使用间断伽辽金方法求解宾汉黏塑性浅层流的正则化方法

Felipe Fern´andez[a], *, Sof´ıa L´opez-Ord´o˜nez[a], Sergio Gonz´alez-Andrade[a]

[a]*Research Center on Mathematical Modeling (MODEMAT), Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuad or.*

arXiv:2301.11238v1 [math.NA] 26 Jan 2023

摘要

本文旨在模拟浅水状态下的黏塑性流动。具体而言，我们采用宾汉模型：当应力低于某一阈值时，材料表现为固体；否则便会流动，表现为流体。该问题的主要难点在于浅水方程与黏塑性本构定律的耦合，以及求解所需的高昂计算成本。尽管已有许多关于这一问题的研究，但其中大多数采用显式方法和简化的经验模型。

为适应非均匀网格和复杂几何，我们在本研究中采用间断伽辽金方法求解浅层黏塑性流。该方法具有高度并行化、h-与p-自适应以及捕捉激波的能力，因而颇具优势。此外，我们通过数值通量处理单元间界面处的不连续性，以确保非线性双曲方程的解保持稳定。为将宾汉模型与浅水方程耦合，我们采用三种不同方案对问题进行正则化。最后，为展示该方法的有效性，我们针对浅水方程的常见基准算例进行了数值算例研究。

关键词： 宾汉流体，浅水方程，正则化，不连续伽辽金法 n

1. 引言

浅水方程能够准确模拟渠道、河流、海洋、洪水和海啸中的流动 [16, 59]。这些方程是在假设流体高度远小于水平长度尺度的前提下，由纳维–斯托克斯方程推导而来 [16]。在这一过程中，连续性方程和动量方程沿深度积分。所得方程假定水平速度均匀、压力呈静水压力分布，并忽略垂直速度。因此，浅水方程适用于长波或浅层流体的流动。由于我们关注的是地球物理流的模拟，其水平长度尺度（千米）远大于垂直长度尺度（米），因此浅水方程为我们提供了合适的理论框架。浅水方程最初由德·圣维南于1864年提出，布辛内斯克于 1872 [16], 提出；研究人员已利用这些方程模拟地球物理流，并针对这些主题提出了许多方法、发表了大量论文。本文不打算对相关文献进行全面综述。不过，我们将重点介绍一些相关文献，以讨论该领域的最新进展，并阐述本研究的贡献。

研究人员使用传统有限差分法和显式迎风格式对熔岩和雪崩进行建模。在 Savage 和 Hutter 的开创性工作中 [55], ，作者求解了类似于浅水方程的深度平均方程，并采用莫尔–库仑本构关系，对颗粒材料在一维粗糙斜坡上的运动进行建模。他们使用有限差分法，并

*通讯作者*Email addresses:* felipe.fernandez.ayala@gmail.com(Felipe Fern´andez), sofia.lopezo@epn.edu.ec (Sof´ıa L´opez-Ord´o˜nez), sergio.gonzalez@epn.edu.ec (Sergio Gonz´alez-Andrade)

报告了欧拉方法存在的困难，并指出拉格朗日方法更简单、高效且可靠。此外，作者通过实验室实验验证了数值预测的颗粒流运动。该工作在 [34]，中扩展到二维，在 [38]，中扩展至考虑孔隙流体，并在 [32] 中扩展到复杂地形。遗憾的是，经典有限差分方法在解存在不连续性的区域可能会失效，因为微分方程在这些区域不成立 [45]。为解决这一问题，人们提出了用于有限差分的激波捕捉方法。例如，在 [58]，中，研究人员采用欧拉激波捕捉非振荡中心格式，该格式以经典 Lax-Friedrichs格式为基础，并结合了前沿追踪方法。其他作者 [39, 40, 41] 使用双迎风欧拉格式来捕捉激波。除了激波捕捉方面的困难外，有限差分法还需要扩展计算模板以达到高阶精度，而这对于二维问题和复杂几何可能会造成问题。此外，在边界处对扩展后的模板进行精确且稳定的处理并非易事。

同样，有限体积法已被用于求解浅水方程 [45]。在 [22, 51, 17, 50, 29] 中，采用有限体积法对熔岩、海啸、颗粒流和雪崩等地球物理流进行建模的应用已得到成功处理。尽管有限体积法中使用的本质无振荡格式允许采用非均匀网格或非结构网格，但其计算成本和复杂性较高 [33]。此外，数值解面临的一个重要困难是对干湿界面的正确追踪。文献中的大多数有限体积方法采用显式格式，因此稳定性受 Courant-Friedrichs-Lewy（CFL）条件控制。CFL 条件由控制方程的最大特征速度确定，而最大特征速度取决于流动厚度的平方根。因此，产生负厚度的数值格式会导致数值问题，并且在物理上也不合理。为解决这一问题，一种简单但有效的方法是在每次时间迭代后将所有负厚度设为零 [8]。然而，这种方法可能无法保持系统的总质量。

浅水方程的实际应用（例如地球物理流动）通常由床面地形、摩擦等源项主导。双曲守恒律中的源项往往会使系统存在稳态解，此时通量与源项必须彼此平衡。研究人员提出了所谓的良平衡方法，以满足这种平衡。对于浅水方程，良平衡方法能够在稳态下保持静水静止状态 [6]。直接采用常规方法可能无法精确保持这一稳态，并在稳态附近引入伪振荡。良平衡方法的另一优点是能够使用粗网格求解此类稳态解的小扰动。为保持定常稳态解， [43], 中的作者采用了一种中心迎风有限体积格式，该格式还能够保持水深正性。其他用于处理干湿前沿的守恒方法也已被提出，例如 [5, 47]。

除了上述由干湿界面的数值建模引起的计算不稳定性外，当摩擦项或材料建模项取决于流动厚度或其倒数时，也可能出现其他计算问题，例如曼宁公式 [8]。例如， [8, 5], 中采用半隐式格式求解摩擦项，以防止此类不稳定性。类似地，也有人提出采用隐式显式龙格–库塔方法 [53] 处理刚性源项。采用半隐式格式或隐式显式格式的另一优点是，时间步长不受 CFL 条件限制。

除了有限差分法和有限体积法外，有限元法具有实现高阶精度和确保几何灵活性的潜力。然而，该方法本质上是隐式的，因为它需要对质量矩阵求逆。因此，有限元法用于含时问题时，其计算成本可能高于显式有限差分法和有限体积法。此外，由于试探函数/基函数仅取决于网格 [33]，有限元法无法直接采用迎风处理。此外，在方程中直接使用高度和速度的等阶近似空间可能导致伪空间振荡 [48]。

另一种选择是采用间断伽辽金方法，它兼具有限元法和有限体积方法的优点。该方法适用于非均匀网格和复杂几何，并能发挥高阶方法的优势。与有限元法一样，通过丰富局部基函数，可以提高间断伽辽金方法的精度。与有限体积方法类似，间断伽辽金方法在单元界面处使用数值通量，从而实现

信息交换。这类通量的计算对于数值解的精度和稳定性至关重要。该方法具有高度并行化、h-与p-自适应以及捕捉激波的能力[33]，因此颇具吸引力。不过，这些优势并非没有代价：由于单元解耦，自由度总数会增加，从而带来额外的计算成本。然而，质量矩阵是局部的而非全局的，可以低成本求逆，因此显式格式的计算开销较低。此外，高阶多项式表示会导致人工振荡，这类振荡往往局限于局部，并出现在解的不连续处。尽管这些振荡不会破坏该方法的精度，但它们属于伪振荡，在许多情况下都无法容忍。幸运的是，人们已提出斜率限制技术和其他方法 [15] ，以减轻这些不必要振荡的影响。基于这些原因，间断伽辽金方法通常用于求解双曲型方程。

间断伽辽金方法最初由 [52] 提出，用于求解稳态中子输运方程。文献 [11, 23]探讨了将其扩展用于求解双曲型系统。该方法已得到广泛应用，许多教科书也从不同角度介绍了这一活跃的研究领域[33]。研究人员已成功使用间断伽辽金方法求解浅水方程，例如 [56, 46, 2, 31, 25, 19, 20, 49]。此外，许多研究也处理了干湿界面问题，例如 [9, 24, 13, 60, 42, 30, 14]。通常，这些研究采用显式时间步进，并受到 CFL 条件的限制。

熔岩、雪崩和泥石流等地球物理材料的流变行为难以确定，因为这类材料具有非均质性，且包含尺寸范围广泛的不规则颗粒 [3]。此外，研究人员通常利用复杂山地地形中以往事件的数据，或开展小尺度实验来验证这些流变模型。因此，这种验证并非易事。由于这些原因，地球物理流的行为仍存在活跃的争论，并持续受到研究。尽管存在这些困难，地球物理流通常被建模为塑性材料，即当其应力状态超过某个临界阈值时，材料便会屈服并开始流动。流体动力学中常用两种塑性理论：库仑塑性和黏塑性 [3]。关于地球物理流本构流变行为的综述见 [3], ；关于黏塑性流数值模拟的综述，请参阅 [54]。

本文旨在将地球物理流体建模为黏塑性材料，具体采用宾汉模型。在该模型中，如果材料的应力大小低于某个临界阈值，即材料的屈服应力，就不会发生变形，材料表现为固体。然而，如果超过屈服应力，材料就会发生变形并像流体一样流动。因此，材料的屈服应力就是固态开始持续变形（即流动）时所对应的应力。文献中有一些研究通过简化的经验模型，将宾汉模型引入浅水方程来研究这一问题。例如，Coussot [18] 为黏塑性材料提出了一种简化模型，并通过实验水槽中的泥石流稳态均匀流对该模型进行了验证。随后，有研究将这一摩擦表达式引入采用有限体积法求解浅水方程的数值模型中 [44]。在 [41], 中，研究人员使用速度的模型函数（而非应变率张量）。该模型的数值解相对容易求得，但无法准确描述宾汉材料的本质。

为在浅水方程中严格纳入宾汉模型，研究人员 [10, 35] 对三维方程进行深度积分，并得到平面内深度平均应力与平面内变形速率之间的本构关系。需要注意的是，浅水方程中宾汉模型所对应的本构定律与三维情形具有相似的结构。该问题的主要难点在于浅水方程与黏塑性本构定律之间的耦合，以及求解所需的高昂计算成本。该模型的塑性应力项不可微，而浅水方程与宾汉模型耦合后的变分形式会导致动量方程成为一个不等式，难以高效求解。为克服这一困难，研究人员采用正则化或增广拉格朗日方法。Ionescu 在 [35] 采用隐式（后向）欧拉格式，并通过有限元离散，结合增广拉格朗日方法和迭代分解协调格式，求解动量方程的变分不等式。作者采用带迎风策略的有限体积法求解连续介质方程。此外，作者还推导并纳入了黏塑性材料与平面斜坡之间的摩擦接触

。这项针对平面斜坡开展的研究，随后在 [37, 36]扩展至一般地形。不过，该研究未考虑平衡保持性质或干湿界面处理。在 [10], ，研究人员采用具有平衡保持性质的增广拉格朗日方法，并结合有限体积离散，求解一维宾汉黏塑性流。在 [1], ，研究人员将先前的工作扩展至 [10] ，推导出用于浅水方程的积分Herschel-Bulkley模型（该模型推广了宾汉定律），并求解了这一问题。作为进一步扩展，研究人员采用另一种对偶方法，即 Berm´udez-Moreno 方法，来模拟黏塑性雪崩 [26] ，而非使用增广拉格朗日方法。在这项工作中，作者还纳入了干湿界面处理。他们报告称，Berm´udez-Moreno 方法通常比增广拉格朗日方法更高效。这项工作又在 [27]扩展至二维问题。 [4] 研究了结合热冷却的浅层黏塑性模型在熔岩穹丘中的应用， [7]则研究了其在复杂三维地形上的熔岩流中的应用。

我们不采用增广拉格朗日方法或 Berm´udez-Moreno 方法求解浅水黏塑性模型，而是提出采用一种简单且易于实现的正则化方法，如文献 [21]所示。我们提出并研究了三种正则化方案，并通过数值测试展示了它们的优异性能。其中两种正则化属于局部类型，另一种属于全局类型。局部类型正则化实施局部平滑，使应力产生一个 C^1 函数；相比之下，全局类型正则化是C^∞ 光滑的。其基本思想是修改问题，从而恢复非线性牛顿流体的标准方程。借助这些正则化方法，固体区域被建模为具有较大黏度的流体，并且该问题的数值解可以采用牛顿-拉夫森等成熟方法获得二次收敛。此外，为适应非均匀网格和复杂几何，我们采用间断伽辽金方法。如前所述，该方法具有高度并行化、h-与p-自适应以及捕捉激波的能力，因而颇具吸引力。我们使用能够确保问题获得稳定解的数值通量处理单元间界面处的不连续性。第 2 节和第 3 节介绍浅水方程及其向量形式。第 4 节详细介绍我们的正则化方法，第 5 节则描述间断伽辽金方法。第 6 节通过常用基准算例开展数值算例，展示我们方法的有效性；第 7 节给出总结性结论。

2. 浅水方程

考虑一个三维区域，其中具有自由表面的流体受到重力作用，重力方向与$\mathbf{e}_3'$相反。流体高程为 $\xi(t,\ x_1,\ x_2)$，地形表面为 $H(t,\ x_1,\ x_2)$，因此流体深度为 $h = \xi - H$，参见图 1。

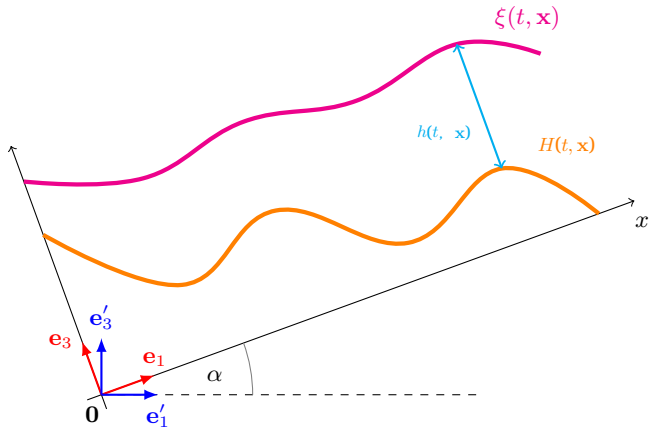

图 1：浅水方程中的流体和地形示意图。

浅水　　-水假设使我们能够用深度平均水平速度分量 u_1 和 u_2近似表示

由其深度平均 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ [59]，即，

$$\bar{u}_\alpha(t,x_1,x_2) = \frac{1}{h(t,x_1,x_2)} \int_H^\xi u_\alpha(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_3\,, \quad \alpha = 1,2\,. \tag{1}$$

假设密度 ρ 为常数，我们对 x_3上的连续性方程 $\mathbf{divu} = 0$ 进行积分，代入边界条件，并使用莱布尼茨积分法则，得到第一个浅水方程，即连续性方程:

$$0 \;=\; \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(h\,\bar{u}_1\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(h\,\bar{u}_2\right)\,, \tag{2}$$

其中， $t \in \mathbb{R}^+$ 为时间变量。

类似地，深度平均动量方程可写为:

$$\frac{\partial(h\,\bar{u}_1)}{\partial t} + \frac{\partial(h\,\bar{u}_1^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h\,\bar{u}_2\,\bar{u}_1)}{\partial x_2} + \frac{1}{2}g\,\cos(\alpha)\frac{\partial(h^2)}{\partial x_1} + g\,h\,\sin(\alpha) + g\,h\,\cos(\alpha)\frac{\partial H}{\partial x_1} \;=\; \frac{T_1}{\rho} \tag{3}$$

$$\frac{\partial(h\,\bar{u}_2)}{\partial t} + \frac{\partial(h\,\bar{u}_2\,\bar{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h\,\bar{u}_2^2)}{\partial x_2} + \frac{1}{2}g\,\cos(\alpha)\frac{\partial(h^2)}{\partial x_2} + g\,h\,\cos(\alpha)\frac{\partial H}{\partial x_2} \;=\; \frac{T_2}{\rho}\,, \tag{4}$$

