布奇向量加法系统中的正则可分性

Pascal Baumann
德国马克斯·普朗克软件系统研究所（MPI-SWS）
Roland Meyer 德国
不伦瑞克工业大学
Georg Zetzsche
德国马克斯·普朗克软件系统研究所（MPI-SWS）

摘要

我们研究 Büchi 向量加法系统语言的（ω）正则可分性问题：给定两个语言分别为 L_1 和 L_2的 Büchi 向量加法系统，判断是否存在一个正则语言，它完全包含 L_1，同时与 L_2不相交。我们证明，在一般情况下该问题是可判定的；在一维情况下，若计数器更新采用简洁编码，则该问题是 PSPACE 完全的。我们的结果依赖于若干论证。我们刻画了所有与 L_2不相交的正则语言组成的集合。基于此，我们推导出一种（可靠且完备的）不可分性见证概念，即 L_1的非正则子集。最后，我们展示了如何对不可分性见证进行符号化表示，以及如何判断其是否存在。

2012年 ACM 学科分类计算理论 → 计算模型

关键词与短语可分离性问题，向量加法系统，无限词，可判定性

经费资助 本项目由欧盟（ERC、FINABIS，101077902）资助。但本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会执行局的立场。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。第二作者获得了德国研究联合会项目 EDS@SYN：用于综合的有效指称语义的资助。

arXiv:2301.11242v1 [cs.FL] 26 Jan 2023

1 引言

可分离性问题是指：给定语言 L_1 和 L_2，是否存在一个语言R，能够分隔 L_1 和 L_2，也就是说， $L_1 \subseteq R$ 和 $R \cap L_2 = \emptyset$。这里， R 被限制为属于某一特定类别$\mathcal{S}$，该类别由允许的分隔语言构成。由于含有并发组件的系统的安全性验证通常表述为有限词语言的交集问题，且分隔语言能够证明不相交性，因此判定可分离性可以视为综合安全性证书。类似地，判定无限字语言的可分离性，是证明活性的一种方式。如果$\mathcal{S}$ 是（ω-）正则语言这一类别，我们就称之为正则可分性。

过去几年中，可分离性问题得到了深入研究。如果输入语言本身是正则语言，且$\mathcal{S}$ 是一个子类 [42, 41, 40, 39, 43, 44, 35, 15], ，那么可分离性便是经典子类成员资格问题的推广。此外，无限状态系统语言的可分离性也受到了广泛关注 [17, 16, 14, 13, 10, 9, 12, 1, 51, 48, 11, 8]。下面指出两个重要的情形。

首先，这一研究方向中尚未解决的主要问题之一是：对于带状态向量加法系统（VASS）的（可达）语言，正则可分性是否可判定：VASS由有限多个控制状态和一组计数器构成，这些计数器可以递增和递减，但不能进行零值测试。此外，每个转移都由输入字母表上的一个字标记。如果运行到达某个终态且所有计数器均为零，则该运行被接受。尽管针对 VASS 语言的若干子类已有一些可判定性结果 [17, 14, 13, 10, 9], ，但一般情形仍悬而未决。其次，一个出人意料的结果是，如果 K 和 L 是良结构转移系统（WSTS）的可覆盖语言，那么 K 和 L 可由一个正则语言分离，当且仅当它们不相交 [14]。由于 VASS 是 WSTS 的一个例子，该结果也适用于它们的可覆盖语言。

Büchi 向量加法系统的正则可分性本文研究 Büchi 向量加法系统的正则可分性问题。这类向量加法系统接受无限词构成的语言。若一次运行无限次访问某个终态，则该运行是接受运行。由于计数器值不受任何限制，Büchi 向量加法系统语言是有限字可覆盖语言在无限字上的对应形式；在有限字可覆盖语言中，接受条件由到达的状态（而非计数器）决定。正则可分性问题是指判定：给定 Büchi 向量加法系统$\mathcal{V}_1$ 和$\mathcal{V}_2$, ，是否存在一个ω-正则语言 R，使得 $L(\mathcal{V}_1) \subseteq R$ 且 $L(\mathcal{V}_2) \cap R = \emptyset$。

