf{x}_1$、…、$\mathbf{x}_t$ 生成的滤过。对于所有时刻 t，给定 $\mathscr{F}_{t-1}$ 时，$\mathbf{x}_t$ 是σ_{dir}方向光滑的。

进一步的假设。接下来，我们对序贯回归作出两个标准假设：一个用于控制噪声尾部，另一个用于控制参数的大小。

假设 3. 令 $\mathscr{F}_t^y$ 表示由 $\mathscr{F}_t$ 和 $\mathbf{e}_1$、…、$\mathbf{e}_{t-1}$ 生成的滤过（等价地，由 $\mathscr{F}_t$ 和 $\mathbf{y}_t$、…、$\mathbf{y}_{t-1}$ 生成）。对于所有 t，给定 $\mathscr{F}_t^y$ 时，$\mathbf{e}_t$ 是 ν^2 次高斯；特别地，$\mathbf{e}_t$ 的条件均值为零。

假设 4. 我们假设对于所有 $1\le t\le T$，$||^{\top}\mathbf{x}_t||\le B$，并且此外，对于所有 i，$\|\mathbf{\Theta}_i^\star\|_{\mathrm{F}}\le R$。我们还将进一步假设，E经验风险最小化ORACLE 始终返回满足 $\|\mathbf{\Theta}_i\|_{\mathrm{F}}\le R$ 的 $\mathbf{\Theta}_i$。

最后，我们假设真实的仿射参数彼此充分分离：

假设 5. 存在某个 $\Delta_{\mathrm{sep}}>0$，使得对所有 $1\le i<j\le K$，均有

$$\|\mathbf{\Theta}_i^\star-\mathbf{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}\ge\Delta_{\mathrm{sep}}. \tag{2.6}$$

我们指出，假设 5 在某种意义上是一般性的。事实上，在最初的算法平滑分析[Spielmanand Teng中， 2004]，假设参数矩阵受到高斯噪声的扰动；如果除了上下文 $\mathbf{x}_t$ 的光滑性之外，我们还假设 $\mathbf{\Theta}_i^\star$服从方向平滑分布，那么命题 11 表明，以至少 $1-T^{-1}$的概率，有 $\Delta_{\mathrm{sep}}\gtrsim md\left(\frac{\sigma_{\mathrm{dir}}}{K^2T}\right)^{\frac{1}{md}}$成立。 此外，在我们的框架中，难以移除间隔假设的一个原因在于，从计算角度而言，未知地学习半空间是困难的 [Guruswamiand Raghavendra， 2009]。在没有假设 5 的情况下，ERMORACLE 无法可靠地区分模式，因此主算法（算法1）用于稳定预测的后处理步骤也必须未知地学习模式；结合先前关于学习半空间难度的观察，这表明，如果 ERMORACLE 无法区分模式，那么要实现预言机高效的无遗憾算法将面临重大的技术困难。关于单步预测和模拟遗憾的形式化定义，我们将其推迟到第 3.1 节和 3.2 节。

算法 1 主算法

Initialize Epoch length E, Classifiers $\mathbf{w}_{1:K}^0 = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$, margin parameter $\gamma > 0$, learning rate $\eta > 0$
for $\tau = 1, 2, \ldots, T/E$ **do** (% iterate over epochs)
  $\left\{(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i})_{1\le i\le K}, \widehat{g}_\tau\right\} \leftarrow \textsc{ErmOracle}((\bar{\mathbf{x}}_{1:\tau E}, \mathbf{y}_{1:\tau E}))$
  $\widehat{g}_\tau \leftarrow \text{Reorder}\left(\widehat{g}_\tau, \left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i}\right)_{1\le i\le K}, \left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau-1,i}\right)_{1\le i\le K}\right)$
  $\mathbf{w}_{1:K}^{\tau E} \leftarrow \textsc{Ogd}(\mathbf{w}_{1:K}^{(\tau-1)E}, \bar{\mathbf{x}}_{(\tau-1)E:\tau E}; \widehat{g}_\tau, \gamma, \eta)$
  Let $\tilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}) = \arg\max_{1\le i\le K} \langle \mathbf{w}_i^{\tau E}, \bar{\mathbf{x}}\rangle$ denote classifier induced by $\mathbf{w}_{1:K}^{\tau E}$.
  for $t = \tau E, \ldots, (\tau+1)E - 1$ **do**
    Receive $\bar{\mathbf{x}}_t$, and **predict** $\hat{\mathbf{y}}_t = \widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\tilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)} \cdot \bar{\mathbf{x}}_t$
    Receive $\mathbf{y}_t$

3 算法与保证

我们提出算法 1，这是一种预言机高效协议，具有可证明的次线性遗憾，并且对所有问题参数呈多项式依赖。算法 1 按轮次运行：在第 τ轮次开始时，学习者调用 ERMORACLE^处理历史数据，以生成一个线性分类器 $\widehat{g}_\tau$ 以及每种模式下回归矩阵的估计值，$\mathbf{\Theta}_{\tau,\ i}$。一个重大挑战是在不同轮次之间识别相同的仿射区域。为此，学习者对 $\widehat{g}_\tau$ 的标签进行置换，以保持不同轮次间标签的一致性，相关非正式说明见第 4.2 节，详细说明见附录 E。

随后，学习者在合页损失上运行在线梯度下降（算法 2），以生成一个经修改的分类器 $\widetilde{g}_\tau$；^最后，在整个轮次期间，学习者使用 $\mathbf{\Theta}_{\tau,\ i}$ 和 $\widetilde{g}_\tau$ 来预测 ^$\mathbf{y}_t$，然后在下一轮次重复这一过程。使用辅助算法将 $\widehat{g}_\tau$ 转换为 $\widetilde{g}_\tau$ 的原因是确保预测器在各轮次之间具有稳定性，这是界定遗憾所必需的。同样，我们假设假设 1 始终成立。

我们有如下结果：

定理 3 （遗憾界）。设我们处于在线PWA回归 （2.1） 的设定下，并且假设 2-5 成立。那么，如果参数 E、γ、η按照 （F.6）进行设置，则以至少 $1-\delta$的概率，

$$\mathrm{Reg}_T \le \text{poly}\left(d, \frac{1}{\sigma_{\text{dir}}}, m, B, R, K, \nu, \frac{1}{\Delta_{\text{sep}}}, \log(1/\delta)\right) \cdot T^{1-\Omega(1)} + \varepsilon_{\text{orac}} \cdot T + K^2 \cdot \sum_{t=1}^{T} ||\boldsymbol{\delta}_t||, \tag{3.1}$$

其中，多项式依赖关系见 （F.7）。

备注 1. 虽然定理 3 要求我们为算法正确设置参数，但聚合算法允许我们以在线方式调节这些参数（例如，参见 Hazan 和 Seshadhri [2009]）。

备注 2. 模型设定错误 $\boldsymbol{\delta}_t$ 可以是指示变量，对应于 ¯$\mathbf{x}_t$ 处于很小且很少访问的区域；因此，我们可以运行一个规格不足的 E经验风险最小化O预言机，使用 $K' \ll K$ 个模式，并得到一个仅取决于频繁访问模式的遗憾界。

当 $\varepsilon_{\text{crp}} = \varepsilon_{\text{orac}} = 0$时，我们恰好得到引言中所承诺的多项式无遗憾率。在证明遗憾界的过程中，我们证明 ERMORACLE 能够在频繁访问的模式中正确恢复线性参数。

定理 4（参数恢复）。假设2-4 成立，并令 $\left\{\widehat{\mathbf{\Theta}}_i | i \in [K]\right\}, \widehat{g}$表示 ERMORACLE(¯$\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}$) 的输出，$I_{ij}(\widehat{g})$表示满足 $\widehat{g}$(¯$\mathbf{x}_t$) $= i$和 $g_\star$(¯$\mathbf{x}_t$) $= j$的时刻集合 t。那么，以至少 $1-\delta$的概率，对于所有满足以下条件的 $1 \le i, j \le K$，

$$|I_{ij}(\widehat{g})| \ge \text{poly}\left(K, B, \frac{1}{\sigma_{\text{dir}}}, \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \cdot T^{1-\Omega(1)},$$

[1]关于方向光滑性与标准光滑性的比较，请参阅 Block 和 Simchowitz [2022]。

有

$$\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i - \mathbf{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}^2 \le \frac{\sqrt{T}}{|I_{ij}(\widehat{g})|} \cdot \mathrm{poly}\left(K, B, \frac{1}{\sigma_{\mathrm{dir}}}, R, d, m, \nu, \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

上文给出了在假设 $\varepsilon_{\mathrm{crp}} = \varepsilon_{\mathrm{orac}} = 0$ 下的结果，以便于呈现；正式表述中则给出了更一般的情形。定理 4 表明，方向光滑性足以保证以参数速率实现参数恢复，这与大多数对抗式学习机制形成了鲜明对比。注意，由于分离，该恢复结果还意味着模式可恢复至一个排列。下面将在第 4 节详细介绍算法及其分析；在此之前，我们先讨论两个主要应用。

3.1 分段仿射系统中的单步预测遗憾

我们的主要结果的一个直接应用是分段仿射系统中的在线预测。考虑如下状态为 $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^{d_z}$、输入为 $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{d_u}$ 的动力系统：

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A}_{i_t}^\star \mathbf{z}_t + \mathbf{B}_{i_t}^\star \mathbf{u}_t + \mathbf{m}_{i_t}^\star + \mathbf{e}_t, \quad i_t = g^\star(\mathbf{z}_t, \mathbf{u}_t). \tag{3.2}$$

代入 $\mathbf{\Theta}_i^\star := [\mathbf{A}_i \mid \mathbf{B}_i \mid \mathbf{m}_i]$，并定义拼接向量$\mathbf{x}_t = [\mathbf{z}_t \mid \mathbf{u}_t]$ 以及 $\bar{\mathbf{x}}_t = [\mathbf{x}_t \mid 1]$。附录G.1中证明的以下引理，给出了系统噪声$\mathbf{e}_t$ 和控制输入$\mathbf{u}_t$ 的结构需满足的充分条件，在这些条件下$\mathbf{x}_t$ 是方向光滑的。

引理 3.1. 令 $\mathcal{F}_t$ 表示由 $\mathrm{x}_t = [\mathrm{z}_t \mid \mathrm{u}_t]$ 生成的滤过。假设 $\mathrm{e}_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}$ 是 σ_{dir} 光滑的，并且还有 $\mathrm{u}_t = \bar{\mathrm{K}}_t \mathrm{x}_t + \bar{\mathrm{u}}_t + \bar{\mathrm{e}}_t$，其中 $\bar{\mathrm{K}}_t$ 和 $\bar{\mathrm{u}}_t$ 是 $\mathcal{F}_{t-1}$-可测的[2]，且 $\bar{\mathrm{e}}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}$、$\mathrm{e}_t$ 是 σ_{dir}-方向光滑的。那么，$\mathrm{x}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}$ 是 $\sigma_{\mathrm{dir}}/\sqrt{(1 + \|\mathrm{K}_t\|_{\mathrm{op}})^2 + 1}$-方向光滑的。

方向光滑的噪声分布（例如高斯分布）在在线控制研究中十分常见[Dean 等人，2020，Simchowitz 等人，2020]，而对输入的平滑条件，可以通过添加分数级的小噪声来满足，这在许多强化学习领域都很常见，例如在策略学习中计算梯度时[Sutton 等人，1999] 或用于模型预测路径积分（MPPI）控制 [Williams 等人，2015]。

在下文中，我们沿用以下记号，以简洁地表示参数：令 $\mathbf{\Theta}_i^\star = [\mathrm{A}_i^\star \mid \mathrm{B}_i^\star \mid \mathrm{m}_i^\star]$，$\hat{\ }$ 为时刻 t 的估计值，即 $\mathbf{\Theta}_{t,\,i} = [\mathrm{A}_{t,\,i} \mid \mathrm{B}_{t,\,i} \mid \hat{\mathrm{m}}_{t,\,i}]$；协变量为 $\mathrm{x}_t = (\mathrm{z}_t, \mathrm{u}_t)$。令 $\mathscr{F}_t$ 表示由 $\mathrm{x}_{1:t}$生成的滤过，并注意 e_t 是 $\mathscr{F}_{t+1}$-可测的。

Assu设 6（有界性）。如上所定义，协变量和参数满足假设 *4*.

假设 7 （次高斯性与光滑性，以满足引理 3.1）。 我们假设

- $\mathrm{e}_t \mid \mathscr{F}_t$ 是 σ_{dir}-方向光滑的
- $\mathrm{u}_t = \bar{\mathrm{K}}_t \mathrm{x}_t + \bar{\mathrm{u}}_t + \bar{\mathrm{e}}_t$，其中 $\bar{\mathrm{K}}_t$ 和 $\bar{\mathrm{u}}_t$ 是 $\mathcal{F}_{t-1}$-可测的，且 $\bar{\mathrm{e}}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}$, e_t 是 σ_{dir}-方向光滑的。

此外，我们假设 $\mathrm{e}_t \mid \mathscr{F}_t$ 是 ν^2-次高斯的。

在这些假设下，我们可以应用主要结果——定理3，来界定分段仿射系统中的单步预测误差。具体而言，我们有以下结论：

定理 5 (分段仿射系统中的单步遗憾)。 假设 $\mathbf{z}_t$、$\mathbf{u}_t$ 按 (3.2) 所述方式演化，且采用其中定义的相应记号。此外，假设假设条件 *5*、*6* 和 *7* 均成立，并且在每个时刻 t，学习者都预测$\hat{\mathbf{z}}_{t+1}$，目标是针对正确的 $\mathbf{z}_{t+1}$ 最小化累积平方损失。如果学习者在此情形下应用算法 *1*，那么其以至少 $1-\delta$ 的概率所遭受的遗憾至多为

$$\sum_{t=0}^{T-1} \|\mathbf{z}_{t+1} - \widehat{\mathbf{z}}_{t+1}\|^2 \le T\nu^2 + \mathrm{poly}\left(d, \frac{\sqrt{1 + (1 + \max_{1 \le t \le T} \|\mathbf{K}_t\|_{\mathrm{op}})^2}}{\sigma_{\mathrm{dir}}}, m, B, R, K, \nu, \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \cdot T^{1-\Omega(1)}$$

其中，确切的多项式依赖关系见定理 *16*。

证明。 结论可由应用引理 3.1 证明方向光滑性，并利用假设 7和 6 以及光滑性来应用定理 3。 ■

[2]例如，这允许基于先前模式 i_{t-1} 或任何不使用 x_t 的估计值来选择 $\bar{\mathrm{K}}_t$。

3.2 模拟遗憾的保证

现在，我们将单步预测的要求扩展为 H步预测的概念；更正式的描述详见附录 G.2。学习过程分为 回合 $t = 1$、2、.....、T，每个回合包含若干步$h = 1$、2、.....、H。在每个回合中，外部规划器向学习者提供一个策略 π_t。为简单起见，我们假设 $\pi_t = (\mathbf{u}_{t,1}, \ldots\ldots, \mathbf{u}_{t,H})$ 是 开环 （状态无关）且随机的，以模拟模型预测控制等情形；扩展内容见附录 G.5。每个回合中，真实动力学由下式给出

$$\mathbf{z}_{t,h+1} = \mathbf{A}^\star_{i_{t,h}} \mathbf{z}_t + \mathbf{B}^\star_{i_{t,h}} \mathbf{u}_{t,h} + \mathbf{m}^\star_{i_{t,h}} + \mathbf{e}_{t,h}, \quad i_{t,h} = g^\star(\mathbf{z}_{t,h}, \mathbf{u}_{t,h}). \tag{3.3}$$

我们假设过程噪声 $\mathbf{e}_{t,h}$ 是从已知分布 $\mathcal{D}$中独立抽取的，并且 $\mathbf{z}_{t,1}$ 是从任意的 σ_{dir}-平滑分布中抽样得到的。在第 t 幕开始时，学习者随后生成估计值 $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \hat{g}_t$，并使用动力学的代入估计值来仿真计划 π_t，即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{t;h+1} &= \hat{\mathbf{A}}_{t,\hat{i}_{t,h}} \hat{\mathbf{z}}_{t,h} + \hat{\mathbf{B}}_{t,\hat{i}_{t,h}} \mathbf{u}_{t,h} + \hat{\mathbf{m}}_{t,\hat{i}_{t,h}} \hat{\mathbf{e}}_{t,h}, \\ \hat{i}_{t,h} &= \widehat{g}_t(\hat{\mathbf{z}}_{t,h}, \hat{\mathbf{u}}_{t,h}), \end{aligned}$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_{t,h} \overset{\text{i.i.}}{\sim} \mathcal{D}^{\mathrm{d}}$，而 $\hat{\mathbf{u}}_{t,h}$ 是从随机开环策略 π_t中进行的独立同分布抽样。由于仿真过程和真实过程使用不同的噪声序列，我们考虑以下误差概念，它衡量由动力学诱导的两个 分布 之间的距离，而不是遗憾所衡量的两个实现之间的距离。我们选择 Wasserstein 度量 $\mathcal{W}_2$，因为它为真实轨迹与仿真轨迹上任意 Lipschitz 奖励函数的期望值之差提供上界（形式化定义和更多说明见附录 G.2 ）。

定义 6（模拟遗憾）。令 $\mathcal{W}_2(\cdot,\cdot)$ 表示 L_2-Wasserstein 距离，定义拼接 $\mathbf{x}_{t,h} = (\mathbf{z}_{t,h}, \mathbf{u}_{t,h})$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_{t,h} = (\hat{\mathbf{z}}_{t,h}, \hat{\mathbf{u}}_{t,h})$，并令 $\mathscr{F}_t$ 表示由 $\{\mathbf{x}_{s,h}\}_{1\le s\le t, 1\le h\le H}$ 生成的滤过。我们将 T-幕、H-步模拟遗憾定义为

$$\mathrm{SimReg}_{T,H} := \sum_{t=1}^{T} \mathcal{W}_2\left(\mathbf{x}_{t,1:H}, \hat{\mathbf{x}}_{t,1:H} \mid \bar{\mathscr{F}}_{t-1}\right)^2.$$

我们的目标是实现 $\mathrm{SimReg}_{T,H} \lesssim \mathrm{poly}(H) \cdot T^{1-\Omega(1)}$，但对于任意开环策略以及各片段的不稳定动力学而言，对 H 的多项式依赖可能具有挑战性。因此，为了简化问题，我们通过采用以下强假设，将线性稳定性问题与动力学不连续性导致的误差累积问题解耦。

假设 8。存在一个已知的正定 Lyapunov 矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d_z \times d_z}$，满足对于所有模式 $i \in [K]$，$(\mathbf{A}^\star_i)^\top \mathbf{P} (\mathbf{A}^\star)_i \preceq \mathbf{P}$。

扩展内容见附录 G.5。对算法 1稍作修改（详见算法 4），我们证明可以实现渐近消失的模拟遗憾，概括如下：

定理 7. 假设我们处于 (3.3) 所述的情形，且假设*2-5* 和 *8* 成立。若运行算法 *1* 的一个变体（见附录 *4* 中的算法 *G.3*），则以至少 $1-\delta$的概率，有

$$\mathrm{SimReg}_{T,H} \le \mathrm{poly}\left(H, d, \frac{1}{\sigma_{\mathrm{dir}}}, m, B, R, K, \nu, \frac{1}{\Delta_{\mathrm{sep}}}\right) \cdot T^{1-\Omega(1)}.$$

定理 7 的证明以及参数的精确多项式依赖关系见附录 G.2，其依据是一个引理：在假设 8成立时，时刻 t 的模拟遗憾可被界定为 多项式(H)乘以时刻 t，$t+1$，.....，$t+H$的最大单步预测误差，而该误差由定理 3给出了界。我们在第 $H = 1$ 节证明了在该情形下的精确恢复保证，且无需假设 8 成立3.1。

4 分析

本节概述定理 16的证明。遗憾主要来自两个方面：一是在某个模式内对线性参数估计不佳，二是对模式进行错误分类。我们分别分析这两个来源。

4.1 参数恢复

现在我们说明如何控制因每种模式下线性参数估计误差而产生的遗憾。具体而言，我们概述上文所述定理 4 的证明。该定理指出，如果我们已经观察到许多满足以下条件的 $\bar{\mathbf{x}}_t$，使得 $\widehat{\ }$满足 $g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t) = i$ 且 $\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t) = j$，那么该模式的估计参数 $\boldsymbol{\Theta}_j$ 就接近于 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$。该定理表述的是在给定 T 个观测值时的恢复保证，但最终我们只将其应用于给定轮次内的时刻。完整证明见附录 D。

$\widehat{\ }$定理4的证明概要。我们将证明分为三部分：首先，证明 $\widehat{g}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}_i$在时间 $t \in I_{ij}(\widehat{g})$范围内的遗憾很小；其次，将预测误差与遗憾联系起来

$$\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) = \sum_{t \in I_{ij}(\widehat{g})} \left|\left|(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2$$

在 $I_{ij}(\widehat{g})$ 上；第三，证明 $\Sigma_{ij}(\widehat{g}) = \sum_{t \in I_{ij}(\widehat{g})} \bar{\mathbf{x}}_t \bar{\mathbf{x}}_t^T$以高概率具有一个由常数下界的最小特征值。若这三项结论均成立，那么注意到

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}^2 \le \left|\left|\Sigma_{ij}(\widehat{g})^{-1}\right|\right|_{\mathrm{op}} \cdot \sum_{t \in I_{ij}(\widehat{g})} \left|\left|(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2,$$

即可得出结论。这些结论各自都需要大量技术工作。我们引入分歧覆盖，这是 ε-网的一种更强形式，适用于我们的问题，并使我们能够将针对单个$g \in \mathcal{G}$ 证明的结论推广为对 $\mathcal{G}$一致成立的结论。第一步是界定所关注类 $\mathcal{G}$ 的分歧覆盖大小；随后，我们针对某个固定的 $g \in \mathcal{G}$ 证明上述三项结论，并将结果推广到依赖于数据的 $\widehat{g}$。这一步在附录D.1中完成。

现在我们转向三项论断[3]。对于第一项（证明见引理 D.15），我们引入每对超额风险(i, j)，

$$\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}) = \sum_{t \in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\Theta}_i \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t||^2 - ||\mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t||^2$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$并注意，使用 $\widehat{g}$ 进行预测时，经验风险最小化$\widehat{\ }$预言机返回的 $\boldsymbol{\Theta}$ 的累积经验超额风险 $\sum_{i,j} \mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}, \boldsymbol{\Theta})$ 有界于 $\varepsilon_{\mathrm{orac}}$，因为根据公式 (2.1)，$\mathcal{R}_{ij}(g_\star, \boldsymbol{\Theta}_\star) = 0$。因此，要证明 $\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}, \boldsymbol{\Theta})$ 很小，只需证明不存在 i', j' 使得 $\mathcal{R}_{i'j'}(\widehat{g}, \boldsymbol{\Theta}) \ll 0$。我们可以针对单个 $g, \boldsymbol{\Theta}_0$ 进行集中论证，再结合基于分歧覆盖这一概念的覆盖论证，将结果推广为对 $\mathcal{G}$ 一致成立。

