arXiv:2301.11222v1 [math.QA] 26 Jan 2023

层级 2 标准 $C_n^{(1)}$-模之间的组合关系

MIRKO PRIMC 和 TOMISLAV ˇSIKI ´C

Abstract. 对于仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$，湮灭层级 k 标准 $\hat{\mathfrak{g}}$-模的某些顶点算子的系数，构成了层级 k 标准模的定义关系。本文研究这些关系首项的组合结构，针对类型为 $C_n^{(1)}$ 的仿射李代数上的层级 $k = 2$ 标准 $\hat{\mathfrak{g}}$-模，主要结果是构造了湮灭场系数之间一组由组合参数化的关系。我们相信，所构造的关系之间的关系将在构造普适顶点算子代数 $V_{\mathfrak{g}}^k$（针对 $k = 2$）的极大理想的格罗布纳型基时发挥关键作用。

1. Introduction

令 $\mathfrak{g}$ 为一个单复李代数，$\hat{\mathfrak{g}}$ 为相应的仿射 Kac-Moody 李代数（参见 [K]）。在 [MP1] 中，为所有标准（即具有可积最高权的）$\hat{\mathfrak{g}}$-模 $L(\Lambda)$ 构造了组合基 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l_2$。对于所有单复 $\mathfrak{g}$ 以及所有正整数 k，该构造的一部分可以推广到真空$\hat{\mathfrak{g}}$-模 $L(k\Lambda_0)$。其中的关键要素是由以下场生成的广义 Verma $\hat{\mathfrak{g}}$-模 $N(k\Lambda_0)$ 上的顶点算子代数结构[1]：

$$x(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x(m)z^{-m-1} = Y(x(-1)\mathbf{1}, z), \quad x \in \mathfrak{g},$$

其中，$x(m) = x_m = x \otimes t^m$ 是仿射李代数元素的通常记号，而 $Y(v, z)$ 是顶点算子的通常记号。我们还记$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes t^0 \subset$ 和 $\hat{\mathfrak{g}}$。

令 R 为由$N(k\Lambda_0)$中的奇异向量生成的有限维 $\mathfrak{g}$-模，即

$$R = U(\mathfrak{g}) \cdot x_\theta(-1)^{k+1}\mathbf{1} \cong L_{\mathfrak{g}}((k+1)\theta),$$

其中 x_θ 是相对于 $\mathfrak{g}$的某个 Cartan 分解，关于最高根 θ 的根向量。接着，顶点算子的系数 $r(m)$、$r \in R$、$m \in \mathbb{Z}$

$$Y(r, z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r(m)z^{-m-k-1}$$

¯ ¯张成一个环路 $\hat{\mathfrak{g}}$-模 R。由于 $RN(k\Lambda_0) \subset N(k\Lambda_0)$ 是广义 Verma 模的极大子模（参见 [MP1], [PˇS1], [PˇS2] 及其中的参考文献），我们有

$$L(k\Lambda_0) = N(k\Lambda_0)/\bar{R}N(k\Lambda_0) \quad \text{and} \quad \bar{R}|_{L(k\Lambda_0)} = 0, \tag{1.1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 17B67；次分类 17B69、05A19。[1]$N(k\Lambda_0)$通常记作 $V^k(\mathfrak{g})$ 或 $V_{\hat{\mathfrak{g}}}(k, 0)$（参见 [LL]），但我们将采用 [PˇS1]和 [PˇS2]中的记法。

¯因此，我们称 R 中的元素为层级 k 标准（真空）$\hat{\mathfrak{g}}$-模的关系。注意，(1.1) 是仿射 Kac–Moody 李代数及其相关顶点算子代数表示论的推论。

可以构造这些关系的组合基——基本思路是利用关系 $r|_{L(k\Lambda_0)} = 0$，将 $L(k\Lambda_0)$ 的 PBW 张成集约化为基 B，并对单项式向量进行参数化

$$u(\pi)\mathbf{1} \in \mathcal{B} \subset L(k\Lambda_0) = U(\hat{\mathfrak{g}})\mathbf{1}$$

其单项式 π 属于对称代数 $S(\hat{\mathfrak{g}})$。具体分以下几步进行:

● 选择 $\mathfrak{g}$ 的一组（适当的）全序权基 B，以及 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的相应基 $\hat{B} = \bar{B} \cup \{c\}$，其中 c 是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中的典范中心元，并且

$$\bar{B} = \{b(m) \mid b \in B, m \in \mathbb{Z}\}.$$

¯我们将 B 上的严格序 $\prec$ 扩展到 B，使得 $m < m'$ 蕴含 $b(m) \lhd b'(m')$。由于 $b(m)\mathbf{1} = 0$ 对于 $m \geq 0$ 成立，在某些论证中只需考虑.....中的基元素

$$\bar{B}_{<0} = \{b(m) \mid b \in B, m < 0\} = \bar{B} \cap \hat{\mathfrak{g}}_{<0}.$$

● 用 P 表示单项式的集合

$$\pi = \prod_{b(j) \in \bar{B}} b(j)^{n_{b(j)}} \in S(\hat{\mathfrak{g}})$$

并以 $\mathrm{P}_{<0} = \mathrm{P} \cap S(\hat{\mathfrak{g}}_{<0})$ 表示。有时我们称 $\pi \in \mathrm{P}_{<0}$ 是一个长度为 $\ell(\pi)$、次数为 $|\pi|$ 、支集为 $\operatorname{supp}\pi$ 的带色分拆，

$$\ell(\pi) = \sum_{b(j) \in \bar{B}} n_{b(j)}, \quad |\pi| = \sum_{b(j) \in \bar{B}} n_{b(j)} \cdot j, \quad \operatorname{supp}\pi = \{b(j) \in \bar{B}_{<0} \mid n_{b(j)} > 0\},$$

其中带色部分 $b(j) \in \operatorname{supp}\pi$ 的次数为 $j < 0$、颜色为 $b \in B$，并在分拆中出现 $n_{b(j)}$ 次。对于 $\ell \geq 0$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，定义

$$\mathcal{P}^\ell = \{\pi \in \mathcal{P} \mid \ell(\pi) = \ell\}, \quad \mathcal{P}^\ell(m) = \{\pi \in \mathcal{P} \mid \ell(\pi) = \ell, |\pi| = m\}.$$

我们将不写乘积 $\mu\nu \in S(\hat{\mathfrak{g}}_{<0})$，而写作 $\mu \cup \nu \in \mathrm{P}_{<0}$，表示 $\mu \cup \nu$ 是由 μ 和 ν 的所有部分合在一起构成的分拆。同样，我们写作

$$\rho \subset \pi \quad \text{if} \quad \pi = \rho\kappa$$

对于某个 κ，称 $\rho \subset \pi$ 是从 ρ 到 π 的嵌入。我们将 ¯在 B 上的全序 $\prec$ 扩展到 P，使得 $\mu \prec \mu'$ 蕴含 $\mu\kappa \prec \mu'\kappa$。为了进行归纳论证，我们还需要 $\prec$ 在 $\mathrm{P}_{<0}$ 上是良序，并且 $\ell(\pi) > \ell(\pi')$ 或 $|\pi| < |\pi'|$ 蕴含 $\pi \prec \pi'$。

● 对于滤过 $U_\ell(\hat{\mathfrak{g}})$，$\ell \geq 0$，令

$$p_\ell \colon U_\ell(\hat{\mathfrak{g}}) \to S^\ell(\hat{\mathfrak{g}}) \cong U_\ell(\hat{\mathfrak{g}})/U_{\ell-1}(\hat{\mathfrak{g}})$$