其中， g 为重力，且

$$T_\alpha \;=\; \frac{\partial\left(h\,\bar{\sigma}_{\alpha 1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(h\,\bar{\sigma}_{\alpha 2}\right)}{\partial x_2} + \tau_{s\alpha} - \tau_{b\alpha}\,, \tag{5}$$

其中， $\bar{\sigma}_{\alpha 1}$ 和 $\bar{\sigma}_{\alpha 2}$ 为深度平均应力分量， $\tau_{s\alpha}$ 和 $\tau_{b\alpha}$ 分别为与流体表面和底部相切的剪切应力。在本研究中，我们假设这些表面应力为零，即 $\tau_{s\alpha} = 0$ 和 $\tau_{b\alpha} = 0$。

在文献中，我们发现了几种应力项 [16, 12, 40, 59, 41]模型。例如，在 [41] 中用于描述宾汉流的阻滞应力定义为:

$$T_\alpha = \sigma_o \frac{\bar{u}_\alpha}{|\bar{u}|} + 3\eta\frac{\bar{u}_\alpha}{h}\,, \tag{6}$$

其中， σ_o 为屈服应力， η 为动力黏度。正如引言中所述，在该模型中，应力是速度的函数，而不是应变率张量的函数，因此计算求解不那么繁琐。然而，这些模型只是简化的经验近似，无法体现宾汉模型的真实特性。因此，本研究不采用这些模型。

在本研究中，我们采用一种深度积分宾汉定律，用于模拟 [10, 28,26, 27]中的黏塑性雪崩。该公式中的深度平均应力 [27] 如下

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta\left(\mathbf{D} + \mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathbf{I}\right) + \sqrt{2}\sigma_o\,\frac{\mathbf{D}+\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathbf{I}}{\|\mathbf{D}\|_c} & \text{if} \quad \|\mathbf{D}\|_c \neq 0 \\ \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|_c \leq \sqrt{2}\sigma_o & \text{if} \quad \|\mathbf{D}\|_c = 0\,, \end{cases} \tag{7}$$

其中， $\bar{\mathbf{u}} = [\,\bar{u}_1\,,\,\bar{u}_2]$， η 为黏度， σ_o 为屈服应力（塑性阈值），$\mathbf{I}$ 为 2×2 单位矩阵， $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$为二维对称二阶张量，其分量为 $\bar{\sigma}_{11}$、 $\bar{\sigma}_{12}$、 $\bar{\sigma}_{21}$、 $\bar{\sigma}_{22}$，并且

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{\mathbf{u}} + \nabla\bar{\mathbf{u}}^\top\right)\,, \tag{8}$$

其中 $(\nabla\bar{\mathbf{u}})_{ij} = \partial\bar{u}_j/\partial x_i$ 对 $i = 1,2$ 和 $j = 1,2$ 成立。最后，范数定义为

$$\|p\|_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} p_{ii}\right)^2}\,. \tag{9}$$

3. 向量方程

设 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ 为一个空间维度为 $d = 1,2$、边界为 Γ 的流体域。在时间区间 $t \in [0, t_f]$ 内，浅水方程为：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h\bar{u}_2)}{\partial x_2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial (h\bar{u}_1)}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u}_1^2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} g_c \frac{\partial (h^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h\bar{u}_1\,\bar{u}_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \left(h\,\bar{\sigma}_{11}/\rho\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(h\,\bar{\sigma}_{12}/\rho\right)}{\partial x_2} - g_s\,h - g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial (h\bar{u}_2)}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u}_1\,\bar{u}_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial (h\bar{u}_2^2)}{\partial x_2} + \frac{1}{2} g_c \frac{\partial (h^2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \left(h\,\bar{\sigma}_{21}/\rho\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(h\,\bar{\sigma}_{22}/\rho\right)}{\partial x_2} - g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_2}\,, \tag{12}$$

其中 $g_c = g\,\mathsf{cos}(\alpha)$ 和 $g_s = g\mathsf{sin}(\alpha)$。我们忽略底部和表面的剪切应力，即 $\tau_{s1} = \tau_{b1} = \tau_{s2} = \tau_{b2} = 0$，并采用方程 (7) 中的宾汉模型。

请注意，上述系统是一个二阶问题，因为项 $\bar{\sigma}_{11}$、$\bar{\sigma}_{12}$、$\bar{\sigma}_{21}$ 和 $\bar{\sigma}_{22}$ 也包含 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 的空间导数。因此，我们引入辅助张量 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ [19, 33]，用以表示速度梯度，即

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \nabla \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \partial \bar{u}_1/\partial x_1 & \partial \bar{u}_2/\partial x_1 \\ \partial \bar{u}_1/\partial x_2 & \partial \bar{u}_2/\partial x_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

我们将方程 (10)、(11)、(12) 和 (13) 改写为向量形式的一阶方程组

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{S} \tag{14}$$

$$\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{G}\,, \tag{15}$$

其中，我们将辅助张量 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 向量化为 $\mathbf{E} = \mathsf{vec}(\boldsymbol{\mathcal{E}}) = [\mathcal{E}_{11}\,, \mathcal{E}_{21}\,, \mathcal{E}_{12}\,, \mathcal{E}_{22}]^\top$，并定义以下矩阵：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ h\,\bar{u}_1 \\ h\,\bar{u}_2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_s\,h - g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ -g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} h\,\bar{u}_1 & h\,\bar{u}_2 \\ h\,\bar{u}_1^2 + 1/2 g_c\,h^2 & h\,\bar{u}_1\,\bar{u}_2 \\ h\,\bar{u}_1\,\bar{u}_2 & h\,\bar{u}_2^2 + 1/2 g_c\,h^2 \end{bmatrix} = [\mathbf{F}_1\,, \mathbf{F}_2]\,, \tag{18}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h\sigma_{11}/\rho & h\sigma_{12}/\rho \\ h\sigma_{21}/\rho & h\sigma_{22}/\rho \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1\,, \mathbf{Q}_2]\,, \tag{19}$$

and

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & 0 \\ \bar{u}_2 & 0 \\ 0 & \bar{u}_1 \\ 0 & \bar{u}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}_1\,, \mathbf{G}_2]\,. \tag{20}$$

在此记号中，项 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 为 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial \mathbf{F}_1/\partial x_1 + \partial \mathbf{F}_2/\partial x_2$，其中 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 为列向量。注意，σ_{ij} 是 $\mathcal{E}_{ij}$ 的函数，而不是 $\partial \bar{u}_i/\partial x_j$的函数。

4. 正则化宾汉模型

在本节中，我们对宾汉模型进行正则化，并用$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 而非 $\nabla^{-}\mathbf{u}$来表示应力。首先，我们将方程 (8) 改写为

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\top}\right), \tag{21}$$

根据此定义，我们将公式（7）中的应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 分为两部分：牛顿型 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N$ 贡献和宾汉$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_B$ 贡献

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_N + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B\,, \tag{22}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N = 2\eta\,\left(\mathbf{D} + \mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathbf{I}\right), \tag{23}$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B = \sqrt{2}\sigma_o\,\frac{\mathbf{D}+\mathrm{tr}(\mathbf{D})\,\mathbf{I}}{\|\mathbf{D}\|_c} & \text{if} \quad \|\mathbf{D}\|_c \neq 0 \\ \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}_B\|_c \leq \sqrt{2}\sigma_o & \text{if} \quad \|\mathbf{D}\|_c = 0\,. \end{cases} \tag{24}$$

注意， $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N = \mathbf{0}$ 当 $\|\mathbf{D}\|_c = 0$时。

对于一维问题，我们有 $\mathbf{D} = \mathcal{E} = \partial\bar{u}/\partial x$、$\mathbf{D} + \mathbf{tr(D)}\,\mathbf{I} = 2\,\mathcal{E}$、 $\|\mathbf{D}\|_c = \sqrt{2}\,|\mathcal{E}|$，因此公式（23）和（24）可简化为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_N = 4\eta\,\mathcal{E}\,, \tag{25}$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B = 2\sigma_o\,\mathrm{sign}(\mathcal{E}) & \text{if} \quad |\mathcal{E}| \neq 0 \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B \leq \sigma_o & \text{if} \quad \mathcal{E} = 0\,. \end{cases} \tag{26}$$

注意，上述公式（26）的一阶导数在 $\mathcal{E} = 0$处未定义。由于我们计划使用牛顿-拉夫森方法求解方程，因此需要计算一阶导数。为此，我们研究了三种具有连续一阶导数的正则化函数，其中两种属于局部 类型，一种属于全局类型。第一种方法是使用局部光滑最大值函数 [21]来表示公式（26），如下所示

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(1)} \;\; = \;\; 2\sigma_o\,\frac{\gamma\,\mathcal{E}}{\max_\beta\left(\gamma\,|\mathcal{E}|\,,\sigma_o\right)}\,, \tag{27}$$

其中， γ 和 β 为正则化参数，且

$$\max_\beta\,(x\,,0) = \begin{cases} x & \text{if} \quad x \geq \frac{1}{2\beta} \\ \frac{\beta}{2}\left(x + \frac{1}{2\beta}\right)^2 & \text{if} \quad |x| \leq \frac{1}{2\beta} \\ 0 & \text{if} \quad x \leq -\frac{1}{2\beta}. \end{cases} \tag{28}$$

第二种方案 [21] 也是局部的，由以下函数给出

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(2)} = \begin{cases} 2\sigma_o\frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|} & \text{if} \quad \gamma|\mathcal{E}| \geq \sigma_o + \frac{1}{2\beta} \\ \frac{\mathcal{E}}{|\mathcal{E}|}\left(2\sigma_o - \beta\left(\sigma_o - \gamma|\mathcal{E}| + \frac{1}{2\beta}\right)^2\right) & \text{if} \quad \sigma_o - \frac{1}{2\beta} \leq \gamma|\mathcal{E}| \leq \sigma_o + \frac{1}{2\beta} \\ 2\gamma\,\mathcal{E} & \text{if} \quad \gamma|\mathcal{E}| \leq \sigma_o - \frac{1}{2\beta}. \end{cases} \tag{29}$$

Fin另外，作为第三种方案，我们建议使用如下的 C^∞ 全局正则化函数 s

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(3)} = 2\sigma_o\tanh\left(\gamma\,\mathcal{E}\right). \tag{30}$$

为了进行比较，我们在图 2 中绘出了这些正则化函数，参数分别为 $\sigma_o = 1$、 $\gamma = 10$ 和 $\beta = 1$。请注意，这些方案在 $\mathcal{E} = 0$ 处的坡度相同。正则化函数 1、2 和 3 的一阶导数分别呈分段非线性、线性和平滑变化。然而，在实际应用中，我们使用较大的正则化参数 γ 和 β，以便更好地逼近实际情况。如图 3 所示，对于 $\sigma_o = 1$、 $\gamma = 10^3$ 和 $\beta = 10^3$，正则化函数与非正则化函数（参见公式（26））相似，但主要区别在于它们的导数在 $\mathcal{E} = 0$ 处有定义。为完整起见，附录 A 详细列出了这些导数。

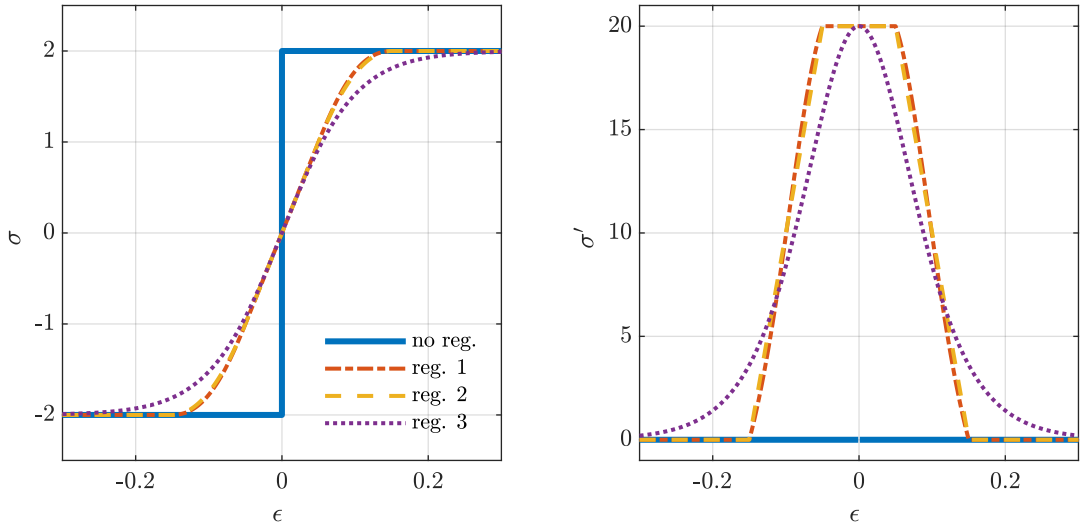

图 2： $\sigma_o = 1$、 $\gamma = 10$ 和 $\beta = 1$ 的正则化函数。

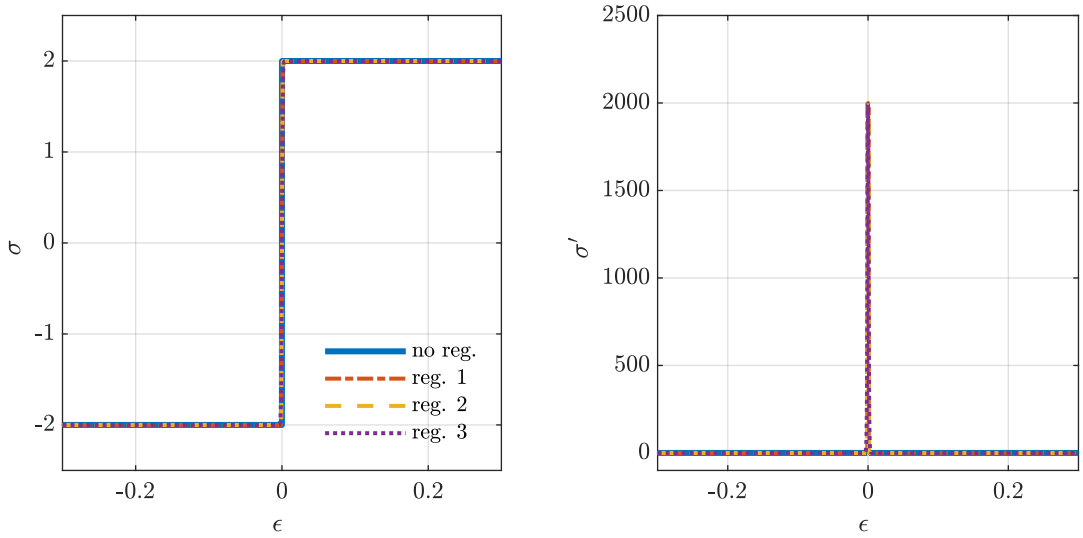

图 3： $\sigma_o = 1$、 $\gamma = 10^3$ 和 $\beta = 10^3$ 的正则化函数。

5. 间断伽辽金

本节中，我们求解问题 (14) 和 (15)，给定 $t=0$ 处的初始条件，以及分别在边界 Γ^{Dh}、$\Gamma^{D\mu}$、$\Gamma^{D\mathcal{E}}$ 上指定的狄利克雷边界条件 h^p、$\bar{\mathbf{u}}^p$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^p$。我们将试探函数 h 和 $\bar{\mathbf{u}}$ 以及检验函数分组如下：