对于第二项论断，即 $\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g})$ 受控于固定的 $g \in \mathcal{G}$，我们将$\widehat{\ }\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta})$ 分解为 $\mathcal{Q}_{ij}(g)$ 和一个误差项。接着，我们使用 Abbasi-Yadkori 等人提出的自归一化鞅不等式的推广形式，以 Abbasi-Yadkori 等人 [2011] 为依据，将误差控制在 $\mathcal{Q}_{ij}(g)$范围内，从而得到一个自界定不等式。最后，我们重新整理该不等式，并对分歧覆盖应用并集界，将结果推广为对 $\mathcal{G}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$一致成立。

为了证明第三个结论，即 $\Sigma_{ij}(\widehat{g})$ 的奇异值具有一致的下界，我们将论证分为两部分。首先，在附录D.2中，我们假设数据满足以下切片小球条件，即对于某个$\zeta, \rho > 0$，有

$$\mathbb{P}\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \ge c \cdot \zeta^2 | \mathscr{F}_t, t \in I_{ij}(\widehat{g})\right) \ge c \cdot \rho.$$

在上述条件下，我们利用自归一化鞅不等式，针对固定的 $\Sigma_{ij}(g)$ 建立其高概率下界 g，其中的分析本身也可能具有独立的研究价值。随后，我们再次对分歧覆盖应用并集界，将这一结果推广到对 $\mathcal{G}$一致成立。最后，在附录 D.3中，我们利用方向光滑性和马尔可夫不等式，给出 ζ， ρ 的界。■

虽然我们在此不展开讨论这一点，但顺便指出，我们用于界定分歧覆盖大小的方法，可以显著简化 Block 和 Simchowitz [2022]中许多结果的证明。

[3]请注意，由于证明结构中某些逻辑依赖关系的自然结构，本概述的呈现顺序与下文该节的顺序不同。

算法 2 在线梯度下降（单个时期）

1：初始化数据 $\bar{\mathbf{x}}_{1:E}$、分类器 $\mathbf{w}_{1:K}^0$、间隔参数 $\gamma > 0$、学习率 $\eta > 0$、分类器 $\widehat{g}$： $\mathcal{X} \to [K]$2：对于 $s = 1$、2、.....、 E，执行 3：接收 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 并更新 $\mathbf{w}_{1:K}^s \leftarrow \Pi_{(\mathcal{B}^{d-1})^{\times K}} \left(\mathbf{w}_1^{s-1} : {}_K - \eta \widetilde{\nabla \ell}_{\gamma}、{}_i、\widehat{g}(\mathbf{w}^{s-1}) \right)$（% 梯度步并进行投影，使得 $||\mathbf{w}_i|| \leq 1$)~% ℓ_{γ}、$_i$、$\widehat{g}$ 定义于公式（4.1）4：返回 $\mathbf{w}_{1:K}^m$

4.2 模式预测

如前所述，遗憾有两个来源：（1）定义各模式上线性函数的参数设定错误；（2）模式估计误差 i_t。上一节介绍了我们如何控制第一个来源，本节则讨论第二个来源。算法 1 按轮次运行，这使我们能够在每个轮次应用参数恢复结果，从而确保在正确分类模式时，所产生的遗憾较低。主要挑战在于，与独立性相比，方向光滑性这一假设不足以保证在每个轮次学习到的分类器 $\widehat{g}_{\tau}$ τ 能够很好地泛化到下一轮次中未见过的数据。为了确保这种泛化，我们借鉴在线学习的思路，通过修改分类器 $\widehat{g}_{\tau}$来确保算法在各轮次间保持稳定。

要确保我们的在线分类器表现良好，面临两项挑战。首先，式（2.1）中描述的动力学只能在标签置换意义下确定。因此，为了确保各轮次间的稳定性，我们需要确保各轮次间标记一致。由于经验风险最小化黑箱 ERMORACLE的特性，不同模式可能会在不同轮次中合并或拆分，这使得这项任务更加困难。我们通过调用一个子程序来解决这一问题，即算法Reorder中所述的3 （见附录E）。该程序会合并规模足够大且参数足够相似的模式，然后重新标记这些模式，使相似的名义簇在各轮次间得以延续。

第二个挑战是确保我们的在线分类器具有稳定性。为此，我们引入替代损失$\widetilde{\ell}_{\gamma,\ t,\ \widehat{g}}$，即带参数 $\gamma > 0$[4] 的多类合页损失。形式化地，令 $\mathbf{w}_{1:K} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K)$ 表示 $\mathbf{w}_i \in \mathcal{B}^{d-1}$，并且对于$g \in \mathcal{G}$，定义 $(1/\gamma)$-利普希茨凸替代损失：

$$\widetilde{\ell}_{\gamma,t,g}(\mathbf{w}_{1:K}) = \max\left(0, \max_{j \neq g(\bar{\mathbf{x}}_t)} \left(1 - \frac{\left\langle \mathbf{w}_{g(\bar{\mathbf{x}}_t)} - \mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle}{\gamma}\right)\right). \tag{4.1}$$

在在线梯度下降（OGD）中（见算法 2），我们通过在该替代损失上运行惰性在线梯度下降，并使用由 ERMORACLE 在上一轮次上的输出所给出的重排标签，修改 ERMORACLE 的输出以构造分类器 $\widetilde{g}_{\tau}$。通过调用 OGD，我们证明我们的模式分类器具有足够的稳定性，从而确保较低的遗憾，以下结果对这一点作了非正式表述。

定理 8 （模式预测，定理 14 的非正式表述）。 假设 *2-5* 成立，并令 $\mathcal{E}_t^{\text{mode}}$表示学习者调用参数设置正确的算法 *1* 时错误分类 $\bar{\mathbf{x}}_t$ 的模式这一事件。则以至少 $1 - \delta$ 的概率，有

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\{\mathcal{E}_t^{\text{mode}}\} \leq \text{poly}\left(K, B, \frac{1}{\sigma_{\text{dir}}}, R, d, m, \nu, \frac{1}{\Delta_{\text{sep}}}, \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \cdot T^{1-\Omega(1)}.$$

证明概要。我们首先处理模式缺乏可识别性的问题。为了进行分析，对于每个轮次 τ，我们引入函数 π_{τ}：$[K] \to [K]$，使得

$$\pi_{\tau}(i) = \operatorname*{argmin}_{1 \leq j \leq K} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{\tau,i} - \boldsymbol{\Theta}_j^{\star}\|_{\text{F}}.$$

换言之， $\pi_{\tau}(i)$ 是根据真实值确定的模式 j，其参数与 ERMORACLE 估计的参数最为接近。我们用 $\mathcal{E}_t^{\text{mode}}$ 表示错误分类模式的事件，即 $\pi_{\tau}(\widetilde{g}_{\tau}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_{\star}(\bar{\mathbf{x}}_t)$ 的事件。

[4]我们采用合页损失，因为它是凸的、利普希茨的，而且在方向光滑性条件下，它与指示损失之间的关系尤其便于处理。其他凸的、利普希茨的替代损失也能提供类似的保证。

随后，我们可以将错误分类分解为

$$\mathcal{E}_t^{\text{mode}} \subset \{\pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\} \cup \{\pi_\tau(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq \pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t))\}\,.$$

我们将第一个事件称为前瞻分类误差，将第二个事件称为排列分歧误差。为了给前者建立界，我们进一步分解前瞻分类误差事件：

$$\{\pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\} \subset \{\pi_{\tau+1}(\widehat{g}_{\tau+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\} \cup \{\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) \neq \widehat{g}_{\tau+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)\}\,.$$

第一个事件的控制可作为排列分歧误差界的推论得出；为简洁起见，我们将其讨论留待后续。为了给第二个事件的概率建立界，我们将指示$\widetilde{\ }$损失上界设为 $\ell_{\gamma,\ t,\ \widehat{g}_{\tau+1}}$ 并应用标准在线学习技术，证明 OGD 在 $(1/\gamma)$-利普希茨凸替代损失上的遗憾很小。随后，我们利用光滑性证明，针对替代损失的最优比较器相对于指示损失也不会遭受很大的遗憾；而对于后者，由于 $g_\star$的设定正确性，存在一个损失为零的比较器。因此，综合以上结果，即可为前瞻分类误差建立界，完整细节见附录 E.1。

对排列分歧误差进行界定，正是需要间隔假设的原因。我们证明，如果 $\widehat{g}_\tau$ 分配给某一模式的数据点足够多，且阈值根据问题的 Δ_{sep} 及其他$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$参数来定义，那么以高概率，该簇会变得稳定，即 $\boldsymbol{\Theta}_{\tau,\ i} \approx \boldsymbol{\Theta}_{\tau+1,i_\circ}$。这一结果利用了以下事实得以证明：如果 $|I_{i,j}(\widehat{g}_\tau)|$ 足够大，那么前一$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$节的参数恢复结果表明，$\|\boldsymbol{\Theta}_i - \boldsymbol{\Theta}_j\|_{\text{F}}$很小。根据三角不等式，以及以下事实：对于 $j' \neq \widehat{j}$，$\|\boldsymbol{\Theta}^\star_j - \boldsymbol{\Theta}^\star_{j'}\|_{\text{F}} > \Delta_{\text{sep}}$可确保 j 是唯一满足$\|\boldsymbol{\Theta}_{\tau,i} - \boldsymbol{\Theta}^\star_j\|_{\text{F}} \ll 1$的对象。类似的论证适用于轮次 $\tau+1$，因此我们$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$可以通过比较这些矩阵的弗罗贝尼乌斯范数，识别出 $\boldsymbol{\Theta}_{\tau,i}$ 与某个 $\boldsymbol{\Theta}_{\tau+1,i'}$。算法 3 正是利用了这一性质，在不同轮次之间置换标签，以保持一致性并控制排列分歧误差；完整细节见附录 E.2。将这一论证与前瞻分类误差的界相结合，足以控制遗憾中的在线分类部分。■

5 讨论

我们提出了一种用于分段仿射（PWA）系统预测的高效在线学习算法。我们的研究是对这类系统的首次探索，但仍有许多悬而未决的问题：

- 除仿真和预测外，方向光滑性是否也有助于规划与控制实现低遗憾?
- 如果系统是分段仿射的，但被要求在边界处连续，那么是否存在一种预言机高效算法，无需假设方向光滑性也能实现低遗憾？请注意，对合适的离散化采用指数权重即可得到信息论界。
- 在只能部分观测系统状态的情况下，能否实现对分段仿射系统的学习?
- 如果底层系统可以用具有许多分段的PWA系统近似，即使它并非由此类系统精确描述，那么可以得到哪些保证？请注意，这可能需要能够克服分离条件（假设 5。
- 除了 [Jin 等人研究的线性互补系统 2022], 之外，还有哪些类别的系统适用于预言机高效在线学习?

我们希望，随着该领域不断拓展对线性情形之外的理解，我们的工作能够开启对上述问题的研究。

致谢

AB 感谢美国国家科学基金会研究生研究奖学金的支持，资助编号为 1122374；同时也感谢美国海军研究办公室资助编号 N00014-20-1-2336 以及美国能源部资助编号 DE-SC0022199 的支持。MS 感谢 Amazon.com Services LLC 的资助；采购订单号 2D-06310236。我们还感谢 Zak Mhammedi、Terry H.J. Suh 和 Tao Pang 提供的宝贵意见。

参考文献

Yasin Abbasi-Yadkori、Dávid Pál 和 Csaba Szepesvári。《线性随机赌博机的改进算法》。《神经信息处理系统进展》，24，2011。Edoardo Amaldi 和 Marco Mattavelli。《最小 pfs 问题与分段线性模型估计》。《离散应用数学》，118(1-2)：115–143，2002。Maria-Florina Balcan、Travis Dick 和 Ellen Vitercik。《面向数据驱动算法设计、在线学习与隐私优化的离散度》。载于《2018 IEEE 第 59 届计算机科学基础年会（FOCS）》，603–614 页。IEEE，2018。Maria-Florina Balcan、Dan DeBlasio、Travis Dick、Carl Kingsford、Tuomas Sandholm 和 Ellen Vitercik。《学习高性能算法需要多少数据? 数据驱动算法设计的泛化保证》。载于《第 53 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会年会论文集》，919–932 页，2021。Adam Block 和 Yury Polyanskiy。《近似拒绝采样的样本复杂度及其在平滑在线学习中的应用》。arXiv 预印本 arXiv:2302.04658，2023。Adam Block 和 Max Simchowitz。《广义线性函数的高效且近乎最优的平滑在线学习》。arXiv 预印本 arXiv:2205.13056，2022。Adam Block、Yuval Dagan、Noah Golowich 和 Alexander Rakhlin。《平滑在线学习与统计学习同样容易》。arXiv 预印本 arXiv:2202.04690，2022。Francesco Borrelli、Alberto Bemporad 和 Manfred Morari。《线性系统与混合系统的预测控制》。剑桥大学出版社，2017。Nicolo Cesa-Bianchi 和 Gábor Lugosi。《预测、学习与博弈》。剑桥大学出版社，2006。Sarah Dean、Horia Mania、Nikolai Matni、Benjamin Recht 和 Stephen Tu。《线性二次调节器的样本复杂度》。《计算数学基础》，20(4)：633–679，2020。Herbert Federer。《几何测度论》。Springer，2014。Giancarlo Ferrari-Trecate、Marco Muselli、Diego Liberati 和 Manfred Morari。《一种用于分段仿射系统辨识的聚类技术》。《自动化》，39(2)：205–217，2003。Andrea Garulli、Simone Paoletti 和 Antonio Vicino。《切换系统与分段仿射系统辨识综述》。《IFAC 会议论文集》，45(16)：344–355，2012。Ian Goodfellow、Yoshua Bengio 和 Aaron Courville。《深度学习》。麻省理工学院出版社，2016。Venkatesan Guruswami 和 Prasad Raghavendra。《带噪声半空间学习的困难性》。《SIAM 计算杂志》，39(2)：742–765，2009。Nika Haghtalab、Tim Roughgarden 和 Abhishek Shetty。《在线学习与差分隐私学习的平滑分析》。arXiv 预印本 arXiv:2006.10129，2020。Nika Haghtalab、Tim Roughgarden 和 Abhishek Shetty。《具有自适应对手的平滑分析》。arXiv 预印本 arXiv:2102.08446，2021。Nika Haghtalab、Yanjun Han、Abhishek Shetty 和 Kunhe Yang。《面向超越最坏情况对手的预言机高效在线学习》。arXiv 预印本 arXiv:2202.08549，2022。Elad Hazan 和 Tomer Koren。《在线学习中优化的计算能力》。载于《第 48 届 ACM 计算理论研讨会年会论文集》，128–141 页，2016。Elad Hazan 和 Comandur Seshadhri。《变化环境下的高效学习算法》。载于《第 26 届国际机器学习会议论文集》，393–400 页，2009。

Elad Hazan 等人. 在线凸优化导论. Foundations and Trends® in Optimization, 2(3-4): 157–325, 2016. Wanxin Jin, Alp Aydinoglu, Mathew Halm, 和 Michael Posa. 线性互补系统学习. 载于 Learning for Dynamics and Control Conference, 第 1137–1149 页. PMLR, 2022. Colin N Jones 和 Manfred Morari. 使用双层优化实现近似显式模型预测控制. 载于 2009年欧洲控制会议 (ECC), 第 2396–2401 页. IEEE, 2009. Adam Kalai 和 Santosh Vempala. 在线决策问题的高效算法. Journal of Computer and System Sciences, 71(3):291–307, 2005. Quentin Le Lidec, Louis Montaut, Cordelia Schmid, Ivan Laptev, 和 Justin Carpentier. 利用随机平滑对非光滑动力系统进行最优控制. arXiv 预印本 arXiv:2203.03986, 2022. Nick Littlestone. 当无关属性众多时快速学习：一种新的线性阈值算法. Machine learning, 2(4):285–318, 1988. Tobia Marcucci 和 Russ Tedrake. 分段仿射系统最优控制的混合整数表述. 载于第 22 届 ACM混合系统：计算与控制国际会议论文集, 第 230–239 页, 2019. Matthew T Mason. 机器人操作力学. 麻省理工学院出版社, 2001. Tao Pang, HJ Suh, Lujie Yang, 和 Russ Tedrake. 通过对准动力学接触模型进行局部平滑，实现多接触操作的全局规划. arXiv 预印本 arXiv:2206.10787, 2022. Simone Paoletti, Aleksandar Lj Juloski, Giancarlo Ferrari-Trecate, 和 René Vidal. 混合系统辨识教程. European Journal of Control, 13(2-3):242–260, 2007. Michael Posa, Cecilia Cantu, 和 Russ Tedrake. 一种通过接触对刚体进行轨迹优化的直接方法. The International Journal of Robotics Research, 33(1):69–81, 2014. Alexander Rakhlin, Karthik Sridharan, 和 Ambuj Tewari. 在线学习：随机、受约束和平滑对手. 神经信息处理系统进展, 24:1764–1772, 2011. Max Simchowitz 和 Dylan Foster. 对在线线性二次调节而言，朴素探索即为最优策略. 载于 国际机器学习会议, 第 8937–8948 页. PMLR, 2020. Max Simchowitz, Horia Mania, Stephen Tu, Michael I Jordan, 和 Benjamin Recht. 无混合的学习：迈向对线性系统辨识的精确分析. 载于 学习理论会议, 第 439–473 页. PMLR, 2018. Max Si mchowitz, Ross Boczar, 和 Benjamin Recht. 使用半参数最小二乘法学习线性动力系统. 载于 学习理论会议, 第 2714–2802 页. PMLR, 2019. Max Simchowitz, Karan Singh, 和 Elad Hazan. 面向非随机控制的不适定学习. 载于 学习理论会议, 第 3320–3436 页. PMLR, 2020. Daniel A Spielman 和 Shang-Hua Teng. 用于图划分、图稀疏化和求解线性系统的近线性时间算法. 载于第三十六届 ACM计算理论研讨会论文集, 第 81–90 页, 2004. Hyung Ju Suh, Max Simchowitz, Kaiqing Zhang, 和 Russ Tedrake. 可微模拟器能否带来更好的策略梯度？载于 国际机器学习会议, 第 20668–20696 页. PMLR, 2022a. Hyung Ju Terry Suh, Tao Pang, 和 Russ Tedrake. 通过随机平滑实现接触过程中的捆绑梯度. IEEE Robotics and Automation Letters, 7(2):4000–4007, 2022b. Richard S Sutton, David McAllester, Satinder Singh, 和 Yishay Mansour. 使用函数逼近的强化学习策略梯度方法. 神经信息处理系统进展, 12, 1999.

Arjan J Van Der Schaft 和 Hans Schumacher. 混合动力系统导论，第 251 卷. Springer, 2007.

Grady Williams、Andrew Aldrich 和 Evangelos Theodorou。使用协方差变量重要性采样的模型预测路径积分控制。arXiv 预印本 arXiv:1509.01149，2015。

第一部分

通用工具

A 记号

问题参数	定义
T	时间步总数
K	模式数量
d	$\mathbf{x}$ 的维度（一般分段仿射）
m	维度为 y
σ_{dir}	方向平滑常数（假设 2）
ν	噪声的次高斯常数（假设3）
B	幅值界 $\|\bar{}\mathbf{x}_t\|$ （假设 4）
R	幅值界 $\|\boldsymbol{\Theta}^\star\|_{\text{F}}$ （假设 4）
Δ_{sep}	分离参数（可选，用于获得更快的收敛速率，参见假设 5）

算法参数	定义
E	轮次长度
τ	当前周期
η	步长（算法 2中的第 4 行）
γ	合页损失参数
A	簇大小阈值（算法第3行）
ε_{crp}	距可实现性的距离（参见（2.1））
算法对象	定义
$\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\tilde{g}g}$	估计标签上的合页损失（参见（4.1））
π_τ	稳定化置换（参见（E.2））
γ	合页损失参数
分析参数	定义
δ	错误概率
ξ	分歧覆盖离散化尺度（定理 12）
Ξ	确保连续性的最小簇大小（条件 1）

B 下界

B.1 命题1的证明

我们假设 $d = m = 1$，并考虑单位区间。因此， $\mathcal{G}$ 就是单位区间上的阈值集合，即:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \mapsto \mathbb{I}\{\mathbf{x} > \theta\} \,|\theta \in [0,1]\}\,.$$

我们假设

$$\boldsymbol{\Theta}_0^\star = \begin{bmatrix} 0 & | & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{\Theta}_1^\star = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

即，$\mathrm{y}_t = g_\star(\mathbf{x}_t)$。因此，我们处于对抗性阈值学习且对手为无知对手的情形。众所周知，这是不可学习的，但我们在此略述证明。固定 T后，让对手将 ε_1、.....、 ε_T采样为独立的拉德马赫随机变量，并令

$$\mathbf{x}_t = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{t-1} \varepsilon_s 2^{-s-1}$$

并令 $\theta^\star = \mathbf{x}_{T+1}$。我们观察到，对于所有 t，$\mathrm{y}_t = -\varepsilon_t$。为此，注意若 $\varepsilon_t = 1$，则对于所有 $s > t$， $x_s > x_t$；类似地，若 $\varepsilon_t = -1$，则 $x_s < x_t$；由于 $\theta^\star = \mathbf{x}_{T+1}$，结论显然。注意，由于 ε_t的独立性，学习者选择的任何 $\hat{}y_t$ 都独立于 ε_t，因此也独立于 y_t。因此，无论学习者采用何种策略，其预期犯错次数都是 $\frac{T}{2}$，证明得证。

B.2 辨识的下界

考虑这样一种情形：有 $K = 3$ 个模式，其状态和输入维度为 $d = 1$。对于参数 $\alpha, \beta > 0$，定义线性函数

$$\begin{aligned} g_1(x; \alpha, \beta) &= 0 \\ g_3(x; \alpha, \beta) &= x - (1 + \alpha) \\ g_2(x; \alpha, \beta) &= 2(x - (1 + \alpha)) - \beta \end{aligned}$$

对于我们在argmax 算子[5], 的定义中采用的字典序约定，有

$$\arg\max_i g_i(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & x \le 1 + \alpha \\ 2 & x \ge 1 + \alpha + \beta \\ 3 & x \in (1 + \alpha, 1 + \alpha + \beta) \end{cases}$$