我们的主要结果是：(i) Büchi 向量加法系统的正则可分性问题是可判定的；(ii) 对于一维 Büchi 向量加法系统（即只有一个计数器的系统），该问题是 PSPACE 完全的。这里假设计数器更新以二进制编码。

鉴于 Büchi 向量加法系统通过终态接受，且其转移系统属于良结构转移系统，人们或许会猜想，良结构转移系统也存在上述结果的类似结论：也就是说，两个 Büchi 向量加法系统的语言可由一个 ω-正则语言分离，当且仅当它们不相交。我们证明事实并非如此：存在 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$，使得$L(\mathcal{V}_1)$ 和 $L(\mathcal{V}_2)$ 不相交，却无法由一个 ω-正则语言分离。事实上，我们证明，在无限字情形下，良结构转移系统的这两个问题之间存在更大的差异：我们展示了一类自然的良结构转移系统，对于这类系统，交集问题可判定，但正则可分性问题不可判定。因此，Büchi 向量加法系统的正则可分性需要全新的思路，且涉及若干有限词向量加法系统语言中不会出现的现象。

新现象与关键要素 我们首先注意到，可以假设其中一个输入语言固定为 Dyck 语言的无限字版本 D_n 。接着，按照来自 [17], 的基本分离器 方法，我们找出一个小类$\mathcal{B}$，其中包含 ω-正则

语言，使得 L 可与 D_n 分离，当且仅当 L 包含于来自$\mathcal{B}$的集合的有限并中。这里，一个关键洞见是，Büchi 自动机无需确切知道字母平衡何时越过零点，就能保证与 D_n 不相交。请注意，字母平衡为负正是字不属于 D_n的确切条件。相比之下，在有限字情形中，总是存在能够判断何时越过零点的分离自动机 [17]。这一洞见也是区分 Büchi 向量加法系统中不相交性与可分离性的示例，以及尽管不相交性可判定、某些良结构转移系统的可判定性证明却不可判定的关键。

随后，我们将 Büchi 向量加法系统语言分解为有限多个片段，这些片段由我们称为轮廓的对象诱导而来。受 Büchi 自动机的启发，轮廓的理念是确定在一次运行中能够且必须被无限次采用的转移集合。然而，为 Büchi 向量加法系统找到恰当的推广并非易事。我们的表述涉及 Karp-Miller 图中的边，并通过附加约束来保证存在一次接受运行。所得分解具有与将 VASS 语言分解为运行理想 [33], 类似的性质，而后者已被用于先前的可分离性判定过程 [17, 12]。

我们为每个轮廓关联一个线性不等式系统，并证明当且仅当这些系统中的每一个都可行时，可分离性成立。尽管这带来了可判定性，但在一维情形下，仅检查可行性还不足以得到 PSPACE 上界。相反，我们使用 Farkas 引理得到一个对偶不等式系统，使得当且仅当某个对偶系统可满足时，可分离性不成立。对偶系统的一个解会在 Karp-Miller 图中产生一种称为不可分离花的模式，从而见证不可分性。与此前用于判定 VASS 语言的性质（例如正则性 [18],、语言有界性 [7], 以及其他性质 [3]）的见证相比，不可分离花相当不寻常：它们包含一个非线性条件，要求一个向量是另一个向量的标量倍数。

对于一维 Büchi VASS，该条件退化为线性条件。因此，我们可以将不可分离花转换为二维 VASS 中满足额外线性约束的特定运行。利用 [5], 中的方法，可以得到一个 PSPACE 算法。

相关工作 早在 1976年就已证明，对于上下文无关语言，正则可分性是不可判定的 [47, 30]。过去十年间，研究者对有限字 VASS 可达语言的子类的正则可分性判定问题表现出浓厚兴趣：对于 (i) 一维 VASS 的可达语言 [13], 、(ii) VASS 的可覆盖语言 [14], 、(iii) Parikh自动机的可达语言 [9], 以及 (iv) VASS 的交换可达语言 [10], 该问题都是可判定的。此外，即使一个输入语言是任意 VASS 语言，而另一个属于 (i)-(iii) 中的某一类，可判定性依然成立 [17]。如上所述，对于良结构转移系统的有限字覆盖语言，正则可分性等价于不相交性 [14]。此外，针对上下文无关语言的上述不可判定性结果已推广至可见下推语言 [32]。据我们所知，对于无限词语言，可分性仅针对正则输入语言进行过研究 [38, 29]。