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} h \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w}_V=\begin{bmatrix} w_h \\ w_{\bar{u}1} \\ w_{\bar{u}2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{w}_E=\begin{bmatrix} w_{\mathcal{E}11} \\ w_{\mathcal{E}21} \\ w_{\mathcal{E}12} \\ w_{\mathcal{E}22} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

其中，w_h、$\mathbf{w}_{\bar{u}}$ 和 $\mathbf{w}_E$ 分别是高度、速度和辅助变量的检验函数。在方程 (14) 和 (15) 的弱形式中，我们为每个方程定义残量泛函，即分别为 $\mathbf{r}_V$ 和 $\mathbf{r}_E$。问题在于求得 h、$\bar{\mathbf{u}}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$，使得

$$\mathbf{r}_V=\left\langle \mathbf{w}_V\,,\partial_t\mathbf{U}+\nabla\cdot\mathbf{F}-\nabla\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{S}\right\rangle_{\Omega}=\mathbf{0} \tag{32a}$$

$$\mathbf{r}_E=\left\langle \mathbf{w}_E\,,\mathbf{E}-\nabla\cdot\mathbf{G}\right\rangle_{\Omega}=\mathbf{0}\,, \tag{32b}$$

对所有 w_h、$\mathbf{w}_{\bar{u}}$ 和 $\mathbf{w}_E$均成立。在此记号中，$\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle_{\Omega}\overset{=}{}\int_{\Omega}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}\Omega$ 是集合 Ω 上的 L^2 内积，$\mathrm{d}\Omega$ 是面积微分元。类似地，$\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle_{\Gamma}=\int_{\Gamma}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}\Gamma$ 是集合 Γ 上的 L^2 内积，$\mathrm{d}\Gamma$是线微分元。

在间断伽辽金方法中，区域 Ω 被离散为 n_{el} 个单元，例如 $\Omega^h=\cup_e^{n_{el}}\Omega_e^h$。我们假设每个单元内都有一个局部解，因此不要求单元边界之间保持连续。我们对每个单元进行积分，因此系统（32）可表示如下

$$\mathbf{r}_V=\sum_e\mathbf{r}_{Ve}=\sum_e\left\langle \mathbf{w}_V\,,\partial_t\mathbf{U}\right\rangle_{\Omega_e^h}+\left\langle \mathbf{w}_V\,,\nabla\cdot\mathbf{F}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_V\,,\nabla\cdot\mathbf{Q}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_V\,,\mathbf{S}\right\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0} \tag{33a}$$

$$\mathbf{r}_E=\sum_e\mathbf{r}_{Ee}=\sum_e\left\langle \mathbf{w}_E\,,\mathbf{E}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_E\,,\nabla\cdot\mathbf{G}\right\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0}\,. \tag{33b}$$

由于检验函数和试探函数在单元边界处均不连续，方程（33）得到 n_{el} 个局部陈述

$$\mathbf{r}_{Ve}=\left\langle \mathbf{w}_V\,,\partial_t\mathbf{U}\right\rangle_{\Omega_e^h}+\left\langle \mathbf{w}_V\,,\nabla\cdot\mathbf{F}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_V\,,\nabla\cdot\mathbf{Q}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_V\,,\mathbf{S}\right\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0} \tag{34a}$$

$$\mathbf{r}_{Ee}=\left\langle \mathbf{w}_E\,,\mathbf{E}\right\rangle_{\Omega_e^h}-\left\langle \mathbf{w}_E\,,\nabla\cdot\mathbf{G}\right\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0}\,, \tag{34b}$$

其中 $e=1,2,\ldots,n_{el}$。

我们对通量积分进行分部积分，例如：

$$\left\langle \mathbf{w}_V\,,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{G}\right\rangle_{\Omega_e^h}=\left\langle \mathbf{w}_V\,,\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}_e\right\rangle_{\Gamma_e^h}-\left\langle \nabla\mathbf{w}_V\,,\mathbf{G}\right\rangle_{\Omega_e^h}\,, \tag{35}$$

其中，$\mathbf{n}_e$ 是单元 Γ_e^h 边界处朝外指向的单位法向量。采用这种记法，$\mathsf{G}\cdot\mathbf{n}_e=\mathsf{G}_1\mathbf{n}_e\cdot\mathbf{e}_1+\mathsf{G}_2\mathbf{n}_e\cdot\mathbf{e}_2$和 $\langle\nabla\mathsf{w}_V,\mathsf{G}\rangle_{\Omega_e^h}=\langle\partial_{\mathsf{w}_V}/\partial x_1,\mathsf{G}^1\rangle_{\Omega_e^h}+\langle\partial_{\mathsf{w}_V}/\partial x_2,\mathsf{G}^2\rangle_{\Omega_e^h}$。请注意，项 $\langle\mathsf{w}_V,\mathsf{G}\cdot\mathbf{n}_e\rangle_{\Gamma_e^h}$没有明确定义，因为试探函数和检验函数在边界$\Gamma_e^h$处不连续。为在数值上计算此项，首先我们定义单元 e 边界 $\mathbf{x}_o\in\Gamma_e^h$ 处 V 的内部值 V^- 和外部值 V^+ 如下：

$$\mathbf{V}^-(\mathbf{x}_o) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0\,,\epsilon<0}\mathbf{V}(\mathbf{x}_o+\epsilon\,\mathbf{n}_e) \tag{36}$$

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x}_o) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0\,,\epsilon>0}\mathbf{V}(\mathbf{x}_o+\epsilon\,\mathbf{n}_e)\,. \tag{37}$$

类似地，我们定义内部$\mathbf{w}_{V}^{-}$

$$\mathbf{w}_V^-(\mathbf{x}_o) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0\,,\epsilon<0}\mathbf{w}(\mathbf{x}_o+\epsilon\,\mathbf{n}_e) \tag{38}$$

通量项如下

$$\left\langle \mathbf{w}_V \, , \mathbf{G}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}_e \right\rangle_{\Gamma_e^h} = \left\langle \mathbf{w}_V{}^- \, , \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{V}^-, \mathbf{V}^+) \cdot \mathbf{n}_e \, \right\rangle_{\Gamma_e^h} , \tag{39}$$

其中，数值通量 $\mathsf{G}(\mathsf{V}^-, \mathsf{V}^+)$ 定义为 U^- 和 U^+ 的函数。例如，对于项 $\mathsf{G} = 1/2(\mathsf{G}^- + \mathsf{G}^+)$，我们可以采用中心通量，其中 $\mathsf{G}^- = \mathsf{G}(\underline{\mathsf{V}}^-)$，且 $\mathsf{G}^+ = \mathsf{G}(\mathsf{V}^+)$。类似地，对于 $\mathsf{Q} = 1/2(\mathsf{Q}^- + \mathsf{Q}^+)$，我们也采用中心通量，其中 $\mathsf{Q}^- = \mathsf{Q}(\mathsf{V}^-, \mathsf{E}^-)$，且 $\mathsf{Q}^+ = \mathsf{Q}(\mathsf{V}^+, \mathsf{E}^+)$。中心通量特别适用于这些项，因为它们没有优先传播方向。

然而，为了获得非线性双曲方程的稳定解，我们将数值通量视为一个黎曼问题 [33] ，因为单元边界处允许出现不连续性。一维守恒律的黎曼问题要求解单元间通量 $\mathbf{A}(\mathbf{U}(x=0)\ t)$，使其满足以下方程。

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{U}) = 0 \tag{40a}$$

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_L \quad \text{if} \quad x \leq 0 \tag{40b}$$

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_R \quad \text{if} \quad x > 0 \, . \tag{40c}$$

对于标量问题和线性系统，黎曼问题的精确解相对容易求得。然而，一般非线性系统的解难以求得、计算代价高昂，有时甚至无法求得 [33]。因此，人们开发了许多近似黎曼求解器。Harten、Lax 和 van Leer 提出了以下 HLL黎曼求解器

$$\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+) = \begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{U}^-) & \text{if} \quad S_L \geq 0 \\ \dfrac{S_R \mathbf{A}(\mathbf{U}^-) - S_L \mathbf{A}(\mathbf{U}^+) + S_L S_R (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)}{S_R - S_L} & \text{if} \quad S_L < 0 < S_R \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}^+) & \text{if} \quad S_R \leq 0 \end{cases} , \tag{41}$$

其中，一维浅水方程的波速为

$$S_L = \min \left(\bar{u}^- - \sqrt{g h^-}, \bar{u}^+ - \sqrt{g h^+} \right) \tag{42a}$$

$$S_R = \max \left(\bar{u}^- + \sqrt{g h^-}, \bar{u}^+ + \sqrt{g h^+} \right) . \tag{42b}$$

请注意，该数值通量考虑了传播方向，这是保证该项稳定性所必需的。为计算数值通量 $\mathbf{F}$，我们使用 HLL黎曼求解器。

综上，方程 (34) 可改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Ve} = & \left\langle \mathbf{w}_V \, , \partial_t \mathbf{U} \right\rangle_{\Omega_e^h} + \left\langle \mathbf{w}_V{}^- \, , \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}_e \right\rangle_{\Gamma_e^h} - \left\langle \nabla \mathbf{w}_V \, , \mathbf{F} \right\rangle_{\Omega_e^h} \\ & - \left\langle \mathbf{w}_V{}^- \, , \overline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}_e \right\rangle_{\Gamma_e^h} + \left\langle \nabla \mathbf{w}_V \, , \mathbf{Q} \right\rangle_{\Omega_e^h} - \left\langle \mathbf{w}_V \, , \mathbf{S} \right\rangle_{\Omega_e^h} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{43a}$$

$$\mathbf{r}_{Ee} = \left\langle \mathbf{w}_E \, , \mathbf{E} \right\rangle_{\Omega_e^h} - \left\langle \mathbf{w}_E{}^- \, , \overline{\mathbf{G}} \right\rangle_{\Gamma_e^h} + \left\langle \nabla \mathbf{w}_E \, , \mathbf{G} \right\rangle_{\Omega_e^h} = \mathbf{0} \, . \tag{43b}$$

我们定义单元 e 上的局部解，其中 $\mathbf{x} \in \Omega_e^h$，使得

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m_1+1} \mathbf{h}_{e,i}(t) \, \psi_{h,i}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_h(\mathbf{x})^\top \, \mathbf{h}_e(t) \tag{44a}$$

$$\bar{u}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m_2+1} \bar{\mathbf{u}}_{j\,e,i}(t) \, \psi_{u,i}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_u(\mathbf{x})^\top \, \bar{\mathbf{u}}_{j\,e}(t) \, , \quad j = \{1, 2\} \tag{44b}$$

$$E_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m_3+1} \mathbf{E}_{j\,e,i}(t) \, \psi_{E,i}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_E(\mathbf{x})^\top \, \mathbf{E}_{j\,e}(t) \, , \quad j = \{1, 2, 3, 4\} \, , \tag{44c}$$

其中 $\psi_{h,\,i}(\mathbf{x})$、$\psi_{u,\,i}(\mathbf{x})$ 和 $\psi_{E,\,i}(\mathbf{x})$ 是定义在 Ω_e^h 上的基函数。注意，h、$\bar{u}_i$ 和 $\mathcal{E}_{ij}$ 分别由 m_1、m_2 和 m_3 阶多项式定义。在示例计算中，我们使用归一化勒让德多项式作为基函数 [33]。根据这些定义，我们可以轻松构造向量

$$\mathbf{V}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix} h \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\psi}}_h(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0}_u & \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_h & \hat{\boldsymbol{\psi}}_u(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0}_u \\ \mathbf{0}_h & \mathbf{0}_u & \hat{\boldsymbol{\psi}}_u(\mathbf{x})^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{h}_e(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_{1e}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_{2e}(t) \end{bmatrix}=\hat{\mathbf{N}}_V(\mathbf{x})\,\mathbf{V}_e(t)\,, \tag{45}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{21} \\ \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\psi}}_E(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E \\ \mathbf{0}_E & \hat{\boldsymbol{\psi}}_E(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E \\ \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E & \hat{\boldsymbol{\psi}}_E(\mathbf{x})^\top & \mathbf{0}_E \\ \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E & \mathbf{0}_E & \hat{\boldsymbol{\psi}}_E(\mathbf{x})^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1e}(t) \\ \mathbf{E}_{2e}(t) \\ \mathbf{E}_{3e}(t) \\ \mathbf{E}_{4e}(t) \end{bmatrix}=\hat{\mathbf{N}}_E(\mathbf{x})\,\mathbf{E}_e(t)\,, \tag{46}$$

其中，$\hat{}\mathbf{N}_V(\mathbf{x})$ 和 $\hat{}\mathbf{N}_E(\mathbf{x})$ 是大小分别为 $3\times(m_1+2m_2+3)$ 和 $4\times(4m_3+4)$ 的矩阵，而 $\mathbf{0}_h$、$\mathbf{0}_u$ 和 $\mathbf{0}_E$ 分别是大小为 $1\times(m_1+1)$、$1\times(m_2+1)$ 和 $1\times(m_3+1)$ 的零向量。一个重要细节是，动量方程源项中出现的底部高度 H （参见方程 (17)）是已知的，为保持一致性，应将其投影到有限元空间中。我们使用 m_0 阶多项式来定义 H。事实上，为了保证守恒性和数值格式的良好性质，高度和底部高度应采用相同的方式离散 [6]。同样，由于我们采用 Galerkin 离散，单元 e 的局部检验函数为

$$\mathbf{w}_V(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} w_h \\ w_{\bar{u}1} \\ w_{\bar{u}2} \end{bmatrix}=\hat{\mathbf{N}}_V(\mathbf{x})\,\mathbf{w}_{V\,e}\,, \tag{47a}$$

$$\mathbf{w}_E(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} w_{\mathcal{E}11} \\ w_{\mathcal{E}21} \\ w_{\mathcal{E}12} \\ w_{\mathcal{E}22} \end{bmatrix}=\hat{\mathbf{N}}_E(\mathbf{x})\,\mathbf{w}_{E\,e}\,, \tag{47b}$$

根据这些定义，我们将每个单元上的格式表示如下

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{Ve}=\mathbf{w}_{Ve}^\top\Big(&\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V\,,\partial_t\mathbf{U}\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V^-\,,\overline{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vx}\,,\mathbf{F}_1\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vy}\,,\mathbf{F}_2\big\rangle_{\Omega_e^h}\\&-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V^-\,,\overline{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vx}\,,\mathbf{Q}_1\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vy}\,,\mathbf{Q}_2\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V\,,\mathbf{S}\big\rangle_{\Omega_e^h}\Big)=\mathbf{w}_{Ve}^\top\mathbf{R}_{Ve}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{48a}$$

$$\mathbf{r}_{Ee}=\mathbf{w}_{Ee}^\top\Big(\big\langle\hat{\mathbf{N}}_E\,,\mathbf{E}\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_E^-\,,\overline{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Ex}\,,\mathbf{G}_1\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Ey}\,,\mathbf{G}_2\big\rangle_{\Omega_e^h}\Big)=\mathbf{w}_{Ee}^\top\mathbf{R}_{Ee}=\mathbf{0}\,, \tag{48b}$$

其中 $\hat{}\mathbf{B}_{Vx}=\partial\hat{}\mathbf{N}_V/\partial x_1$、$\hat{}\mathbf{B}_{Vy}=\partial\hat{}\mathbf{N}_V/\partial x_2$、$\hat{}\mathbf{B}_{Ex}=\partial\hat{}\mathbf{N}_E/\partial x_1$ 和 $\hat{}\mathbf{B}_{Ey}=\partial\hat{}\mathbf{N}_E/\partial x_2$。

5.1. 隐式时间积分

我们对时间进行离散，并定义 $\mathbf{V}^{(k)}=\mathbf{V}(t^k)$。隐式格式采用 $\partial_t\mathbf{U}(t^{(k)})=(\mathbf{U}^{(k)}-\mathbf{U}^{(k-1)})/\Delta t$，因此时间 $t^{(k)}$ 的单元残差为