为典范投影。对于每个 $\pi \in \mathrm{P}^\ell$，选取 $u(\pi) \in U_\ell(\hat{\mathfrak{g}})$，使得$p_\ell(u(\pi)) = \pi$。那么我们有一个 PBW基

$$\{u(\pi)\mathbf{1} \mid \pi \in \mathcal{P}_{<0}\}$$

关于 $N(k\Lambda_0)$ 以及商 $L(k\Lambda_0)$ 上相应的张成集。

● 确定关系 $r(m) \in R/\{0\}$ 的首项集合 $\ell t(R) \subset \mathbf{P}$:

$$\rho = \ell t(r(m)) \quad \text{if} \quad r(m) = c_\rho u(\rho) + \sum_{\rho<\kappa} c_\kappa u(\kappa), \quad c_\rho \neq 0.$$

于是，我们可以用环模 R 的首项来参数化一组基，也就是说，存在一组基 $\{r(\rho) \mid \rho \in \ell t(R)\}$，其属于 R，满足 $\ell t(r(\rho)) = \rho$，即

$$r(\rho) = u(\rho) + \sum_{\rho<\kappa} c_\kappa u(\kappa). \tag{1.2}$$

● 利用关系 $r(\rho)|_{L(k\Lambda_0)} = 0$，将 $L(k\Lambda_0)$ 的张成集 $\{u(\pi)\mathbf{1} \mid \pi \in \mathbf{P}_{<0}\}$ 化简为（希望如此[2]）一组基

$$\mathcal{B} = \{u(\pi)\cdot\mathbf{1} \mid \pi \in \mathcal{P}_{<0} \setminus (\ell t(\bar{R}))\}.$$

这里，$\pi \in \mathbf{P}_{<0}/(\ell t(R))$ 表示不属于由关系 R生成的理想 (R) 中的单项式 π。

如果把单项式 π 看作带色分拆，那么单项式向量的张成集 $\mathbf{B} \subset L(k\Lambda_0)$ 可由不含任何子分拆 $t(R)$ 的分拆来参数化——这相当于对分拆 π 的各部分施加某种组合式“差分条件”。

注意，构造组合基的最后两个步骤取决于在 $\mathbf{P}$ 上选取的一个序 $\prec$。在某些情况下，张成集 $\mathbf{B}$ 是一组基，我们也有 $L(k\Lambda_0)$ 的特征的相应组合描述，但要证明 $\mathbf{B}$ 的线性无关性可能是一项困难的任务。证明 $\mathbf{B}$ 是一组基的一种可能方法，是获得“正确”的组合特征公式，这可以通过某种组合方法得到（例如 [DK]，其中 [CMPP] 中的相关猜想针对 $k = 1$ 得到了证明），也可以通过其他方式得到。这里我们采用这样的思路：通过构造 $RN(k\Lambda_0)$ 的组合基，可以得到 $L(k\Lambda_0)$ 的正确特征公式，因为 $N(k\Lambda_0) \cong S(\hat{\mathfrak{g}}_{<0})$ 的特征公式显而易见，并且

$$\operatorname{ch} L(k\Lambda_0) = \operatorname{ch} N(k\Lambda_0) - \operatorname{ch} \bar{R}N(k\Lambda_0).$$

为了描述 $RN(k\Lambda_0)$ 的组合基，我们令

$$u(\rho \subset \pi) = r(\rho)u(\kappa)$$

对于一个嵌入 $\rho \subset \pi$，使得 $\pi = \rho\kappa$, $\rho \in \ell t(R)$。注意

$$r(\rho)u(\kappa) = u(\pi) + \sum_{\pi<\tau} c_\tau u(\tau),$$

因此我们有 $\ell t(u(\rho \subset \pi)) = \pi$。采用这种记号，我们可以将 $RN(k\Lambda_0)$ 的张成集写作

$$u(\rho \subset \pi)\mathbf{1}, \quad \rho \in \ell t(\bar{R}), \pi \in (\ell t(\bar{R})) \cap \mathcal{P}_{<0}. \tag{1.3}$$

如果任意两个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$ 和 $\rho_2 \subset \pi$ 之间存在一个关系

$$u(\rho_1 \subset \pi)\mathbf{1} - u(\rho_2 \subset \pi)\mathbf{1} = \sum_{\pi<\pi',\ \rho'\subset\pi'} c_{\rho'\subset\pi'}\, u(\rho' \subset \pi')\mathbf{1}, \tag{1.4}$$

那么我们可以利用 (1.4) 缩减张成集 (1.3)，对于每个 π，我们可以只取一个嵌入 $\rho(\pi) \subset \pi$、$\rho(\pi) \in \ell t(R)$，以及对应于 $RN(k\Lambda_0)$ 的缩减张成集中的向量

$$u(\rho(\pi) \subset \pi)\mathbf{1}, \quad \pi \in (\ell t(\bar{R})) \cap \mathcal{P}_{<0}. \tag{1.5}$$

[2]所得的张成集 $\mathbf{B}$ 不一定是一组基——参见 [MP2]。

这样的张成集显然线性无关，因为其首项是 $N(k\Lambda_0)$ 的 PBW基中的元素，即

$$\ell t\,(u(\rho(\pi)\subset\pi)\mathbf{1}) = u(\pi)\mathbf{1}.$$

上述推理适用于所有非扭结仿射李代数，因此，关系 (1.4) 之间的关系将蕴含 $L(k\Lambda_0)$ 的张成集 B 的线性无关性。

¯注1.1. 若 $\pi = \rho_1\rho_2\kappa$, $\rho_1,\rho_2 \in \ell t\,(R)$，则我们有两个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$和$\rho_2 \subset \pi$ 以及 $\ell(\pi) \geq 2k+2$。由 (1.2) 可得

$$\begin{aligned} r(\rho_1)r(\rho_2)u(\kappa) &= \big(u(\rho_1) + \sum_{\rho_1<\kappa_1} c_{\kappa_1}u(\kappa_1)\big)r(\rho_2)u(\kappa) \\ &= r(\rho_1)\big(u(\rho_2) + \sum_{\rho_2<\kappa_2} c_{\kappa_2}u(\kappa_1)\big)u(\kappa) \end{aligned}$$

而且 (1.4) 很容易推出。因此，问题在于“只需”对以下情况验证 (1.4)：

$$k+2 \leq \ell(\pi) \leq 2k+1.$$

对于 $k=1$，我们有 $k+2 = 2k+1 = 3$，也就是说，只需对 $\ell(\pi)=3$ 验证 (1.4)，这已在 [PˇS1] 中完成。

另一方面，对于 $k=2$，我们需要验证 $4 \leq \ell(\pi) \leq 5$的式(1.4)。本文的主要结果——下面的定理——仅给出了 $\ell(\pi)=4$的式(1.4)，希望 $\ell(\pi)=5$ 的情形也能以某种方式由此推出[3]。

定理1.2. 对于 $\pi \in \mathrm{P}^4(m)$中的任意两个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$ 和 $\rho_2 \subset \pi$，其中$\rho_1,\rho_2 \in \ell t\,(\bar{R})$，我们有一个关于 $C_n^{(1)}$的层级2关系

$$u(\rho_1\subset\pi) - u(\rho_2\subset\pi) = \sum_{\pi<\pi',\ \rho\subset\pi'} c_{\rho\subset\pi'}\,u(\rho\subset\pi'). \tag{1.6}$$

2. The array of negative root vectors of $C_n^{(1)}$

我们固定一个类型为 C_n, $n\geq 2$的单李代数 $\mathfrak{g}$，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$。给定一个Cartan子代数 $\mathfrak{h}$ 及其对应的根系 Δ，我们可以写成（如 [B]中所示）

$$\Delta = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \mid i,j = 1,\dots,n\}\backslash\{0\}$$