我们的结果利用 Farkas 引理证明不存在可被理解为（作用于字母计数差上的）线性排序函数的对象。此前已有相关先例。在活性验证中， [45], Farkas 引理曾被用于以完备的方式综合出线性排序函数，从而证明在整数变量上运行的 while程序终止。在有限词可分离性的研究中，Farkas 引理也曾被用于区分可分离与不可分离的实例， [17], 这与我们的方法类似。本文的新颖之处在于将 Farkas 引理与轮廓这一新概念相结合，以处理无限运行。

Büchi VASS 语言最早由 Valk [49]以及（在确定性情况下）Carstensen [6]进行研究。一些复杂度结果（例如该

空性问题的指数空间复杂度）由 Habermehl [28]证明。近年来，已有数篇论文研究 Büchi VASS 语言（及其限制）的拓扑复杂性 [26, 20, 27]。有关综述，请参见 Finkel 和 Skrzypczak [27] 最近发表的文章。

2 预备知识

Dyck 语言 我们使用 Dyck 语言的一个无限字版本，其定义在由匹配字母对 n 构成的字母表上 a_i, $\bar{a}_i$。我们用 Σ_n 表示其底层字母表：$= \bigcup_{i=1}^{n}\{a_i, \bar{a}_i\}$。*Dyck 语言* 包含所有满足以下条件的无限词：每次出现 $\bar{a}_i$ 时，其左侧都有一个与之匹配的 a_i： $D_n := \{w \in \Sigma_n^\omega \mid \forall v \in \text{prefix}(w) : \forall i \in [1,n]\colon \varphi_i(v) \geq 0\}$。其中，$\varphi_i : \Sigma_n^* \to \mathbb{Z}$ 是第 i 个（字母）平衡 函数，它针对给定的字 w 计算差值 $|w|_{a_i} - |w|_{\bar{a}_i}$。我们还用 $\varphi(w)$ 表示向量 $(\varphi_1(w) \dots, \varphi_n(w)) \in \mathbb{Z}^n$。

Büchi 向量加法系统与自动机 状态数为 $d \in \mathbb{N}$、字母表为 Σ 的 Büchi 向量加法状态系统（Büchi 向量加法系统）是一个元组 V $= (Q, q_0, T, F)$，由有限个状态 Q、一个初始状态 $q_0 \in Q$、一组终态 $F \subseteq Q$ 以及有限个转移组成$T \subseteq Q \times \Sigma^* \times \mathbb{Z}^d \times Q$。Büchi 向量加法系统的大小为 $|\mathrm{V}|$: $= |Q| + 1 + |F| + \sum_{(q,w,\delta,q') \in T} |w| + \sum_{i=1}^{d} \max\{\log |\delta(i)|, 1\}$。如果 $d = 0$，我们称 V 为 Büchi 自动机。

Büchi 向量加法系统的语义定义在配置之上，配置是$Q \times \mathbb{N}^d$的元素。我们将配置中的第二个分量称为计数器赋值，并将维度 i 中的条目称为计数器 i的值。初始配置为 $(q_0, 0)$。我们将 Büchi 向量加法系统的转移提升为配置上的关系 $\to \subseteq Q \times \mathbb{N}^d \times \Sigma^* \times Q \times \mathbb{N}^d$，定义如下：$(q, \boldsymbol{m}) \xrightarrow{w} (q', \boldsymbol{m}')$ 当且仅当存在 $(q, w, \delta, q') \in T$使得 $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + \delta$。Büchi 向量加法系统的运行是一个无限转移序列，其形式为 $(q_0, 0) \xrightarrow{w_1} (q_1, \boldsymbol{m}_1) \xrightarrow{w_2} \cdots$ 因此，该序列从初始配置开始，并确保一个转移的目标是下一个转移的源。若运行无限次访问终态，则称其为接受运行，也就是说，存在无限多个配置 $(q, \boldsymbol{m})$ 满足 $q \in F$。称该运行由 $w = w_0 w_1 \cdots$ 在 Σ^ω 中标记。Büchi 向量加法系统的语言 L(V) 由所有标记某个接受运行的无限字组成。注意，我们总能确保每个接受运行都有一个无限字标签：只需在状态中跟踪自上次访问终态以来是否发生过非-ε-转移即可。若一个无限字语言是某个 Büchi 自动机的语言，则称其为（ω-）正则语言。由于我们只考虑无限字语言，因此简称其为语言。