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{Ve}^{(k)}=\;&\frac{1}{\Delta t}\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V\,,\mathbf{U}^{(k)}-\mathbf{U}^{(k-1)}\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V^-\,,\overline{\mathbf{F}}^{(k)}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vx}\,,\mathbf{F}_1^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vy}\,,\mathbf{F}_2^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}\\&-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V^-\,,\overline{\mathbf{Q}}^{(k)}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vx}\,,\mathbf{Q}_1^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Vy}\,,\mathbf{Q}_2^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_V\,,\mathbf{S}^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{49a}$$

$$\mathbf{R}_{Ee}^{(k)}=\big\langle\hat{\mathbf{N}}_E\,,\mathbf{E}^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}-\big\langle\hat{\mathbf{N}}_E^-\,,\overline{\mathbf{G}}^{(k)}\cdot\mathbf{n}_e\big\rangle_{\Gamma_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Ex}\,,\mathbf{G}_1^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}+\big\langle\hat{\mathbf{B}}_{Ey}\,,\mathbf{G}_2^{(k)}\big\rangle_{\Omega_e^h}=\mathbf{0}\,, \tag{49b}$$

为使用牛顿-拉夫森方法求解式 (49) 中的 $\mathrm{V}^{(k)}$ 和 $\mathrm{E}^{(k)}$，我们计算切线项 $\partial \mathrm{R}_{Ve}^{(k)}/\partial \mathrm{V}_e$、$\partial \mathrm{R}_{Ve}^{(k)}/\partial \mathrm{E}_e$、$\partial \mathrm{R}_{Ee}^{(k)}/\partial \mathrm{V}_e$ 和 $\partial \mathrm{R}_{Ee}^{(k)}/\partial \mathrm{E}_e$。为完整起见，这些导数详见附录 A。我们通过牛顿-拉夫森方法求解 $\mathrm{V}^{(k)}$和 $\mathrm{E}^{(k)}$，随后将当前解的猜测值 $\mathrm{V}^I(\mathrm{x}\ t^{(k)})$ 和 $\mathrm{E}^I(\mathrm{x}\ t^{(k)})$ 更新为 $\mathrm{V}^{I+1}(\mathrm{x}\ t^{(k)}) = \mathrm{V}^I(\mathrm{x}\ t^{(k)}) + \Delta\mathrm{V}$ 和 $\mathrm{E}^{I+1}(\mathrm{x}\ t^{(k)}) = \mathrm{E}^I(\mathrm{x}\ t^{(k)}) + \Delta\mathrm{E}$，其中$\Delta\mathrm{V}$ 和 $\Delta\mathrm{E}$ 是线性问题的解:

$$\begin{bmatrix} \partial \mathbf{R}_{Ve}^{(k)}/\partial \mathbf{V} & \partial \mathbf{R}_{Ve}^{(k)}/\partial \mathbf{E} \\ \partial \mathbf{R}_{Ee}^{(k)}/\partial \mathbf{V} & \partial \mathbf{R}_{Ee}^{(k)}/\partial \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \mathbf{E} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ve}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{Ee}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

5.2. 边界条件

我们通过在边界处相应地定义变量的外部值，强制施加边界条件。因此，对于狄利克雷边界条件，我们只需定义

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x}_o) = \mathbf{V}^p\,, \tag{51}$$

其中$\mathbf{V}^p$ 是边界处的指定值，且$\mathbf{x}_o \in \Gamma$。类似地，对于齐次诺伊曼边界条件，我们有

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x}_o) = \mathbf{V}^-(\mathbf{x}_o)\,, \tag{52}$$

其中在边界点$\mathbf{x}_o \in \Gamma$处施加了 $\nabla\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) = 0$。我们以类似方式对辅助变量向量$\mathbf{E}$施加边界条件。

6. 示例

本节中，我们求解三个示例问题，以展示我们的方法的有效性和潜力。前两个示例用于检验该方法的平衡保持性质。在所有这些示例中，我们还验证了第4节提出的不同正则化函数的精度和计算成本。对于所有问题，我们将每个时间步长的牛顿-拉夫森迭代最大次数设为10。如前所述，我们使用归一化勒让德多项式作为基函数，并使用HLL黎曼求解器计算数值通量$\mathbf{F}$。对于所有正则化方法，如果材料的应变率大小在区域的一部分中为 $|\mathcal{E}| > \sigma_o/\gamma$，则将该部分视为活跃区域。因此，活跃区域占整个区域的百分比计算如下:

$$\mathrm{active}\% = \frac{100\%}{|\Omega|} \int_\Omega \mathcal{H}(|\mathcal{E}| - \sigma_o/\gamma)\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{53}$$

其中 $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}\Omega$，$\mathcal{H}$ 为赫维赛德函数，即，当 $x \geq 0$ 时，$\mathcal{H}(x) = 1$；当 $x < 0$时，$\mathcal{H}(x) = 0$。

6.1. 恒定自由表面

在第一个示例中，我们检验间断伽辽金方法是否能保持初始平衡条件，即该方法是否为良平衡方法。我们考虑一个长度为 $\Omega = [0, L]$ 的区域，其中 $L = 10$，其初始条件如下

$$\bar{u}(x, 0) = 0 \tag{54a}$$

$$h(x, 0) = \frac{h_0}{\cos(\alpha)} - x\tan(\alpha) - H(x) \tag{54b}$$

$$H(x) = \cos(\pi x)\,, \tag{54c}$$

其中坡度为 $\alpha = \pi/18$ 和 $h_0 = 3$，参见图 4。对于此问题，我们仅在两侧施加狄利克雷边界条件，即 $h(0,\ t) = h_0/\cos(\alpha) - 1$, $h(L,\ t) = h_0/\cos(\alpha) - L\tan(\alpha) - \cos(\pi L)$, $\bar{u}(0,\ t) = \mathcal{E}(0,\ t) = \bar{u}(L,\ t) = \mathcal{E}(L,\ t) = 0$。我们预计此问题中不会发生任何运动，因为流体处于静止状态，且自由表面恒定并保持水平（垂直于重力向量）。

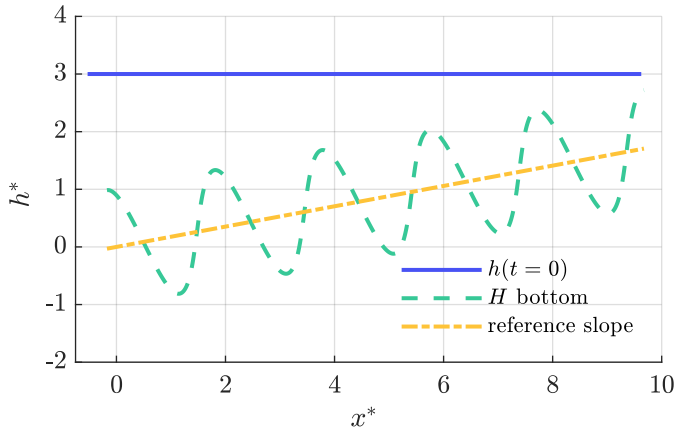

图 4：恒定自由液面测试问题。

采用不同的多项式阶数 m_0，m_1，m_2，$m_3 \in \{1,2,3,4\}$，针对投影底部高度 H 以及变量 h、$\bar{u}$和 $\mathcal{E}$ 分别计算时刻 $t=1$ 的解。我们将区域离散为 $n_{el} \in \{100, 1000\}$ 个单元，并采用时间步长 $\Delta t = 1e-2$。黏度和宾汉屈服应力分别设为 $\eta \in \{0, 1\}$ 和 $\sigma_o \in \{0, 1\}$。我们使用正则化方法 1（参见方程 (27)）和正则化参数 $\gamma = \beta = 10^3$ 求解此问题。密度和重力分别为 $\rho = 1$和 $g = 9.81$。如前所述，由于初始条件处于平衡状态（满足方程 (14) 和 (15)），若我们的方法具有良平衡性质，则该状态必须得以保持。因此，我们通过将求积点处的结果与初始条件进行比较，计算高度和速度的 L-2范数及 L-无穷范数误差，分别记为 L_h^2、$L_{\bar{u}}^2$、L_h^∞和 $L_{\bar{u}}^\infty$。结果汇总于表 1 和表 2。

正如预期，只要描述底部的基函数多项式阶数小于或等于用于描述高度的多项式阶数，即 $m_0 \leq m_1$，我们的方法就能保持初始条件不变。然而，即使 $m_0 > m_1$（表 1 和表 2 中均以灰色阴影标出），采用更细网格或更高阶的高度多项式 m_1 也能减小误差。这种现象是合理的，因为高度至少需要用与底部相同阶数的多项式描述，才能在方程中抵消底部源项的影响（参见方程 (17)）。否则，对于 $m_0 > m_1$，方程可能无法在数值上得到满足，因此高度会与初始条件略有不同，速度也不会恰好为零。请注意，对于 $m_0 \leq m_1$，无论参数或单元数量如何，高度和零速度都能保持不变。初始条件的这种保持也与黏度和宾汉屈服应力无关。

我们使用其他正则化方法重复了相同的实验，结果表现出相同的规律。对于 $m_0 \leq m_1$，无论参数、单元数量和正则化方法如何，高度和零速度均保持不变。有趣的是，对于 $m_0 > m_1$，误差会根据正则化方法略有不同。我们使用 $m_0 = 2$ 和 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$，在图5和表3中展示了不同正则化方法的结果。请注意，对于这种情况，所有方法的高度误差都相同。正如预期的那样，正则化方法1、2和3呈现二次收敛，每次时间迭代需要进行2-3次牛顿-拉夫森迭代。另一个有趣之处是，对于粗网格，第三种正则化方法的速度误差较低，但所需计算时间比其他方法更长。对于更细网格，在这个问题中，所有正则化方法的结果精度和计算成本都相同。

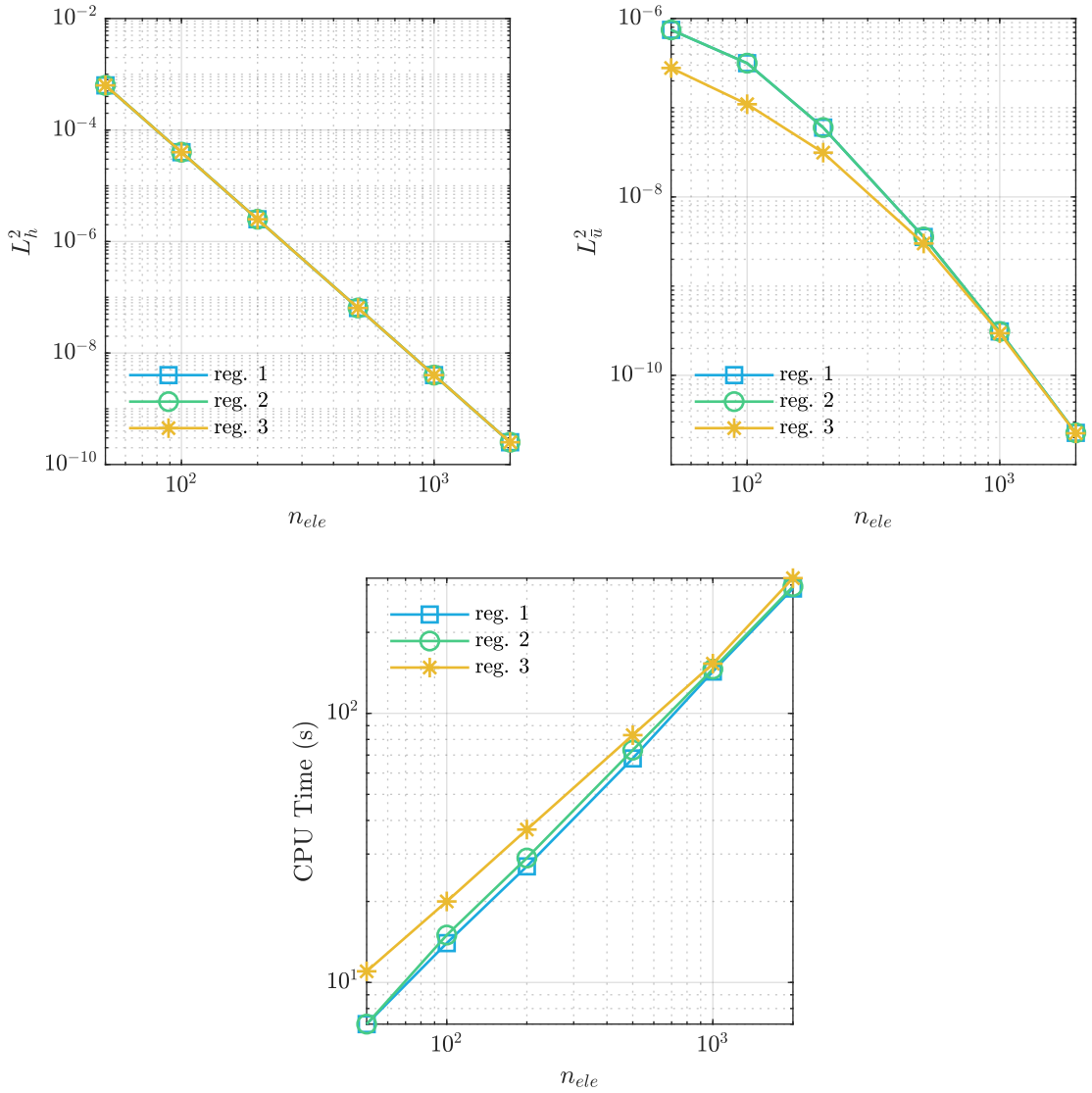

图 5：使用 $m_0 = 2$ 和 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ 以及不同正则化方法时，恒定自由表面测试问题的保持误差和 CPU 时间。

n_{el}	m_0	m_1	m_2	m_3	η	σ_o	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$
100	1	1	1	1	0	0	9.8E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	2	2	2	2	0	0	7.5E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	3	3	3	3	0	0	1.8E-17	1.9E-16	2.7E-09	7.8E-09
100	4	4	4	4	0	0	1.4E-21	1.2E-19	2.8E-11	2.8E-10
100	1	1	1	1	1	0	9.8E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	2	2	2	2	1	0	7.5E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	3	3	3	3	1	0	8.6E-19	1.3E-16	2.9E-10	5.2E-09
100	4	4	4	4	1	0	7.1E-26	1.1E-23	9.9E-14	1.7E-12
100	1	1	1	1	1	1	9.8E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	2	2	2	2	1	1	7.5E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	3	3	3	3	1	1	4.9E-20	2.6E-17	6.5E-11	1.5E-09
100	4	4	4	4	1	1	4.2E-31	1.4E-28	3.1E-16	7.8E-15
100	2	1	1	1	1	1	4.0E-05	3.2E-07	1.2E-03	1.4E-04
100	2	2	1	1	1	1	1.9E-11	1.2E-12	1.8E-06	2.2E-07
100	2	1	2	1	1	1	4.0E-05	1.9E-04	1.2E-03	4.4E-03
100	2	1	1	2	1	1	4.0E-05	8.5E-11	1.2E-03	1.4E-06
100	3	2	2	2	1	1	1.6E-08	8.6E-16	2.4E-05	7.5E-09
100	3	3	2	2	1	1	9.9E-23	3.9E-21	5.0E-12	4.8E-11
100	3	2	3	2	1	1	1.6E-08	2.4E-09	2.4E-05	2.3E-05
100	3	2	2	3	1	1	1.6E-08	2.7E-16	2.4E-05	3.3E-09
100	4	3	3	3	1	1	7.5E-12	2.2E-13	5.0E-07	1.4E-07
100	4	4	3	3	1	1	4.8E-18	9.6E-20	6.5E-10	8.8E-11
100	4	3	4	3	1	1	8.5E-12	4.6E-11	5.5E-07	3.3E-06
100	4	3	3	4	1	1	7.5E-12	3.0E-20	5.0E-07	4.4E-11
100	1	2	2	2	1	1	6.4E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	2	3	3	3	1	1	1.7E-31	0.0E+00	1.3E-16	0.0E+00
100	3	4	4	4	1	1	1.1E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
100	1	2	1	2	1	1	6.4E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
100	2	3	2	3	1	1	1.7E-31	0.0E+00	1.3E-16	0.0E+00
100	3	4	3	4	1	1	2.8E-27	1.4E-25	1.1E-14	1.3E-13