也就是说， $x \mapsto \arg\max_i g_i(x;\, \alpha, \beta)$ 定义了三个模式，其中第三个模式是长度为 β、位于 $1 + \alpha$ 和$1 + \alpha + \beta$之间的一条线段。我们考虑区域由上述线性函数定义的简单三段分段仿射系统。

定义9. 令 $\mathscr{I}(\alpha, \beta, m, \mathcal{D})$ 表示具有 $K = 3$ 个分段的问题实例，其中动力学遵循

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \mathbf{m}_{i_t} + \mathbf{w}_t \quad \mathbf{m}_i = \begin{cases} 0 & i = 1, 2 \\ m & i = 3 \end{cases}, \quad i_t = \arg\max_i g_i(\mathbf{x}_t; \alpha, \beta), \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{D}.$$

,

下面的命题表明，无论噪声分布 $\mathcal{D}$ 如何，学习参数 $_3$ 都可能变得任意困难。这是因为随着 β 参数变小，定位区域 3（这是学习 $_3$ 所必需的）会变得任意困难。

命题 10. 任取正整数 $N \in \mathbb{N}$ 以及定义在 $\mathbb{R}$ 上的任意分布 $\mathcal{D}$。那么，任何自适应选择输入 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_T$ 并返回 $\mathbf{m}_3$ 的估计值 $\hat{}\mathbf{m}_T$ 的算法，都必须承受

$$\sup_{\iota \in \{-1,1\}} \sup_{j \in [2N]} \mathbb{P}_{\mathscr{I}(j/N, 1/N, \iota m, \mathcal{D})}[|\hat{\mathbf{m}}_T - \mathbf{m}_3| \ge m] \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T}{N}\right).$$

由于 N 是任意的，因此要获得 $\mathbf{m}_3$ 的常精度估计值会变得任意困难。

注记3. 命题 *10* 的下界在两种情况下可以规避。首先，如果动力学被强制为利普希茨连续，那么动力学在小区域内的偏差只会导致参数值出现小幅差异。其次，如果假设所有线性区域都具有“大体积”，那么在上述构造中， N 的大小便存在上界，从而避免了我们的下界。事实证明，在某些实际情形下，分段仿射系统 (a) 并非利普希茨连续，且 (b) 某些区域的体积趋近于零 *[*Jones 和 Morari， *2009]*。尽管如此，在这些条件下能否获得更强的保证，仍是一个值得未来研究的方向。

[5]或者，我们可以省略这些点 $\{1 + \tau, 1 + 2\tau\}$，以消除歧义

命题 *10* 的证明。引入简写 $\mathbb{P}_{j,\ \iota}[\cdot] := \mathbb{P}_{\mathscr{I}(j/N,1/N,\iota m)}[\cdot]$。考虑区域 $\mathcal{R}_j := [1+j/4N, 1+(j+1)/4N]$，并定义事件 $\mathcal{E}_{j,\ t} := \{\mathbf{u}_j \notin \mathcal{R}_j\}$ and $\mathcal{E}_j := \bigcap_{t=1}^{T} \mathcal{E}_{j,\ t}$。由于学习者掌握了关于 $\mathbf{m}_3$ 的信息，而这些信息涉及 $\mathcal{E}_j$，因此若 $\iota \overset{unif}{\sim} \{-1,1\}$，则有

$$\mathbb{E}_{\iota\sim\{-1,1\}} \mathbb{P}_{j,\iota}[|\hat{\mathbf{m}}_T - \mathbf{m}_3| \geq m \mid \mathcal{E}_j] \geq \min_{\mu\in\mathbb{R}} \mathbb{P}_\iota[|\iota m - \mu| \geq m] = \frac{1}{2}$$

因此，

$$\sup_{j,\iota} \mathbb{P}_{j,\iota}[|\hat{\mathbf{m}}_T - \mathbf{m}_3| \geq m] \geq \frac{1}{2} \sup_{j,\iota} \mathbb{P}_{j,\iota}[\mathcal{E}_j]$$

引入一个新的测度 $\mathbb{P}_0$，其动力学由下式给出

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{D}.$$

我们注意到，在 $\mathbb{P}_{j,\iota}[\mathcal{E}_j] = \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_j]$ 上，这是因为在 $\mathcal{E}_j$ 上，学习者从未访问过区域 $i = 3$，其中 $_{i_t} \neq 0$。因此，

$$\sup_{j,\iota} \mathbb{P}_{j,\iota}[|\hat{\mathbf{m}}_T - \mathbf{m}_3| \geq m] \geq \frac{1}{2} \sup_{j} \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_j] = \frac{1}{2}\left(1 - \min_j \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_j^c]\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \min_j \sum_{t=1}^{T} \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_{j,t}^c]\right).$$

注意到 $\mathcal{E}_{j,t}^c := \{\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}_j\}$。由于 $\mathcal{R}_{2\ell} \cap \mathcal{R}_{2(\ell+1)}$ 对 $\ell \in \mathbb{N}$ 两两不相交，因此 $\mathcal{E}_{2\ell,t}^c$ 对 $\ell \in \mathbb{N}$ 是互不相交的事件。利用任意子集上的最小值不大于平均值这一上界，我们有

$$\min_j \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_{j,t}^c] \leq \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} \mathbb{P}_0[\mathcal{E}_{2\ell+1,t}^c] \overset{(i)}{=} \frac{1}{N} \mathbb{P}_0[\bigcup_{\ell=1}^{N} \mathcal{E}_{2\ell+1,t}^c] \leq 1/N,$$

其中，(i) 用到了事件 $\mathcal{E}_{2\ell,t}$ 的互不相交性，正如上文所述。因此，接着倒数第二个公式，我们有

$$\sup_{j,\iota} \mathbb{P}_{j,\iota}[|\hat{\mathbf{m}}_T - \mathbf{m}_3| \geq m] \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T}{N}\right).$$

■

C 光滑性性质

C.1 高斯分布和均匀分布的方向光滑性

引理 C.1. 设 $\mathbf{w}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中服从协方差为 $\sigma^2\mathbf{I}$ 的中心高斯分布。则对于任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$，若 $\mathbf{w}$ 与 $\mathbf{z}$ 独立，则 $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ 是 σ_{dir}-方向光滑的，其中 $\sigma_{\text{dir}} = \sqrt{2\pi}\sigma$。

证明。固定任意 $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ 和 $c \in \mathbb{R}$。注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - c| < \delta\right) &= \mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle - (-\langle \mathbf{z}, \mathbf{u}\rangle + c)| < \delta\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle - c'| < \delta\right) \\
&\leq \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}\sigma},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是因为 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle$ 服从方差为 σ^2的中心单变量高斯分布，且此类分布的密度上界为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。结论得证。■

引理 C.2. 设 $\mathbf{w}$ 在半径为 σ 的中心欧几里得球上均匀分布。那么对于任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$，若 $\mathbf{w}$ 与 $\mathbf{z}$ 独立，则 $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ 是 σ_{dir}-方向光滑的，其中 $\sigma_{\text{dir}} \geq \frac{\sigma}{2}$。

证明。令 $\mathbf{v}$ 表示从单位欧几里得球上均匀采样得到的点，并注意到 $\mathbf{w} \overset{d}{=} \sigma\mathbf{v}$。于是对于任意 $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$,

$$\mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle - c'| < \delta\right) = \mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - c| < \frac{\delta}{\sigma}\right).$$

令 $A = \left(c - \frac{\delta}{\sigma},\ c + \frac{\delta}{\sigma}\right)$ 并令 $\phi:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义为满足 $\phi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{u}\rangle$。注意到 $D\phi = \mathbf{u}^T$，因此$\det\left(D\phi D\phi^T\right) = 1$一致成立。利用余面积公式 [Federer, 2014], 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - c| < \frac{\delta}{\sigma}\right) &= \int_{\phi^{-1}(A)} d\,\mathrm{vol}_d(\mathbf{v}) \\
&= \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(D\phi(\mathbf{v}) D\phi(\mathbf{v})^T\right)}\, d\,\mathrm{vol}_d(\mathbf{v}) \\
&= \int_A \mathrm{vol}_{d-1}\left(\phi^{-1}(y)\right) dy \\
&\leq \left(\sup_{y \in A} \mathrm{vol}_{d-1}\left(\phi^{-1}(y)\right)\right) \int_{c-\frac{\delta}{\sigma}}^{c+\frac{\delta}{\sigma}} dy \\
&\leq \frac{2\delta}{\sigma}.
\end{aligned}$$

结论得证。 ■

C.2 方向光滑性等价于勒贝格密度

引理 C.3. 设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 是一个（博雷尔可测）随机向量。那么，$\mathbf{x}$ 是 σ_{dir}-光滑的，当且仅当对于任意 $\mathbf{w} \in \mathcal{S}^{d-1}$, $\langle \mathbf{w},\mathbf{x}\rangle$ 存在相对于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度的密度 $p(\cdot)$，且其本质上确界 $\operatorname{ess\,sup}_{v \in \mathbb{R}} p(v) \leq 2/\sigma_{\mathrm{dir}}$。

证明。“若”方向显然成立。反过来，令 $\mu(B)$ 表示博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}$的勒贝格测度。注意到，σ_{dir}-光滑性表明，对于任意区间 $I = (a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle \in I] \leq \sigma_{\mathrm{dir}}\mu(I)/2$（考虑$c = (a + b)/2$ 和 $\delta = |b - a|/2$）。由于博雷尔 σ-代数由开区间生成，这意味着对于 $\mathbb{R}$的任意博雷尔子集 B, $\mathbb{P}[\langle \mathbf{w},\mathbf{x}\rangle \in B] \leq 2\mu(B)/\sigma_{\mathrm{dir}}$, 其中 $\mu(\cdot)$表示勒贝格测度。因此可知，$\langle \mathbf{w},\mathbf{x}\rangle$ 的分布相对于勒贝格测度绝对连续；根据拉东–尼科迪姆导数的定义，存在某个 p，使得对于所有博雷尔集 B，均有

$$\mathbb{P}\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle \in B\right) = \int_B p(a) da.$$

现在，令

$$B = \left\{a | p(a) > \frac{2}{\sigma_{\mathrm{dir}}}\right\}$$

并注意到

$$\mathbb{P}\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle \in B\right) = \int_B p(a) da > \frac{2}{\sigma_{\mathrm{dir}}} \cdot \mu(B).$$

结合这一事实：$\mathbb{P}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}\rangle \in B) \leq {}^{2\mu}{}_{(B)\,\sigma_{\mathrm{dir}}}$，我们可知 $\mu(B) = 0$，结论得证。 ■

C.3 拼接保持方向光滑性

引理 C.4. 设 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ 和 $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ 是两个随机向量，满足 $\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2$ 和 $\mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1$ 均为 σ_{dir}-方向光滑。则拼接向量 $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ 是 $\frac{\sigma_{\mathrm{dir}}}{\sqrt{2}}$-方向光滑。

证明。固定 $\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}$，其中 $\|\tilde{\mathbf{w}}\| = 1$。令 $\alpha_1 := \|\mathbf{w}_1\|$，且 $\alpha_2 = \|\mathbf{w}_2\|$。不失一般性，假设 $\alpha_1 \geq \alpha_2$，于是必然有 $\alpha_1 \geq 1/\sqrt{2}$。然后，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|\langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - c| < \delta] &= \mathbb{E}_{\mathbf{w}_2} \mathbb{P}[|\langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - c| < \delta \mid \mathbf{w}_2] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{w}_2} \mathbb{P}\left[|\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x}_1 \rangle - (c - \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{x}_2 \rangle)| < \delta \mid \mathbf{w}_2\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{w}_2} \mathbb{P}\left[\left|\langle \frac{1}{\alpha_1}\mathbf{w}_1, \mathbf{x}_1 \rangle - \frac{1}{\alpha_1}(c - \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{x}_2 \rangle)\right| < \frac{\delta}{\alpha_1} \mid \mathbf{w}_2\right] \leq \frac{\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}\alpha_1} \leq \frac{\sqrt{2}\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}}.
\end{aligned}$$

该界得证。 ■

引理 C.5. 设 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{d_1}$ and $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d_2}$ 为随机向量，满足 $\mathbf{z} \mid \mathbf{v}$ 是 σ_{dir}-方向光滑的，$\mathbf{v} \mid \mathbf{z}$ 是σ_{dir}-方向光滑的，且 $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{z} + \mathbf{v}$。则拼接向量 $\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{u})$ 是 $\sigma_{\mathrm{dir}}/\sqrt{(1 + \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}})^2 + 1}$-光滑的。

证明。固定 $\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ 使得 $\|\bar{\mathbf{w}}\| = 1$。那么，

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{K}\mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{K}^\top \mathbf{w}_2, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned}$$

定义 $\alpha_1 := \|\mathbf{w}_1 + \mathbf{K}^\top \mathbf{w}_2\|$, $\alpha_2 := \|\mathbf{w}_2\|$，以及 $X_1 := \langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{K}^\top \mathbf{w}_2, \mathbf{z} \rangle$ 和 $X_2 := \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v} \rangle$。$X_1$ 仅取决于 z，而 X_2 仅取决于 v。因此，$X_1 \mid X_2$ 是 $\alpha_1\sigma_{\mathrm{dir}}$ 光滑的，且 $X_2 \mid X_1$ 是 $\alpha_2\sigma_{\mathrm{dir}}$ 光滑的。由此可得

$$\mathbb{P}[|X_1 + X_2 - c| \leq \delta] = \mathbb{E}_{X_1} \mathbb{P}[|X_1 + X_2 - c| \leq \delta \mid X_1] \leq \frac{\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}\alpha_2},$$

因此，我在标签 $i = 1$、2 下具有对称性，

$$\mathbb{P}[|\langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle - c| \leq \delta] = \mathbb{P}[|X_1 + X_2 - c| \leq \delta] \leq \min\left\{\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}\right\} \frac{\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}} = \frac{1}{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot \frac{\delta}{\sigma_{\mathrm{dir}}}.$$

我们继续对.....进行界定

$$\begin{aligned}
\max\{\alpha_1, \alpha_2\} &= \max\{\|\mathbf{w}_1 + \mathbf{K}^\top \mathbf{w}_2\|, \|\mathbf{w}_2\|\} \\
&\geq \max\{\|\mathbf{w}\|_1 - \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}}\|\mathbf{w}_2\|, \|\mathbf{w}_2\|\} \\
&= \min_{\alpha \in [0,1]} \max\{\sqrt{1 - \alpha^2} - \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}}\alpha,\ \alpha\}. \qquad (\|\mathbf{w}_1\|^2 + \|\mathbf{w}_2\|^2 = 1)
\end{aligned}$$

当 $\sqrt{1 - \alpha^2} - \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}}\alpha = \alpha$ 时，上式取得最小值，因此 $\alpha^2(1 + \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}})^2 = 1 - \alpha^2$，从而得到 $\alpha = 1/\sqrt{(1 + \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}})^2 + 1}$。因此，$\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq 1/\sqrt{(1 + \|\mathbf{K}\|_{\mathrm{op}})^2 + 1}$。该界由此得证。

■

C.4 参数的光滑性导致分离

本节将证明，若真实参数 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$ 取自一个光滑分布，则以高概率，假设5 成立，且 Δ_{sep} 不会太小。具体而言，我们有以下结果:

命题 11. 假设 $(\boldsymbol{\Theta}_1^\star, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_K^\star)$ 是从弗罗贝尼乌斯范数球在 $\mathbb{R}^{m \times d}$中的 K重笛卡尔积上的联合分布中抽取的，该范数球的半径为 R。假设 $(\boldsymbol{\Theta}_1^\star, .., \boldsymbol{\Theta}_K^\star)$ 的分布满足：对于所有 $1 \leq i < j \leq K$，在给定 $\boldsymbol{\Theta}_i^\star$ 的值的条件下，$\boldsymbol{\Theta}_j^\star$ 的分布是 σ_{dir}-方向光滑的。那么，以至少 $1 - \delta$的概率，假设 5 成立，且

$$\Delta_{\mathrm{sep}} \geq \frac{md}{4\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\sigma_{\mathrm{dir}}\delta}{K^2}\right)^{\frac{1}{md}}.$$

证明。根据并集界，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\min_{1\le i<j\le K}\|\boldsymbol{\Theta}_i^\star-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}<\Delta_{\mathrm{sep}}\right)&\le K^2\max_{1\le i<j\le K}\mathbb{P}\left(\|\boldsymbol{\Theta}_i^\star-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}<\Delta_{\mathrm{sep}}\right)\\&=K^2\max_{1\le i<j\le K}\mathbb{E}_{\boldsymbol{\Theta}_i^\star}\left[\mathbb{P}\left(\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_j\|_{\mathrm{F}}<\Delta_{\mathrm{sep}}|\boldsymbol{\Theta}_i^\star\right)\right]\\&\le K^2\sup_{\boldsymbol{\Theta}_i^\star\in\mathbb{R}^{m\times d}}\mathbb{P}\left(\|\boldsymbol{\Theta}_j^\star-\boldsymbol{\Theta}_i^\star\|_{\mathrm{F}}<\Delta_{\mathrm{sep}}|\boldsymbol{\Theta}_i^\star\right)\\&\le K^2\cdot\frac{\mathrm{vol}\left(\mathcal{B}_{\Delta_{\mathrm{sep}}}^{md}\right)}{\sigma_{\mathrm{dir}}},\end{aligned}$$

其中，$\mathcal{B}_{\Delta_{\mathrm{sep}}}^{md}$ 表示 $\mathbb{R}^{m\times d}$ 中半径为 Δ_{sep} 的欧几里得球，最后一个不等式由光滑性假设得出。注意

$$\mathrm{vol}\left(\mathcal{B}_{\Delta_{\mathrm{sep}}}^{md}\right)=\frac{\pi^{\frac{md}{2}}}{\Gamma\left(\frac{md}{2}+1\right)}\cdot\Delta_{\mathrm{sep}}^{md}$$

因此

$$\mathbb{P}\left(\min_{1\le i<j\le K}\|\boldsymbol{\Theta}_i^\star-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}<\Delta_{\mathrm{sep}}\right)\le\frac{K^2\pi^{\frac{md}{2}}\Delta_{\mathrm{sep}}^{md}}{\sigma_{\mathrm{dir}}\cdot\Gamma\left(\frac{md}{2}+1\right)}.$$

注意到 $\Gamma\left(\frac{md}{2}+1\right)^{\frac{1}{md}}\ge\frac{md}{4}$，证明得证。 ■

第二部分

补充证明

D 参数恢复

在本节中，我们固定 τ，并令 $\left\{\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i|i\in[K]\right\},\widehat{g}$ 表示 ERMORACLE($\bar{\mathbf{x}}_{1:\tau E}$, $\mathbf{y}_{1:\tau E}$) 的输出。对于任意 $g\in\mathcal{G}$ 和 $i,j\in[K]$，我们记

$$I_{ij}(g)=\{1\le t\le\tau E|g(\bar{\mathbf{x}}_t)=i\text{ and }g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)=j\}. \tag{D.1}$$

我们将证明以下结果：

定理 12 （参数恢复）。 假设 2-4 成立。那么存在一个通用常数 C，使得对于任意可调参数 $\xi\in(0,1)$（该参数出现在分析中，但不出现在算法中），以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有满足 $1\le i,\ j\le K$ 的

$$|I_{ij}(\widehat{g})|\ge CK^2T\xi+C\frac{B^8Kd}{\sigma_{\mathrm{dir}}^8\xi^8}\log\left(\frac{BKT}{\sigma_{\mathrm{dir}}\xi\delta}\right),$$

均有

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}^2\le C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2\,|I_{ij}(\widehat{g})|}\left(\varepsilon_{\mathrm{orac}}+1+K^3B^2R^2d^2m\nu^2\sqrt{T}\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)\right)+4BRK^2\frac{1}{|I_{ij}(g)|}\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\boldsymbol{\delta}_t||$$

有关这些参数的提醒，请参阅附录A 中的符号表。我们首先对任意 $i,\ j\in[K]$ 和 $g\in\mathcal{G}$,

$$\Sigma_{ij}(g)=\sum_{\substack{1\le t\le\tau E\\ t\in I_{ij}(g)}}\bar{\mathbf{x}}_t\bar{\mathbf{x}}_t^T,$$

定义这些 $t \in I_{ij}(g)$ 上的经验协方差矩阵。我们首先证明，对于固定的 g，当 c 足够小且取值依赖于问题参数时，$\Sigma_{ij}(g) \succeq cI$。然后，我们将引入一种称为分歧覆盖的复杂度概念，以便将这一结论推广为对 $\mathcal{G}$ 一致成立，从而推出 $\Sigma_{ij}(\widehat{g}) \succeq cI$。接着，我们将利用 ERMORACLE 的定义证明 $\sum_t \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)} - \boldsymbol{\Theta}^{\star}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t\|_{\mathrm{F}}^2$ 很小，由此即可得到定理。

在整个证明过程中，不失一般性，我们假设 $T/E \in \mathbb{Z}$。事实上，如果 T 不是 E 的倍数，那么我们在最后一幕中至多遭受 $O(E)$ 的遗憾；我们将看到，这不会对我们的速率产生不利影响。

D.1 分歧覆盖

我们首先引入一种称为分歧覆盖的复杂度概念；与标准的 ε-网不同，下面我们将证明，分歧覆盖能提供更均匀的覆盖。此外，我们还将证明，在方向光滑性的假设下，可以控制 $\mathcal{G}$ 的分歧覆盖大小。

定义13. 设 $\mathscr{D} = \{(g_i, \mathscr{D}_i) \,|\, g_i \in \mathcal{G} \text{ 且 } \mathscr{D}_i \subset \mathbb{R}^d\}$。如果满足以下两个性质，我们称 $\mathscr{D}$ 为一个 ε-分歧覆盖：

1. 对于每个 $g \in \mathcal{G}$，都存在某个 i，使得 $(g_i, \mathscr{D}_i) \in \mathscr{D}$ 且 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | g_i(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\} \subset \mathscr{D}_i$.
2. 对所有 i 和 t，都有 $\mathbb{P}(\mathbf{x}_t \in \mathscr{D}_i \mid \mathscr{F}_{t-1}) \leq \varepsilon$

我们将 $\mathrm{DN}(\mathcal{G}, \varepsilon)$（或在 $\mathcal{G}$ 的含义可由上下文明确时记作 $\mathrm{DN}(\varepsilon)$）定义为 $\mathcal{G}$ 的 ε-分歧覆盖的最小大小。

我们指出，分歧覆盖比更经典的 ε-网这一概念更强，因为多个不同函数 g 与覆盖中的单个元素 g_i 产生分歧的点集必须包含在同一个集合中。对于 ε-网，不存在任何限制来阻止某个 i 的存在，使得至少有一个满足 $\mathbb{P}(g_i \neq g) \leq \varepsilon$ 的 g 所对应的点集就是整个空间。之所以需要这种一致性，是为了得到以下界：