Karp-Miller 图 我们研究与 Büchi 向量加法系统 V [31]关联的 Karp-Miller 图 KM(V)。由于我们关注无限运行，因此将 Karp-Miller 图定义为一个 Büchi 自动机。其状态集合是一个由扩展配置构成的有限集，这些扩展配置是 $Q \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^d$ 的元素。初始状态是 Büchi 向量加法系统中的初始配置。终态是满足 $q \in F$ 的扩展配置 $(q, \boldsymbol{m})$。转移由T 标记，因此它们携带的不是字母，而是完整的 Büchi 向量加法系统迁移。扩展配置中的一个条目 ω 表示可以重复某个运行前缀，从而产生任意大的计数器值。更准确地说，Karp-Miller 图按如下方式构造。从扩展配置 $(q, \boldsymbol{m})$ 出发，若 $q = q_1$ 且$\boldsymbol{m} + \delta$ 仍然非负，则有一条标记为 (q_1, a, δ, q_2) 的转移。后一个加法是按分量定义的，并假设$\omega + k$： 对于所有 $k \in \mathbb{Z}$, $= \omega =: k + \omega$。执行该转移后得到扩展配置 $(q_2, \boldsymbol{m}_2)$，其中 $\boldsymbol{m}_2$ 由 $\boldsymbol{m} + \delta$ 按如下方式构造。对于所有计数器 i，若存在更早的配置 $(q_2, \boldsymbol{m}_1)$，使得 $\boldsymbol{m}_1 \leq \boldsymbol{m} + \delta$ 且 $\boldsymbol{m}_1(i) < [\boldsymbol{m} + \delta](i)$，则将这些计数器提升为 ω。这里“更早”是指位于从 $(q_0, 0)$ 到 $(q, \boldsymbol{m})$ 的某条路径上。若满足这一条件，

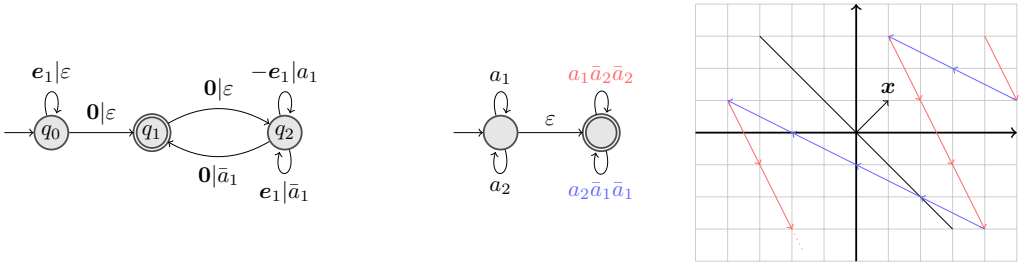


图1 左：一个接受语言 S 的 Büchi 向量加法系统，满足 $S \cap D_1 = \emptyset$ 但不满足 $S \not\subseteq D_1$。这里，$e_1 \in \mathbb{Z}$ 是唯一非零分量为 1 的一维向量。右：一个正则语言，它不包含在语言 $P_{i,\ k}$ 和 $S_{i,\ k}$的有限并中，但包含在 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$ 中；对于 $\boldsymbol{x} = (1,\ 1)$，$k = 1$。横轴和纵轴分别表示 a_1 和 a_2的平衡。