表1：使用 $n_{el} = 100$ 个单元时，恒定自由表面测试问题的初始平衡保持情况。

n_{el}	m_0	m_1	m_2	m_3	η	σ_o	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$
1000	1	1	1	1	0	0	9.2E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
1000	2	2	2	2	0	0	9.7E-32	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	3	3	3	3	0	0	2.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	4	4	4	4	0	0	1.1E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	1	1	1	1	1	0	9.2E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
1000	2	2	2	2	1	0	9.7E-32	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	3	3	3	3	1	0	2.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	4	4	4	4	1	0	1.1E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	1	1	1	1	1	1	9.2E-32	0.0E+00	8.8E-17	0.0E+00
1000	2	2	2	2	1	1	9.7E-32	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	3	3	3	3	1	1	2.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	4	4	4	4	1	1	1.1E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	2	1	1	1	1	1	4.0E-09	3.1E-10	1.2E-05	4.2E-06
1000	2	2	1	1	1	1	2.0E-19	2.3E-20	1.9E-10	8.3E-11
1000	2	1	2	1	1	1	4.0E-09	2.3E-08	1.2E-05	4.9E-05
1000	2	1	1	2	1	1	4.0E-09	8.6E-15	1.2E-05	1.4E-08
1000	3	2	2	2	1	1	1.6E-14	2.7E-24	2.4E-08	4.0E-13
1000	3	3	2	2	1	1	2.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	3	2	3	2	1	1	1.6E-14	2.5E-17	2.4E-08	2.4E-09
1000	3	2	2	3	1	1	1.6E-14	2.5E-24	2.4E-08	3.1E-13
1000	4	3	3	3	1	1	7.5E-20	3.8E-21	5.0E-11	2.2E-11
1000	4	4	3	3	1	1	1.1E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	4	3	4	3	1	1	7.5E-20	4.2E-19	5.0E-11	3.1E-10
1000	4	3	3	4	1	1	7.5E-20	2.9E-30	5.0E-11	4.5E-16
1000	1	2	2	2	1	1	7.9E-32	0.0E+00	1.3E-16	0.0E+00
1000	2	3	3	3	1	1	2.0E-31	0.0E+00	2.2E-16	0.0E+00
1000	3	4	4	4	1	1	1.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00
1000	1	2	1	2	1	1	7.9E-32	0.0E+00	1.3E-16	0.0E+00
1000	2	3	2	3	1	1	2.0E-31	0.0E+00	2.2E-16	0.0E+00
1000	3	4	3	4	1	1	1.0E-31	0.0E+00	1.8E-16	0.0E+00

表2：使用 $n_{el} = 1000$ 个单元时，恒定自由表面测试问题的初始平衡保持情况。

Reg. 方法	n_{ele}	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$	NRIt/Tit	CPU 时间 (s)
1	50	6.3E-04	7.5E-07	4.6E-03	2.2E-04	2.170	8.0E+00
1	100	4.0E-05	3.2E-07	1.2E-03	1.4E-04	2.090	1.6E+01
1	200	2.5E-06	6.0E-08	3.1E-04	6.0E-05	2.000	3.0E+01
1	500	6.4E-08	3.6E-09	4.9E-05	1.4E-05	1.990	7.5E+01
1	1000	4.0E-09	3.1E-10	1.2E-05	4.2E-06	1.980	1.6E+02
1	2000	2.5E-10	2.3E-11	3.1E-06	1.1E-06	1.980	3.2E+02
2	50	6.3E-04	7.5E-07	4.6E-03	2.2E-04	2.170	8.0E+00
2	100	4.0E-05	3.2E-07	1.2E-03	1.4E-04	2.090	1.8E+01
2	200	2.5E-06	6.0E-08	3.1E-04	6.0E-05	2.000	3.1E+01
2	500	6.4E-08	3.6E-09	4.9E-05	1.4E-05	1.990	7.9E+01
2	1000	4.0E-09	3.1E-10	1.2E-05	4.2E-06	1.980	1.6E+02
2	2000	2.5E-10	2.3E-11	3.1E-06	1.1E-06	1.980	3.3E+02
3	50	6.3E-04	2.8E-07	4.6E-03	1.3E-04	3.050	1.1E+01
3	100	4.0E-05	1.1E-07	1.2E-03	8.3E-05	2.770	2.1E+01
3	200	2.5E-06	3.1E-08	3.0E-04	4.4E-05	2.540	4.2E+01
3	500	6.4E-08	3.0E-09	4.9E-05	1.3E-05	2.230	9.0E+01
3	1000	4.0E-09	3.0E-10	1.2E-05	4.1E-06	2.070	1.6E+02
3	2000	2.5E-10	2.2E-11	3.1E-06	1.1E-06	2.000	3.3E+02

表3：采用不同正则化方法时，恒定自由表面测试问题的保持误差和 CPU 时间，其中使用 $m_0 = 2$ 和 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ 。

6.2. 与参考坡度平行的自由表面

在此示例的初始条件中，自由表面与参考坡度平行，底部则是变化的。我们测试当材料足够坚硬时，间断伽辽金方法能否保持初始平衡条件。为此，我们考虑一个长度为 $\Omega = [0, L]$ 、其中 $L = 10$ 的区域，其初始条件如下

$$\bar{u}(x, 0) = 0 \tag{55a}$$
$$h(x, 0) = h_0 - H(x) \tag{55b}$$
$$H(x) = \cos(\pi x)\,, \tag{55c}$$

其中坡度为 $\alpha = \pi/18$ ，且 $h_0 = 3$，参见图 6。对于此问题，我们采用以下边界条件

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(0, t) = 0, \tag{56a}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(L, t) = 0, \qquad \bar{u}(L, t) = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(L, t) = 0\,. \tag{56b}$$

密度、坡角和重力分别为 $\rho = 1$、 $\alpha = \pi/18$ 和 $g = 9.81$。

由于流体处于静止状态，如果材料的宾汉屈服应力高于某个阈值，即满足以下一般条件，则预计不会发生运动

$$\left| -\rho\, g \sin\alpha \int_{L/2}^{x} H(s)\, \mathrm{d}s \right| \leq \sigma_o \sqrt{2} H(x) \quad \forall x \in [0, L]\,. \tag{57}$$

关于此条件的详细信息，请参见 [26]。在此具体示例中，该条件为

$$\sigma_o \geq \max_{x\in[0,L]} \frac{\rho\, g \sin(\alpha)}{\sqrt{2}} \frac{\left| h_0 \left(x - L/2\right) - \sin(\pi x)/\pi + \sin(\pi L)/\pi \right|}{h_0 - \cos(\pi x)}\,. \tag{58}$$
$$\sigma_o \geq \frac{\rho\, g\, \sin(\alpha)\, h_0\, L}{2\sqrt{2}(h_0 - 1)} \approx 9.0341\,. \tag{59}$$

解在时间 $t = 1$ 处计算，使用多项式阶数 $m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 1$ （除非另有说明），投影底部高度为 H ，变量分别为 h、 $\bar{u}$、 $\mathcal{E}$ 。我们用 $n_{el} = 100$ 对区域进行离散，并采用时间步长 $\Delta t = 1e-6$。黏度设为 $\eta = 1$，宾汉屈服应力为 $\sigma_o = 9.035$，略高于方程（59）给出的条件。由于初始条件处于平衡状态，且宾汉屈服应力高于阈值，流体应当保持初始状态。我们在求积点处计算高度和速度的 L-2范数与 L-无穷范数误差，分别记为 L_h^2、$L_{\bar{u}}^2$、 L_h^∞和 $L_{\bar{u}}^\infty$，并将其与初始条件进行比较。我们使用方程（27）、（29）和（30）中描述的正则化函数求解该问题。结果汇总于表4。

对于本研究中的所有算例，在时间 $t = 1$，流体的活跃度均为 0%，即整个区域内的流体均为刚体。对于所有正则化方法，每个时间步长平均需要进行 1 或 2 次牛顿-拉夫森迭代（见表4中的 NRIt/TIt 列）。这种收敛具有牛顿-拉夫森方法的典型二次收敛特征。请注意，对于所有方法，高度误差均小于速度误差。参数 γ and β的值越大，高度和零速度的保持效果越好，即误差越小。请注意，在本例中，采用相同参数 β 时，第三种方法的精度更高，且计算时间比另外两种方法更短。我们认为，这是因为第三种正则化函数更为平滑，具有连续的一阶导数。

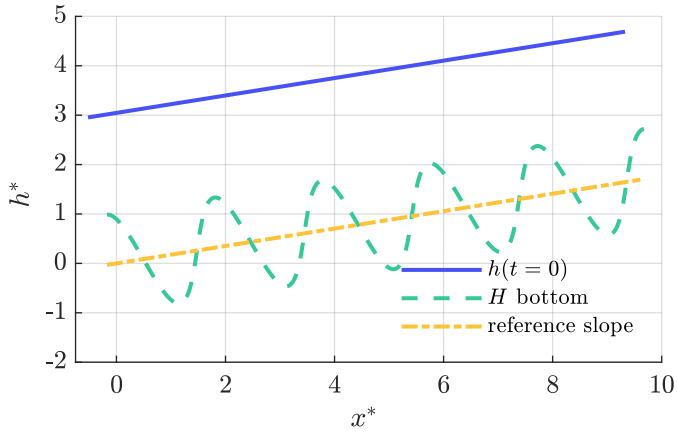

图 6：基准边坡问题的平行自由表面。

Reg. 方法	γ	β	活跃 %	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	1E+02	1E+02	0	1.7E-01	1.0E-01	2.0E-01	1.2E-01	2	1.3E+05
1	1E+02	1E+03	0	1.7E-01	1.0E-01	2.0E-01	1.2E-01	2	1.3E+05
1	1E+03	1E+02	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
1	1E+03	1E+03	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
1	1E+03	1E+04	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
1	1E+04	1E+02	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
1	1E+04	1E+03	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
1	1E+04	1E+04	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
1	1E+04	1E+05	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
2	1E+02	1E+02	0	1.7E-01	1.0E-01	2.0E-01	1.2E-01	2	1.3E+05
2	1E+02	1E+03	0	1.7E-01	1.0E-01	2.0E-01	1.2E-01	2	1.3E+05
2	1E+03	1E+02	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
2	1E+03	1E+03	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
2	1E+03	1E+04	0	1.8E-03	9.7E-04	2.1E-02	1.3E-02	2	1.3E+05
2	1E+04	1E+02	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
2	1E+04	1E+03	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
2	1E+04	1E+04	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
2	1E+04	1E+05	0	1.6E-10	8.3E-06	7.1E-06	1.3E-03	1	6.5E+04
3	1E+02	-	0	2.5E-03	1.3E-03	2.4E-02	1.5E-02	2	1.3E+05
3	1E+03	-	0	6.4E-10	1.3E-05	1.4E-05	1.6E-03	1	6.6E+04
3	1E+04	-	0	6.3E-14	1.3E-07	1.5E-07	1.6E-04	1	6.7E+04

表4：并行自由 s　　面至 $n_{el}=10$ 的参考斜坡测试问题　　0 和 $\sigma_o=9.035$Pa。

6.3. 溃坝

在本例中，我们对一个水库进行建模，其液位比水平地面高 $h_1=1.5$ 米。位于 $x=1.5$ 米处的坝墙被瞬间移除，以模拟溃坝。初始速度和辅助变量 $\mathcal{E}$ 均设为零。在这种情况下，溃坝水流流入一条高度为 $h_2=0.5$米的湿润渠道。我们考虑长度为 $\Omega=[0,L]$ 的区域，其中 $L=3$，并在两侧施加如下边界条件 $h(0,\ t)=h_1$, $h(L,\ t)=h_2$, $\partial\bar{u}(0,\ t)/\partial x=\mathcal{E}(0,\ t)=\partial\bar{u}(L,\ t)/\partial x=\mathcal{E}(L,\ t)=0$。

我们使用 100 个单元求解此溃坝问题，其中高度 h和速度 $\bar{u}$采用线性基函数，辅助变量 $\mathcal{E}$采用分片常数，即 $m_1=m_2=1$ 和 $m_3=0$。

宾汉屈服应力、正则化参数、重力、密度和黏度分别为 $\sigma_o = 0.2\,\mathrm{Pa}$、 $\gamma = 10^2\mathrm{Pa\ s}$、$\beta = 10^2\mathrm{Pa\ s}$、$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$、 $\rho = 1\mathrm{kg\ m^{-3}}$和 $\eta = 0.02\,\mathrm{Pa\ s}$。计算所用的时间步长为 $\Delta t = 10^{-6}\mathrm{s}$。图 7、8 和 9 分别展示了该问题在 $= 0.05$、0.10 和 0.15 s 时的解。计算宾汉应力贡献时，我们采用第一种具有分段连续导数的替代正则化方法，参见方程 (27)。采用其他替代方法，即 (29) 和 (30)，所得图形也非常相似。代表速度梯度（即应变率）的变量 $\mathcal{E}$ 显示于图 7c、8c 和 9c。利用该变量 $\mathcal{E}$，可以轻松确定活跃区域，例如 $|\mathcal{E}| > \sigma_o/\gamma$，参见图 7d、8d 和 9d。为供参考和比较，图中还给出了该问题在黏度和宾汉屈服应力均为零，即 $\eta = 0$ 和 $\sigma_o = 0$时的解析解；该解的详细内容见 [57]。

由于材料的黏度，尽管初始条件不连续，解仍然是光滑的，如图 11 所示。事实上，黏度产生的流动阻力会平滑伪振荡，因此无需使用斜率限制器等额外计算技术来处理这些振荡。由于宾汉黏塑性，区域分为五个部分，即左侧非活动区、左中活动区、中部非活动区、右中活动区和右侧非活动区。中心区域由左中活动区、中部非活动区和右中活动区组成，并随时间推移而扩大。一个重要的现象是，当宾汉屈服应力较大时，如图 10 所示，中心区域的速度会降低。在中部非活动区，我们观察到高度出现了另一个阶跃，这是因为材料在该处表现得像固体。如果宾汉屈服应力为零，则不会出现这一中心阶跃；宾汉屈服应力越大，阶跃也越明显。我们还注意到，左侧非活动区和右侧非活动区获得了非零速度，但仍像固体一样移动。