引理 D.1. 设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个 ε-分歧覆盖。那么，以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \min_{(g_i, \mathscr{D}_i) \in \mathscr{D}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[g(\mathbf{x}_t) \neq g_i(\mathbf{x}_t)\right] \leq 2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{|\mathscr{D}|}{\delta}\right).$$

证明。注意，根据分歧覆盖的定义，有

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \min_{(g_i, \mathscr{D}_i) \in \mathscr{D}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[g(\mathbf{x}_t) \neq g_i(\mathbf{x}_t)\right] \leq \max_{(g_i, \mathscr{D}_i) \in \mathscr{D}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\mathbf{x}_t \in \mathscr{D}_i\right].$$

注意，对于任意固定的 i，都有 $\mathbb{P}(\mathbf{x}_t \in \mathscr{D}_i | \mathscr{F}_{t-1}) \leq \varepsilon$，这也可由构造直接得出。应用 Chernoff界（引理D.2），可得

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\mathbf{x}_t \in \mathscr{D}_i\right] \geq 2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \leq \delta.$$

对 $\mathscr{D}_i \in \mathscr{D}$ 取并集界即可完成证明。 ■

为完整起见，我们陈述并证明前述论证中使用的、适用于相关数据的标准 Chernoff界：

引理 D.2（Chernoff界）。设 $X_1, \ldots, X_T$ 是随机变量，且对所有 $1 \leq t \leq T$，$X_t \in \{0, 1\}$。假设存在 p_t，使得几乎必然有 $\mathbb{P}(X_t = 1 | \mathscr{F}_{t-1}) \leq p_t$，其中 $\mathscr{F}_{t-1}$ 是由 $X_1, \ldots, X_{t-1}$ 生成的 σ-代数。那么

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T} X_t > 2\sum_{t=1}^{T} p_t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \leq \delta$$

证明。我们使用标准的拉普拉斯变换技巧:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T} X_t > 2\sum_{t=1}^{T} p_t + u\right) &= \mathbb{P}\left(e^{\lambda\sum_{t=1}^{T} X_t} > e^{2\lambda u + 2\lambda\sum_{t=1}^{T} p_t}\right) \\
&\leq e^{-2\lambda u - 2\lambda\sum_{t=1}^{T} p_t} \cdot \mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{T} e^{\lambda X_t}\right] \\
&= e^{-2\lambda u - 2\lambda\sum_{t=1}^{T} p_t} \cdot \mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}|\mathscr{F}_{t-1}\right]\right] \\
&\leq e^{-2\lambda u - 2\lambda\sum_{t=1}^{T} p_t} \cdot \mathbb{E}\left[\prod_{t=1}^{T} e^{\lambda}\mathbb{P}\left(X_t = 1|\mathscr{F}_{t-1}\right) + \left(1 - \mathbb{P}\left(X_t = 1|\mathscr{F}_{t-1}\right)\right)\right] \\
&\leq e^{-2\lambda u - 2\lambda\sum_{t=1}^{T} p_t} \cdot \prod_{t=1}^{T} e^{\left(e^{\lambda}-1\right)p_t}.
\end{aligned}$$

因此我们看到

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T} X_t > 2\sum_{t=1}^{T} p_t + u\right) \leq e^{-2\lambda u + \left(e^{\lambda}-1-2\lambda\right)\sum_{t=1}^{T} p_t}.$$

令 $\lambda = 1$，并注意到 $\sum_{t=1}^{T} p_t > 0$，可知

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T} X_t > 2\sum_{t=1}^{T} p_t + u\right) \leq e^{-2u}$$

由此即可得到结论。 ■

回到主线，我们看到引理 D.1 使我们能够对使用分歧覆盖所产生的近似误差进行一致界定。然而，在应用该结果之前，我们需要证明，对于相关的函数类，$\mathcal{G}$这一复杂度概念较小。我们有如下结果:

引理 D.3. 设 $\mathcal{G}$ 为上述考虑的分类器集合。则有

$$\log\left(\mathrm{DN}(\mathcal{G}, \varepsilon)\right) \leq K(d+1)\log\left(\frac{3BK}{\varepsilon}\right)$$

我们分两部分证明该结果。首先，我们证明，任何通过聚合K 个更简单的函数类构造而成的函数类，其分歧覆盖的大小受 K 这些函数类的大小控制:

引理 D.4。设 $\mathcal{G}_1$、.....、 $\mathcal{G}_K$ 为映射到 $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 的函数类。设 $h\colon \mathcal{Y}^{\times K} \to \mathbb{R}$ 为某个聚合函数，并定义

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \mapsto h(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_K(\mathbf{x})) \mid g_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, g_K \in \mathcal{G}_K\}$$

令 $\mathrm{DN}(\mathcal{G}_i, \varepsilon)$ 表示 $\mathcal{G}_i$ 的 ε-分歧覆盖的最小大小。则

$$\mathrm{DN}(\mathcal{G}, \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{K} \mathrm{DN}\left(\mathcal{G}_i, \frac{\varepsilon}{K}\right)$$

证明。假设 $\mathscr{D}_i$ 是 $\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$的分歧覆盖，且对于任意 $g_i \in \mathcal{G}_i$，记 $(\pi(g_i)\ \mathscr{D}_i(g_i))$ 为满足分歧覆盖定义的函数对及其分歧集。于是我们声称

$$\mathscr{D} = \left\{\left(h(g_1, \ldots, g_K), \bigcup_i \mathscr{D}_i\right) | (g_i, \mathscr{D}_i) \in \mathscr{D}_i\right\}$$

是 $\mathcal{G}$的 ε分歧覆盖。注意， $|\mathscr{D}|$ 显然受所需数量界定，因此这一主张足以证明该结果。

为证明该结论，我们首先注意到，并集界保证了 $\mathbb{P}(\mathbf{x}_t \in \bigcup_i \mathscr{D}_i \mid \mathscr{F}_{t-1}) \leq \varepsilon$。我们还注意到，如果 $g = h(g_1, \ldots, g_K)$，那么

$$\{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \neq h(\pi(g_1(\mathbf{x})), \ldots, \pi(g_K(\mathbf{x})))\} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq K} \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \neq \pi(g_i(\mathbf{x}))\} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq K} \mathscr{D}_i(g_i).$$

结论得证。 ■

现在我们证明，线性阈值函数类具有有界的分歧覆盖：

引理 D.5. 设 $\mathcal{H}: \mathbb{R}^d \to \{\pm 1\}$ 为如下仿射阈值函数类：$\mathbf{x} \mapsto \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$，其中 $\mathbf{w} \in B^d$且 $b \in [-B, B]$。则

$$\log \mathrm{DN}(\mathcal{H}, \varepsilon) \leq (d+1) \log\left(\frac{3B}{\varepsilon}\right).$$

证明。我们先令 $\mathcal{N} := \{(\mathbf{w}_i, b_i)\}$ 表示 $\mathcal{B}^d \times [-B, B]$上的一个 ε-网。将每个 $(\mathbf{w}_i, b_i)$ 与对应的分类器 $h_i(\mathbf{x}) \text{ sign}(\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i)$ 关联起来。我们声称，对每个 h_i，都存在一个区域 $\mathscr{D}_i \subset \mathbb{R}^d$，使得 $\{(h_i, \mathscr{D}_i)\}$ 是一个ε-分歧覆盖。为此，考虑某个参数为 $(\mathbf{w}\ b)$ 的 h，并令参数为 $(\mathbf{w}_i, b_i)$ 的 h_i 满足$|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}|| + |b_i - b| \leq \sigma_{\text{dir}}\varepsilon / B$。考虑任意满足以下条件的 $\mathbf{x}$：

$$\text{sign}\left(\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i\right) \neq \text{sign}\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b\right)$$

根据仿射函数的连续性，存在某个 $\lambda \in (0, 1)$，使得如果 $\mathbf{w}_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{w}_i + \lambda \mathbf{w}$ 且 $b_\lambda = (1-\lambda)b_i + \lambda b$，那么

$$\langle \mathbf{w}_\lambda, \mathbf{x} \rangle + b_\lambda = 0$$

但请注意，

$$|\langle \mathbf{w}_\lambda, \mathbf{x} \rangle + b_\lambda - \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle - b_i| \leq \lambda \left|\langle \mathbf{w} - \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle\right| + \lambda \left|b_i - b\right| \leq B\left(\frac{\sigma_{\text{dir}}\varepsilon}{B}\right) \leq \sigma_{\text{dir}}\varepsilon$$

根据我们的 ε-网的定义。因此，令

$$\mathscr{D}_i = \left\{\mathbf{x} \mid |\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x} \rangle + b| \leq \frac{\sigma_{\text{dir}}\varepsilon}{B}\right\}$$

并注意，上述计算表明，如果 $\mathbf{x} \notin \mathscr{D}_i$，那么对于所有经投影映射到 h_i 的 h， h_i 必须与 $h = (\mathbf{w}\ b)$ 一致，其中投影是投到 ε-网上。因此，对所有这样的 h，有

$$\mathbb{P}\left(h(\mathbf{x}_t) \neq h_i(\mathbf{x}_t) | \mathscr{F}_{t-1}\right) \leq \mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{x}_t \rangle + b| \leq \frac{\sigma_{\text{dir}}\varepsilon}{B} | \mathscr{F}_{t-1}\right) \leq \varepsilon.$$

因此，该结论成立，并且我们构造出了一个 ε-分歧覆盖。注意到通过体积论证，该覆盖至多有 $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^d \cdot \frac{B}{\varepsilon}$ 个成员，由此即可完成证明。■

结合引理 D.4 和引理 D.5，我们证明引理 D.3。在下一节中，我们将应用引理 D.3和引理 D.1，为 $\Sigma_{ij}(\widehat{g})$ 给出下界。

D.2 协方差下界

我们继续通过 对 $\Sigma_{ij}(\widehat{g})$取界。在开始之前，我们先介绍一些记号。对于任意 $g \in \mathcal{G}$，我们记

$$Z_{t;ij}(g) = \mathbb{I}\left[g(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \text{ and } g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t) = j\right] \qquad \bar{Z}_{t;ij}(g) = \mathbb{E}\left[Z_{t;ij}(g) | \mathscr{F}_{t-1}\right]$$

¯或者说， $Z_{t;ij}(g)$是以下事件的指示函数：当 $g_\star$ 预测 j 时，分类器预测标签 i ；而 $Z_{t;ij}(g)$是在给定 $\mathbf{x}$ 历史条件下该事件的概率。我们将在小球假设下进行分析：存在常数 c_0、 c_1 以及 ζ_t、 ρ_t ，使得对于任意 $\mathbf{w} \in \mathcal{S}^d$，对所有 $g \in \mathcal{G}$ 都有

$$\mathbb{P}\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \geq c_0\zeta_t^2 \mid \mathscr{F}_t, Z_{t;ij}(g) = 1\right) \geq c_1\rho_t \tag{D.2}$$

我们将证明（D.2）成立，并将 ζ_t、 ρ_t 的取值控制推迟到附录D.3中。不过，为了表述清晰，暂且将这些常数视为已知。我们接下来证明，对于单个函数 g，对所有 i、 j 满足 I_{ij}（g）较大的情况， Σ_{ij}（g）也较大。随后，我们将应用上一节的结果，将这一结论推广为对 $\mathcal{G}$一致成立。结果如下：

引理 D.6. 令 $\rho = \min_t \rho_t$ ，并令 $\zeta = \min_t \zeta_t$，其中 ρ_t、 ζ_t 来自（D.2）。那么，以至少 $1-\delta$的概率，对所有 $1 \leq i$、 $j \leq K$ 以及所有 $g \in \mathcal{G}$ 满足以下条件的

$$|I_{ij}(g)| \geq \max\left(\frac{2}{\rho^2}\left(\log\left(\frac{2T}{\delta}\right) + \frac{d}{2}\log\left(C\frac{B\zeta^2}{\rho}\right) + \log\left(K^2\mathrm{DN}(\varepsilon)\right)\right), C\frac{B^2}{\zeta^2}\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right)\right)$$

成立

$$\Sigma_{ij}(g) \succeq \frac{c_0\zeta^2}{8}|I_{ij}(g)|$$

我们将先固定 $g \in \mathcal{G}$ ，并证明该结论对固定的 g 成立，然后利用附录D.3 的结果，使这些结论对 $\mathcal{G}$一致成立。要证明结论对固定的 g成立，我们需要以下自归一化鞅不等式：

引理 D.7. 设 $\mathscr{F}_t$ 为一个滤过，满足 $A_t \in \mathscr{F}_t$ 和 $B_t \in \mathscr{F}_{t-1}$ 对所有 t均成立。设

$$p_{A_t} = \mathbb{P}\left(A_t \mid \mathscr{F}_{t-1}, B_t\right) \qquad p_{B_t} = \mathbb{P}\left(B_t \mid \mathscr{F}_{t-1}\right)$$

并假设 $p_{A_t} \geq \rho$ 对所有 t均成立。那么，以至少 $1-\delta$的概率，

$$\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[A_t]\mathbb{I}[B_t] \geq \rho\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t] - \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t]\right)\log\left(\frac{2T}{\delta}\right)}$$

特别地，以至少 $1-\delta$的概率，若

$$\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t] \geq \frac{2}{\rho^2}\log\left(\frac{2T}{\delta}\right)$$

then

$$\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[A_t]\mathbb{I}[B_t] \geq \frac{\rho}{2}\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t]$$

为了证明引理 D.7，我们需要以下一般性结果：

引理 D.8 （Abbasi-Yadkori 等人 [2011]中的定理 1）。设(u_t) 关于滤过 $(\mathscr{G}_t)$是可预测的，并设 (e_t) 满足 $e_t \mid \mathscr{G}_t$ 是 ν^2-次高斯分布。那么，对于任意固定参数 $\lambda > 0$，以概率 $1-\delta$，

$$\left(\sum_{t=1}^T u_t e_t\right)^2 \leq 2\nu^2\left(\lambda + \sum_{t=1}^T u_t^2\right)\log\frac{(1+\lambda^{-1}\sum_{t=1}^T u_t^2)^{1/2}}{\delta}$$

现在我们给出引理 D.7的证明：

引理 *D.7* 的证明。我们对 $u_t = \mathbb{I}[B_t]$、 $e_t = \mathbb{I}[A_t] - p_{A_t}$ 和 $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t$ 应用引理 D.8 。注意到后者是1 8-次高斯，因为它的条件均值为零且绝对值不超过 1，因此以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$\left|\sum_{t=1}^T (\mathbb{I}[A_t] - p_{A_t})\mathbb{I}[B_t]\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left(\lambda + \sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t]\right)\log\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t]}{\lambda}}}{\delta}\right)}$$

取一个 对 $\lambda \in [T]$ 使用并集界，并注意到 $\sum_{t=1}^T \mathbb{I}[B_t] \in [T]$ 几乎必然成立，我们便得到结果 lt. ■

我们不 我们接下来应用引理 D.7 来证明引理 D.6 的一个版本，其中函数 $g \in \mathcal{G}$ 固定 d:

引理 D.9. 假设 (D.2) 成立，且 $\rho = \text{最小值}_t\, \rho_t$ 以及 $\zeta = \text{最小值}_t\, \zeta_t$。对于固定的 $1 \le i,\ j \le K$ 和$g \in \mathcal{G}$，以至少 $1-\delta$ 的概率，若

$$|I_{ij}(g)| \ge \frac{2}{\rho^2}\log\left(\frac{2T}{\delta}\right) + \frac{d}{\rho^2}\log\left(C\frac{B\zeta^2}{\rho}\right)$$

then

$$\Sigma_{ij}(g) \succeq \frac{c_0\zeta^2}{4}\,|I_{ij}(g)|$$

证明。注意，对于任意固定的单位向量$\mathbf{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$，以下结论成立：

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{u}^T\Sigma_{ij}(g)\mathbf{u} \le \frac{c_0\rho\zeta^2\,|I_{ij}(g)|}{2}\right) \le \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\mathbf{u}^T\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T\mathbf{u} \le c_0\zeta^2\right] Z_{t;ij} \le \frac{\rho\,|I_{ij}(g)|}{2}\right)$$

现在令 A_t 表示事件 $\left(\langle\mathbf{u},\ \mathbf{x}_t\rangle\right)^2 \ge c_0\zeta^2$，并令 B_t 表示事件 $Z_{t;ij} = 1$。注意到 $\mathbb{P}(A_t|B_t) \ge\rho$ 由（D.2），我们可以应用引理 D.7 并注意到 $|I_{ij}(g)|$ 恰好是 B_t 的和，从而证明若 $I_{ij}(g)$ 满足假设的下界，则

$$\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\mathbf{u}^T\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T\mathbf{u} \le c_0\zeta^2\right] Z_{t;ij} \le \frac{\rho\,|I_{ij}(g)|}{2}\right) \le 1-\delta\exp\left(-\frac{d}{2}\log\left(C\frac{R\zeta^2}{\rho}\right)\right).$$

在 ε上取一个大小适当的 $\mathcal{S}^{d-1}$-网来逼近$\mathbf{u}$，并应用 Block 和 Simchowitz[2022, 引理 45] 即可完成证明。 ■

现在我们已准备好证明本节的主要结果，即关于 $\Sigma_{ij}(\widehat{g})$ 的一个下界：

引理 *D.6* 的证明。 固定 $\mathscr{D} = \{(g_i, \mathscr{D}_i)\}$ 为 ε的一个分歧覆盖，覆盖 $\mathcal{G}$，其大小为 $\mathrm{DN}(\varepsilon)$。对 g_i 中所有的 $\mathscr{D}$ 使用并集界，然后应用引理 D.9，可知以至少 $1-\frac{\delta}{2}$ 的概率，对所有 $1 \le i$、 $j \le K$ 以及所有满足以下条件的 $g_k \in \mathscr{D}$，均有

$$|I_{ij}(g)| \ge \frac{4}{\rho^2}\log\left(\frac{2TK\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right) + \frac{d}{\rho^2}\log\left(C\frac{B\zeta^2}{\rho}\right)$$

我们有

$$\Sigma_{ij}(g_k) \succeq \frac{c_0\zeta^2}{4}\,|I_{ij}(g)|\,. \tag{D.3}$$

应用引理 D.1，可知以至少 $1-\frac{\delta}{2}$ 的概率，

$$\sup_{g\in\mathcal{G}}\min_{g_k\in\mathscr{D}}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[g(\mathbf{x}_t) \ne g_k(\mathbf{x}_t)\right] \le 2T\varepsilon + 12\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right).$$

注意到 根据假设，$\left|\left|\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T\right|\right| \le B^2$，可知对于任意 $g \in \mathcal{G}$，存在某个 $g_k \in \mathscr{D}$ 使得 t

$$\Sigma_{ij}(g) \succeq \Sigma_{ij}(g_k) - B^2\left(4T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right).$$

因此，将上述下界应用于 $\Sigma_{ij}(g_k)$ 即可完成证明。 ■

引理 D.6 在假设（D.2）成立的条件下，给出了经验协方差矩阵的一个下界；在下一节中，我们将证明这一假设有效。

D.3 小球不等式

引入简记 $\mathbb{P}_t(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \mathscr{F}_{t-1})$ 和 $\mathbb{E}_t[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot \mid \mathscr{F}_{t-1}]$。回顾上一节，我们假设存在常数 c_0, c_1 和 ζ_t, ρ_t，使得对于任意 $\bar{\mathbf{w}} \in \mathcal{S}^d$ 以及任意 $g \in \mathcal{G}$，均有

$$\mathbb{P}_t\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \geq c_0\zeta_t^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right) \geq c_1\rho_t. \tag{D.4}$$

本节将证明，光滑性以及关于 $Z_{t;ij}(g)$ 的一个假设足以保证这一点。我们将证明以下结果：

引理 D.10. 假设 *4* 和 *2* 成立。固定一个 $g \in \mathcal{G}$ 和 $1 \leq i, j \leq K$ 并假设

$$\mathbb{P}_t\left(Z_{t;ij}(g)\right) \geq \xi.$$

对于所有 $\bar{\mathbf{w}} \in \mathcal{S}^d$，存在通用常数 c_0 和 c_1，使得

$$\mathbb{P}_t\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \geq c_0\frac{\sigma_{\text{dir}}^2\xi^2}{B^2} \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right) \geq c_1\frac{\sigma_{\text{dir}}^4\xi^4}{B^4}.$$

我们先定义一些记号。首先，令 $\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}$ 表示在给定 $\mathbf{x}$ 历史和 $Z_{t;ij}(g)$ 的条件下，相对于 $\mathbf{x}_t$ 的方差。也就是说，对于某个关于 $\mathbf{x}_t$ 的函数 f，令

$$\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}[f] = \mathbb{E}_t\left[f(\mathbf{x}_t)^2 \mid Z_{t;ij}(g)\right] - \mathbb{E}_t\left[f(\mathbf{x}_t) \mid Z_{t;ij}(g)\right]^2. \tag{D.5}$$

对于固定的$\bar{\mathbf{w}} \in \mathcal{S}^d$，用 $\mathbf{w}$ 表示前 d 个坐标。对于固定的 $g \in \mathcal{G}$ 以及 $1 \leq i$、$j \leq K$，我们将记作：

$$\rho_t(g, \bar{\mathbf{w}}) = \left(\frac{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle]}{||\mathbf{w}||^2 \vee \left(\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{32\left(1 + \mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right)}$$

$$\zeta_t^2(g, \bar{\mathbf{w}}) = \frac{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle]}{||\mathbf{w}||^2 \vee \left(\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right)}.$$

现在我们将证明以下结果：

引理 D.11。对于任意固定的 $1 \leq i$、$j \leq K$ 和 $g \in \mathcal{G}$，均有

$$\mathbb{P}_t\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \geq c_0\zeta_t^2(g, \bar{\mathbf{w}})Z_{t;ij}(g) = 1\right) \geq c_1\rho_t(g, \bar{\mathbf{w}})$$

在证明引理 D.11之后，我们将在引理 D.10的假设下给出 ζ_t 和 ρ_t 的下界，这将使我们能够证明主要结果。为开始证明引理 D.11，我们首先证明 $\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2$ 在期望意义下具有如下界：

引理 D.12。假设假设 refass:dirsmooth 和 *4* 成立。那么对于任意固定的 $1 \leq i$，$j \leq K$ 和 $g \in \mathcal{G}$，对于所有 $\mathbf{w} \in \mathcal{S}^d$，均有

$$\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g)\right] \geq \zeta_t^2(g, \bar{\mathbf{w}})$$