其单根为 $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, . . . $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = 2\varepsilon_n$。则$\theta = 2\varepsilon_1$。对每个 $\alpha\in\Delta$，我们选取一个根向量 X_α，使得 $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \alpha^\vee$。对于根向量 X_α，我们采用以下记法：

$$\begin{array}{llll} X_{ij} & \text{or just} \quad ij & \text{if} & \alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j\ ,\ i \leq j\,, \\ X_{\underline{ij}} & \text{or just} \quad \underline{ij} & \text{if} & \alpha = -\varepsilon_i - \varepsilon_j\ ,\ i \geq j\,, \\ X_{i\underline{j}} & \text{or just} \quad i\underline{j} & \text{if} & \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j\ ,\ i \neq j\,. \end{array}$$

沿用前面的记法 $x_\theta = X_{11}$。我们还将 $i = 1,\dots,n$ 记作

$$X_{i\underline{i}} = \alpha_i^\vee \text{ or just } i\underline{i}\,.$$

这些向量 X_{ab} 构成了 $\mathfrak{g}$ 的一组基 B，我们将以三角形式排列它们。例如，对于 $n=3$，基 B 为

[3]关于 [MP1] 中所有层级的关系之间的所有必要关系，均可由引理 9.2 得出。

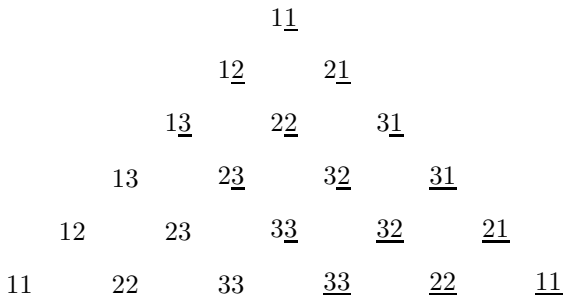


图1

为了简化对关系首项嵌入的计数，我们将对基 B使用通常的矩阵记法，即将 $i = 1,\dots,2n$ 作为行的第一指标，将 $j = 1,\dots,2n$ 作为列 / 对角线的第二指标。例如，对于 $n = 3$，基 B 为

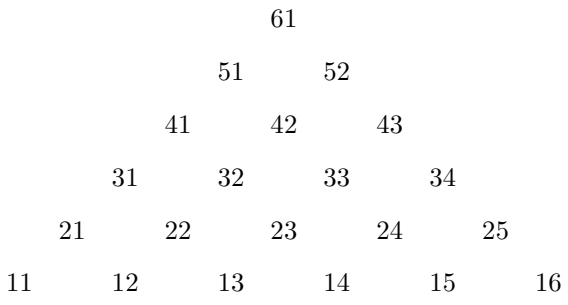


图2

此外，我们将在以下方案中写作$\bar{B}_{<0} = \coprod_{j>0} B \otimes t^{-j}$

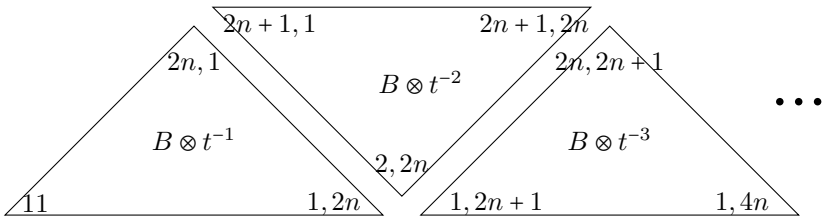


图3

我们将其称为 $C_n^{(1)}$的负根向量数组。

根据 [PˇS2]，主定理，单项式

$$\rho = \prod_{\beta\in\mathcal{B}} X_\beta(-j-1)^{m_{\beta,j+1}} \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha(-j)^{m_{\beta,j}} \tag{2.1}$$

¯是关系 $r(\rho) \in R$ 的首项，其中 k 表示类型为 $C_n^{(1)}$ 的仿射李代数的层级标准模，

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} m_{\beta,j+1} = b \quad , \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} m_{\alpha,j} = a \quad , \quad a + b = k + 1 \tag{2.2}$$

而 B 和 A 是次数为 $-j-1$ 和 $-j$的级联的可容许对。

对于一般的秩，我们可以将级联的可容许对 B 和 A 可视化为图4所示（参见 [PˇS2]中的图1）。

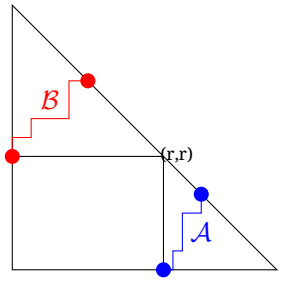


图4

¯采用图3中的新记法后，我们可以将图4上的一对可容许级联 (B, A) 重新理解为图5中的向下锯齿线。

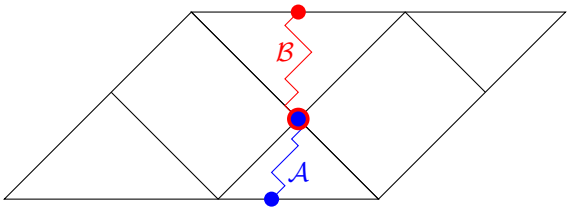


图5

注意，图5由图4中的三角形 Δ 及其关于斜边的镜像 Δ' 组成；该镜像沿着 Δ 和 Δ' 的一对平行边平移，使另外两条边重合。当然，所得平行四边形旋转了 $\pi/4$。

¯在 $B_{<0}$ 上，如图3所示，我们通过以下方式引入一个偏序 $\trianglelefteq$

$$X_{i,j} \trianglelefteq X_{p,r} \quad \text{if} \quad i \in \{1,\dots,p\} \quad \text{and} \quad j \in \{r, p+r-i\}. \tag{2.3}$$

换句话说，$b = X_{i,j}$ 位于顶点 $a = X_{p,r}$ 下方的锥内，如下方图6所示：

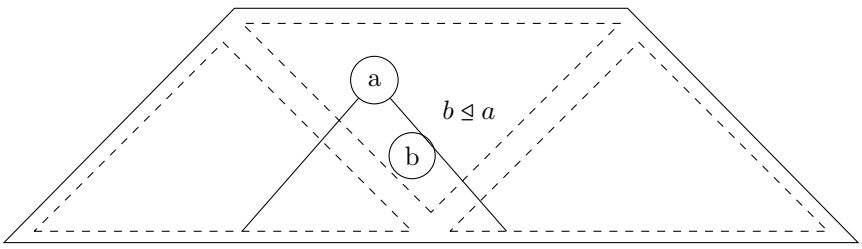


图6

采用这些约定，我们可以将 [PˇS2] 中关系$r(\rho)\in\bar{R}$ 的首项 ρ 的描述（参见 [P]）重述如下：对于任意一条向下锯齿线

$$a_1 \triangleright a_2 \triangleright \cdots \triangleright a_r$$

¯属于 r 个点的 $B_{<0}$中，单项式

$$\rho = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = k+1, \tag{2.4}$$

¯是关系 $r(\rho)\in R$ 的首项，该关系属于类型为 $C_n^{(1)}$ 的仿射李代数的层级 k 标准模。此外，这些是 $\mathsf{P}_{<0}$ 中 $\bar{R}$ 的全部首项。

在下一节中，我们将计算在三个连续三角形中，即图6中的梯形[4] T 内，支撑为 $\operatorname{supp}\pi$ 的嵌入 $\rho\subset\pi$ 的数量。

3. Colored partitions allowing at least two embeddings

对于一个带色分拆

$$\pi = \prod_{a\in\bar{B}_{<0}} a^{\pi(a)} \tag{3.1}$$

¯我们有 $|\operatorname{supp}\pi|\le \ell(\pi)$。基 $B_{<0}$ 写成由 $2n+1$ 行组成的数组，而$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$ 蕴含 $r\le 2n+1$。