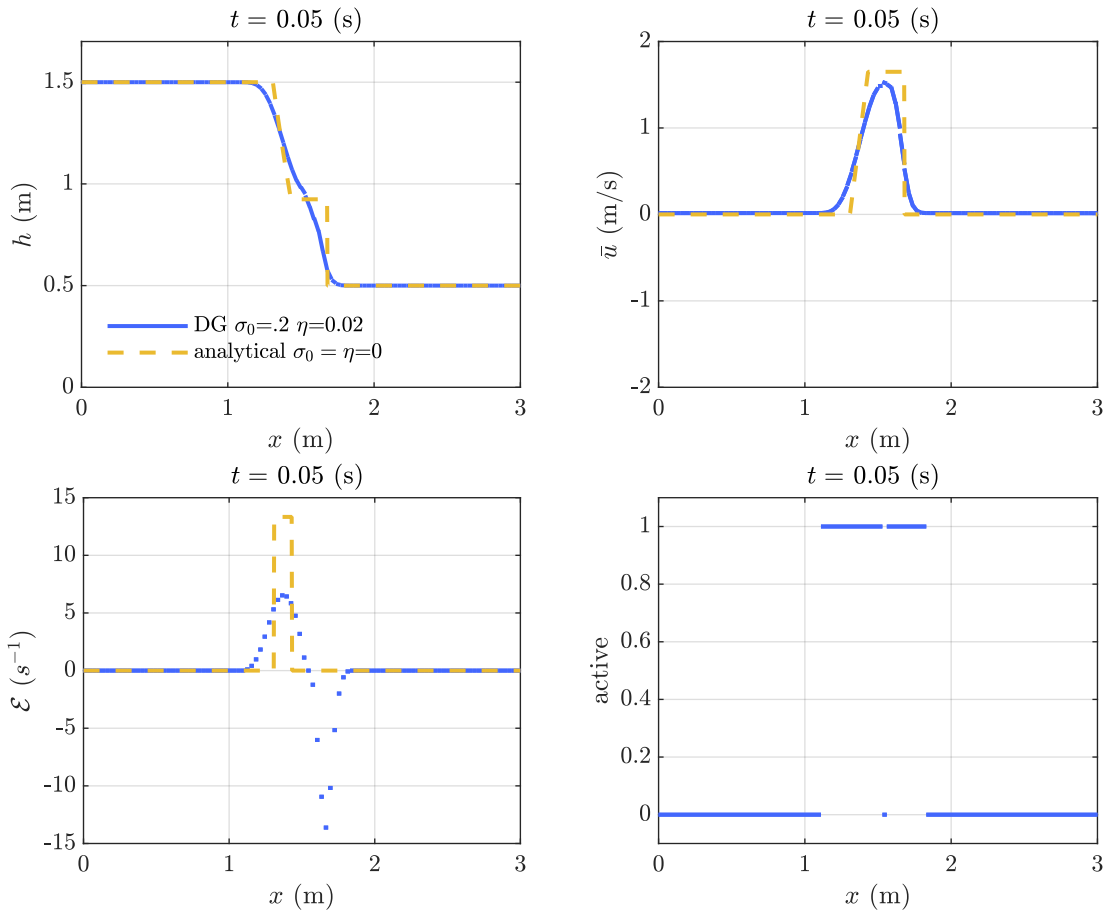

图 7：湿床溃坝问题在时间 $t = 0.05$s 时，包含黏度和宾汉本构定律的间断伽辽金 100 个单元计算结果，参数为 $\sigma_o = 0.2$Pa 和 $\eta = 0.02$ Pa s。

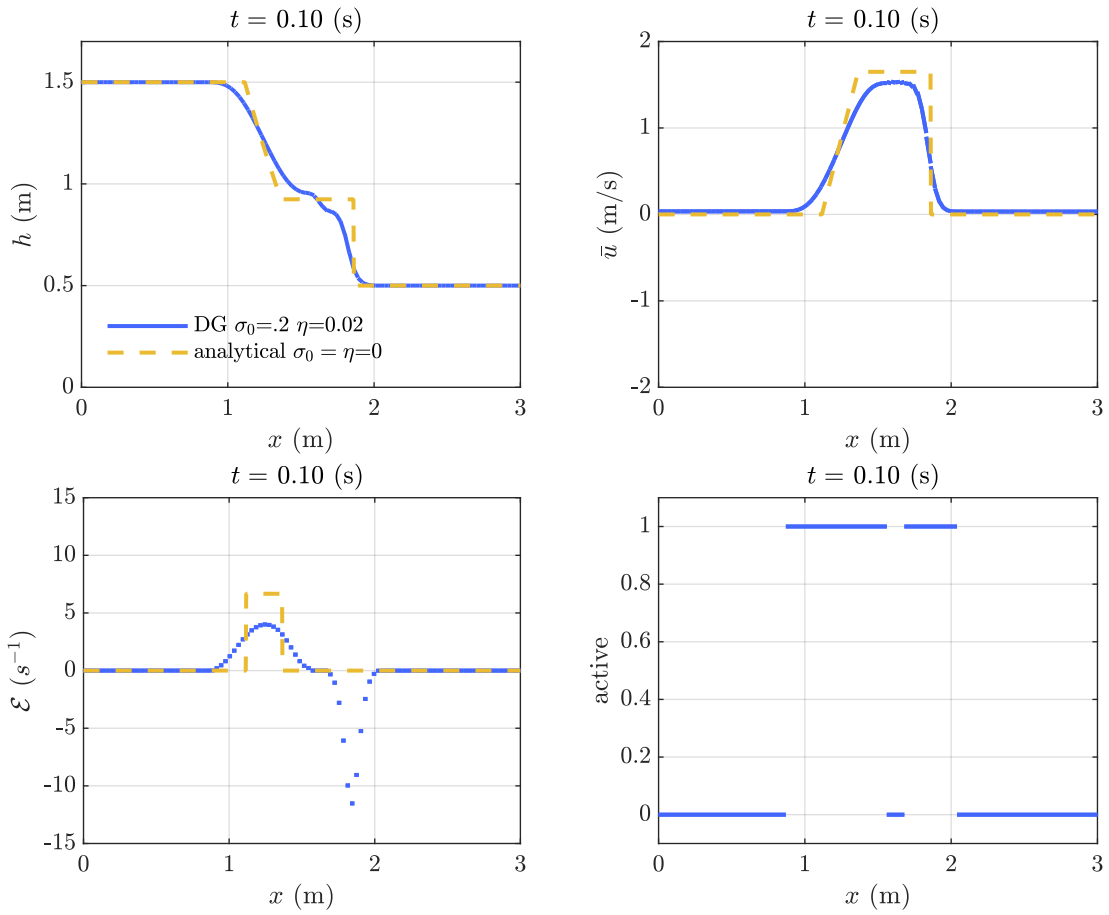

图 8：湿床溃坝问题在 $t = 0.10$s 时的间断伽辽金 100 个单元计算结果，其中包含黏度和宾汉本构定律，参数为 $\sigma_o = 0.2$Pa 和 $\eta = 0.02$ Pa s。

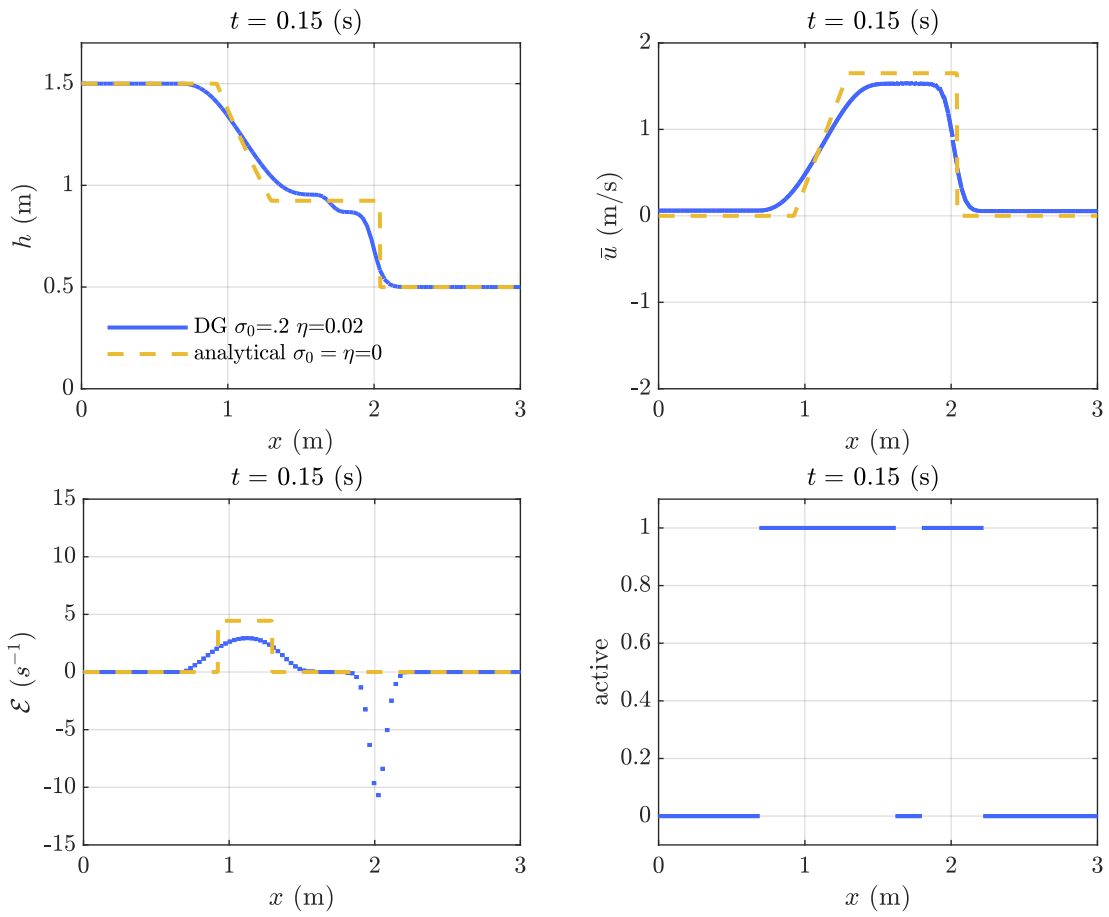

图 9：采用间断伽辽金法的 100 个单元，包含黏度和宾汉本构定律，用于湿床上的溃坝问题；时间为 $t = 0.15$s，屈服应力为 $\sigma_o = 0.2$Pa，黏度为 $\eta = 0.02$ Pa s。

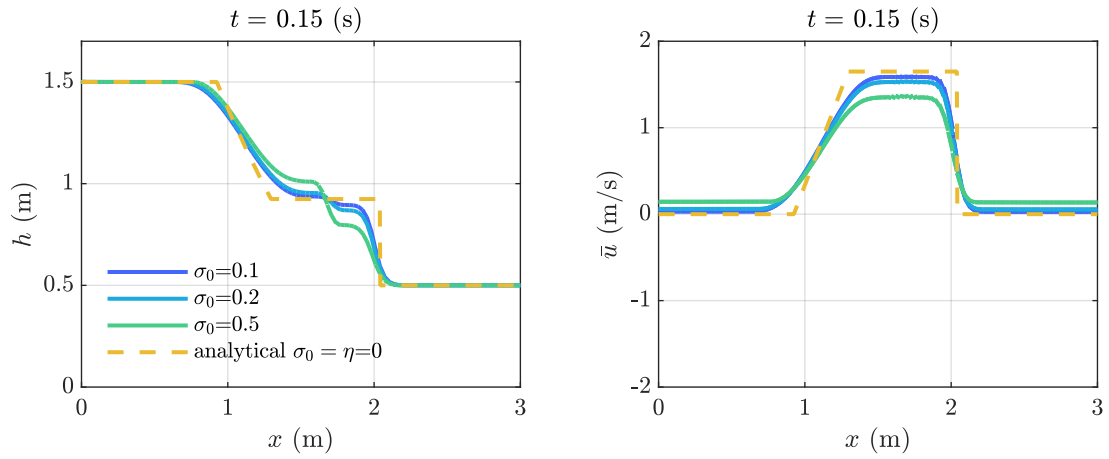

图 10：间断伽辽金法的 100 个单元，包含黏度和宾汉本构定律，用于溃坝问题在湿床上，时间为 t =0.15 s，对比不同的宾汉屈服应力 σ_0 以及黏度 $\eta = .02$。

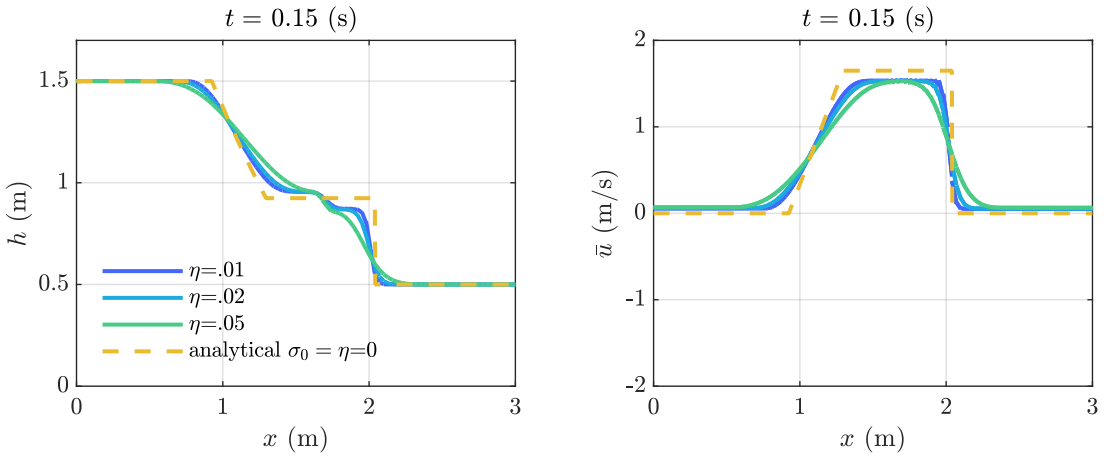

图11：在湿床溃坝问题中，采用包含黏度和宾汉本构定律的间断伽辽金方法，使用100个单元，在时间 t =0.15 s、宾汉屈服应力为 $\sigma_0 = .2$ 时，不同黏度 η下的结果。

我们针对不同的正则化方法，使用 $n_{ele} = 100$ 个单元、 $\sigma_o = 0.2$ Pa和 $\eta = 0.02$ Pa s重复上述数值实验。由于没有解析解，我们将结果与网格更细（ $n_{ele} = 500$ ）、时间步长更小（ $\Delta t = 10^{-6}$s）的数值实验进行比较，参见表5。我们计算误差范数L-2和L-无穷范数，将这些解与精细化解进行比较。表6总结了结果。首先，我们注意到，对于正则化方法1和2，当 $\gamma = 1e3$较大时，会出现收敛困难、计算成本高且精度低的情况。相比之下，当正则化参数为 $\gamma < 1e3$时，正则化方法1和2的计算成本低且精度高。此外，对活跃区域百分比的预测接近精细化解所预测的46%活跃区域，因此，与其他方法相比，方法1和2的预测值最为接近。此外，我们没有发现正则化参数 β有显著影响。使用正则化方法1和2且 $\gamma < 1e3$ 时，以及对任意正则化参数使用方法3时，我们在每个时间步都获得了预期的二次收敛，这与牛顿-拉夫森方法的表现一致。这清楚地表明，正则化函数的光滑性会影响收敛。一个重要的细节是，我们可以通过减小时间步长来克服这些收敛困难；精细化解正是采用这种方式，因此不存在收敛问题。在精细化情形下，方法1和2均经过2次牛顿-拉夫森迭代后收敛，参见表5，并再次获得二次收敛。对于第三种正则化方法，无论正则化参数取何值，其计算成本都较低，精度也较高。我们认为，这种高性价比归因于其C^∞ 光滑性，这有助于牛顿-拉夫森方法收敛。然而，由于正则化函数本身较为光滑，无法清晰划分活跃-非活跃区域，因此方法3无法预测活跃百分比区域。尽管活跃区域预测存在误差，但与精细化解相比，方法3在高度和速度上的误差较小。

Reg. 方法	γ （帕斯卡秒）	β	活跃 %	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	1E+03	1E+03	46.0	2.0	6.8E+05
2	1E+03	1E+03	46.0	2.0	6.8E+05
3	1E+03	-	90.2	2.0	6.8E+05

表5：使用不同正则化函数求得的溃坝问题精细化解，参数为 $n_{el} = 500$、 $\Delta t = 10^{-6}$s、 $\sigma_o = 0.2$Pa 和 $\eta = 0.02$Pas。

我们重复之前的同一示例，但改变辅助变量的多项式阶数，即 $m_3 = 1$。表7汇总了这些结果。所有方法的表现都与之前相同。对于方法1和2，使用 $\gamma < 1e3$ 时，精度略有提升。同样，