证明。我们证明两个不同的下界，然后将它们结合起来。固定 i、j、g 和 $\bar{\mathbf{w}}$。回想一下，$\mathbf{w}$ 是去掉最后一个坐标的 $\bar{\mathbf{w}}$，并令 w_0 表示 $\bar{\mathbf{w}}$ 的最后一个坐标。我们计算：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] &= \mathbb{E}_t\left[\left(w_0 + \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}_t\rangle\right)^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] \\ &\geq \mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[w_0 + \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]\end{aligned}$$

其中，等式成立是因为按照构造，$\bar{\mathbf{x}}_t$ 的最后一个坐标为 1；不等式显然成立。这是我们的第一个下界。对于第二个下界，我们计算：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] &= \mathbb{E}_t\left[\left(w_0 + \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right)^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] \\ &\geq \frac{w_0^2}{2} - \mathbb{E}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\end{aligned}$$

其中，不等式是由应用数值不等式 $2(x+y)^2 \geq x^2 - 2y^2$ 得出的。这是我们的第二个下界。为简化记号，记

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 | Z_{t;ij}(g) = 1\right]}{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]} \geq 1.$$

结合前面两个下界，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] &\geq \max\left(\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right], \frac{w_0^2}{2} - 2\alpha\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]\right) \\
&\geq \max_{0\leq\lambda\leq 1}\left\{(1-\lambda)\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] + \lambda\frac{w_0^2}{2} - 2\lambda\alpha\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]\right\} \\
&= \max_{0\leq\lambda\leq 1}\left\{(1-\lambda-2\alpha\lambda)\,\mathbb{V}_{\mathbf{u}_t}\left[\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{w}\rangle\right] + \lambda\frac{w_0^2}{2}\right\} \\
&\geq \max_{0\leq\alpha\leq 1}\left\{(1-3\alpha\lambda)\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] + \lambda\frac{w_0^2}{2}\right\} \\
&\geq \left(1 - \frac{3\alpha}{6\alpha}\right)\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] + \frac{1}{12\alpha}w_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left|\left|\mathbf{w}\right|\right|^2\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\left\langle \mathbf{x}_t, \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}\right\rangle\right] + \frac{w_0^2}{2}\cdot\frac{1}{6\alpha} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\left|\left|\mathbf{w}\right|\right|^2 + w_0^2\right)\min\left(\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\left\langle \mathbf{x}_t, \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}\right\rangle\right], \frac{1}{6\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2}\min\left(\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\left\langle \mathbf{x}_t, \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}\right\rangle\right], \frac{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]}{6\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]}\right),
\end{aligned}$$

其中，第三个不等式成立是因为 $\alpha \geq 1$，最后一个等式成立是因为 $1 = ||\bar{}\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{w}||^2 + w_0^2$。结论得证。■

现在我们可以使用 Paley-Zygmund不等式，证明依赖于 ρ_t 和 ζ_t 的下界：

引理 *D.11* 的证明。我们应用 Paley-Zygmund不等式，并注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_t\left(\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^2 \geq \frac{\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]}{2} \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right) &\geq \frac{\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]^2}{4\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]} \\
&\geq \frac{\zeta_t(g, \bar{\mathbf{w}})^4}{4\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]}
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由引理 D.12 得出。应用命题 D.2 中的界（为清晰起见，下面给出了证明），可知上面最后一行的下界为：

$$\left(\frac{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]}{||\mathbf{w}||^2 \vee \left(\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^2 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{32\left(1 + \mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right)}.$$

根据 $\rho_t(g, \bar{}\mathbf{w})$ 的定义，结论得证。■

更具技术性的计算留到本节末尾进行。至此，我们得到了所需的小球结果，但还需要对 ζ_t 和 ρ_t 给出下界。为此，我们有以下关于条件方差下界的关键结果：

断言 D.1. 假设2 和 4 成立，且

$$\mathbb{P}\left(Z_{t;ij}(g) \mid \mathscr{F}_{t-1}\right) \geq \xi.$$

那么对于任意的 $\mathbf{w} \in \mathcal{B}^d$，都有

$$\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] \geq \frac{\sigma_{\text{dir}}^2 \xi^2 \left|\left|\mathbf{w}\right|\right|^2}{4}.$$

特别地，有

$$\rho_t(g, \mathbf{w}) \geq \frac{\sigma_{\text{dir}}^4 \xi^4}{128 B^4}, \quad \zeta_t(g, \mathbf{w})^2 \geq \frac{\sigma_{\text{dir}}^2 \xi^2}{4B^2}.$$

证明。首先注意到，根据马尔可夫不等式，对于任意 $\lambda > 0$，都有

$$\mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - \mathbb{E}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right| > \lambda \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right) \leq \frac{\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right]}{\lambda^2}.$$

重新整理可得

$$\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] \geq \sup_{\lambda > 0} \lambda^2 \cdot \mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - \mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right| > \lambda \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right).$$

现在根据贝叶斯定理计算，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - \mathbb{E}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right| \leq \lambda \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right) \\
&\qquad\qquad \leq \frac{\mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - \mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right| \leq \lambda \mid\right)}{\xi}
\end{aligned}$$

并注意到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - \mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]\right| \leq \lambda\right) \\
&\quad \leq \sup_{\mathbf{w}, c} \mathbb{P}_t\left(\left|\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle - c\right| \leq \lambda\right) \\
&\quad \leq \sup_{\mathbf{w}, c} \mathbb{P}_t\left(\left|\left\langle \mathbf{x}_t, \frac{\mathbf{w}}{\left|\left|\mathbf{w}\right|\right|}\right\rangle - c\right| \leq \frac{\lambda}{\left|\left|\mathbf{w}\right|\right|}\right) \leq \frac{\lambda}{\left|\left|\mathbf{w}\right|\right| \sigma_{\text{dir}}},
\end{aligned}$$

根据假设2，因此我们有

$$\mathbb{V}_{\mathbf{x}_t}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right] \geq \sup_{\lambda > 0} \lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\xi \sigma_{\text{dir}} \left|\left|\mathbf{w}\right|\right|}\right).$$

设定 $\lambda = \frac{1}{2} \cdot \xi \sigma_{\text{dir}} \left|\left|\mathbf{w}\right|\right|$ 由此得出第一个结论的证明。第二个结论由假设4 .

■

结合断言 D.1 中的下界与引理 D.11 的小球估计，即可完成引理 D.10的证明。现在我们证明上述证明中所需的技术结果。

断言 D.2. 假设我们处于引理 D.12的情形。那么有

$$\mathbb{E}_t\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{w}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right] \leq 8 + 8\mathbb{E}_t\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^4 \mid Z_{t;ij}(g) = 1\right]$$

证明。 继续使用引理 D.12证明中的记号，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle \bar{\mathbf{x}}_t, \bar{\mathbf{w}}\rangle^4 \mid \mathscr{F}_{t-1}, Z_{t;ij}(g) = 1\right] &= \mathbb{E}\left[\left(w_0 + \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle\right)^4 \mid \mathscr{F}_{t-1}, Z_{t;ij}(g) = 1\right] \\
&\leq 8w_0^4 + 8\mathbb{E}\left[\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{w}\rangle^4 \mid \mathscr{F}_{t-1}, Z_{t;ij}(g) = 1\right].
\end{aligned}$$

注意到 $w_0^2 \leq w_0^2 + \left|\left|\mathbf{w}\right|\right|^2 = \left|\left|\bar{\ }\mathbf{w}\right|\right|^2 = 1$，即可得出该结果。 ■

在协方差矩阵有下界的条件下，我们接着推导遗憾的上界。

D.4 经验误差的上界

本节将证明，对于 $1 \leq i, j \leq K$，若 $|I_{ij}(\widehat{g})|$ 足够大，那么 $\boldsymbol{\Theta}$ 是通过最小化经验风险得到这一事实将迫使

$$\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) = \sum_{t \in I_{ij}(\widehat{g})} \left|\left| \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right|\right|^2$$

足够小。最后，我们将把这个界与上文证明的 $\Sigma_{ij}(\widehat{g})$ 下界结合起来，从而完成定理的证明。我们先引入一些记号。对于固定的 $1 \leq i$、$j \leq K$ 和固定的 $g \in \mathcal{G}$，定义：

$$\mathcal{R}_{ij}(g) = \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left|\left| \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t \right|\right|^2 - \left|\left| \boldsymbol{\Theta}_j^\star \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t \right|\right|^2 .$$

本节的主要结果如下：

引理 D.13。 在假设 2-4成立时，以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) \leq \varepsilon_{\text{orac}} + CK^2BRd\sqrt{TmK \log\left(\frac{TBRK}{\delta}\right)} + CK^3 d\left(4B^2R^2 + \nu^2 \log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right) \log\left(\frac{BKT}{\delta}\right)$$
$$+ C\nu^2 d^2 Km \log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right) + C\nu d\sqrt{Km \log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)}.$$

为证明这一结果，我们先固定 $g \in \mathcal{G}$ 和 $1 \leq i$，$j \leq K$ 并将 $\mathcal{Q}_{ij}(g)$ 上界为 $\mathcal{R}_{ij}(g)$。随后，我们将利用附录D.1 中的结果，使该结论对 $\mathcal{G}$ 一致成立。我们先考虑固定 g 的情形，并证明以下结果：

引理 D.14。 假设 2-4 均成立。固定 $1 \leq i$，$j \leq K$ 以及某个 $g \in \mathcal{G}$。对于任意 $\lambda > 0$，以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\mathcal{Q}_{ij}(g) \leq \mathcal{R}_{ij}(g) + C\nu^2 dm \log\left(\frac{TRBmd}{\lambda\delta}\right) + C\nu\sqrt{\lambda dm \log\left(\frac{TRBmd}{\lambda\delta}\right)} + 16BR \sum_{t \in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t|| .$$

证明。我们首先展开

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij}(g) &= \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left|\left| \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t \right|\right|^2 - \left|\left| \boldsymbol{\Theta}_j^\star \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t \right|\right|^2 \\
&= \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left|\left| \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\delta}_t \right|\right|^2 - ||\mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t||^2 \\
&= \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left|\left| \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right|\right|^2 - 2 \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle \\
&= \mathcal{Q}_{ij}(g) - 2 \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle .
\end{aligned}$$

因此，只需对第二项取界。根据线性性以及关于 $\boldsymbol{\delta}_t$ 的假设，我们有

$$2 \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle \leq 2 \sum_{t \in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t, \left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star \right) \bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle + 4BR \sum_{t \in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t|| .$$

我们使用自归一化鞅不等式的一个推广形式——引理D.8 来界定上面的第一项。为此，固定某个 $\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$ 并定义

$$E(\boldsymbol{\Delta}) = \sum_{t \in I_{ij}(g)} \langle \mathbf{e}_t, \boldsymbol{\Delta} \bar{\mathbf{x}}_t \rangle \qquad V(\boldsymbol{\Delta}) = \sum_{t \in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\Delta} \bar{\mathbf{x}}_t||^2 .$$

$\widehat{}$注意到 $V(\boldsymbol{\Theta}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star) = \Omega_{ij}(g)$，由上式可知

$$\mathcal{R}_{ij}(g) = V(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star) - 2E(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star) \tag{D.6}$$

现在，我们将对 $E(\boldsymbol{\Delta})$ 在某个固定的 $\boldsymbol{\Delta}$ 情形下给出界，然后应用覆盖论证，将该结论推广到$\frown\boldsymbol{\Theta}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star$。根据假设 4，我们可以取 $||\boldsymbol{\Delta}|| \leq 2R$。

回顾一下，$\mathscr{F}_t^y$ 表示由以下变量生成的滤过：$\mathbf{x}_1$、……、$\mathbf{x}_t$、$\mathbf{y}_1$、……、$\mathbf{y}_{t-1}$。应用 Simchowitz 等人 [2019,引理 E.1]，（引理 D.8的推广），其中 $e_t \leftarrow \langle \mathbf{e}_t, \boldsymbol{\Delta}^\top \mathbf{x}_t \rangle$、$u_t = \boldsymbol{\Delta}^\top \mathbf{x}_t$以及滤过 $\mathscr{F}_t^y$，可知对于任意 $\lambda > 0$，以下结论以至少 $1-\delta$ 的概率成立：

$$E(\boldsymbol{\Delta})^2 \leq 2\nu^2(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta})) \log\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{V(\boldsymbol{\Delta})}{\lambda}}}{\delta}\right). \tag{D.7}$$

注意，根据假设4，有

$$V(\boldsymbol{\Delta}) \leq 4TR^2B^2$$

因此，利用平方根的次可加性可得

$$E(\boldsymbol{\Delta})^2 \leq 2\nu^2(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta})) \log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}\right)$$

其成立的概率至少为 $1-\delta$。现在，令 $\mathscr{N}$为 $\mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ 中半径为 $2R$的 Frobenius 球的一个 ε-网。对于较小的 ε，我们可以取 $\mathscr{N}$使得

$$\log(|\mathscr{N}|) \leq m(d+1)\log\left(\frac{6R}{\varepsilon}\right). \tag{D.8}$$

对于任意 $\boldsymbol{\Delta}$，用 $\boldsymbol{\Delta}'$ 表示其在 $\mathscr{N}$ 上的投影。然后我们计算

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\Delta})^2 &\leq E(\boldsymbol{\Delta}')^2 + E(\boldsymbol{\Delta})^2 - E(\boldsymbol{\Delta}')^2 \\
&\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)} \|\mathbf{e}_t\|_{\mathrm{F}}^2\right) 4RB^2T\sqrt{\|\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}'\|_{\mathrm{F}}} + 2\nu^2\left(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta}')\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \\
&\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\mathbf{e}_t||^2\right) 4RB^2T\sqrt{\varepsilon} + 2\nu^2\left(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta}')\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \\
&\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\mathbf{e}_t||^2\right) 4RB^2T\sqrt{\varepsilon} + 2\nu^2\left(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta})\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \\
&\quad + \left(V(\boldsymbol{\Delta}') - V(\boldsymbol{\Delta})\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}\right)
\end{aligned}$$

其中第二个不等式由命题 D.3 以及对 $\mathscr{N}$应用于（D.7）时使用的并集界得出，第三个不等式由 ε-网的定义得出，最后一个不等式则是通过简单地加上再减去同一项得到的。再次应用命题 D.3，我们以至少 $1-\delta$ 的概率有：

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{\Delta})^2 &\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\mathbf{e}_t||^2\right) 4RB^2T\sqrt{\varepsilon} + 2\nu^2\left(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta})\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \\
&\quad + 4RB^2T\sqrt{\varepsilon}\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \\
&\leq 2\nu^2\left(\lambda + V(\boldsymbol{\Delta})\right)\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) + 4RB^2T^2m\nu^2\sqrt{\varepsilon}\log\left(\frac{1 + 2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right)
\end{aligned}$$

对 Frobenius 球中半径为 $2R$ 的所有 $\mathbf{\Delta}$ 均一致成立。现在我们选择

$$\varepsilon = C\left(\frac{TRB^2md}{\lambda}\right)^{-c}$$

对于某些通用常数 C, c，以确保

$$4RB^2T^2m\nu^2\sqrt{\varepsilon}\log\left(\frac{1+2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}|\mathscr{N}|\right) \leq 2\nu^2\lambda$$

因此，以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有 $\mathbf{\Delta}$，均有

$$E(\mathbf{\Delta})^2 \leq 2\nu^2(\lambda + V(\mathbf{\Delta}))\left(\log\left(\frac{1+2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}\right) + m(d+1)\log\left(\frac{TR^2B^2md}{\lambda}\right)\right)$$

^其中我们应用了 (D.8) 来界定 $\mathscr{N}$ 的大小。特别地，这对 $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Theta}_i - \mathbf{\Theta}_j^\star$ 成立，因此

$$E(\widehat{\mathbf{\Theta}}_i - \mathbf{\Theta}_j^\star)^2 \leq 2\nu^2(\lambda + \mathcal{Q}_{ij}(g))\left(\log\left(\frac{1+2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}\right) + m(d+1)\log\left(\frac{TR^2B^2md}{\lambda}\right)\right)$$

将其代回 (D.6，可得以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\begin{aligned}4BR|I_{ij}(g)|\varepsilon_{\text{crp}} + \mathcal{R}_{ij}(g) \geq \mathcal{Q}_{ij}(g) - \\ - C\nu\sqrt{(\lambda + \mathcal{Q}_{ij}(g))\left(\log\left(\frac{1+2RB\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}{\delta}\right) + m(d+1)\log\left(\frac{TR^2B^2md}{\lambda}\right)\right)}.\end{aligned}$$

重新整理即可完成证明。 ■

技术计算、引理 D.3 和 D.4（它们用于引理 D.14 的证明）的证明留到本节末尾。现在，我们继续将关于固定 $g \in \mathcal{G}$ 的界推广为对 $\mathcal{G}$ 一致成立的界。不过，在完成该证明之前，还需要最后一个引理。我们的目标是用 $\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g})$来界定 $\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g})$，但我们需要给 $\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g})$ 一个上界。这正是下面引理的内容:

引理 D.15. 以至少 $1-\delta$ 的概率，对于所有 $1 \leq i$、$j \leq K$，都有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}) \leq \varepsilon_{\text{orac}} + 4BRK^2\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\boldsymbol{\delta}_t|| + CK^2BR\sqrt{Tmd\log\left(\frac{TBRK\text{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)} \\ + K^2\left(4B^2R^2 + \nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\text{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right)\end{aligned}$$

证明. 我们先引入一些记号。对于固定的 $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ 和 $g \in \mathcal{G}$，令

$$\mathcal{R}_{ij}(g, \mathbf{\Theta}) = \sum_{t\in I_{ij}(g)}||\mathbf{\Theta}_i\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t||^2 - ||\mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t||^2$$

^并注意到 $\mathcal{R}_{ij}(g) = \mathcal{R}_{ij}(g, \mathbf{\Theta}_i)$。首先，根据 ERMORACLE 的定义，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{orac}} &\geq \sum_{t=1}^T\left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 - \inf_{g,\widetilde{\mathbf{\Theta}}}\sum_{t=1}^T\left|\left|\widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 \\ &\geq \sum_{t=1}^T\left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 - \left|\left|\mathbf{\Theta}^\star_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{y}_t\right|\right|^2 \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq K}\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}) \leq \varepsilon_{\text{orac}} - \sum_{\substack{1\leq i',j'\leq K \\ (i,j)\neq(i',j')}} \mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}). \tag{D.9}$$

因此，只需给出一个下界，使得以高概率有 $\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g})$。为此，注意到对于固定的$g \in \mathcal{G}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}_0$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0) &= \sum_{t\in I_{ij}(g)} \left|\left|\left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2 - 2\sum_{t\in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\delta}_t \right\rangle \\
&\geq -2\sum_{t\in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t + \boldsymbol{\delta}_t, \left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle \\
&\geq -2\sum_{t\in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t, (\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star)\bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle - 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t||.
\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{e}_t$ 根据假设是次高斯的 3 并且根据假设 4 我们可以控制 $\left|\left|\left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{}\mathbf{x}_t\right|\right|$，可知以至少 $1-\delta$的概率，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0) &\geq -2\sum_{t\in I_{ij}(g)} \left\langle \mathbf{e}_t, \left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle - 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t|| \\
&\geq -8BR\sqrt{|I_{ij}(g)|\cdot\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} - 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t||.
\end{aligned}$$

现在注意到

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0) - \mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0') &= \sum_{t\in I_{ij}(g)} \left|\left|\left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\delta}_t\right|\right|^2 - \left|\left|\left(\boldsymbol{\Theta}_0' - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{e}_t - \boldsymbol{\delta}_t\right|\right|^2 \\
&= \sum_{t\in I_{ij}(g)} \left\langle \left(\boldsymbol{\Theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_0' - 2\boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t - 2\mathbf{e}_t - 2\boldsymbol{\delta}_t, \left(\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_0'\right)\bar{\mathbf{x}}_t \right\rangle
\end{aligned}$$

应用柯西-施瓦茨不等式，并注意到以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\max_{1\leq t\leq T} ||\mathbf{e}_t|| \leq \nu\sqrt{\log\left(\frac{T}{\delta}\right)},$$

我们有，以至少 $1-\delta$的概率,

$$\mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0) - \mathcal{R}_{ij}(g, \boldsymbol{\Theta}_0') \leq 4RB^2\left|I_{ij}(g)\right|\left|\left|\boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_0'\right|\right| + 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t||.$$

因此，如果我们对 $\mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ 中半径为 R 的 Frobenius 球上的一个 $\frac{1}{TRB^2}$-网应用并集界，可知以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\mathcal{R}_{ij}(g) = \mathcal{R}_{ij}(g, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i) \geq -CBR\sqrt{Tm(d+1)\log\left(\frac{TBR}{\delta}\right)} - 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)} ||\boldsymbol{\delta}_t||.$$

现在注意到，根据引理 D.1，如果 $\mathcal{D}$ 是一个 ε-分歧覆盖，且其对象为 $\mathcal{G}$，那么

$$\sup_{g\in\mathcal{G}}\min_{g_k\in\mathcal{D}}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[g(\bar{\mathbf{x}}_t) \neq g_k(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] \leq 2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right).$$

我们现在应用 Clai m D.5，并注意到这意味着，如果 g 是 $\widehat{g}$ 投影到分歧覆盖上的投影，则 n

$$\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}) \geq \mathcal{R}_{ij}(g) - \left(4B^2R^2 + \nu^2 \log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right)$$

对 $g \in \mathcal{D}$ 以及所有配对 (i,j) 应用并集界可知，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}) \geq -CBR\sqrt{Tmd\log\left(\frac{TBRK\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)} - 4BR\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\boldsymbol{\delta}_t|| - \left(4B^2R^2 + \nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right).$$

将此与（D.9）结合，即完成证明。 ■

现在我们终于可以证明本节的主要结果：

引理 *D.13* 的证明。我们首先注意到，引理 D.1 告诉我们，以至少 $1-\delta$ 的概率，以下结论成立：

$$\sup_{g\in\mathcal{G}}\min_{g_k\in\mathcal{D}}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}[g(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g_k(\bar{\mathbf{x}}_t)] \leq 2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)$$

我们观察到，对于 g、$g'\in\mathcal{G}$，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{ij}(g) - \mathcal{Q}_{ij}(g') &= \sum_{t\in I_{ij}(g)}\left|\left|(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2 - \sum_{t\in I_{ij}(g')}\left|\left|(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2 \\
&\leq 4R^2B^2\sum_t |Z_{t;ij}(g) - Z_{t;ij}(g')| \\
&\leq 4R^2B^2\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[g(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g'(\bar{\mathbf{x}}_t)\right].
\end{aligned}$$

根据命题 D.5，以至少 $1-\delta$ 的概率，对于所有 g，$g'\in\mathcal{G}$，都有

$$\mathcal{R}_{ij}(g) - \mathcal{R}_{ij}(g') \leq \left(4B^2R^2 + \nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[g(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g'(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]$$