从 $(q_2,\ \boldsymbol{m}_1)$ 到 $(q_2,\ \boldsymbol{m} + \delta)$ 的路径可以无限重复，从而使计数器 i 的值任意增大。我们将运行中此类路径的重复称为泵送。

Karp-Miller 图以如下意义对该 Büchi 向量加法系统的语言进行过近似。每个导向该 Büchi 向量加法系统中某次运行的无限转移序列，都是 Karp-Miller 图中某次无限运行的标记。此外，如果该 Büchi 向量加法系统中的运行是接受的，那么 Karp-Miller 图中的运行也是接受的。反过来，Karp-Miller 图中的每个有限转移序列都表示该 Büchi 向量加法系统中的一个转移序列。不过，为了通过泵送补偿 ω分量上的负面影响，该系统中的转移序列可能更长。

3 问题、主要结果与证明概要

如果 R 是语言对 L_1，L_2的<透明 id='2'>正则分隔语言，则 R 是正则的，$L_1 \subseteq R$，并且 $R \cap L_2 = \emptyset$。我们用 $L_1 \,|\, L_2$ 表示存在正则分隔语言。本文考察 Büchi 向量加法系统的语言，并将<风格 id='12'>正则可分性问题 表述如下。给定 Büchi 向量加法系统 <风格 id='14'>V_1,<风格 i d='17'>V_2,，检查 L(<风格 id='21'>V_1) | L(<风格 id='25'>V_2) 是否成立。我们的主要结果如下。

▶**定理 3.1**。 *Büchi* 向量加法系统的正则可分性问题是可判定的。

需要指出的是，我们的过程是非原始递归的，因为它会显式构造输入 Büchi 向量加法系统的 Karp-Miller 图，而该图可能具有阿克曼规模 [36,定理 2]。对于 VASS 覆盖语言（甚至对于更一般的良结构转移系统），已知正则可分性等价于不相交性 [14]。因此，对于有限词，正则可分性可归约为人们更为熟悉的不相交性问题。对于本文所考察的无限字语言，情况则有所不同。

▶ **定理3.2**。 存在 *Büchi VASS* 语言 L_1、L_2，满足 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ 和 $L_1 \not\subseteq L_2$。有些良结构转移系统类别的交集问题是可判定的，但可分离性问题不可判定。

对于第二个结论，我们引入弱 *Büchi* 重置 *VASS*这一类系统。它们是带有重置指令的 VASS，并且额外受到如下限制：每次运行只能有限次使用重置。详情见附录 F。

对于定理3.2的第一条陈述，我们给出一些直观说明，详细内容请参见附录 A。我们选取 $L_1 = L(\mathcal{V})$，其中 $\mathcal{V}$ 是图1（左）中的 Büchi 向量加法系统，以及 $L_2 = D_1$，即 Dyck 语言。为证明 $L(\mathcal{V}) \not\subseteq D_1$，假设存在一个 Büchi 自动机 $\mathcal{A}$，其状态数为 n，满足 $L(\mathcal{V}) \subseteq L(\mathcal{A})$ 且 $L(\mathcal{A}) \cap D_1 = \emptyset$。那么，$\mathcal{A}$ 必须接受 $(a_1^n \bar{a}_1^{n+1})^\omega \in L(\mathcal{V})$。然而，通过泵送可知，对于某个 $m > n$，字 $(a_1^m \bar{a}_1^{n+1})^\omega \in D_1$ 也必须

被 $\mathcal{A}$ 接受，矛盾。此外，为证明 $L(\mathcal{V}) \cap D_1 = \emptyset$，我们注意到，在 $\mathcal{V}$ 的接受运行中，几乎每次（即除有限次之外的每次）访问终态时，字母平衡都会减 1。因此，在任意接受运行中，这个平衡最终都会变成负数，从而得到一个不属于 D_1 的字。