Reg. 方法	γ (帕斯卡秒)	β	活跃 %	L_h^2	$L_{\vec{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\vec{u}}^\infty$	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	1E+01	1E+01	48.0	2.2E-04	2.0E-03	3.1E-02	1.3E-01	2.0	1.4E+04
1	1E+01	1E+02	44.0	2.2E-04	2.0E-03	3.1E-02	1.3E-01	2.0	1.4E+04
1	1E+02	1E+02	45.0	2.2E-04	2.2E-03	3.2E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04
1	1E+02	1E+03	45.0	2.2E-04	2.2E-03	3.2E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04
1	1E+03	1E+02	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
1	1E+03	1E+03	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
1	1E+03	1E+04	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
2	1E+01	1E+01	48.0	2.2E-04	2.0E-03	3.1E-02	1.3E-01	2.0	1.4E+04
2	1E+01	1E+02	44.0	2.2E-04	2.0E-03	3.1E-02	1.3E-01	2.0	1.4E+04
2	1E+02	1E+02	45.0	2.2E-04	2.2E-03	3.2E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04
2	1E+02	1E+03	45.0	2.2E-04	2.2E-03	3.2E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04
2	1E+03	1E+02	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
2	1E+03	1E+03	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
2	1E+03	1E+04	12.0	1.8E-01	2.1E+00	5.4E-01	1.5E+00	10.0	7.0E+04
3	1E+01	-	88.0	2.6E-04	2.3E-03	3.2E-02	1.1E-01	2.0	1.4E+04
3	1E+02	-	90.0	2.2E-04	2.1E-03	3.1E-02	1.3E-01	2.0	1.4E+04
3	1E+03	-	90.0	2.2E-04	2.2E-03	3.3E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04
3	1E+04	-	90.0	2.2E-04	2.2E-03	3.3E-02	1.4E-01	2.0	1.4E+04

表6：溃坝问题：$n_{el} = 100$、$\sigma_o = 0.2$Pa、$\eta = 0.02$帕斯卡秒、$m_1 = m_2 = 1$、$m_3 = 0$，以及采用不同的正则化函数和参数。

方法3在 $\gamma < 1e4$时精度更高，而在 $\gamma = 1e4$时则存在收敛问题，精度误差也更大。最后，对于所有方法，正如预期的那样，$m_3 = 1$ 时的计算成本高于 $m_3 = 0$时。

Reg. 方法	γ (帕斯卡秒)	β	活跃 %	L_h^2	$L_{\vec{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\vec{u}}^\infty$	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	1E+01	1E+01	49.8	2.0E-04	1.9E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.0	1.9E+04
1	1E+02	1E+02	48.7	1.8E-04	2.0E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.1	2.0E+04
1	1E+03	1E+03	53.1	1.7E-01	2.0E+00	5.3E-01	1.5E+00	10.0	9.5E+04
2	1E+01	1E+01	50.1	2.0E-04	1.9E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.0	1.9E+04
2	1E+02	1E+02	48.7	1.8E-04	2.0E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.1	2.0E+04
2	1E+03	1E+03	55.6	1.7E-01	2.0E+00	5.3E-01	1.5E+00	10.0	9.5E+04
3	1E+01	-	88.5	2.5E-04	2.3E-03	2.8E-02	1.0E-01	2.0	1.9E+04
3	1E+02	-	90.8	2.0E-04	1.9E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.1	1.9E+04
3	1E+03	-	89.4	1.9E-04	2.0E-03	3.0E-02	1.2E-01	2.1	2.0E+04
3	1E+04	-	82.3	1.7E-01	2.0E+00	5.3E-01	1.5E+00	10.0	9.5E+04

表7：$n_{el} = 100$、$\sigma_o = 0.2$Pa、$\eta = 0.02$帕斯卡秒、$m_1 = m_2 = m_3 = 1$的溃坝问题，以及使用不同正则化函数和参数的情况。

为减少方法1和2的收敛问题，我们可以采用更小的时间步长，或者使用另一种替代方法：延拓方法。在每个时间步长中，我们可以先针对正则化参数 γ_i 求解问题并实现收敛，然后将正则化参数增大到 γ_{i+1}。我们重复这一过程，直至达到所需的 γ。在数值实验中，我们从正则化参数 γ_0 开始，经过 $n_\gamma \geq 2$ 个延拓步后达到 γ。因此，在每次延拓迭代中，正则化参数依次为 $i = 1, 2, ..., n_\gamma$，即 $\gamma_i = \gamma_0 + (i-1)(\gamma - \gamma_0)/(n_\gamma - 1)$。为测试这种方法，我们针对 $n_{el} = 100$、$\sigma_o = 0.2$ Pa、$\eta = 0.02$ 帕斯卡秒、$m_1 = m_2 = 1$、$m_3 = 0$，并采用正则化方法1和2，重复该示例。我们在表8中展示这些结果。在此测试中，我们分别以 $\gamma_0 = 10^2$ 和 $\gamma = 10^3$ 作为起始值和终止值。

在所有这些情况下，延拓法均成功收敛，且精度很高。正如预期，不使用延拓时的计算成本较低。有趣的是，当延拓迭代次数为 $n_\gamma = 2$ 时，我们获得了最低的计算成本。由此可见，对正则化参数采用延拓法是避免收敛问题的一种良好替代方法。

Reg. 方法	γ_0 (帕斯卡秒)	γ (帕斯卡秒)	n_γ	活跃 %	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	1E+02	1E+03	2	94.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	11.5	8.0E+04
1	1E+02	1E+03	3	28.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	11.8	8.2E+04
1	1E+02	1E+03	5	21.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	14.5	1.0E+05
1	1E+02	1E+03	10	21.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	22.3	1.5E+05
2	1E+02	1E+03	2	94.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	11.5	8.0E+04
2	1E+02	1E+03	3	28.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	11.8	8.3E+04
2	1E+02	1E+03	5	21.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	14.5	1.0E+05
2	1E+02	1E+03	10	21.0	2.7E-03	3.3E-02	1.3E-01	6.4E-01	22.3	1.6E+05

表8： $n_{el} = 100$、 $\sigma_o = 0.2$Pa、 $\eta = 0.02$帕斯卡秒的溃坝问题，并对正则化参数使用延拓法。

我们针对 $n_{el} = 50$、 $\sigma_o = 0.2$Pa、 $\eta = 0.02$帕斯卡秒和 $m_1 = m_2 = 1$、 $m_3 = 0$重复了该示例，并在此情况下对高度、速度和辅助变量的基函数采用不同的多项式阶数。所有方法都得到了良好的结果。正如预期，若基函数采用更高阶的多项式，误差会更小，但计算时间会更长。方法1和方法2对活跃百分比区域的预测精度优于方法3。

Reg. 方法	m_1 (帕斯卡秒)	m_2 (帕斯卡秒)	m_3	活跃 %	L_h^2	$L_{\bar{u}}^2$	L_h^∞	$L_{\bar{u}}^\infty$	NRIt/TIt	CPU 时间 (s)
1	2	2	2	49.2	3.4E-04	3.5E-03	8.4E-02	3.7E-01	2.0	1.9E+05
1	3	3	3	50.2	2.2E-04	2.3E-03	7.6E-02	3.1E-01	2.0	3.1E+05
1	4	4	4	50.9	2.0E-04	1.9E-03	7.2E-02	3.0E-01	2.0	4.9E+05
2	2	2	2	49.2	3.4E-04	3.5E-03	8.4E-02	3.7E-01	2.0	1.9E+05
2	3	3	3	50.2	2.2E-04	2.3E-03	7.6E-02	3.1E-01	2.0	3.1E+05
2	4	4	4	53.2	2.1E-04	1.9E-03	7.2E-02	3.0E-01	2.0	5.0E+05
3	2	2	2	91.9	3.5E-04	3.3E-03	8.4E-02	3.7E-01	2.0	1.9E+05
3	3	3	3	86.8	2.3E-04	2.2E-03	7.5E-02	3.1E-01	2.0	3.1E+05
3	4	4	4	90.3	2.0E-04	1.8E-03	7.1E-02	3.0E-01	2.0	4.9E+05

表 9： $n_{el} = 50$、 $\sigma_o = 0.2$Pa、 $\eta = 0.02$帕斯卡秒条件下采用不同多项式阶数的溃坝问题 sis.

7. 结论

本文通过使用间断伽辽金方法求解浅水方程，模拟黏塑性流动。由于采用基于单元的离散，间断伽辽金方法凭借其高度并行化、h-与p-自适应能力，以及捕捉精确解不连续性的能力而颇具优势。由于两个单元共享单元界面，我们采用基于黎曼问题理论的数值通量，以确保非线性双曲方程的解稳定。对于黏塑性材料模型，我们采用深度平均宾汉本构定律；根据应力大小低于还是高于材料的屈服应力，材料表现为固体或流体。为将宾汉模型与浅水方程耦合，我们对这一本构定律进行正则化 [21]。正则化的基本思想是：当应力低于屈服阈值时，材料具有较大的黏度，从而表现出类似固体的行为；而当应力高于屈服阈值时，材料则表现出通常的黏度。我们研究了三个正则化函数，其中两个为局部类型，

另一个为全局类型，且均具有连续一阶导数。这些正则化将问题转化为牛顿可微方程组，使每次时间迭代求解均达到二次收敛。数值算例检验了方法的平衡保持性质及其有效性。我们比较了所提出的不同正则化方法，发现 C^∞ 正则化在计算上效率更高，但该方法无法准确预测活跃/非活动区域。相比之下，其他分段线性（局部）正则化对活跃/非活动区域的预测更准确。为避免收敛问题，我们建议对正则化参数采用延拓法，或使用更小的时间步。

在本研究中，我们在一维情况下求解了一维问题。因此，未来我们将把该方法扩展到二维问题，并纳入对干湿前沿的处理。

8. 致谢

本研究使用了由数学建模研究中心科学计算实验室提供的研究计算设施和/或咨询服务：MODEMAT，厄瓜多尔国立理工学院（基多）。本项目由厄瓜多尔国立理工学院通过项目 PIM 20-01 资助。

附录

A. 切线项

本节详细说明方程 (49) 残差向量的导数。这些导数对于构建牛顿系统 (50) 的切线项至关重要。我们系统地运用链式法则，得到单元 Ω_e^h 的以下表达式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}_{Ve}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e} = \frac{1}{\Delta t}\left\langle \hat{\mathbf{N}}_V\,, \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} &+ \left\langle \hat{\mathbf{N}}_V^-\,, \frac{\partial \overline{\mathbf{F}}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\cdot \mathbf{n}_e\right\rangle_{\Gamma_e^h} - \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_1}\,, \frac{\partial \mathbf{F}_1^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} - \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_2}\,, \frac{\partial \mathbf{F}_2^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} \\ &- \left\langle \hat{\mathbf{N}}_V^-\,, \frac{\partial \overline{\mathbf{Q}}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\cdot \mathbf{n}_e\right\rangle_{\Gamma_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_1}\,, \frac{\partial \mathbf{Q}_1^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_2}\,, \frac{\partial \mathbf{Q}_2^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} \\ &- \left\langle \hat{\mathbf{N}}_V\,, \frac{\partial \mathbf{S}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} \end{aligned} \tag{A.1a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{Ve}^{(k)}}{\partial \mathbf{E}_e} = -\left\langle \hat{\mathbf{N}}_V^-\,, \frac{\partial \overline{\mathbf{Q}}^{(k)}}{\partial \mathbf{E}_e}\cdot \mathbf{n}_e\right\rangle_{\Gamma_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_1}\,, \frac{\partial \mathbf{Q}_1^{(k)}}{\partial \mathbf{E}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_V}{\partial x_2}\,, \frac{\partial \mathbf{Q}_2^{(k)}}{\partial \mathbf{E}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} \tag{A.1b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{Ee}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e} = -\left\langle \hat{\mathbf{N}}_E^-\,, \frac{\partial \overline{\mathbf{G}}^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\cdot \mathbf{n}_e\right\rangle_{\Gamma_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_E}{\partial x_1}\,, \frac{\partial \mathbf{G}_1^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_E}{\partial x_2}\,, \frac{\partial \mathbf{G}_2^{(k)}}{\partial \mathbf{V}_e}\right\rangle_{\Omega_e^h} \tag{A.1c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{Ee}^{(k)}}{\partial \mathbf{E}_e} = \left\langle \hat{\mathbf{N}}_E\,, \hat{\mathbf{N}}_E\right\rangle_{\Omega_e^h}. \tag{A.1d}$$

注意，我们将矩阵的点积定义为 $\langle \mathbf{A}_1\,, \mathbf{A}^2\rangle_{\Omega_e^h} = \int_{\Omega_e^h} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_e^h} \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_2 \,\mathrm{d}\Omega$。我们给出守恒量向量 $\mathbf{U}$（参见方程（16））及其导数：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ h\bar{u}_1 \\ h\bar{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{u}_1 & h & 0 \\ \bar{u}_2 & 0 & h \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V\,. \tag{A.2}$$

此外，浅水项 $\mathbf{F}$ （参见方程（18））及其导数详述如下：

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} h\bar{u}_1 \\ h\bar{u}_1^2 + 1/2 g_c h^2 \\ h\bar{u}_1\bar{u}_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & h & 0 \\ \bar{u}_1^2 + g_c h & 2h\bar{u}_1 & 0 \\ \bar{u}_1\bar{u}_2 & h\bar{u}_2 & h\bar{u}_1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V , \tag{A.3}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} h\bar{u}_2 \\ h\bar{u}_1\bar{u}_2 \\ h\bar{u}_2^2 + 1/2 g_c h^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} \bar{u}_2 & 0 & h \\ \bar{u}_1\bar{u}_2 & h\bar{u}_2 & h\bar{u}_1 \\ \bar{u}_2^2 + g_c h & 0 & 2h\bar{u}_2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V . \tag{A.4}$$

由黎曼求解器（41）获得的通量导数对于 $i \in 1$，2的计算方式如下：

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{F}}_i}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{F}_i^-}{\partial \mathbf{V}_e} & \text{if} \quad S_L \geq 0 \\ \dfrac{S_R \frac{\partial \mathbf{F}_i^-}{\partial \mathbf{V}_e} - S_L \frac{\partial \mathbf{F}_i^+}{\partial \mathbf{V}_e} + S_L S_R \left(\frac{\partial \mathbf{U}^+}{\partial \mathbf{V}_e} - \frac{\partial \mathbf{U}^-}{\partial \mathbf{V}_e} \right)}{S_R - S_L} & \text{if} \quad S_L < 0 < S_R \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}_i^+}{\partial \mathbf{V}_e} & \text{if} \quad S_R \leq 0 \end{cases} . \tag{A.5}$$

此外，我们给出应力项 $\mathbf{Q}$ （参见方程 (19)）及其导数：

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h\sigma_{11}/\rho \\ h\sigma_{21}/\rho \end{bmatrix}, \tag{A.6a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{11}/\rho & 0 & 0 \\ \sigma_{21}/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V , \tag{A.6b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial \mathbf{E}_e} = \frac{h}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathcal{E}_{11}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathcal{E}_{21}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathcal{E}_{12}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \mathcal{E}_{22}} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \mathcal{E}_{11}} & \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \mathcal{E}_{21}} & \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \mathcal{E}_{12}} & \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \mathcal{E}_{22}} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_E , \tag{A.6c}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h\sigma_{12}/\rho \\ h\sigma_{22}/\rho \end{bmatrix}, \tag{A.7a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12}/\rho & 0 & 0 \\ \sigma_{22}/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V , \tag{A.7b}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial \mathbf{E}_e} = \frac{h}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \mathcal{E}_{11}} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \mathcal{E}_{21}} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \mathcal{E}_{12}} & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \mathcal{E}_{22}} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \mathcal{E}_{11}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \mathcal{E}_{21}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \mathcal{E}_{12}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \mathcal{E}_{22}} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_E . \tag{A.7c}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{V}_e} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_1^+}{\partial \mathbf{V}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{Q}_2^+}{\partial \mathbf{V}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1^-}{\partial \mathbf{V}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{Q}_2^-}{\partial \mathbf{V}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2 \right) \tag{A.8a}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}_1^+}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{Q}_2^+}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{Q}_1^-}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{Q}_2^-}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2 \right) . \tag{A.8b}$$