引理 3.1. 设 $\ell(\pi)=k+2$，并假设 π 允许层级 k 标准模的关系首项有两种嵌入。那么，$\operatorname{supp}\pi$ 属于以下类型之一（其中 r、$s\in\mathbb{N}$ 和 δ 取自两个符号 | 和 ||）：

(A_r) $\operatorname{supp}\pi=\{a_1,\dots,a_r\}$，$r\ge 2$，$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$. $(B_{r\,\delta})$ $\operatorname{supp}\pi=\{a_1,\dots,a_r,b,c\}$，$r\ge 1$，$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$，$a_r\triangleright b$，$a_r\triangleright c$ 和 b 与 c 不可比较。若 b 和 c 位于同一行，则令 δ 为 |；否则令其为 ||。$(C_{\delta\,r})$ $\operatorname{supp}\pi=\{b,c,a_1,\dots,a_r\}$，$r\ge 1$，$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$，$b\triangleright a_1$，$c\triangleright a_1$ 和 b 与 c 不可比较。若 b 和 c 位于同一行，则令 δ 为 |；否则令其为 ||。$(D_{r\delta s})$ $\operatorname{supp}\pi=\{a_1,\dots,a_r,b,c,d_1,\dots,d_s\}$，$r,s\ge 1$，$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$，$a_r\triangleright b\triangleright d_1$,$a_r\triangleright c\triangleright d_1$，$d_1\triangleright\cdots\triangleright d_s$，且 b 与 c 不可比较。若 b 和 c 位于同一行，则令 δ为 |；否则令其为 ||。

证明。设 $\pi=a_1^{f_1}\dots a_r^{f_r}$，$f_1\cdots f_r>0$，$f_1+\cdots+f_r=k+2$，$a_1\triangleright\cdots\triangleright a_r$。若在 π 中删去一个因子 a_j，$j\in\{1,\dots,r\}$，我们得到 r 关系的首项

$$\rho_1 = a_1^{f_1-1}\dots a_r^{f_r},\quad \dots\quad \rho_r = a_1^{f_1}\dots a_r^{f_r-1}$$

并且我们有 r 个嵌入 $\rho_1\subset\pi,\dots,\rho_r\subset\pi$。特别地，对于 $r\ge 2$，我们在 π 中至少有两个嵌入。

现在设 $\ell(\pi)=k+2$，并设 $\rho_1\subset\pi$ 和 $\rho_2\subset\pi$ 是关系首项的两个不同嵌入，$\ell(\rho_1)=\ell(\rho_2)=k+1$。那么，存在 c_1 和 c_2，它们是π 的部分，使得

$$\pi = c_1\rho_1 = c_2\rho_2 = c_1c_2(\rho_1\cap\rho_2),$$

[4]请注意，图6中梯形的位置只有在 j 为偶数时中间三角形为 $B\otimes t^j$ 的情况下，才与图3一致；而当 j 为奇数时，图形应当翻转。不过，在我们的论证中这不会造成任何影响，因为翻转后的向下锯齿线仍然是一条向下锯齿线。

并且 $\rho_1 \neq \rho_2$ 推出 $c_1 \neq c_2$。因此

$$\rho_1 = c_2(\rho_1 \cap \rho_2), \quad \rho_2 = c_1(\rho_1 \cap \rho_2).$$

由于 ρ_1 和 ρ_2 是关系的首项，(2.4) 表明分拆 $\rho_1 \cup \rho_2$ 可以写成

$$a_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq a_t$$

而 ρ_1 和 ρ_2 则写成

$$\begin{aligned} \rho_1\colon &\quad a_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq a_p \trianglerighteq c_2 \trianglerighteq a_{p+1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq a_t, \\ \rho_2\colon &\quad a_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq a_q \trianglerighteq c_1 \trianglerighteq a_{q+1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq a_t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

若 $q < p$，则

$$a_q \trianglerighteq c_1 \trianglerighteq a_{q+1} \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq c_2$$

且 π 的支撑具有某个 $r \geq 2$ 所对应的类型 A_r。

若 $q = p$、c_1 和 c_2 可比较，设 $c_2 \triangleright c_1$，则 $a_p \trianglerighteq c_2 \trianglerighteq a_{p+1}$ 和 $a_p \trianglerighteq c_1 \trianglerighteq a_{p+1}$ 蕴含

$$a_p \trianglerighteq c_2 \triangleright c_1 \trianglerighteq a_{p+1},$$

并且再次有 $\operatorname{supp}\pi$ 属于类型 A_r，其中 $r \geq 2$。因此引理得证，而 $\operatorname{supp}\pi$ 属于类型 $B_{r\delta}$、$C_{\delta r}$ 或 $D_{r\delta s}$，具体取决于不可比较的部分 c_1 和 c_2 在 ρ_1 和 ρ_2 中的相对位置；对 $p = q$，它们写作 (3.2)。

区分部分 c_1 和 c_2 的相对位置并采用相应记号，即若 c_1 和 c_2 位于不同的行，则记为 $\delta = ||$；否则记为 $\delta = |$，这在后文中会很方便。□

引理 3.2。(i) 设 $2 \leq r \leq \min\{2n+1, k+2\}$。那么对于任意 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_r$ 的选择，都有

$$\binom{k+1}{r-1}$$

形如以下形式的分拆 π

$$\pi = a_1^{f_1} \dots a_r^{f_r}, \qquad f_1 \cdots f_r > 0, \quad f_1 + \cdots + f_r = k+2 \tag{3.3}$$

对于每个这样的 π，存在 r 个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$、...、$\rho_r \subset \pi$，使得

$$\rho_1 = a_1^{f_1 - 1} \dots a_r^{f_r}, \quad \dots \quad \rho_r = a_1^{f_1} \dots a_r^{f_r - 1}.$$

(ii) 设 r、$s \geq 0$、$3 \leq r + 2 + s \leq k+2$、$3 \leq r + a + s \leq 2n+1$，其中若 δ 是 $|$，则 $a = 1$；若 δ 是 $||$，则 $a = 2$。对于任意选取的、由 $\{a_1, \dots, a_r, c, d, b_1, \dots, b_s\}$ 构成且类型为 $B_{r\delta}$（对于 $s = 0$）、$C_{\delta s}$（对于 $r = 0$）或（$D_{r\delta s}$）的对象，都存在

$$\binom{k-1}{s+r-1}$$

形如 π 的分拆

$$\pi = a_1^{f_1} \dots a_r^{f_r} c d b_1^{g_1} \dots b_s^{g_s}, \quad f_1 \cdots f_r g_1 \cdots g_s > 0,\ f_1 + \cdots + f_r + g_1 + \cdots + g_s = k, \tag{3.4}$$

并且，对于每个这样的 π，都有 2 个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$ 和 $\rho_2 \subset \pi$，使得

$$\rho_1 = a_1^{f_1} \dots a_r^{f_r} c\, b_1^{g_1} \dots b_s^{g_s}, \qquad \rho_2 = a_1^{f_1} \dots a_r^{f_r} d\, b_1^{g_1} \dots b_s^{g_s}.$$

证明。由于有 $\binom{k+1}{r-1}$ 种写法表示 $f_1 + \cdots + f_r = k+2$, $f_1 \cdots f_r > 0$，第一个结论显然；又由于 $\ell(\rho) = k+1$，第二个结论也是显然的。这就证明了 (i)，而 (ii) 的证明类似。□

如 [P˘S1] 对带色分拆 π 集

$$N(\pi) = \max\{\#\mathcal{E}(\pi) - 1, 0\} \quad \mathcal{E}(\pi) = \{\rho \in \ell t(\bar{R}) \mid \rho \subset \pi\}.$$