本节余下部分将概述定理 3.1 的证明。假设给定了 $L_1 = L(\mathcal{V}_1)$ 和 $L_2 = L(\mathcal{V}_2)$，且这是一个非平凡的可分离性实例，这意味着L_1，L_2 不是正则的，并且 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$。为了证明可分离性，我们可以枚举正则语言，直到找到一个分隔器。困难之处在于证明不可分离性。L_1 和 L_2 的不可分离性由一个词集 $W \subseteq L_1$ 见证，使得任何包含这些词的正则语言 R 都与 L_2相交，形式化地说：$W \subseteq R$ 蕴含 $R \cap L_2 \neq \emptyset$。证明这样一个集合 W 的存在性之所以困难，有两个原因。首先，我们不清楚哪些词集能确保对所有正则语言的全称量化。其次，由于这是一个非平凡的可分离性实例，W（如果存在）将是非正则语言。因此，我们不清楚如何以有限方式表示它，也不清楚如何验证它是否存在。

为了解决第一个问题，并理解那些能够证明不可分离的词集合，我们使用对角化。称*(L_2-)*分隔候选为一个与 L_2 不相交的正则语言。设 R_1，R_2，.....为分隔候选的一个枚举。如果 L_1 不能与 L_2分离，那么对于每个 R_i，都存在一个词 $w_i \in L_1$，使得 $w_i \notin R_i$。我们将逃脱每个分隔候选的这类词集$W = \{w_1, w_2, ...\}$ 称为不可分性见证。

▶ **观察 3.3**。 $L_1 \not| L_2$ 当且仅当存在一个不可分性见证。

我们的判定过程将检查是否存在不可分性见证。我们分四步得到该过程：第一步是简化，第二步致力于理解分隔候选，第三步是另一次简化，最后一步刻画不可分性见证并检查其是否存在。

步骤 1：固定 L_2 我们首先将一般的正则可分性问题归约为与 Dyck 语言的正则可分性问题。这个归约很简单，与有限字的情形相同 [17]。

▶引理 3.4。 </style}给定布奇向量加法系统 V和 V，我们可以计算出一个布奇向量加法系统 V，其维度为，使得 (V_1) | $L(V_2)$ </style}当且仅当 (V) | D_n，其中 n 是 V_2的维度。

步骤 2：理解分离器候选 为了理解与 D_n不相交的正则语言，我们将定义基本分离器、集合 $P_{i,\ k}$ 和 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$，稍后将对此进行详细说明。以下定理指出，基本分离器的有限并集足以实现正则可分性。这是我们的第一个技术结果，将在第4节证明。

▶ 定理 3.5。 如果 $R \subseteq \Sigma_n^\omega$ 是正则的且 $R \cap D_n = \emptyset$，那么 R 包含于基本分离器的有限并集中。

对于 $P_{i,\ k}$ 的定义，我们注意到，D_n 之外的词对于某个索引 $i \in [1, n]$，存在一个最早时刻，使得 a_i 与 $\bar{a}_i$ 之间的平衡降至零以下。为了将其转化为正则语言，我们对字母 a_i 和 $\bar{a}_i$ 之间的（正）平衡施加一个上界 $k \in \mathbb{N}$，并要求该上界一直维持到达到最早时刻为止。由此得到正则语言

$$P_{i,k} := \{w \in \Sigma_n^\omega \mid \exists v \in \mathrm{prefix}(w) \colon \varphi_i(v) < 0 \wedge \forall u \in \mathrm{prefix}(v) \colon \varphi_i(u) \leq k\}.$$

语言族 $P_{i,k}$ 已经涵盖了 D_n 的补集。问题在于，为了覆盖我们关注的语言 R，可能需要无穷多个这样的语言。对于

每个界限 k，一个具有 $R \cap D_1 = \emptyset$ 的正则 R 可能包含一个字：它在降至零以下之前，平衡值曾高于该界限，例如 $R = a_1^* \bar{a}_1^\omega$。第一个关键发现是，如果 R 能从任意高的值降至零以下，那么底层的布奇自动机必定包含平衡值为负的自环。因此，R 包含一些字 uv：其前缀不受约束，后缀则可分解为 $v = v_1 v_2 \cdots$，使得每个因子 $w = v_\ell$ 在字母 a_i 上的平衡值均为负。此观察启发我们定义一种语言，它恰好包含字 $u.v$。为了使该语言正则，我们对因子 w 期间正平衡值所能达到的上限施加界限 k。将由此得到的语言称为 $S_{i,k}$。遗憾的是，将 $P_{i,k}$ 和 $S_{i,k}$ 作为基本分离器仍然不够：图1（右）展示了一个与 D_1 不相交的正则语言，它不包含在 $P_{i,k}$ 和 $S_{i,k}$ 的有限并中，因为它包含一些因子，其中每个坐标上的平衡值都超过了各自的所有界限。