为获得一维问题中应力的导数，我们推导方程 (22)、(25) 和 (26)，得到以下表达式：

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_N}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B}{\partial \mathcal{E}}\,, \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_N}{\partial \mathcal{E}} = 4\eta\,, \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_B}{\partial \mathcal{E}} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |\mathcal{E}| \geq \sigma_o/\gamma \\ 2\gamma & \text{if} \quad |\mathcal{E}| < \sigma_o/\gamma\,. \end{cases} \tag{A.11}$$

对于宾汉应力的光滑正则化，我们推导出方程 (27)、(28)、(29) 和 (30)：

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(1)}}{\partial \mathcal{E}} = 2\sigma_o \frac{\gamma}{\max_\beta\left(\gamma\,|\mathcal{E}| - \sigma_o\,, 0\right) + \sigma_o} - 2\sigma_o \frac{\gamma^2\,\mathcal{E}\,\mathrm{sign}(\mathcal{E})}{\left(\max_\beta\left(\gamma\,|\mathcal{E}| - \sigma_o\,, 0\right) + \sigma_o\right)^2} \max'_\beta\left(\gamma\,|\mathcal{E}| - \sigma_o\,, 0\right), \tag{A.12}$$

$$\max'_\beta\left(x\,, 0\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \geq \frac{1}{2\beta} \\ \beta\left(x + \frac{1}{2\beta}\right) & \text{if} \quad |x| \leq \frac{1}{2\beta} \\ 0 & \text{if} \quad x \leq -\frac{1}{2\beta}. \end{cases} \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(2)}}{\partial \mathcal{E}} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \gamma|\mathcal{E}| \geq \sigma_o + \frac{1}{2\beta} \\ 2\beta\gamma\left(\sigma_o - \gamma|\mathcal{E}| + \frac{1}{2\beta}\right) & \text{if} \quad \sigma_o - \frac{1}{2\beta} \leq \gamma|\mathcal{E}| \leq \sigma_o + \frac{1}{2\beta} \\ 2\gamma\,\mathcal{E} & \text{if} \quad \gamma|\mathcal{E}| \leq \sigma_o - \frac{1}{2\beta}. \end{cases} \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{B(3)}}{\partial \mathcal{E}} = 2\sigma_o\gamma\,\mathrm{sech}^2\left(\gamma\,\mathcal{E}\right)\,. \tag{A.15}$$

此外, 我们给出源项$\mathbf{S}$ 的表达式（参见方程 (17)）及其导数：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_s\,h - g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_1} \\ -g_c\,h\,\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g_s - g_c\,\frac{\partial H}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ -g_c\,\frac{\partial H}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V\,. \tag{A.16}$$

最后，项$\mathbf{G}$ （参见方程（20））及其导数详述如下：

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} h\bar{u}_1^2 \\ h\bar{u}_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^2 & 2h\bar{u}_1 & 0 \\ \bar{u}_2^2 & 0 & 2h\bar{u}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V\,, \tag{A.17}$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h\bar{u}_1^2 \\ h\bar{u}_2^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial \mathbf{V}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{u}_1^2 & 2h\bar{u}_1 & 0 \\ \bar{u}_2^2 & 0 & 2h\bar{u}_2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_V\,, \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{V}_e} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{G}_1^+}{\partial \mathbf{V}_e}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{G}_2^+}{\partial \mathbf{V}_e}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{G}_1^-}{\partial \mathbf{V}_e}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{G}_2^-}{\partial \mathbf{V}_e}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{e}_2\right)\,. \tag{A.19a}$$

参考文献

[1] C´eline Acary-Robert、Enrique Domingo Fern´andez-Nieto、Gladys Narbona-Reina 和 Paul Vigneaux。用于积分Herschel-Bulkley模型的良平衡有限体积增广拉格朗日方法。 *Journal of Scientific Computing*，53 3 608( ): –641，2012年。[2] Vadym Aizinger 和 Clint Dawson。用于浅水中二维流动与输运的间断伽辽金方法。 *Advances in Water Resources*，25(1):67–84，2002年。[3] Christophe Ancey。塑性与地球物理流：综述。

Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 142 1 3 4 35, , (-): – 。2007

[4] NJ Balmforth、RV Craster 和 R Sassi。冷却黏塑性穹顶的动力学。

Journal of Fluid Mechanics 499 149 182, , : – 。[5] 2004

Lorenzo Begnudelli 和 Brett F Sanders。适用于四边形网格有限体积模型的守恒型润湿与干燥方法。 *Journal of Hydraulic Engineering*，133(3):312–322，2007年。[6] Alfredo Bermudez 和 Ma Elena Vazquez。含源项双曲守恒律的迎风方法。 *Computers & Fluids* 23 8 1049 1071, 1994 , ( ): – 。

[7] No´e Bernabeu、Pierre Saramito 和 Claude Smutek。采用浅层近似对黏塑性流进行三维冷却的熔岩流推进建模。 *Geological Society, London, Special Publications*，426(1):409–423，2016年。[8] Sheng Bi、Jianzhong Zhou、Yi Liu 和 Lixiang Song。基于自适应笛卡尔网格、模拟具有干湿前沿的浅层流的有限体积法。 *Mathematical problems in Engineering*，2014，2014。[9] Onno Bokhove。浅水方程间断伽辽金有限元离散中的淹没与干涸。第一部分：一维。 *Journal of scientific computing*，22(1):47–82，2005年。[10] Didier Bresch、Enrique D Fernandez-Nieto、Ioan R Ionescu 和 Paul Vigneaux。增广拉格朗日方法与可压缩黏塑性流：在浅层稠密雪崩中的应用。载于 *New directions in mathematical fluid mechanics*，第57–89页。Springer，2009年。[11] Franco Brezzi、L Donatella Marini 和 Endre S¨uli。一阶双曲问题的间断伽辽金方法。*Mathematical models and methods in applied sciences*，14(12):1893–1903，2004年。[12] W Brian Dade 和 Herbert E Huppert。长距离岩崩。 *Geology*，26(9):803–806，1998年。[13] Shintaro Bunya、Ethan J Kubatko、Joannes J Westerink 和 Clint Dawson。浅水方程的Runge–Kutta间断伽辽金解中的润湿与干燥处理。 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 17 20 1548 1562, 2009 , (-): – 。

[14] Daniel Caviedes-Voulli`eme、Nils Gerhard、Aleksey Sikstel 和 Siegfried M¨uller。采用间断伽辽金格式的基于多小波的网格自适应：探索二维浅水问题。 *Advances in Water Resources*，138:103559，2020年。[15] Bernardo Cockburn 和 Chi-Wang Shu。守恒律的TVB Runge-Kutta局部投影间断Galerkin有限元法。II. 一般框架。 *Mathematics of computation*，52(186):411–435，1989年。[16] Antonio Costa 和 Giovanni Macedonio。熔岩流计算建模：综述。 *Special papers-Geological Society of America* 396 209, 2005 , : 。[17]

Antonio Costa 和 Giovanni Macedonio。基于深度平均方程的熔岩流数值模拟。 *Geophysical Research Letters* 32 5 2005 *Geophys-* , ( ), 。

[18] Philippe Coussot。明渠中高浓度泥浆悬浮液的稳态层流。 *Journal of Hydraulic Research*，32 4 535 559，1994年( ): – 。[19] Clint Dawson 和 Vadym Aizinger。三维浅水方程的间断伽辽金方法。*Journal of Scientific Computing*，22(1):245–267，2005年。[20] Clint Dawson、Joannes J Westerink、Jesse C Feyen 和 Dharhas Pothina。浅水方程的连续、间断及耦合间断-连续Galerkin有限元方法。 *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 52 1 63 , ( ): –88, 2006年。[21] Juan Carlos De los Reyes。黏塑性材料流动中混合变分不等式的优化。 *Computational Optimization and Applications* 52 3 757 784, 2012 *Com-* , ( ): – 。

[22] Roger P Denlinger 和 Richard M Iverson。变流化颗粒体在三维地形上的流动：2. 数值预测与实验测试。 *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*，106(B1):553–566，2001年。[23] Alexandre Ern 和 Jean-Luc Guermond。Friedrichs系统的间断伽辽金方法。I. 一般理论。 *SIAM journal on numerical analysis* 44 2 753 778, 2006 , ( ): – 。

[24] Alexandre Ern、Serge Piperno 和 Karim Djadel。含淹没与干涸的浅水方程良平衡Runge–Kutta间断伽辽金方法。 *International journal for numerical methods in fluids*，58(1):1–25，2008年。[25] Claes Eskilsson 和 Spencer J Sherwin。用于二维浅水方程建模的三角形谱/hp间断Galerkin方法。 *International Journal for Numerical Methods in Fluids*，45(6):605–623，2004年。[26] Enrique D Fern´andez-Nieto、Jos´e M Gallardo 和 Paul Vigneaux。黏塑性雪崩的高效数值格式。第一部分：一维情形。 *Journal of Computational Physics*，264:55–90，2014年。[27] Enrique D Fernandez-Nieto、Jos´e M Gallardo 和 Paul Vigneaux。黏塑性雪崩的高效数值格式。第二部分：二维情形。 *Journal of Computational Physics*，353:460–490，2018年。[28] Enrique D Fern´andez-Nieto、Pascal Noble 和 Jean-Paul Vila。非牛顿流体的浅水方程。， *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 165 13 14 712 732, 2010 (-): – 。[29] Jos´e M Gallardo、Carlos Par´es 和 Manuel Castro。关于适用于含地形和干燥区域浅水方程的良平衡高阶有限体积格式。 *Journal of Computational Physics*，227(1):574–601，2007年。[30] Nils Gerhard、Daniel Caviedes-Voulli`eme、Siegfried M¨uller 和 Georges Kesserwani。采用间断伽辽金格式的浅水方程基于多小波的网格自适应。 *Journal of Computational Physics*，301:265–288，2015年。

[31] Francis X Giraldo、Jan S Hesthaven 和 Tim Warburton。用于球面浅水方程的节点型高阶间断伽辽金方法。
Journal of Computational Physics，181(2):499–525，2002年。[32] JMNT Gray、M Wieland 和 K Hutter。颗粒雪崩在复杂基底地形上重力驱动的自由表面流动。 *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*，455 1985 1841 1874，1999 ( ): – 。[33] Jan S Hesthaven。
Numerical methods for conservation laws: From analysis to algorithms。工业与应用数学学会，2017年。[34] Kolumban Hutter、M Siegel、SB Savage 和 Y Nohguchi。颗粒雪崩沿倾斜平面向下二维扩展，第一部分：理论。 *Acta Mechanica*，100(1):37–68，1993。[35] Ioan R Ionescu。黏塑性流体在平面斜坡上的起始及浅层动态流动。 *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 165 19 20 1328 1341, 2010 ，(-): – 。

[36] Ioan R Ionescu。含地形浅层黏塑性流动的增广拉格朗日方法。 *Journal of Computational Physics*，242 544: –560，2013年。[37] Ioan R Ionescu。含地形的黏塑性浅层流动方程。 *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*，193 116: –128，2013年。[38] Richard M Iverson。泥石流的物理学。 *Reviews of geophysics*，35(3):245–296，1997年。[39] Karim Kelfoun 和 Timothy H Druitt。智利索孔帕岩崩运移过程的数值建模。 *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 110 12 2005 ，(B)，。

[40] Karim Kelfoun、Pablo Samaniego、Pablo Palacios 和 Diego Barba。通过与厄瓜多尔通古拉瓦火山一次有充分约束的喷发进行比较，检验摩擦行为用于火山碎屑流模拟的适用性。 *Bulletin of volcanology* 71 9 1057 1075, 2009 ，( ): – 。

[41] Karim Kelfoun 和 Silvia Vallejo Vargas。VolcFlow模拟熔岩流的能力及其潜在发展方向。*Geological Society London Special Publications*，426(1):337–343，2016年。[42] Abdul A Khan 和 Wencong Lai。
Modeling shallow water flows using the discontinuous Galerkin method。CRC出版社，纽约，2014年。[43] Alexander Kurganov。浅水方程的有限体积格式。 *Acta Numerica*，27:289–351，2018年。[44] Dominique Laigle 和 Philippe Coussot。泥流的数值建模。
Journal of hydraulic engineering，123(7):617– 623，1997年。[45] Randall J LeVeque 等。
Finite volume methods for hyperbolic problems，第31卷。剑桥大学出版社，2002年。[46] Hong Li 和 RuXun Liu。用于 2 *Mathematics* 维浅水方程的间断伽辽金有限元方法。 *and computers in simulation* 56 3 223 233, 2001 ，( ): – 。[47] Qiuhua Liang 和 Alistair GL Borthwick。复杂地形上带干湿界面的浅层流自适应四叉树模拟。
Computers & Fluids，38(2):221–234，2009年。[48] Daniel R Lynch 和 William G Gray。有限元潮汐计算的波动方程模型。
Computers & fluids，7 3 207 228，1979 ( ): – 。[49] A Navas-Montilla、P Sol´an-Fustero、J Murillo 和 P Garc´ıa-Navarro。采用增广黎曼求解器的间断伽辽金良平衡格式及其在浅水方程中的应用。 *Journal of Hydroinformatics* 22 5 1038 1058, ，( ): – 。2020
[50] Abani K Patra、Andrew C Bauer、CC Nichita、E Bruce Pitman、Michael F Sheridan、M Bursik、Byron Rupp、A Webber、AJ Stinton、LM Namikawa 等。自然地形上干雪崩的并行自适应数值模拟。 *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 139 1 2 1 21, 2005 ，( ): – 。

[51] E Bruce Pitman、C Camil Nichita、Abani Patra、Andy Bauer、Michael Sheridan 和 Marcus Bursik。颗粒雪崩与滑坡的计算。
Physics of fluids，15(12):3638–3646，2003年。[52] William H Reed 和 Thomas R Hill。中子输运方程的三角网格方法。技术报告，洛斯阿拉莫斯科学实验室，新墨西哥州（美国），1973年。[53] Giovanni Russo。守恒律的中心格式及其在浅水方程中的应用。载于 *Trends and Applications of Mathematics to Mechanics* 225 246 2005 ，第 – 页。

Springer，。[54] Pierre Saramito 和 Anthony Wachs。屈服应力流体流动数值模拟的进展。 *Rheologica Acta*，56 3 211( ): –230，2017年。[55] Stuart B Savage 和 Kolumban Hutter。有限质量颗粒材料沿粗糙斜坡向下运动。 *Journal of fluid mechanics* 199 177 215, 1989 ，∶ – 。[56]

Dirk Schwanenberg 和 J¨urgen K¨ongeter。含源项浅水方程的间断伽辽金方法。载于 *Discontinuous Galerkin Methods*，第419–424页。Springer，2000年。[57] James Johnston Stoker。 *Water waves: The mathematical theory with applications*，第36卷。约翰·威立父子出版公司，2011年。[58] Yih-Chin Tai、S Noelle、JMNT Gray 和 Kolumban Hutter。颗粒雪崩的激波捕捉与前沿追踪方法。
Journal of Computational Physics，175(1):269–301，2002年。[59] Pieter Wesseling。 *Principles of computational fluid dynamics*，第29卷。施普林格科学与商业媒体，2009年。[60] Yulong Xing、Xiangxiong Zhang 和 Chi-Wang Shu。浅水方程的保正高阶良平衡间断伽辽金方法。 *Advances in Water Resources*，33(12):1476–1493，2010年。