¯令 T 为由数组 $B_{<0}$中的三个连续三角形构成的梯形。设

$$\Sigma_T(A_r) = \sum_{S\subset T,\ S \text{ is of the type } A_r} 1, \qquad N_T(A_r) = \sum_{\pi,\,\operatorname{supp}\pi\subset T,\,\operatorname{supp}\pi \text{ is of the type } A_r} N(\pi),$$

类型 $B_{r\,\delta}$、 $C_{\delta\,r}$和 $D_{r\delta\,s}$也同理。

注意，梯形有两种不同的朝向：长底边朝下，例如 T；长底边朝上，例如 T'。不过，我们有“上下对称性”，因此 $\Sigma_T(A_r) = \Sigma_{T'}(A_r)$，并且

$$\Sigma_T(B_{r\,\delta}) = \Sigma_{T'}(C_{\delta\,r}), \quad \Sigma_T(C_{\delta\,r}) = \Sigma_{T'}(B_{r\,\delta}), \quad \Sigma_T(D_{r\,\delta\,s}) = \Sigma_{T'}(D_{s\,\delta\,r}),$$

因此我们只考虑朝向为 T的梯形。显然，引理 3.2 蕴含：

引理 3.3. 对于引理 3.2 中的 r 和 s，有：

(1) $N_T(A_r) = (r-1)\binom{k+1}{r-1}\Sigma_T(A_r)$,

(2) $N_T(B_{r\,\delta}) = \binom{k-1}{r-1}\Sigma_T(B_{r\,\delta})$, (3)

$N_T(C_{\delta\,r}) = \binom{k-1}{r-1}\Sigma_T(C_{\delta\,r})$, (4) N_T

$(D_{r\,\delta\,s}) = \binom{k-1}{s+r-1}\Sigma_T(D_{r\,\delta\,s})$。

引理 3.4. 对于 $2 \le r \le 2n+1$，我们有：

$$\begin{aligned}\Sigma_T(A_r) &= \sum_{i_1=r}^{2n+1}\sum_{j_1=1}^{4n+1-i_1}\sum_{i_2=r-1}^{i_1-1}\sum_{j_2=j_1}^{j_1+i_1-i_2}\cdots\sum_{i_p=r-p+1}^{i_{p-1}-1}\sum_{j_p=j_{p-1}}^{j_{p-1}+i_{p-1}-i_p}\cdots\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}-1}\sum_{j_r=j_{r-1}}^{j_{r-1}+i_{r-1}-i_r} 1\\ &= \sum_{i_1=r}^{2n+1}\sum_{i_2=r-1}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_p=r-p+1}^{i_{p-1}-1}\cdots\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}-1}\pi(i_1,\dots,i_r),\end{aligned}$$

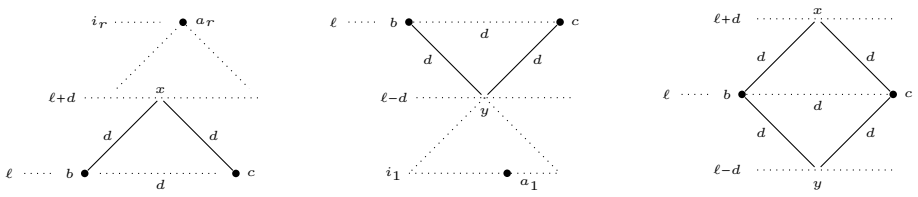
$$\pi(i_1,\dots,i_r) = (4n+1-i_1)(i_1-i_2+1)\cdots(i_{p-1}-i_p+1)\cdots(i_{r-1}-i_r+1).$$

证明。我们要计算所有

$$S = \{a_1,\dots,a_r\} \subset T, \quad a_1 \rhd \cdots \rhd a_r.$$

点 $a_p = (i_p, j_p) \in T$位于不同的行 $i_1 > \cdots > i_r$中。对于行 i_1中的第一个点 a_1，我们可以选择 $j_1 \in \{1,\dots,4n+1-i_1\}$，总共有 $4n+1-i_1$个点。对于行 i_2中的第二个点 $a_2 \rhd a_1$，我们可以选择 $j_2 \in \{j_1,\dots,j_1+i_1-i_2\}$，总共有 i_1-i_2+1 个点。以此类推，直到点 $a_r \in T$。□

注 3.5. 类型 $B_{r\,\delta}$、 $C_{\delta\,s}$ 和 $D_{r\delta\,s}$ 与类型 A_r 的区别在于，它们有两个不可比点 b 和 c。当 b 和 c 位于同一条直线 ℓ 上（即 δ 是 |）时，在对 Σ_T 进行计数的过程中，我们首先确定 b 和 c之间所有可能的距离 d，然后确定所有经过 b 和 c的可能直线 ℓ ——我们将三种对应的构型示意如下：



之后，我们采用与引理 3.4 的证明非常相似的方法进行论证。

引理 3.6. 对于 $1 \le r \le 2n$，我们有：

$$\Sigma_T(B_{r|}) = \sum_{d=1}^{2n+1-r} \sum_{\ell=1}^{2n+2-d-r} \sum_{i_1=\ell+d+r-1}^{2n+1} \sum_{i_2=\ell+d+r-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_r=\ell+d}^{i_{r-1}-1} \pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r),$$
$$\pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r) = (4n+1-i_1)(i_1-i_2+1)\cdots(i_{r-1}-i_r+1)(i_r-\ell-d+1).$$

证明。我们应确定所有可能的 $\{a_1,\dots,a_r,b,c\} \subset T$, $r \ge 1$ 的数量，使得 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_r$, $a_r \triangleright b$, $a_r \triangleright c$ 和 $b \ne c$ 位于同一条直线 ℓ 上。点 $b = (\ell, j_1)$ 与 $c = (\ell, j_2)$ 之间的距离 $d = j_2 - j_1$ 可能为 1，因为对于 $\ell = 1$，我们仍可以在 b 和 c 上方放置 $r \le 2n$ 个点 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_r$。一般而言，对于 $d \ge 1$、b 和 c 在直线 $1 \le \ell \le 2n+1$ 上的情况，点 a_r 位于直线 $i_r \ge \ell + d$ 上，并且我们至少需要上方有 $r-1$ 条直线来放置剩余的 $r-1$ 个点 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_{r-1}$。因此

$$\ell + d + r - 1 \le 2n + 1, \tag{3.5}$$

而对于 $\ell = 1$，这意味着

$$1 \le d \le 2n + 1 - r.$$

固定 d 后，根据 (3.5)，我们应取

$$1 \le \ell \le 2n + 2 - d - r.$$

现在我们按照引理 3.4 的证明进行，唯一的区别是，对于等边三角形 $\Delta(b,c,x)$ 中的顶点 x，存在

$$i_r - \ell - d + 1$$

直线 $\ell + d$ 上位于锥 a_r 下方的点。 □

引理 3.7。对于 $1 \le r \le 2n$，有：

$$\Sigma_T(C_{|r}) = 1 \sum_{d=1}^{2n+1-r} \sum_{\ell=d+r}^{2n+1} \sum_{i_1=r}^{\ell-d} \sum_{i_2=r-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_r=1}^{i_{r-1}-1} \pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r),$$
$$\pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r) = (4n+1-\ell-d)(\ell-d-i_1+1)(i_1-i_2+1)\dots(i_{r-1}-i_r+1).$$