现在，对尺度为 ε 的最小分歧覆盖以及所有配对 $1\leq i$ 取并集界，$j\leq K$，可知引理 D.14 表明，以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有 $g_k\in\mathcal{D}$ 分歧覆盖，均有

$$\mathcal{Q}_{ij}(g_k) \leq \mathcal{R}_{ij}(g_k) + C\nu^2 dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right) + C\nu\sqrt{\lambda dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right)}.$$

令 g 表示 $\widehat{g}$ 到分歧覆盖中的投影，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) &= \mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) - \mathcal{Q}_{ij}(g) + \mathcal{Q}_{ij}(g) \\
&\leq 4R^2B^2\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] + \mathcal{Q}_{ij}(g) \\
&\leq 4R^2B^2\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] + \mathcal{R}_{ij}(g) + C\nu^2 dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right) + C\nu\sqrt{\lambda dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right)} \\
&\leq \left(8B^2R^2 + \nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right) + \mathcal{R}_{ij}(\widehat{g}) \\
&\quad + C\nu^2 dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right) + C\nu\sqrt{\lambda dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\lambda\delta}\right)}
\end{aligned}$$

令 $\lambda = 1$ 并应用引理 D.15 来界定 $\mathcal{R}_{ij}(\widehat{g})$，则可得

$$\mathcal{Q}_{ij}(\widehat{g}) \leq \varepsilon_{\text{orac}} + CK^2BR\sqrt{Tmd\log\left(\frac{TBRK\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)} + K^2\left(4B^2R^2 + \nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\left(2T\varepsilon + 6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right)$$
$$+ C\nu^2 dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right) + C\nu\sqrt{dm\log\left(\frac{TRBmdK^2\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)} + 4BRK^2T\varepsilon_{\text{crp}}.$$

现在，我们可以代入引理(ε) D.3 中给出的对 DN 的界，该引理指出

$$\log\left(\mathrm{DN}(\mathcal{G},\varepsilon)\right) \leq 2Kd\log\left(\frac{3BK}{\varepsilon}\right)$$

并令 $\varepsilon = \frac{1}{T}$，从而完成证明。 ■

引理 D.13 的证明已经完成，接下来我们证明以下技术性引理：

断言 D.3。设 $\mathbf{\Delta}$，$\mathbf{\Delta}' \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ 的弗罗贝尼乌斯范数至多为 R。设 E，V如引理 *D.14*的证明中所定义。那么有

$$E(\mathbf{\Delta})^2 - E(\mathbf{\Delta}')^2 \leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\mathbf{e}_t||^2\right) 4RB^2T\sqrt{\|\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}'\|_{\mathrm{F}}}$$
$$V(\mathbf{\Delta}') - V(\mathbf{\Delta}) \leq 4RB^2T\sqrt{\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}'}$$

证明。我们计算得：

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{\Delta})^2 - E(\mathbf{\Delta}')^2 &= E(\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}')\cdot E(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}') \\
&= \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)}\langle\mathbf{e}_t,(\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}')\mathbf{x}_t\rangle\right)\cdot\left(\sum_{t\in I_{ij}(g)}\langle\mathbf{e}_t,(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')\mathbf{x}_t\rangle\right) \\
&\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\mathbf{e}_t||^2\right)\sqrt{V(\mathbf{\Delta}+\mathbf{\Delta}')}\cdot\sqrt{V(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')} \\
&\leq \left(\sum_{t\in I_{ij}(g)}||\mathbf{e}_t||^2\right)\sqrt{16TR^2B^2}\cdot\sqrt{V(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')},
\end{aligned}$$

其中，第一个等号由线性性得出，第一个不等式由柯西-施瓦茨不等式得出，最后一个不等式由假设4得出。类似地，

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{\Delta}) - V(\mathbf{\Delta}') &= \sum_{t\in I_{ij}(g)}\left(||\mathbf{\Delta}\bar{\mathbf{x}}_t|| + ||\mathbf{\Delta}'\bar{\mathbf{x}}_t||\right)\left(||\mathbf{\Delta}\bar{\mathbf{x}}_t|| - ||\mathbf{\Delta}'\bar{\mathbf{x}}_t||\right) \\
&\leq \sum_{t\in I_{ij}(g)}(4RB)\,||(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')\bar{\mathbf{x}}_t|| \\
&\leq 4RB\sqrt{T}\cdot\sqrt{V(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')}.
\end{aligned}$$

现在注意到

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}') &= \sum_{t\in I_{ij}(g)}||(\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}')\bar{\mathbf{x}}_t||^2 \\
&\leq \sum_{t\in I_{ij}(g)}\|\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}'\|_{\mathrm{F}}^2\,||\bar{\mathbf{x}}_t||^2 \\
&\leq TB^2\|\mathbf{\Delta}-\mathbf{\Delta}'\|_{\mathrm{F}}.
\end{aligned}$$

结果随即得出。 ■

D.4号命题。 假设 3 成立，则以至少 $1-\delta$ 的概率，有 t

$$\sum_{t=1}^{T}||\mathbf{e}_t||^2 \leq 2\nu^2\left(Tm\log(8)+\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

证明。将所有 $\mathbf{e}_t$ 拼接记为 $\bar{}\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_T)$，并注意到根据假设 $\bar{}\mathbf{e}$ 是次高斯的3。令 $\bar{}\mathbf{u}$ 表示 $\mathbb{R}^{Tm}$ 中的一个单位向量，并注意，对于任意固定的 $\bar{}\mathbf{u}\in\mathcal{S}^{Tm-1}$，以至少 $1-\delta$的概率有 $\langle\bar{}\mathbf{e},\bar{}\mathbf{u}\rangle\leq\sqrt{2\nu^2\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}$。在 $\mathcal{S}^{Tm-1}$ 上构造尺度为$_{14}$的覆盖，并应用标准离散化论证，$\bar{}$ 可得

$$\sum_{t=1}^{T}||\mathbf{e}_t||^2=||\bar{\mathbf{e}}||^2=\left(\sup_{\bar{\mathbf{u}}\in S^{Tm-1}}\langle\bar{\mathbf{e}},\bar{\mathbf{u}}\rangle\right)^2\leq 2\nu^2\left(Tm\log(8)+\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$$

以至少 $1-\delta$的概率。 ■

D.5号命题。 假设 3 和 4 成立。那么，以至少 $1-\delta$的概率，对所有 g， g'，

$$\mathcal{R}_{ij}(g)-\mathcal{R}_{ij}(g')\leq\left(4B^2R^2+\nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[g(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g'(\bar{\mathbf{x}}_t)\right].$$

证明。我们计算：

$$\mathcal{R}_{ij}(g)-\mathcal{R}_{ij}(g')=\sum_{t\in I_{ij}(g)}\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i\bar{\mathbf{x}}_t-\mathbf{y}_t\right|\right|^2-||\mathbf{e}_t||^2-\sum_{t\in I_{ij}(g')}\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i\bar{\mathbf{x}}_t-\mathbf{y}_t\right|\right|^2-||\mathbf{e}_t||^2.$$

根据并集界和假设 3 可知，以至少 $1-\delta$，

$$\max_{1\leq t\leq T}||\mathbf{e}_t||\leq\nu\sqrt{\log\left(\frac{T}{\delta}\right)}.$$

^当 $\|\boldsymbol{\Theta}_i-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}\leq 2R$ 时，结论成立。 ■

D.5 定理 12 的证明

现在我们可以将所有结果整合起来，完成定理 12 的证明。首先，我们需要结合附录 D.2 和 D.3 中的结果，证明以下界：

引理D.16。对于任意固定的 $\xi<1$，定义如下记号：

$$\begin{aligned}
\Xi_1&=C\frac{B^8}{\sigma_{\mathrm{dir}}^8\xi^8}\left(\log\left(\frac{2T}{\delta}+\frac{d}{2}\log\left(\frac{B}{\sigma_{\mathrm{dir}}\xi}\right)+\log\left(K^2\mathrm{DN}(\varepsilon)\right)\right)\right)\\
\Xi_2&=C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2}\left(2T\varepsilon+6\log\left(\frac{\mathrm{DN}(\varepsilon)}{\delta}\right)\right)\\
\Xi_3&=4K^2T\xi+12\log\left(\frac{1}{\delta}\right)+\max\left(\Xi_1,\Xi_2\right)
\end{aligned}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率，以下结论对所有满足下述条件的 $1\leq i$、 $j\leq K$ 均成立

$$|I_{ij}(\widehat{g})|\geq\Xi_3. \tag{D.10}$$

我们有

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\mathrm{F}}^2\leq C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2\,|I_{ij}(\widehat{g})|}\cdot\mathfrak{Q}_{ij}(\widehat{g}). \tag{D.11}$$

证明。 我们首先应用 Chernoff界（引理 D.2）来界定满足以下条件的次数： t 使得 $Z_{t;ij}(\widehat{g}) = 1$且 $\mathbb{P}_t(Z_{t;ij}(\widehat{g}) = 1) \leq \xi$。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\text{there exist } i,j \text{ such that } Z_{t;ij}(\widehat{g})=1 \text{ and } \mathbb{P}_t(Z_{t;ij}(\widehat{g}))\leq\xi\right] \geq 2TK^2\xi + 6\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{1\leq i,j\leq K}\mathbb{I}\left[Z_{t;ij}(\widehat{g})=1 \text{ and } \mathbb{P}_t(Z_{t;ij}(\widehat{g}))\leq\xi\right] \geq 2TK^2\xi + 6\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\\
&\leq \delta
\end{aligned}$$

其中最后一步由引理D.2得出。现在，记

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_{ij}(\widehat{g}) &= I_{ij}(\widehat{g}) \cap \{t | \mathbb{P}_t(Z_{t;ij}(\widehat{g})) \geq \xi\}\\
\widetilde{\Sigma}_{ij}(g) &= \sum_{t\in\widetilde{I}_{ij}(\widehat{g})} \bar{\mathbf{x}}_t\bar{\mathbf{x}}_t^T
\end{aligned}$$

~并注意，根据构造， $\Sigma_{ij}(\widehat{g}) \succeq \Sigma_{ij}(\widehat{g})$。此外，根据上述 Chernoff界，以至少$1-\delta$的概率，若

$$|I_{ij}(\widehat{g})| \geq 4K^2T\xi + 12\log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \max\left(\Xi_1, \Xi_2\right),$$

则有

$$\left|\widetilde{I}_{ij}(\widehat{g})\right| \geq \max\left(\frac{1}{2}\left|I_{ij}(\widehat{g})\right|, \max\left(\Xi_1,\Xi_2\right)\right).$$

现在，应用引理D.6 和D.10，可知以至少 $1-\delta$的概率，

$$\Sigma_{ij}(\widehat{g}) \succeq \widetilde{\Sigma}_{ij}(\widehat{g}) \succeq c\frac{\sigma_{\text{dir}}^2\xi^2}{B^2}\left|\widetilde{I}_{ij}(\widehat{g})\right| I \succeq c\frac{\sigma_{\text{dir}}^2\xi^2}{B^2}\left|I_{ij}(\widehat{g})\right|.$$

现在我们计算:

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}(\widehat{g}) &= \sum_{t\in I_{ij}(\widehat{g})}\left|\left|\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\\
&= \sum_{t\in I_{ij}(\widehat{g})}\text{Tr}\left(\bar{\mathbf{x}}_t^T\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)^T\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right)\\
&= \sum_{t\in I_{ij}(\widehat{g})}\text{Tr}\left(\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)^T\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\right)\bar{\mathbf{x}}_t\bar{\mathbf{x}}_t^T\right)\\
&\geq \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\text{F}}^2 \cdot \lambda_{min}\left(\sum_{t\in I_{ij}(\widehat{g})}\bar{\mathbf{x}}_t\bar{\mathbf{x}}_t^T\right)\\
&= \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\text{F}}^2 \cdot \lambda_{min}\left(\Sigma_{ij}(\widehat{g})\right)
\end{aligned}$$

其中，我们用 $\lambda_{min}(\cdot)$ 表示一个对称矩阵的最小特征值。因此，在我们的假设下，以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i - \boldsymbol{\Theta}_j^\star\|_{\text{F}} \leq C\frac{B^2}{\sigma_{\text{dir}}^2\xi^2\left|I_{ij}(\widehat{g})\right|}\cdot\Omega_{ij}(\widehat{g})$$

对所有 i， j 满足（D.10）。结论得证。 ■

We 现在可以结合引理 D.16 与附录D.4 的结果，得出证明 of.

算法 3 合并并置换标签

1: 初始化分类器 $\widehat{g}$、新参数 $\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1,i}\right)_{1\le i\le K}$、旧参数 $\left(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0,i}\right)_{1\le i\le K}$、阈值 $A>0$、间隙$\Delta_{\mathrm{sep}}>0$2: 对于 $i,j=1,2,\ldots,K$ 执行 (% 合并相似 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1,i}$ 的大簇) 3: 如果 $i=j$ 或 $\min(I_i(\widehat{g})\ I_j(\widehat{g}))<A$ 则 (% 如果簇太小则继续) 4: 继续 5: 如果 $\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1,i}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1,j}\right\|<\Delta_{\mathrm{sep}}$ 则 (% 如果参数之间的距离小于间隙，则合并簇) 6: $\widehat{g}\leftarrow(j\mapsto i)\circ\widehat{g}$7: $I\leftarrow[K]$8: 空排列 $\tilde{\pi}:[K]\to[K]$9: 重新排列 I，使得如果 $i<i'$ 则 $|I_i(\widehat{g})|>|I_{i'}(\widehat{g})|$10: 对于 $i=1,2,\ldots,K$ 执行 11: 如果 $|I_i(\widehat{g})|>A$ 则 (% 检查簇是否足够大) 12: $j\leftarrow\operatorname{argmin}_{j'\in I}\left\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{1,i}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{0,j'}\right\|$13: $\tilde{\pi}(i)=j$14: $I\leftarrow I\setminus\{j\}$15: 返回 $\tilde{\pi}\circ\widehat{g}$

定理的证明 *12*。 根据引理 D.13，以至少 $1-\delta$ 的概率有

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}(\widehat{g}) &\le \varepsilon_{\mathrm{orac}}+CK^2BRd\sqrt{TmK\log\left(\frac{TBRK}{\delta}\right)}+CK^3d\left(4B^2R^2+\nu^2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\right)\log\left(\frac{BKT}{\delta}\right)\\ &\quad+C\nu^2d^2Km\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)+C\nu d\sqrt{Km\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)}+4BRK^2\left|I_{ij}(g)\right|\varepsilon_{\mathrm{crp}}\\ &\le \varepsilon_{\mathrm{orac}}+1+CK^3B^2R^2d^2m\nu^2\sqrt{T}\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)+4BRK^2\left|I_{ij}(g)\right|\varepsilon_{\mathrm{crp}}.\end{aligned}$$

根据引理 D.16，以至少 $1-\delta$ 的概率，对于所有 i，j 满足 $|I_{ij}(\widehat{g})|\ge\Xi_3$，有

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i-\boldsymbol{\Theta}^\star_j\|_{\mathrm{F}}^2\le C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2\left|I_{ij}(\widehat{g})\right|}\Omega_{ij}(\widehat{g}).$$

现在只需注意到，根据引理 D.3，有

$$\log\left(\mathrm{DN}(\mathcal{G},\varepsilon)\right)\le K(d+1)\log\left(\frac{3BK}{\varepsilon}\right)$$

因此，取 $\varepsilon=\frac{1}{T}$，

$$\Xi_3\le CK^2T\xi+C\frac{B^8Kd}{\sigma_{\mathrm{dir}}^8\xi^8}\log\left(\frac{BKT}{\sigma_{\mathrm{dir}}\xi\delta}\right).$$

结论得证。 ■

E 修改分类器与模式预测

本节分析在线梯度下降（算法2），该算法将分类器 $\widehat{g}_\tau$ 在轮次结束后产生的 $ermoracle$ 修改为经过稳定化的分类器 $\widetilde{g}_\tau$，使其适用于在线预测。前一个分类器 $\widehat{g}_\tau$ 的问题在于，尽管按构造它在过去的样本上表现良好，但其方向光滑性不足以保证泛化，也就是说，无法确保 $\widehat{g}_\tau$ 在轮次 $\tau+1$中继续表现良好。

记号。我们先定义一些记号，再分析在线梯度下降。对于任意 $1 \le t \le T$，令 $\tau(t)$ 表示包含 t 的轮次，即 $\tau(t) = \max\{\tau' | \tau' E \le t\}$。此外，回顾一下拼接参数记号 $\mathbf{w}_{1:K} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_K)$，其中 $\mathbf{w}_i \in \mathcal{B}^{d-1}$。

对于给定的轮次 τ，我们令 $\left\{\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} | i \in [K]\right\}, \widehat{g}_\tau$ 表示 ERMORACLE($\bar{\mathbf{x}}_{1:\tau E}, \mathbf{y}_{1:\tau E}$) 的输出。对于任意 $g \in \mathcal{G}$和 $i, j \in [K]$，我们记作

$$I_{ij;\tau}(g) = \{1 \le t \le \tau E | g(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \text{ and } g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t) = j\}. \tag{E.1}$$

最后，对于固定轮次 τ，如果 ERMORACLE 已返回参数 $\mathbf{\Theta}_{\tau,i}$，定义

$$\pi_\tau(i) = \operatorname*{argmin}_{1 \le j \le K} \|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_j\|_{\mathrm{F}} \tag{E.2}$$

该函数根据 $\widehat{g}_\tau$ 将标签 i 映射到根据 $g_\star$ 确定的最接近标签，其中距离通过参数矩阵之差来衡量。记号“π”表示，当所有估计值 $\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i}$ 足够准确时，π_τ 是一个排列。

我们在以下条件下进行分析，该条件非正式地表示，对于所有足够大的簇I_{ij} 在算法 3 中考虑的簇都足够大，且其对应参数满足假设 5

条件 1。 我们称 $\Xi \ge 0$ 为一个 δ-有效可聚类性界，若其满足以下性质。若运行算法 *3*时使用 $A = 2K\Xi$ 则以至少 $1 - \delta$的概率，对所有满足 $1 \le i \le K$ 的

$$I_{i;\tau}(\widehat{g}_\tau) = \sum_{1 \le j \le K} |I_{ij;\tau}(\widehat{g}_\tau)| > 2K\Xi \tag{E.3}$$

满足以下条件：

1. 存在唯一的 $1 \le j \le K$，使得 $|I_{ij;\tau}(\widehat{g}_\tau)| > \Xi$，并且对于该 j，$|I_{ij;\tau}(\widehat{g}_\tau)| > K\Xi$.
2. 对于前一条陈述给出的 j，$\left\|\widehat{\mathbf{\Theta}}^\tau_i - \mathbf{\Theta}^\star_j\right\| \le \frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{4}$。
3. 对于 j 前述陈述中的，在轮次 $\tau + 1$中，分类器 $\widehat{g}_{\tau+1}$ 在算法 *2*的重排序步骤之后，估计参数满足 $|I_{ij;\tau}(\widehat{g}_{\tau+1})| > \Xi$，特别是，$\left\|\widehat{\mathbf{\Theta}}^{\tau+1}_i - \mathbf{\Theta}^\star_j\right\| \le \frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{4}$。

回顾一下，在线梯度下降（OGD）的伪代码见算法 2。换言之，该算法在 $\ell_{\gamma,t,\widehat{g}}$ 上运行投影在线梯度下降。我们有如下结果。

定理 14。 假设我们在第 2 节所述的设定下运行算法 *1* 。若设 $A = 2K\Xi$，则以至少 $1 - \delta$ 的概率，有

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \ne g_\star(\bar{\mathbf{x}})\right] \le \frac{2BET\eta}{\gamma} + 3\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)(KE + 2K^2\Xi) + \frac{4K}{\eta} + \frac{\eta T}{\gamma^2} + \frac{T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}} + \sqrt{T \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} \tag{E.4}$$

其中 Ξ 是一个取决于间隙和问题的参数，在引理 *E.2* 中定义。

证明策略。一项挑战是，$\widetilde{g}_{\tau(t)}$ 在轮次 $\tau + 1$ 开始时更新，并使用与排列 π_τ 对应的标签进行训练。因此，我们将误差指示变量分解为两种情况：$\pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) = \pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t))$，此时这一差异无关紧要；以及 $\pi_{\tau+1}$ 与 π_τ 不同的情况。

$$\mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \ne g_\star(\bar{\mathbf{x}})\right] \le \underbrace{\mathbb{I}\left[\pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \ne g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]}_{\text{(look-ahead classification error)}} + \underbrace{\mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \ne \pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t))\right]}_{\text{(permutation disagreement error)}} \tag{E.5}$$

我们将前一项称为“前瞻分类误差”，因为它使用了后续轮次的排列 $\tau + 1$；后一项的名称则不言自明。我们的在线更新 OGD(算法 2) 控制前瞻分类误差的累积和（见下一节中的定理 15 ），而我们的标注协议（算法 3）则界定排列分歧误差（见附录 E.2 中的引理 E.3）。

E.1 前瞻分类误差

本节将证明 (E.5) 的第一项以高概率很小，这正是以下结果的内容：

定理 15. 以至少 $1-\delta$ 的概率，前瞻分类误差至多为

$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}\left(\widetilde{g}_{\tau}(\bar{\mathbf{x}}_t)\right)\neq g^{\star}(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]\leq\frac{2BET\eta}{\gamma}+2\left(1+\gamma^{-1}\right)\left(KE+2K^{2}\Xi\right)+\frac{4K}{\eta}+\frac{\eta T}{\gamma^{2}}+\frac{K^{2}T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}}+\sqrt{T\log\left(\tfrac{1}{\delta}\right)}. \tag{E.6}$$

证明。除记号 $\ell_{\gamma,t,\widehat{g}}$（定义于公式（4.1））外，我们还引入以下记号：

$$i_t^{\star}=g^{\star}(\bar{\mathbf{x}}_t)\qquad\widehat{i}_t=\operatorname*{arg\,max}_{1\leq i\leq K}\left\langle\mathbf{w}_i^{\tau(t)},\bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle=\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)\qquad\bar{i}_t=\widehat{g}_{\tau(t)+1}(\bar{\mathbf{x}}_t) \tag{E.7}$$

或者说，$i_t^{\star}$ 是真实的正确标签，i_t 是由当前轮次的线性预测器预测的类别，而 i_t 是由使用当前轮次数据训练的经验风险最小化模型预测的类别。此外，令

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^{t}=\Pi_{(\mathcal{B}^{d-1})^{\times K}}\left(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^{t-1}-\eta\nabla\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{k(t)+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^{t-1})\right) \tag{E.8}$$