第二个关键点是，我们可以通过一种版本的 $S_{i,\ k}$ 捕获剩余的词；这种方法会用某个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$对各个坐标加权。下面简要说明其直观含义。对于 R中那些无法用 $P_{i,\ k}$ 捕获的词，每当某个 i 变为负值时，都必须经过一个在 i 上具有正平衡的自环（否则，这些 i 上的平衡就会有界）。但是，这类词若要避开 D_1，唯一的办法就是最终进入一个强连通分量，在那里，每个 自环（带有一个终态）都会朝着跨越 0 的方向推进，也就是说，某个坐标上的值为负。于是可以得出结论：即使是自环的所有 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-线性组合（一个凸集），也都必须避开正正交象限 $\mathbb{Q}^n_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}^n$。根据超平面分离定理（我们采用 Farkas 引理的形式），可以用一个超平面来证明这一点，该超平面将所有自环效应与 $\mathbb{Q}^n_{\geq 0}$分离。这个超平面由某个正交向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$确定，这意味着每个自环平衡与 $\boldsymbol{x}$的标量积都必须为负。因此，我们可以通过以下方式捕获这些词：

$$S_{\boldsymbol{x},k} := \left\{ u.v \in \Sigma_n^\omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{a.) } \forall f \in \operatorname{infix}(v) \colon \langle \boldsymbol{x}, \varphi(f) \rangle \leq k, \text{ and} \\ \text{b.) } v = v_0.v_1.v_2 \cdots \wedge \forall \ell \in \mathbb{N} \colon \langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\ell) \rangle < 0 \end{array} \right\}.$$

回到图1（右），权重向量 $\boldsymbol{x} = (1,\ 1)$ 保证加权平衡无限下降，同时所有因子的加权平衡都保持有界。在 [17], 中，类似的论证已用于证明基本分离器的充分性。

步骤3：可泵语言 有了基本分离器，接下来要理解那些能够证明不可分性的词集合。研究这一问题时，我们发现，对于 $P_{i,\ k}$ 的论证总是与对于 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$的论证相似。这使我们开始思考，能否在分离器中去掉 $P_{i,\ k}$。答案是肯定的，其关键在于一种针对 Σ_n上语言的全新可泵性概念。

若无限词 u 和 v 等价，记作 $u \sim v$，是指 v 可通过删除和插入有限多个字母从 u 得到：存在 u_0、$v_0 \in \Sigma^*$ 和 $w \in \Sigma^\omega$，使得$u = u_0 w$ 且 $v = v_0 w$。若语言 $L \subseteq \Sigma_n^\omega$ 满足以下条件，则称其为可泵的：对于每个 $w \in L$和每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个分解 $w = w_0 w_1$ 以及一个词 $w_0' \in \Sigma_n^*$，它是 D_n 中某个词的前缀，并且满足 $w_0'.w_1 \in L$，且字母平衡满足以下条件：(a) $\varphi(w_0') \geq \varphi(w_0)$；(b) 对于那些使得 φ_i 在 w的某个前缀上变为负值的指标 $i \in [1, n]$，有 $\varphi_i(w_0') \geq \max\{\varphi_i(w_0), 0\} + k$。这个定义的结果是，可泵语言会避开每个语言 $P_k := \bigcup_{i \in [1,n]} P_{i,k}$。事实上，对于每个词 $w \in L$和每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个词 $w' \in L$，满足 $w \sim w'$，其中字母平衡在变为负值之前会超过 k，因此 $w' \notin P_k$。结合先前对分离器候选的刻画，要将 L 与 D_n 分离，剩下需要考虑的就是语言 $S_{\boldsymbol{x},k}$。