证明。我们需要确定所有可能的 $\{b,c,a_1,\dots,a_r\} \subset T$, $r \ge 1$ 的数量，使得 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_r$, $b \triangleright a_1$, $c \triangleright a_1$ 和 $b \ne c$ 位于同一条直线 ℓ 上。点 $b = (\ell, j_1)$ 与 $c = (\ell, j_2)$ 之间的距离 $d = j_2 - j_1$ 可能为 1，因为在梯形 T 的“最小”顶行上至少有 2 个点。对于 r 个点 $a_1,\dots,a_r$，我们需要 r 行不同的行，而第 ℓ 行位于它们上方，距离为 d。因此

$$d + r \le 2n + 1.$$

对于固定的 d，显然有

$$d + r \le \ell \le 2n + 1.$$

在直线 ℓ 上，两个点 b 和 c 之间的距离为 d，共有 $4n + 1 - \ell - d$ 种放置方式。对于固定的 d，以及直线 $1 \le \ell \le 2n+1$ 上的 b 和 c，点 a_1 位于直线 $i_1 \le \ell - d$ 上。现在我们按照引理 3.4 的证明进行，唯一的区别在于，对于等边三角形 $\Delta(b,\ y,\ c)$ 的顶点 y，有

$$\ell - d - i_1 + 1$$

位于直线 i_1 上、且在 y 下方的锥内的点。 □

引理 3.8。对于 $2 \le r+s \le 2n$，我们有：

$$\Sigma_T(D_{r|s}) = \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{2n+2-r-s}{2} \rfloor} \sum_{\ell=s+d}^{2n+2-r-d} \sum_{i_1=\ell+d-r+1}^{2n+1} \sum_{i_2=\ell+d-r+2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_r=\ell+d}^{i_{r-1}-1} \sum_{l_1=s}^{\ell-d} \sum_{l_2=s-1}^{l_1-1} \cdots \sum_{l_s=1}^{l_{s-1}-1} \pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r;l_1,\dots,l_s),$$

$$\pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r;l_1,\dots,l_s) = (4n+1-i_1)(i_1-_2+1)\dots(i_{r-1}-i_r+1)(i_r-\ell-d+1)$$
$$(\ell-d-l_1+1)(l_1-l_2+1)\dots(l_{s-1}-l_s+1).$$

证明。我们应确定所有可能的 $\{a_1,\dots,a_r,b,c,d_1,\dots,d_s\}$,$r,s \ge 1$, $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_r$, $a_r \triangleright b \triangleright d_1$, $a_r \triangleright c \triangleright d_1$, $d_1 \triangleright \cdots \triangleright d_s$ 和 $b \ne c$ 位于同一条直线 ℓ 上的数量。我们需要在 ℓ 上方、距离为 d 处放置 r 行不同的行，并在 ℓ 下方、距离为 d 处放置 s 行不同的行。因此 $r-1+s-1+2d \le 2n+1$，对于正整数 d，我们有

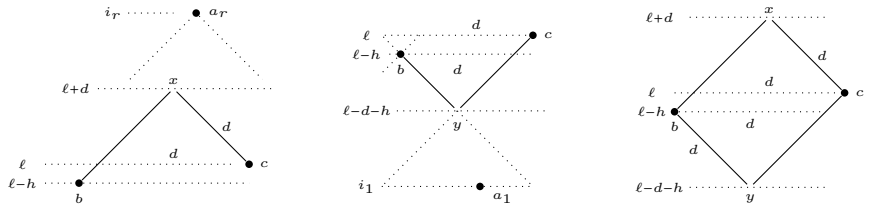
$$1 \le d \le \lfloor \tfrac{2n+3-r-s}{2} \rfloor.$$

对于固定的 d，我们有 $s+d \le \ell \le 2n+1-r-d$，并按照上面引理的证明进行推导：$\pi(d,\ell;\, i_1,\dots,i_r;\, l_1,\dots,l_s)$ 中的因子计算的是选定上一行中的一个点后，可在一行中放置的点数。特别地，因子 $(i_r-\ell-d+1)$ 计算菱形 $R(b,y,c,x)$ 的顶点 x 在直线 $\ell+d$ 上、下方锥 a_r 内可取的位置数；而 $(\ell-d-l_1+1)$ 表示直线 l_1 上位于顶点 y 下方锥内的位置数。□

注 3.9. 类型 $B_{r\|}$、$C_{\|s}$ 和 $D_{r\|s}$ 在两种可能的构型中，分别有两个位于不同直线上的不可比点 b 和 c



由于左右对称性，只需考虑 Σ_T，且只将第一个计数两次。与之前一样，我们先确定 $b=(\ell-h,j_1)$ 与 $c=(j_2,\ell)$ 之间所有可能的距离 $d=j_2-j_1 \ge 1$，然后确定所有可能的 h 以及经过 c 的直线 ℓ——我们将三个对应的构型示意如下：



引理 3.10. 对于 $1 \le r \le 2n-1$，我们有：

$$\Sigma_T(B_{r\|}) = 2\sum_{d=1}^{2n-r} \sum_{h=1}^{2n+1-d-r} \sum_{\ell=h+1}^{2n+2-d-r} \sum_{i_1=\ell+d+r-1}^{2n+1} \sum_{i_2=\ell+d+r-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_r=\ell+d}^{i_{r-1}-1} \pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r),$$

$$\pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r) = (4n+1-i_1)(i_1-i_2+1)\cdots(i_{r-1}-i_r+1)(i_r-\ell-d+1).$$

证明。我们的论证与引理 3.6 的证明相同：对于直线 $1 \le \ell \le 2n+1$ 上的 $d \ge 1$、$h \ge 1$ 和 c，点 a_r 位于直线 $i_r \ge \ell+d$ 上，并且我们至少需要上方的 $r-1$ 条直线来放置剩余的 $r-1$ 个点 $a_1 \triangleright \cdots \triangleright a_{r-1}$。因此

$$\ell+d+r-1 \le 2n+1, \tag{3.6}$$

对于 $\ell = h+1$，这意味着 $d \le 2n+1-r-h$。对于 $h=1$，我们确定 d 的界；对于选定的 d，我们确定 h 的界；并利用 (3.6) 确定 ℓ 的界：

$$1 \le d \le 2n-r, \quad 1 \le h \le 2n+1-d-r, \quad h+1 \le \ell \le 2n+2-d-r.$$

现在我们按照引理 3.6 的证明进行。 □

引理 3.11. 对于 $1 \le r \le 2n-1$，我们有：

$$\Sigma_T(C_{\|r}) = 2\sum_{d=1}^{2n-r}\sum_{h=1}^{2n+1-d-r}\sum_{\ell=d+h+r}^{2n+1}\sum_{i_1=r}^{\ell-d-h}\sum_{i_2=r-1}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}-1}\pi(d,h,\ell;i_1,\dots,i_r),$$

$$\pi(d,h,\ell;i_1,\dots,i_r) = (4n+1-\ell-d)(\ell-d-h-i_1+1)(i_1-i_2+1)\cdots(i_{r-1}-i_r+1).$$