也就是说，如果我们能够使用由纳入当前轮次数据训练的经验风险最小化模型所预测的标签进行梯度下降，那么预测权重为

$$\widetilde{i}_t=\operatorname*{arg\,max}_{1\leq i\leq k}\left\langle\widetilde{\mathbf{w}}_i^{t},\bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle, \tag{E.9}$$

分类误由 $\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}$ 预测。我们还考虑以下将在分析中使用的“损失”：

$$\widehat{\ell}_t(\mathbf{w}_{1:K})=\mathbb{I}\left[\widehat{i}_t\neq\bar{i}_t\right]\qquad\ell_t^{\star}(\mathbf{w}_{1:K})=\mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\widehat{i}_t)\neq i_t^{\star}\right] \tag{E.10}$$

或者说，ℓ_t 表示我们的预测与 $\widehat{g}_{k(t)+1}$ 的预测不一致这一事件，而 $\ell_t^{\star}$ 表示我们的预测与真实值不一致这一事件。

错误分解。现在我们计算：

$$\sum_{t=1}^{T}\ell_t^{\star}(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau(t)})\leq\underbrace{\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\pi_{\tau+1}(\widehat{g}_{\tau+1}(\bar{\mathbf{x}}_t))\neq g_{\star}(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]\right)}_{\mathrm{Term}_1}+\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_{\tau}(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq\widehat{g}_{\tau+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]\right) \tag{E.11}$$

引理 E. 4 见附录 E.2 控制 项1。为控制另一项，我们注意到，对于任意 t， γ， g， $\mathbf{w}_{1:K}$，

$$\widetilde{\ell}_{\gamma,t,g}(\mathbf{w}_{1:K})=\max\left(0,\max_{j\neq g(\bar{\mathbf{x}}_t)}\left(1-\frac{\left\langle\mathbf{w}_{g(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{w}_j,\bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle}{\gamma}\right)\right)\geq\mathbb{I}[g_{\mathbf{w}_{1:K}}(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq g(\bar{\mathbf{x}}_t)],$$

其中，$g_{\mathbf{w}_{1:K}}(\bar{\mathbf{x}}_t)$ 是由参数 $\mathbf{w}_{1:K}$ 所诱导的分类器。由于 $\widetilde{g}_{\tau}(\bar{\mathbf{x}}_t)$ 是由 $\mathbf{w}_{1:K}^{\tau}$ 所诱导的分类器，因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_{\tau}(\bar{\mathbf{x}}_t)\neq\widehat{g}_{\tau+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]&\leq\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau})\\&\leq\underbrace{\left(\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau})-\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^{t})\right)}_{\mathrm{Term}_2}+\left(\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^{t})\right)\end{aligned}$$

继续推导，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\ell_t^\star(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau(t)}) &\le \mathrm{Term}_1+\mathrm{Term}_2+\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^t)\\ &\le \mathrm{Term}_1+\mathrm{Term}_2+\underbrace{\sup_{\mathbf{w}_{1:K}}\left(\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^t)-\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K})\right)}_{\mathrm{Term}_3}\\ &\quad+\underbrace{\inf_{\mathbf{w}_{1:K}}\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K})}_{\mathrm{Term}_4}\end{aligned}$$

界定“延迟”惩罚：项$_2$。项$_2$ 对应于我们因使用延迟梯度更新而可能遭受的误差。现在我们注意到

$$\left\|\nabla\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau(t)+1}}\right\|\le\frac{\|\bar{\mathbf{x}}_t\|}{\gamma}\le\frac{B}{\gamma}\tag{E.12}$$

并且，投影到凸体上是一个压缩映射。此外，算法 2 第 3 行中的梯度更新，每次更新最多只会影响两个不同的 i，j，它们位于 $\mathbf{w}_{1:K}$ 的坐标中。因此，对所有 t，

$$\left\|\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^t-\mathbf{w}_{1:K}^{\tau(t)}\right\|\le 2E\eta.$$

应用（E.12）可得

$$\mathrm{Term}_2:=\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau})-\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\widetilde{\mathbf{w}}_{1:K}^t)\le\frac{2BET\eta}{\gamma}.\tag{E.13}$$

界定遗憾项：项$_3$。我们看到，项$_3$ 正是在线梯度下降在梯度范数有界于 $\frac{1}{\gamma}$ 的损失上的遗憾，其中定义域为 K 重单位球的乘积，其直径为 $2\sqrt{K}$。因此，根据经典结果（参见 Hazan 等人 [2016, 定理 3。1]），可得

$$\mathrm{Term}_3=\sum_{t=1}^{T}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{k(t)}}(\widetilde{\mathbf{w}}_t)-\inf_{\mathbf{w}_{1:K}}\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{k(t)}}(\mathbf{w}_{1:K})\le\frac{4K}{\eta}+\frac{\eta T}{\gamma^2}.\tag{E.14}$$

界定比较器：项$_4$。为了界定项$_4$，，我们旨在从间隔为 $\ell_{\gamma,\ t,\ \widehat{g}_{\tau+1}}$ 的损失，回到累计分类误差的求和测度。本分析的核心对象是以下“模糊集合”，它针对每个参数 $\mathbf{w}_{1:K}$定义：

$$D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})=\left\{\bar{\mathbf{x}}:|\langle\mathbf{w}_{i,1:d}-\mathbf{w}_{j,1:d},\mathbf{x}\rangle-w_{i,d+1}+w_{j,d+1}|\le\gamma\text{ for some }1\le i\le K\right\},\tag{E.15}$$

其中，我们将 $\mathbf{w}_i$ 的前 d 个坐标记为 $\mathbf{w}_{i,\ 1:d}$ 最后一个坐标记为标量 $w_{i,\ d+1}$。于是，根据方向光滑性和并集界，以下结论对任意固定的 $\mathbf{w}_{1:K}$ 均成立：

$$\mathbb{P}(\bar{\mathbf{x}}_t\in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})\mid\mathscr{F}_t)\le K^2\sup_{i,j}\mathbb{P}(|\langle\mathbf{w}_{i,1:d}-\mathbf{w}_{j,1:d},\mathbf{x}_t\rangle-w_{i,d+1}+w_{j,d+1}|\le\gamma\mid\mathscr{F}_t)\le\frac{K^2\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}}.$$

令 $\mathbf{w}_{1:K}^\star$ 为与 $g^\star$ 相关联的参数。那么，由上述公式和 Azuma 不等式可知，大多数 $\bar{\mathbf{x}}_t$ 都落在 $D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K}^\star)$ 之外：

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t\in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K}^\star)\right]&\le\sum_{t=1}^{T}\mathbb{P}_t\left(\bar{\mathbf{x}}_t\in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K}^\star)\right)+\sqrt{T\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}\\&\le\frac{K^2T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}}+\sqrt{T\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.\end{aligned}\tag{E.16}$$

我们计算：

$$\begin{aligned}
\inf_{\mathbf{w}_{1:K}} \sum_{t=1}^{T} \widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}_{\tau+1}}(\mathbf{w}_{1:K}) &\le \inf_{\mathbf{w}_{1:K}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t \in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})\right] + \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{t=1}^{T} \widehat{\ell}_t(\mathbf{w}_{1:K}) \\
&\le \inf_{\mathbf{w}_{1:K}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t \in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})\right] + \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{t=1}^{T} \ell_t^\star(\mathbf{w}_{1:K}) + \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\bar{i}_t) \neq i_t^\star\right] \\
&\le \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\bar{i}_t) \neq i_t^\star\right] + \inf_{\mathbf{w}_{1:K}} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t \in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})\right] + \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \ell_t^\star(\mathbf{w}_{1:K}) \\
&\le \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\bar{i}_t) \neq i_t^\star\right] + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t \in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K}^\star)\right] \\
&\le \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\bar{i}_t) \neq i_t^\star\right]}_{=\mathrm{Term}_1} + \frac{K^2 T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}} + \sqrt{T \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.
\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由引理 E.1得出，第二个不等式显然成立，第三个不等式成立是因为最后一项与 $\mathbf{w}_{1:K}$无关，第四个不等式由可实现性假设得出，即$\ell_t^\star(\mathbf{w}_{1:K}^\star) = 0$ 对所有 t均成立，最后一个不等式则由公式（E.16）得出（回顾 项$_1$的定义）。

因此，以至少 $1-\delta$ 的概率有

$$\mathrm{Term}_4 \le \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \mathrm{Term}_1 + \frac{K^2 T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}} + \sqrt{T \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

证明即将完成。为此，我们注意到

$$\sum_{t=1}^{T} \ell_t^\star(\mathbf{w}_{1:K}^{\tau(t)}) \le \mathrm{Term}_1 + \mathrm{Term}_2 + \mathrm{Term}_3 + \mathrm{Term}_4 \tag{E.17}$$

$$\le \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \mathrm{Term}_1 + \frac{2BET\eta}{\gamma} + \frac{4K}{\eta} + \frac{\eta T}{\gamma^2} + \frac{K^2 T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}} + \sqrt{T \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}. \tag{E.18}$$

由引理 E.4可得

$$\mathrm{Term}_1 = \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\bar{i}_t) \neq i_t^\star\right] := \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau(t)+1}(\widehat{g}_{\tau(t)+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] \le KE + 2K^2\Xi, \tag{E.19}$$

其中 Ξ 定义见引理 E.2。证毕。 ■

引理 E.1（用软间隔界定指示函数）。对于任意 γ、t、$\widehat{g}$，若 $\mathbf{w}$ 的每个分量均具有单位范数，则

$$\widetilde{\ell}_{\gamma,t,\widehat{g}}(\mathbf{w}) \le \mathbb{I}\left[\bar{\mathbf{x}}_t \in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})\right] + \left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \widehat{\ell}_t(\mathbf{w}_{1:K}). \tag{E.20}$$

^证明。我们通过分类讨论证明这一点。假设 $\ell_t(\mathbf{w}_{1:K}) = 0$。那么有

$$\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t) = \arg\max_{1 \le j \le K} \langle \mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t \rangle \tag{E.21}$$

尤其是，对于所有 $j \neq \widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)$，都有 $\langle \mathbf{w}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)} - \mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t \rangle \ge 0$。如果 $\bar{\mathbf{x}}_t \notin D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})$，那么根据构造可知

$$\max_{j \neq \widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)} 1 - \frac{\langle \mathbf{w}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)} - \mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t \rangle}{\gamma} \le 0 \tag{E.22}$$

并且结论显然成立。如果

$$\max_{j\neq\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)} 1-\frac{\left\langle \mathbf{w}_{\widehat{g}(\mathbf{x}_t)}-\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle}{\gamma}>0 \tag{E.23}$$

那么，要么存在某个 j，使得 $\left\langle \mathbf{w}_{\widehat{g}(\mathbf{x}_t)}-\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle<0$；要么存在某个 j，使得 $\left\langle \mathbf{w}_{\widehat{g}(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{x}}_t\right\rangle<\gamma$，并且因此 $\bar{\mathbf{x}}_t\in D_\gamma(\mathbf{w}_{1:K})$。根据假设 $\ell_t(\mathbf{w}_{1:K})=0$，前一种情况不可能成立，因此后一种情况成立，这种情况下不等式也随之成立。

现在假设 $\widehat{\ell}_t(\mathbf{w}_{1:K})=1$。那么我们看到，对于所有 i，$||\mathbf{w}_i||\leq 1$ 都成立，且该结论一致成立，因此结果得证。■

E.2 置换分歧与项$_1$

本节中，我们给出置换分歧误差的一个界——即（E.5）中的第二项——并给出上一节中项$_1$ 的一个界。我们首先说明，算法 3 确保较大的簇在各轮次中仍然较大，这一结论由以下结果形式化：

引理 E.2。定义以下术语：

$$\Xi_1=CK^2T\xi+C\frac{B^8Kd}{\sigma_{\mathrm{dir}}^8\xi^8}\log\left(\frac{BKT}{\sigma_{\mathrm{dir}}\xi\delta}\right) \tag{E.24}$$

$$\Xi_2=C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2\Delta_{\mathrm{sep}}^2}\left(\varepsilon_{\mathrm{orac}}+1+K^3B^2R^2d^2m\nu^2\sqrt{T}\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)\right)+\sum_{t=1}^{T}||\boldsymbol{\delta}_t||\,. \tag{E.25}$$

那么 $\Xi:=\max(\Xi_1,\Xi_2)$ 是一个 δ-有效的可聚类性参数，其含义见条件1。

证明。根据鸽巢原理，若 $I_i(\widehat{g}_\tau)>2K\Xi$，则至少存在一个 j 使得 $|I_{ij;\tau}(\widehat{g}_\tau)|>\Xi$，因此根据定理12，有 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i^\tau-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{4}$，故第二个结论成立。若还存在另一个 j' 使得$|I_{ij';\,\tau}(\widehat{g}_\tau)|>\Xi$，那么也有 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i^\tau-\boldsymbol{\Theta}_{j'}^\star\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{4}$，进而由三角不等式可得$\left|\left|\boldsymbol{\Theta}_j^\star-\boldsymbol{\Theta}_{j'}^\star\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{2}<\Delta_{\mathrm{sep}}$，这根据假设5确保了 $j=j'$。再次应用鸽巢原理可得

$$|I_{ij;\tau}(\widehat{g}_\tau)|=I_{i;\tau}(\widehat{g}_\tau)-\sum_{j'\neq j}|I_{ij';\tau}(\widehat{g}_\tau)|>2K\Xi-(K-1)\Xi=(K+1)\Xi. \tag{E.26}$$

因此，第一个陈述成立。对于最后一个陈述，注意到由于至少有 $K\Xi$ 次 $t<\tau E$ 使得$g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)=j$，因此至少有 Ξ 次 $t<(\tau+1)E$ 使得 $t\in I_{i'j}$；$\tau(\widehat{g}_{\tau+1})$。根据定理 12，这再次意味着 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i'}^{\tau+1}-\boldsymbol{\Theta}_j^\star\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{4}$，从而 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i'}^{\tau+1}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i^\tau\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{2}$。如果在运行算法 3 后 $i'\neq i$，那么必定存在某个 i'' 使得 $I_{i''}$；$\tau(\widehat{g}_{\tau+1})>K\Xi$ 且 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i''}^{\tau+1}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i^\tau\right|\right|\leq\frac{\Delta_{\mathrm{sep}}}{2}$。但如果情况如此，则由三角不等式可知 $\left|\left|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i''}^{\tau+1}-\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{i'}^{\tau+1}\right|\right|<\Delta_{\mathrm{sep}}$；由于二者都足够大，它们已在算法 3 的前半部分被合并，这意味着 $i''=i'$，进而根据算法 3 的后半部分可得 $i'=i$。因此，第三个陈述的前半部分成立。最后，只需应用定理 12。■

现在我们可以证明主要的界：

引理 E.3. 以至少 $1-\delta$ 的概率，有

$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t))\neq\pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}))\right]\leq KE+2K^2\Xi \tag{E.27}$$

证明。 我们首先固定一些 $1\leq i\leq K$ 并界定轮次的数量 τ 使得 $\pi_\tau(i)\neq\pi_{\tau+1}(i)$。我们将重点放在满足引理 E.2 结论成立的概率 $1-\delta$ 事件上。假设存在

一个 i 使得 $I_{i;\tau}(\widehat{g}_\tau) > 2K\Xi$ 且 $\pi_\tau(i) = j \neq j' = \pi_{\tau+1}(i)$。那么，根据假设 5 和三角不等式，我们有

$$\left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^\tau - \mathbf{\Theta}_j^\star\right|\right| + \frac{\Delta_{\text{sep}}}{4} \leq \left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^{\tau+1} - \mathbf{\Theta}_{j'}^\star\right|\right| \tag{E.28}$$

$$\left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^{\tau+1} - \mathbf{\Theta}_{j'}^\star\right|\right| + \frac{\Delta_{\text{sep}}}{4} \leq \left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^\tau - \mathbf{\Theta}_j^\star\right|\right| \tag{E.29}$$

重新整理并再次应用假设 5 可知

$$\frac{\Delta_{\text{sep}}}{2} < \left|\left|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^\tau - \widehat{\mathbf{\Theta}}_i^{\tau+1}\right|\right|. \tag{E.30}$$

然而，应用引理 E.2的第二和第三条陈述会导致矛盾。因此，在引理 E.2所述的高概率事件下，我们有：

$$\mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq \pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}))\right] \leq \mathbb{I}\left[I_{i;\tau}(\widehat{g}_{\tau(t)}) \leq 2K\Xi\right]. \tag{E.31}$$

因此我们有

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_\tau(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq \pi_{\tau+1}(\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}))\right] \leq \sum_{i=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\widetilde{g}_{\tau(t)}(\bar{\mathbf{x}}_t) = i\right] \mathbb{I}\left[I_{i;\tau}(\widehat{g}_{\tau(t)}) \leq 2K\Xi\right] \tag{E.32}$$

$$\leq K\left(E + 2K\Xi\right). \tag{E.33}$$

结论得证。 ■

我们还可以应用引理 E.2 来证明 $\pi_{\tau+1}(\widehat{g}_{\tau+1}(\bar{}\mathbf{x}_t)) = g_\star(\bar{}\mathbf{x}_t)$ 在大多数情况下成立。我们在以下结果中对这一陈述进行形式化：

引理 E.4（错误标签界）。以至少 $1-\delta$ 的概率，以下结论成立：

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[\pi_{\tau+1}(\widehat{g}_{\tau(t)+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] \leq KE + 2K^2\Xi \tag{E.34}$$

证明。根据引理 E.2，可得

$$\mathbb{I}\left[\pi_{\tau+1}(\widehat{g}_{\tau(t)+1}(\bar{\mathbf{x}}_t)) \neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] \leq \sum_{i=1}^{K} \mathbb{I}\left[\widehat{g}_{\tau(t)+1}(\bar{\mathbf{x}}_t) = i\right] \mathbb{I}\left[I_{i;\tau}(\widehat{g}_{\tau(t)+1}) \leq 2K\Xi\right]. \tag{E.35}$$

因此，我们可以完全按照引理 E.3 中的论证完成证明。 ■

F 证明定理 3

本节将正式陈述并证明我们的主要结果，即算法 1 是一种预言机高效算法，可实现关于所有参数均为多项式阶、且随着时域趋于无穷按 $T^{1-\Omega(1)}$ 缩放的期望遗憾。下面给出形式化陈述；首先，我们在参数严格分离的假设下（假设 5）证明该结论。

定理 16。假设 2-5 成立。那么，对于下文证明中给出的正确取值 γ，η和 E（见上文(F.7)），算法 1 的期望遗憾为：

$$\mathbb{E}\left[\text{Reg}_T\right] \leq CB^{10}R^2md\nu^2K^4\sigma_{\text{dir}}^{-4}\Delta_{\text{sep}}^{-1}T^{\frac{35}{36}}\left(\varepsilon_{\text{orac}} + \log(TRBmdK)\right) + CBRK^2\sum_{t=1}^{T}||\boldsymbol{\delta}_t||.$$

注意，最坏情况下最后一项为 $O\left(BRK^2T\varepsilon_{\text{crp}}\right)$。

证明。 回顾一下，算法 1 按轮次进行，每轮长度为 E，这是一个待指定的参数。在第 τ 轮开始时，即时间 $(\tau-1)E+1$，调用 ERMORACLE，得到 $\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\,i}$ 对于 $1\le i\le K$ 和 $\widehat{g}_\tau$，总共调用 ERMORACLE $\frac{T}{E}\le T\widehat{\ }$ 次。然后使用算法 2 将 $\widehat{g}_\tau$ 修改为 $\widetilde{g}_\tau$，并预测 $\hat{\mathbf{y}}_t=\mathbf{\Theta}_{\tau,\,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t$。因此我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Reg}_T &= \sum_{t=1}^{T}\left|\left|\hat{\mathbf{y}}_t-\mathbf{\Theta}^{\star}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\\
&= \sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\left|\left|\left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\\
&= \left(\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\left|\left|\left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\mathbb{I}\left[\pi_\tau\left(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)\right)\neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]\right)\\
&+\left(\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\left|\left|\left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{\pi_\tau(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t))}\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\right).
\end{aligned}$$

对于第一项，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\left|\left|\left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)}\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2\mathbb{I}\left[\pi_\tau\left(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)\right)\neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right] &\le \sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}4B^2R^2\mathbb{I}\left[\pi_\tau\left(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)\right)\neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]\\
&\le 4B^2R^2\sum_{t=1}^{T}\mathbb{I}\left[\pi_\tau\left(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)\right)\neq g_\star(\bar{\mathbf{x}}_t)\right]
\end{aligned}$$

因此，应用定理 14，可知上述表达式有如下界

$$4B^2R^2\left(\frac{2BET\eta}{\gamma}+3\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)(KE+2K^2\Xi)+\frac{4K}{\eta}+\frac{\eta T}{\gamma^2}+\frac{T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}}+\sqrt{T\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right). \tag{F.1}$$

对于第二项，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\left|\left|\left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{\pi_\tau(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t))}\right)\bar{\mathbf{x}}_t\right|\right|^2 &\le B^2\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{\pi_\tau(\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t))}\|_{\mathrm{F}}^2\\
&= B^2\sum_{i=1}^{K}\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i}-\mathbf{\Theta}^{\star}_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t)=i\right].
\end{aligned}$$

现在，令

$$\Xi_1 = CK^2T\xi+C\frac{B^8Kd}{\sigma_{\mathrm{dir}}^8\xi^8}\log\left(\frac{BKT}{\sigma_{\mathrm{dir}}\xi\delta}\right) \tag{F.2}$$

$$\Xi_2' = C\frac{B^2}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2\xi^2\alpha}\left(\varepsilon_{\mathrm{orac}}+1+K^3B^2R^2d^2m\nu^2\sqrt{T}\log\left(\frac{TRBmdK}{\delta}\right)\right)+\sum_{t=1}^{T}||\boldsymbol{\delta}_t|| \tag{F.3}$$

$$\Xi' = \text{最大值}(\Xi_1,\Xi_2)。 \tag{F.4}$$

注意，只要 $\alpha<\Delta_{\mathrm{sep}}^2$ 那么引理 E.2 就告诉我们，如果运行算法1 并使用 $A\ge 2K\Xi'$，那么以至少 $1-\delta$ 的概率，对所有 $1\le i\le K$ 和所有 $\tau\le\tau'$，若

$$I_i(\widehat{g}_\tau)>2K\Xi'$$

then

$$\left|I_{i\pi'_\tau(i)}(\widehat{g}_{\tau'})\right|>\Xi'$$

and

$$\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_i^{\tau'} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_{\tau'}(i)}\|_{\mathrm{F}}^2 \le \alpha.$$

此外，在此条件下，引理 E.2 告诉我们

$$I_i(\widehat{g}_{\tau'}) > 2K\Xi.$$

固定一个 i，于是我们看到

$$\begin{aligned}\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i\right] &= \sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \wedge I_i(\widehat{g}_\tau) \le 2K\Xi'\right] \\ &\quad + \sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \wedge I_{i(\widehat{g}_\tau)} > 2K\Xi'\right].\end{aligned}$$

对于第一项，我们看到

$$\begin{aligned}\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \wedge I_i(\widehat{g}_\tau) \le 2K\Xi'\right] &\le 4R^2\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \wedge I_i(\widehat{g}_\tau) \le 2K\Xi'\right] \\ &\le 4R^2\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}2K\Xi' \\ &\le \frac{4R^2TK\Xi'}{E}.\end{aligned}$$

对于第二项，高概率地有

$$\begin{aligned}\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i \wedge I_{i(\widehat{g}_\tau)} > 2K\Xi'\right] &\le \sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\alpha \\ &\le \alpha T.\end{aligned}$$

对所有 K 求和，我们看到

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{\tau=1}^{T/E}\sum_{t=(\tau-1)E+1}^{\tau E}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\mathrm{F}}^2\mathbb{I}\left[\widetilde{g}_\tau(\bar{\mathbf{x}}_t) = i\right] \le B^2K\left(4R^2\frac{T}{E}K\Xi' + \alpha T\right). \tag{F.5}$$

因此，结合（F.1）和（F.5）可知，以至少 $1-\delta$ 的概率，有 Reg_T 的上界为

$$\begin{aligned}&4B^2R^2\left(\frac{2BET\eta}{\gamma} + 3\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)(KE + 2K^2\Xi) + \frac{4K}{\eta} + \frac{\eta T}{\gamma^2} + \frac{T\gamma}{\sigma_{\mathrm{dir}}} + \sqrt{T\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right) \\ &+ B^2K\left(4R^2\frac{T}{E}K\Xi' + \alpha T\right)\end{aligned}$$

其中 Ξ' 由（F.4）给出，而 Ξ 由引理 E.2给出。现在，令

$$E = T^{\frac{17}{18}}, \qquad \gamma = T^{-\frac{1}{36}}, \qquad \xi = T^{-\frac{1}{9}}, \qquad \alpha = T^{-\frac{1}{6}}, \qquad \eta = T^{-\frac{19}{36}}, \tag{F.6}$$

以至少 $1-\delta$ 的概率给出，

$$\mathrm{Reg}_T \le CB^{10}R^2md\nu^2K^4\sigma_{\mathrm{dir}}^{-4}\Delta_{\mathrm{sep}}^{-1}T^{\frac{35}{36}}\left(\varepsilon_{\mathrm{orac}} + \log(TRBmdK)\right) + CBRK^2\sum_{t=1}^{T}||\boldsymbol{\delta}_t||. \tag{F.7}$$

证明到此结束。 ■

G 应用于 PWA 动力系统

In t本节中，我们将主要结果应用于由用户提供控制的分段仿射系统中的预测 ls.