证明. 对于 r 个点 $a_1,\dots,a_r$，我们需要 r 个不同的行，而第 ℓ 行位于它们上方，距离为 $d+h$。因此

$$d+h+r \le 2n+1.$$

对于 $h=1$，我们确定 d 的界；对于选定的 d，我们确定 h 的界；对于选定的 h，我们确定 ℓ 的界：

$$1 \le d \le 2n-r, \quad 1 \le h \le 2n+1-r-d, \quad r+d+h \le \ell \le 2n+1.$$

有 $4n+1-\ell-d$ 种方式将 c 放在直线 ℓ 上，使其与 b 的距离为 d。固定 d 后，直线 $1 \le \ell \le 2n+1$ 上的 h 和 c 确定时，点 a_1 位于直线 $i_1 \le \ell-d-h$ 上。现在我们按照引理 3.4 的证明进行，唯一的区别在于，对于三角形 $\Delta(b,y,c)$ 中的顶点 y，有

$$\ell-d-h-i_1+1$$

直线上的点 i_1 位于 y下方的锥内。 □

引理 3.12。对于 $2 \le r+s \le 2n-1$，我们有：

$$\Sigma_T(D_{r\|s}) = 2\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{2n+1-r-s}{2}\rfloor}\sum_{h=1}^{2n+2-2d-r-s}\sum_{\ell=s+d+h}^{2n+2-r-d}\sum_{i_1=\ell-r+d+1}^{2n+1}\sum_{i_2=\ell-r+d+2}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_r=\ell+d}^{i_{r-1}-1}$$
$$\sum_{l_1=s}^{\ell-d-h}\sum_{l_2=s-1}^{l_1-1}\cdots\sum_{l_s=1}^{l_{s-1}-1}\pi(d,\ell;i_1,\dots,i_r;l_1,\dots,l_s),$$

$$\pi(d,\ell;\,i_1,\dots,i_r;\,l_1,\dots,l_s) = (4n+1-i_1)(i_1-i_2+1)\dots(i_{r-1}-i_r+1)(i_r-\ell-d+1)$$
$$(\ell-d-h-l_1+1)(l_1-l_2+1)\dots(l_{s-1}-l_s+1)。$$

证明。我们需要在 ℓ 上方距离 d处放置 r 个不同的行，并在 $\ell-h$ 下方距离 d 处放置 s 个不同的行。因此 $r-1+s-1+2d+h \le 2n+1$。对于 $h=1$，我们确定 d的界；对于选定的 d，我们确定 h的界；对于选定的 h，我们确定 ℓ的界：

$$1 \le d \le \lfloor\tfrac{2n+2-r-s}{2}\rfloor, \quad 1 \le h \le 2n+3-2d-r-s, \quad s+d+h \le \ell \le 2n+1-r-d.$$

现在我们按照上述引理的证明来进行：$\pi(d,\ell;\,i_1,\dots,i_r;\,l_1,\dots,l_s)$ 中的各因子，计算的是当选定上一行中的一个点时，我们可以在一行中放置多少个点。特别地，因子 $(i_r-\ell-d+1)$ 计算的是平行四边形 $P(b,y,c,x)$ 的顶点 x 在其下方的锥内的直线 $\ell+d$ 上可以取多少个位置，而 $(\ell-d-h-l_1+1)$ 则表示直线 l_1 上位于顶点 y 下方锥内的位置数。□

4. Level 2 relations for $C_n^{(1)}$ for two embeddings in π, $\ell(\pi) = 4$

本节证明我们的主要结果：

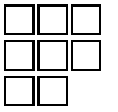
定理 4.1. 对于 $\pi \in \mathrm{P}^4(m)$ 中的任意两个嵌入 $\rho_1 \subset \pi$ 和 $\rho_2 \subset \pi$，其中$\rho_1, \rho_2 \in \ell\mathrm{t}(\bar{R})$，我们有一个关于 $C_n^{(1)}$ 的 2 层关系

$$u(\rho_1 \subset \pi) - u(\rho_2 \subset \pi) = \sum_{\pi \prec \pi',\ \rho \subset \pi'} c_{\rho \subset \pi'}\, u(\rho \subset \pi'). \tag{4.1}$$

对于一个带色分拆 (3.1)，我们将 π 的形状定义为 $|\pi| \in -\mathbb{N}$的普通分拆

$$\mathrm{sh}\,\pi = \prod_{a \in \bar{B}_{<0}} |a|^{\pi(a)}$$

，其部分为 $|a| \in -\mathbb{N}$，对于 $a \in \mathrm{supp}\,\pi = \{a \in B_{<0} \mid \pi(a) > 0\}$。注意 $|\mathrm{sh}\,\pi| = |\pi| = \sum_{a \in \bar{B}_{<0}} |a| \cdot \pi(a)$。我们将用杨表描绘普通分拆 $p = (-3)^2(-2)$



为证明该定理，对于一个固定的长度为 4 的普通分拆 p，我们需要计算“$\mathrm{sh}\,\pi = p$ 的二嵌入数量”

$$\sum_{\mathrm{sh}\,\pi = p,\ \pi \in \mathcal{P}^4(m)} N(\pi).$$

事实证明，计算梯形 T 的数量就足够了，而且要容易得多

$$N_T = \sum_{\pi,\ \ell(\pi)=4,\ \mathrm{supp}\,\pi \subset T} N(\pi).$$

根据引理 3.3，我们有：

$$\begin{array}{lll}
N_T(A_4) = 3\,\Sigma_T(A_4), & N_T(A_3) = 6\,\Sigma_T(A_3), & N_T(A_2) = 3\,\Sigma_T(A_2),\\
N_T(B_{2\|}) = \Sigma_T(B_{2\|}), & N_T(B_{2|}) = \Sigma_T(B_{2|}), & \\
N_T(B_{1\|}) = \Sigma_T(B_{1\|}), & N_T(B_{1|}) = \Sigma_T(B_{1|}), & \\
N_T(C_{\|2}) = \Sigma_T(C_{\|2}), & N_T(C_{|2}) = \Sigma_T(C_{|2}), & \\
N_T(C_{\|1}) = \Sigma_T(C_{\|1}), & N_T(C_{|12}) = \Sigma_T(C_{|1}), & \\
N_T(D_{1\|1}) = \Sigma_T(D_{1\|1}), & N_T(D_{1|1}) = \Sigma_T(D_{1|1}), &
\end{array}$$

因此，使用 Mathematica 软件包对引理 3.4–3.12 中的求和进行计算，我们得到：

引理 4.2. 设 T 是由 $^-$ 数组 $B_{<0}$ 和 $k = 2$ 中的三个连续三角形组成的梯形。那么

$$\begin{aligned}
N_T(A_4) &= \frac{48n^8 + 672n^7 + 2296n^6 - 4613n^4 + 798n^3 + 1009n^2 - 210n}{280},\\
N_T(A_3) &= \frac{56n^6 + 420n^5 + 590n^4 - 225n^3 - 151n^2 + 30n}{15},\\
N_T(A_2) &= \frac{20n^4 + 60n^3 + 19n^2 - 3n}{2},
\end{aligned}$$

$$N_T(B_{2|}) = \frac{128n^7 + 952n^6 + 1652n^5 + 490n^4 - 553n^3 - 182n^2 + 33n}{630},$$
$$N_T(B_{1|}) = \frac{48n^5 + 140n^4 + 120n^3 + 25n^2 - 3n}{30},$$
$$N_T(B_{2\|}) = \frac{144n^8 + 992n^7 + 840n^6 - 1456n^5 - 1239n^4 + 518n^3 + 255n^2 - 54n}{1260},$$
$$N_T(B_{1\|}) = \frac{56n^6 + 132n^5 + 50n^4 - 45n^3 - 16n^2 + 3n}{45},$$
$$N_T(C_{2|}) = \frac{16n^7 + 112n^6 + 160n^5 - 20n^4 - 101n^3 - 2n^2 + 15n}{90},$$
$$N_T(C_{1|}) = \frac{8n^5 + 20n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 3n}{6},$$
$$N_T(C_{2\|}) = \frac{32n^8 + 208n^7 + 112n^6 - 392n^5 - 182n^4 + 217n^3 + 38n^2 - 33n}{315},$$
$$N_T(C_{1\|}) = \frac{16n^6 + 32n^5 - 20n^3 - n^2 + 3n}{15},$$
$$N_T(D_{1|1}) = \frac{256n^7 + 1512n^6 + 2884n^5 + 1575n^4 - 686n^3 - 567n^2 + 66n}{2520},$$
$$N_T(D_{1\|1}) = \frac{72n^8 + 368n^7 + 448n^6 - 322n^5 - 707n^4 - 28n^3 + 187n^2 - 18n}{1260}.$$

引理 4.3. 设 T 是由 $^-$ 数组 $B_{<0}$ 和 $k = 2$ 中的三个连续三角形组成的梯形。那么

$$N_T = \sum_{r=2}^{4} N_T(A_r) + \sum_{r=1}^{2} \sum_{\delta=|,\|} (N_T(B_{r\,\delta}) + N_T(C_{\delta\,r}) + N_T(D_{1\,\delta\,1})) = \frac{7(10n-1)}{4}\binom{2n+6}{7}.$$

证明。引理 4.2 给出

$$\begin{aligned} N_T &= \frac{1120n^8 + 11648n^7 + 47824n^6 + 9800n^5 + 103390^4 + 50372n^3 + 6426n^2 - 1260n}{2520} \\ &= \frac{(10n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{180} \\ &= \frac{(10n-1)2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{180\cdot 16} \\ &= \frac{7(10n-1)}{4}\binom{2n+6}{7}. \end{aligned}$$

□

定理 4.1 的证明。由 [PˇS1] 中针对 $\pi \in \mathrm{P}^{k+2}(m)$ 的定理 9.2 和命题 10.1，我们得到湮灭场的关系空间

$$Q_{k+2}(m) = U(\mathfrak{g})q_{(k+1)\theta}(m) \oplus U(\mathfrak{g})q_{(k+2)\theta}(m) \oplus U(\mathfrak{g})q_{(k+2)\theta-\alpha^*}(m)\ . \tag{4.2}$$

特别地，对于层级 $k = 2$ 以及上述方程中的每个次数 $m \le -k-2$，可得

$$Q_4(m) = U(\mathfrak{g})q_{3\theta}(m) \oplus U(\mathfrak{g})q_{4\theta}(m) \oplus U(\mathfrak{g})q_{4\theta-\alpha^*}(m) \tag{4.3}$$

其中 $\alpha^{*}=\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2$。此外，同样得益于前述定理 9.2，定理 4.1 的证明归结为验证等式

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}^4(m)} N(\pi)=\dim Q_4(m)\ . \tag{4.4}$$

辛李代数情形下的 Weyl 维数公式 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}$（及相应的 $\rho=n\varepsilon_1+(n-1)\varepsilon_2+\cdots+2\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n$）给出

$$\dim L(s\theta) \;=\; \binom{2n+2s-1}{2s}, \tag{4.5}$$

$$\dim L(4\theta-\alpha^{\star}) \;=\; \frac{(2n+7)(n-1)}{4}\binom{2n+5}{6}. \tag{4.6}$$

因此，由 (4.5) 和 (4.6) 可得

$$\dim Q_4(m)=\dim L(3\theta)+\dim L(4\theta)+\dim L(4\theta-\alpha^{\star})=2n\binom{2n+6}{7}. \tag{4.7}$$

由于所有技术性引理 3.1–3.12 都是针对三个连续三角形（即梯形）证明的，因此等式 (4.4) 可以替换为等价的等式

$$\sum_{m=4}^{12}\sum_{\pi\in\mathcal{P}^4(m)} N(\pi)=9\times 2n\binom{2n+6}{7}-2\times\dim L(4\theta)=\frac{7(10n-1)}{4}\binom{2n+6}{7}\ . \tag{4.8}$$

事实上，利用杨表，我们可以列出以下情形

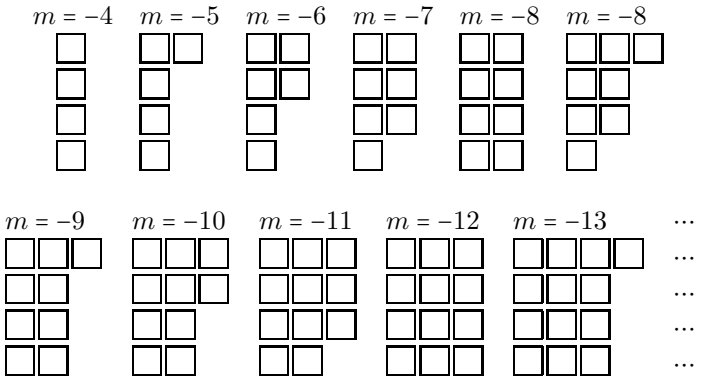


图 7

需要注意的是，从 $m=-4$ 到 $m=-12$ 的杨表涵盖了三个连续三角形的梯形图式中可能出现的所有情况。现在，由引理 4.3 和 (4.8) 可明显得出，等式 (4.4) 成立。□

注 4.4. 根据引理 3.4–3.12 和 Faulhaber 公式（参见 [O]），我们可以看出，N_T 是关于 n 的次数至多为 8 的多项式。因此，只需对 n的 9 个取值验证引理 4.3，例如取 $n=1,\dots,9$。$n=1$对应的 N_T值为 126，这对应于 [MP1]中的“第二简单情形”。$n=9$对应的 N_T值为 53 905 698——这个数字体现了在更高秩 n 下从 $C_1^{(1)}=A_1^{(1)}$ 过渡到 $C_n^{(1)}$时的复杂程度（当然，这一讨论仅适用于层级 $k=2$）。

Acknowledgement

本研究部分由 QuantiXLie 卓越中心资助。该项目由克罗地亚政府和欧盟通过欧洲区域发展基金——竞争力与凝聚力运营计划（资助编号 KK.01.1.1.01.0004）共同出资。

References

[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, 巴黎, 1961 年。[CMPP] *New partition identities from* $C_\ell^{(1)}$ - S. *modules* **57 77** 2022 161 184 Capparelli、A. Meurman、A. Primc 和 M. Primc, , Glas. Mat. Ser. III ( ) ( ), –。[DK] J. Dousse 和 I. Konan, *Characters of level* 1 *standard modules of* $C_n^{(1)}$ *as generating* , *functions for generalised partitions* 2212 12728 arXiv: . .[K] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras* 3第 版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990 年。[LL] J. Lepowsky 和 H.-S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Represen-tations* 227, ¨ 2003 , 数学进展, 第 卷, Birkhauser, 波士顿, 。[MP1] A. Meurman 和 M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of* $\mathfrak{sl}$ 2 $\mathbb{C}$ ˜ *and com-* (,) , 美国数 *binatorial identities* **137**, 652 1999 学学会回忆录, 第 号 ( )。[MP2] A. Meurman 和 M. Primc, *A basis of the basic* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})\tilde{}$*-module*, 《当代数学通讯》3 (2001), 593–614。[O] G. Orosi, *A simple derivation of Faulhaber's formula*, Applied Math. E-Notes 18 (2018), 124-126。[P] M. Primc, *Some Combinatorial Coincidences for Standard Representations of Affine Lie Algebras* ´ *Affine Vertex and W-algebras* , 收录于 D. Adamovic、P. Papi 的书中, , , Springer INdAM 丛书 (SINDAMS, 第 37 卷) (2019) 203-218。[P˘S1] M. Primc 和 T. ˘Siki´c, *Combinatorial Bases of Basic Modules for Affine Lie Algebras* $C_n^{(1)}$, 数学物理杂志 57(9) (2016), 1–19。[P˘S2] M. Primc 和 T. ˘Siki´c, *Leading terms of relations for standard modules of affine Lie algebras* $C_n^{(1)}$, Ramanujan J. 48 (2019), 509–543。

Mirko Primc, University of Zagreb, Faculty of Science, Bijenička 30, 10000 Zagreb, Croatia *Email address*: primc@math.hr Tomislav Šikić, University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Com-puting, Unska 3, 10000 Zagreb, Croatia *Email address*: tomislav.sikic@fer.hr