G.1 引理3.1的证明

我们注意到，该结果可直接由引理 C.5 得出。事实上，根据假设，$\mathbf{z}_t|\mathscr{F}_{t-1},\mathbf{u}_t$ 是 σ_{dir}-方向光滑的，因为假设 $\mathbf{e}_{t-1}|\mathscr{F}_{t-1}$ 也是如此。类似地，$\mathbf{u}_t|\mathscr{F}_{t-1},\mathbf{z}_t$ 是 σ_{dir}-方向光滑的，因为假设 $\bar{\mathbf{e}}_t|\mathscr{F}_{t-1},\mathbf{e}_t$ 是光滑的。因此，结论由引理 C.5 得出。

G.2 形式化模拟遗憾设定

在此设定中，令 $\mathscr{F}_t$ 表示由 $(\mathbf{x}_{s,h})_{1\le s\le t,1\le h\le H}$ 生成的滤过。令 $\mathscr{F}_{t,h}$ 表示由 $\mathscr{F}_{t-1}$ 和 $(\mathbf{x}_{t,h'})_{1\le h'\le h}$ 生成的滤过，约定 $\mathscr{F}_{t,0}=\mathscr{F}_{t-1}$。我们要求估计值 $\mathbf{\Theta}_{t,i}$ 关于 $\mathscr{F}_{t-1}$-可测。此外，我们假设规划器返回开环随机策略。

假设 9（平滑的开环随机策略）。我们假设我们的策略 π_t 是随机的，且不依赖于状态。也就是说，我们假设对于所有 $h\in[H]$ 和 $t\in[T]$，均有 $\mathbf{u}_{t,h}$、…、$\mathbf{u}_{t,H}\perp\mathbf{x}_{t,1:h}\mid\mathscr{F}_{t-1}$。我们进一步假设 $\mathbf{u}_{t,h}\mid\mathbf{u}_{t,1:h-1},\mathscr{F}_{t-1}$ 是 σ_{dir}-平滑的。

假设 10（噪声分布）。我们假设对于所有 t,h，均有 $\|\mathbf{e}_{t,h}\|\le B_{\mathrm{noise}}$。此外，我们假设存在定义在 $\mathbb{R}^{d_z}$ 上的零均值、σ_{dir}-方向平滑分布 $\mathcal{D}$，使得 $\mathbf{e}_{t,h}\mid\mathscr{F}_{t,h-1}\sim\mathcal{D}$。[6] 此外，我们还假设 $\mathbf{z}_{t,1}\mid\mathscr{F}_{t-1}$ 是 σ_{dir}-平滑的。

定义 17（Wasserstein 距离）。设 $(\mathcal{X},\mathsf{d})$ 是一个带有度量 $\mathsf{d}(\cdot,\cdot)$ 的波兰空间，并设 μ,ν 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的两个博雷尔测度。将 Wasserstein 距离定义为

$$\mathcal{W}_2^2(\mu,\nu)=\inf_{\Gamma}\mathbb{E}_{(X,Y)\sim\Gamma}\left[\mathsf{d}(X,Y)^2\right]$$

其中，下确界取遍所有满足以下条件的耦合 Γ：X 的边缘分布为 μ，且 Y 的边缘分布为 ν。

我们将说明，只需进行下文概述的少量修改，便可利用算法1 生成 H步模拟预测，其分布在 Wasserstein 距离意义下彼此接近。具体而言，这使我们能够控制相关预测的期望平方范数误差。

G.3 算法修改

为了获得良好的模拟遗憾，我们采用算法1 的一个变体，并作两处修改。首先，我们需要以某种方式运用假设8，确保估计动力学具有收缩性。其次，我们需要迭代预测，以便针对每个时间 t生成一条长度为 H 的轨迹。为解决第一个问题，假设我们位于算法1的第3行，该行将 ERMORACLE 应用于历史数据，得到 $\left\{(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i})_{1\le i\le K},\widehat{g}_\tau\right\}$。对于每个$i$，我们将$\mathbf{\Theta}_{\tau,i}$ 修改为$\mathbf{\Theta}_{\tau,i}$，方法是将$\mathbf{\Theta}_{\tau,i}$ 投影到凸集

$$\mathcal{C}_{\mathbf{P}}=\left\{\mathbf{\Theta}|\mathbf{\Theta}^\top\mathbf{P}\mathbf{\Theta}\preceq\mathbf{P}\right\}.$$

形式化地，我们将投影定义为

$$\mathsf{Project}_{\mathcal{C}_{\mathbf{P}}}(\mathbf{\Theta})=\operatorname*{argmin}_{\mathbf{\Theta}'\in\mathcal{C}_{\mathbf{P}}}\|\mathbf{\Theta}-\mathbf{\Theta}'\|_{\mathrm{F}}. \tag{G.1}$$

由于 $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ 是凸集，因此可以高效地完成此步骤。正如我们将在后文中看到的，由于 $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ 的凸性，这个投影步骤同样不会损害我们的误差保证。

转向第二项修改，在每个轮次 τ，我们都有一组固定的参数 $\left\{(\widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i})_{1\le i\le K},\widetilde{g}_\tau\right\}$，其中 $\widetilde{g}_\tau$ 与算法 1 中的修改完全相同。因此，在每个时刻，我们独立地从噪声分布中抽取 $\mathbf{e}'_{t,h}\sim\mathcal{D}$，其中 $1\le h\le H$，并预测 $\widehat{\mathbf{x}}_{t,h}=\mathbf{\Theta}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\widehat{\mathbf{x}}_{t,h-1})}\cdot\widehat{\mathbf{x}}_{t,h-1}+\mathbf{e}'_{t,h}$。完整的修改后算法见算法 4，接下来我们将证明，该算法能实现较低的模拟遗憾。

[6] 结果可以扩展到 $\mathcal{D}_{t,h}$ 随时间步变化，只要学习者已知这些分布。

算法 4 实现低模拟遗憾的算法

1: 初始化轮次长度 E，分类器 $\mathbf{w}^0 = (0, \ldots, 0)$，间隔参数 $\gamma > 0$，学习率 $\eta > 0$，噪声分布 $\mathcal{D}$

2: 对于 $\tau = 1, 2, \ldots, T/E$，执行

3: $\left\{(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i})_{1\le i\le K}, \widehat{g}_\tau\right\} \leftarrow$ 经验风险最小化预言机$((\bar{\mathbf{x}}_{1:\tau E}, \mathbf{y}_{1:\tau E}))$ (% self.modelUpdate)

4: $\widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau_i} \leftarrow$ 投影 $_{\mathcal{C}_F}(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau_i})$ (% 参见(G.1))

5: $\widehat{g}_\tau \leftarrow$ Reorder $\left(\widehat{g}_\tau, \left(\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i}\right)_{1\le i\le K}, \left(\widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau-1,i}\right)_{1\le i\le K}\right)$ (% 参见算法 3)

6: $\widetilde{g}_\tau \leftarrow$ 在线梯度下降$(\bar{\mathbf{x}}_{(\tau-1)E:\tau E}, \widehat{g}_\tau, \gamma, \eta)$ (% 见算法 2)

7: 对于 $t = \tau E, \ldots, (\tau+1)E - 1$ 执行

8: 接收 $\bar{\mathbf{x}}_t$ 并设置 $\hat{\mathbf{x}}_{t,0} = \bar{\mathbf{x}}_t$

9: 对于 $h = 1, 2, \ldots, H$ **do**

10: 采样 $\mathbf{e}'_{t,h} \sim \mathcal{D}$

11: 预测 $\hat{\mathbf{x}}_{t,h} = \widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\hat{\mathbf{x}}_{t,h-1})} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{t,h-1} + \mathbf{e}'_{t,h}$

12: 接收 $\mathbf{y}_t$

G.4 模拟遗憾的形式化保证

在本节中，我们证明，在所述假设下，算法 4 能够实现较低的模拟遗憾。注意到算法 4 具有预言机效率，这一结果给出了首个在分段仿射设置下能够以可证明方式实现较低模拟遗憾的高效算法。主要结果如下：

定理 18 (仿真遗憾界)。假设我们处于 (3.3) 的设定中，且假设*5*、*6*、*7*、*8*、*9*和 *10* 均成立。假设我们运行算法 *4*。那么，以至少 $1-\delta$的概率，有

$$\mathrm{SimReg}_{T,H} \le \frac{9B^2H^8}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2} \cdot \left(CB^{10}R^2md\nu^2K^4\sigma_{\mathrm{dir}}^{-4}\Delta_{\mathrm{sep}}^{-1}T^{\frac{35}{36}}\left(\varepsilon_{\mathrm{orac}} + \log(TRBmdK)\right) + CBRK^2T\varepsilon_{\mathrm{crp}}\right).$$

在证明定理 18之前，我们必须陈述下面这个关键引理。它指出，如果真实动力学和估计动力学都稳定，并且我们能够高精度地预测 $\mathbf{x}_{t+1}$，那么未来 H 步的仿真遗憾也很小。

引理 G.1。令 $\mathcal{G}\colon \mathbb{R}^d \to [K]$ 表示多类仿射分类器的类别，并令 $\widehat{f}, f^\star$ 表示满足以下性质的函数：

1. 函数 $f^\star$ 可以分解为 $f^\star(\mathbf{x}) = f^\star_{g_\star(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$，类似地，对于 $\widehat{f}$，存在某些 $g_\star, \widehat{g} \in \mathcal{G}$，使得 $\widehat{f}(\mathbf{x}) = f_{\widehat{g}(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$。

2. 对于所有 $i \in [K]$，f_i 和 $f_i^\star$都是压缩映射，即 $||f_i^\star(\mathbf{x}) - f_i^\star(\mathbf{x}')|| \le ||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||$。

假设对于 $0 \le h \le H-1$，我们令

$$\mathbf{x}_{h+1} = f^\star(\mathbf{x}_h) + \mathbf{e}_h \qquad \widehat{\mathbf{x}}_{h+1} = \widehat{f}(\widehat{\mathbf{x}}_h) + \mathbf{e}'_h$$

对于 $\mathbf{e}_h$，$\mathbf{e}'_h$ 满足假设 *10*的同分布随机变量。假设 $\mathbf{x}_0$ 是 σ_{dir}-光滑的，且几乎必然地，$\mathbf{x}_h$、$\hat{\mathbf{x}}_h$的范数均一致有界于 B。若 $\max_{1\le h<H}\left|\left|\widehat{f}(\mathbf{x}_h) - f^\star(\mathbf{x}_h)\right|\right| \le \varepsilon$则有

$$\mathcal{W}_2^2(\mathbf{x}_H, \widehat{\mathbf{x}}_H) \le \frac{9B^2H^6}{\sigma_{\mathrm{dir}}^2}\varepsilon^2\varepsilon.$$

证明。我们先引入中间随机变量 $\mathbf{x}_H^{(\ell)}$ for $1 \le \ell \le H$。令 $\mathbf{x}_h^{(\ell)} = \mathbf{x}_h$ for $h \le \ell$，并令

$$\mathbf{x}_{h+1}^{(\ell)} = \widehat{f}\left(\mathbf{x}_h^{(\ell)}\right) + \mathbf{e}'_t$$

否则。注意，$\mathbf{x}_H^{(1)} = \widehat{\mathbf{x}}_H$，且 $\mathbf{x}_H^{(H)} = \mathbf{x}_H$。根据 Wasserstein 距离的三角不等式，我们得到

$$\mathcal{W}_2(\mathbf{x}_H, \widehat{\mathbf{x}}_H) \leq \sum_{\ell=1}^{H} \mathcal{W}_2\left(\mathbf{x}_H^{(\ell)}, \mathbf{x}_H^{(\ell+1)}\right).$$

考虑　一个满足对所有 h 均有 $\mathsf{e}_h = \mathsf{e}'_h$ 的耦合。注意，在此耦合下，对任意 $h > \ell$，有

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}_h^{(\ell)} - \mathbf{x}_h^{(\ell+1)}\right\| &= \left\|\widehat{f}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) + \mathbf{e}_t - \widehat{f}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) - \mathbf{e}'_t\right\| \\
&= \left\|\widehat{f}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) - \widehat{f}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right\| \\
&\leq \left\|\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)} - \mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}\right\| + B \cdot \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right].
\end{aligned}$$

因此，特别是，

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}_H^{(\ell)} - \mathbf{x}_H^{(\ell+1)}\right\| &\leq \left\|\mathbf{x}_{\ell+1}^{(\ell)} - \mathbf{x}_{\ell+1}^{(\ell+1)}\right\| + B \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right] \\
&\leq \left\|\widehat{f}(\mathbf{x}_\ell) - f^\star(\mathbf{x}_\ell)\right\| + B \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right] \\
&\leq \varepsilon + B \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right]
\end{aligned}$$

根据假设，$\left\|\widehat{f}(\mathbf{x}_h) - f^\star(\mathbf{x}_h)\right\| \leq \varepsilon$。现在注意，并集界意味着：

$$\begin{aligned}
\sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)})\right] &= \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \leq h\right] \\
&\quad + \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and there exists } h' \leq h \text{ such that } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) \neq g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)})\right] \\
&\leq \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \leq h\right] \\
&\quad + \sum_{h=\ell}^{H-1} (H-1-\ell)\mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \leq h\right] \\
&\leq H \sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \leq h\right].
\end{aligned}$$

现在我们观察到

$$\mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \leq h\right] \leq \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \left\|\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)} - \mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}\right\| \leq \varepsilon\right]$$

由于 $\mathcal{G}$ 由多类仿射阈值给出，我们可以看到

$$\mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \left\|\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)} - \mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}\right\| \leq \varepsilon\right] \leq \sum_{1 \leq i,j \leq K} \mathbb{I}\left[|\langle \mathbf{w}_{ij}, \mathbf{x}_{h-1}\rangle| \leq 2\varepsilon\right]$$

其中 $\mathbf{w}_{ij}$ 是确定由 $\widehat{g}$诱导的决策边界的单位向量。根据光滑性，我们可以看到

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(\mathbf{x}_H^{(\ell)}, \mathbf{x}_H^{(\ell+1)}) &\le \varepsilon + BH \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{h=\ell}^{H-1} \mathbb{I}\left[\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \le h\right] > 1\right) \\
&\le \varepsilon + BH \sum_{h=1}^{H} \mathbb{P}\left(\widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell)}) \neq \widehat{g}(\mathbf{x}_{h-1}^{(\ell+1)}) \text{ and } \widehat{g}(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell)}) = g_\star(\mathbf{x}_{h'}^{(\ell+1)}) \text{ for } h' \le h\right) \\
&\le \varepsilon + BH \sum_{h=1}^{H} \sum_{1 \le i,j \le K} \mathbb{P}\left(|\langle \mathbf{w}_{ij}, \mathbf{x}_h \rangle| \le 2\varepsilon\right) \\
&\le \left(1 + \frac{2BH^2}{\sigma_{\text{dir}}}\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

将其代入开头的界，并注意到 $1 \le \frac{BH^2}{\sigma_{\text{dir}}}$，即可完成证明 . ■

现在我们可以证明定理 18了。具体而言，我们使用引理 G.1 将模拟遗憾的界$\widehat{}$转化为数据序列上 f与 $f^\star$ 之间距离的界。随后，我们应用定理 12 和 14 来控制这一距离。具体细节如下：

定理 *18* 的证明。 我们首先应用引理 G.1。注意，在我们的设定中， $\mathcal{G}$ 是多类$\widehat{}$仿射分类器的类别，且 $f^\star$, f_t 可按定理要求进行分解，其中令 τ表示将t 放入的轮次，并令

$$\widehat{f}_t(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau,\widetilde{g}_\tau(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{x}.$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$根据 $\mathbf{\Theta}_\tau$, i, $\mathbf{\Theta}_i^\star \in \mathcal{C}_{\mathbf{P}}$，这由 $\mathbf{\Theta}_\tau$的构造以及i 假设 8 推出，引理 G.1 所需的压缩性假设成立。此外，注意到由于 $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ 是凸的，且 $\mathbf{\Theta}_i^\star \in \mathcal{C}_{\mathbf{P}}$，因此有

$$\|\widetilde{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\text{F}} \le \|\widehat{\mathbf{\Theta}}_{\tau,i} - \mathbf{\Theta}^\star_{\pi_\tau(i)}\|_{\text{F}}. \tag{G.2}$$

现在，注意到算法 1 在一个轮次内不会更新预测函数，因此对于所有 t 满足$\prec\{t, t+1, \ldots, t+H\}$ 不包含 E 的整数倍的情况，我们的预测函数 f_t 在该区间上是常数。令 $\mathcal{I}$ 表示满足以下条件的时刻集合 t，即前述条件不成立的时刻：

$$\mathcal{I} = \{t \le T | \tau E - t > H \text{ for all } \tau \in \mathbb{N}\}.$$

于是，我们可以应用引理 G.1 得到

$$\begin{aligned}
\text{SimReg}_{T,H} &= \sum_{t=1}^{T}\sum_{h=1}^{H} \mathcal{W}_2^2(\mathbf{x}_{t+h}, \widehat{\mathbf{x}}_{t+h} | \mathscr{F}_{t-1}) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \in \mathcal{I}\right] \sum_{h=1}^{H} \mathcal{W}_2^2(\mathbf{x}_{t+h}, \widehat{\mathbf{x}}_{t+h} | \mathscr{F}_{t-1}) + \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \notin \mathcal{I}\right] \sum_{h=1}^{H} \mathcal{W}_2^2(\mathbf{x}_{t+h}, \widehat{\mathbf{x}}_{t+h} | \mathscr{F}_{t-1}) \\
&\le \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \in \mathcal{I}\right] \sum_{h=1}^{H} \frac{9B^2H^6}{\sigma_{\text{dir}}^2} \max_{1 \le h \le H} \left|\left|\widehat{f}(\mathbf{x}_{t+h}) - f^\star(\mathbf{x}_{t+h})\right|\right|^2 + 4HB^2R^2 \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \notin \mathcal{I}\right] \\
&\le \frac{9B^2H^7}{\sigma_{\text{dir}}^2} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \in \mathcal{I}\right] \sum_{h=1}^{H} \left|\left|\widehat{f}(\mathbf{x}_{t+h}) - f^\star(\mathbf{x}_{t+h})\right|\right|^2 + 4B^2R^2H \cdot \frac{HT}{E} \\
&\le \frac{9B^2H^8}{\sigma_{\text{dir}}^2} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{I}\left[t \in \mathcal{I}\right] \left|\left|\widehat{f}(\mathbf{x}_t) - f^\star(\mathbf{x}_t)\right|\right|^2 + 4B^2R^2H^2 \cdot \frac{T}{E} \\
&\le \frac{9B^2H^8}{\sigma_{\text{dir}}^2} \sum_{t=1}^{T} ||\widehat{\mathbf{y}}_t - f^\star(\mathbf{x}_t)||^2 + 4B^2R^2H^2 \cdot \frac{T}{E},
\end{aligned}$$

其中 $\widehat{}\mathbf{y}_t$ 是算法 1的预测。现在，我们可以应用定理16 ，并利用（G.2）对这一最后的量给出界。由此即得结论。
■

G.5 扩展

为简单起见，我们考虑了所有线性动力学都具有共同李雅普诺夫函数且稳定的情形。我们的结果可以扩展到具有模态依赖增益 $(\mathbf{K}_i)_{i\in K}$的情形，其中 $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{d_z\times d_u}$也可以如此处理，因为我们的证明表明，在实现低遗憾的同时，仿真能够准确恢复正确的模态序列。因此，如果我们知道哪些增益可以确保相互稳定性，也可以应用这些增益。只要保持所需的光滑性（例如，满足引理 3.1所保证的条件），也可以适用更一般的闭环策略。最后，由于我们的遗憾保证能够确保参数恢复，我们可以设想这样的情形：例如通过确定性等价控制综合构造增益，并利用诸如 Simchowitz 和 Foster [2020]中的扰动界来分析其次优性。