▶ **引理 3.6。 </style}如果 是可泵送的，那么 当且仅当，其中 表示，** k 对于某个有限集 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ 和某个 $k \in \mathbb{N}$。

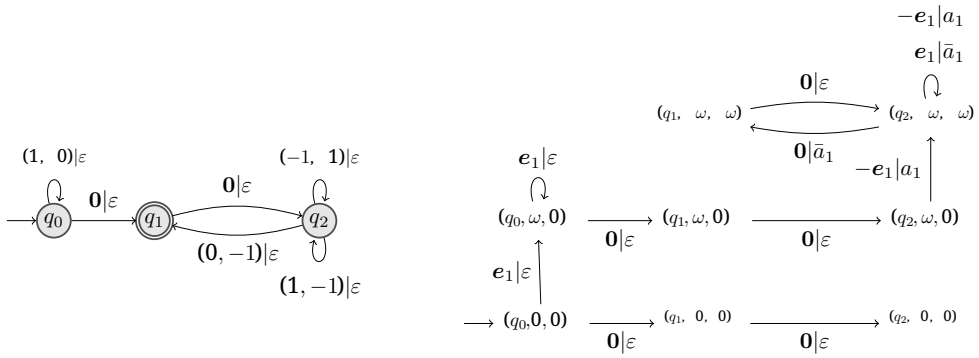


图2 左：由图1（左）中的 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}$ 构造的 Büchi 向量加法系统 $\bar{\mathcal{V}}$。请注意，新增的第二个计数器追踪现已移除的转移标签的字母平衡：遇到字母 a_1 时递增，遇到字母 $\bar{a}_1$时递减。右：根据定理 3.7 给出的、与 $\mathcal{V}$ 对应的 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}_{\text{pump}}$。为减少视觉杂乱，此处未标记终态；每个包含 q_1 的状态均被视为终态。类似地，右上角环路上方的两个标签对应于两个不同的转移。请注意，$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 本质上看起来像 KM($\bar{\mathcal{V}}$)，只是转移标签不同。

在我们的语境中，可泵性很有意思，因为我们可以将每个 Büchi VASS 语言转化为可抽取语言，而不影响可分离性。

▶**定理 3.7**。 设 V 是 d维、定义在 Σ_n上的 *Büchi* 向量加法系统。我们可以计算一个 d维 *Büchi* 向量加法系统 V_{pump}，使其满足以下条件：
1. $L(V_{\text{pump}}) \subseteq L(V)$ *是可泵送的，2. 存在一个* $k \in \mathbb{N}$，*使得* $L(V) \subseteq L(V_{\text{pump}}) \cup P_k$，*以及 3. 当且仅当* $L(V_{\text{pump}}) \mid D_n$时，$L(V) \mid D_n$。

对$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 的构造以一种新颖的方式运用了 Karp-Miller 图，即用来追踪字母计数差的无界性。设$\mathcal{V}$ 为通过在 n 个额外计数器中追踪来自 Σ_n 的字母的影响，从$\mathcal{V}$ 得到的 $(d+n)$ 维布奇 Büchi 向量加法系统。对于$\bar{\mathcal{V}}$，我们构造 Karp-Miller 图。KM($\mathcal{V}$) 与$\mathcal{V}$ 的语言之间的关系如下：对于所有字母计数差始终保持非负的词，它们在$\mathcal{V}$ 中的运行都可以在 KM($\mathcal{V}$) 中模拟。对于其他所有词，即平衡最终变为负数的词，只有在$\mathcal{V}$ 中的对应计数器事先已增至 ω 时，这一点才成立。本质上，新的布奇向量加法系统$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 将$\mathcal{V}$ 限制为那些在$\bar{\text{KM}}(\mathcal{V})$ 中有对应运行的运行。这通过对$\mathcal{V}$ 和 KM($\mathcal{V}$) 进行简单的乘积构造来实现。需要注意的是，来自 $L(\mathcal{V})$、但未能进入 $L(\mathcal{V}_{\text{pump}})$ 的每个词都属于 P_k，其中 k 是 KM($\mathcal{V}$) 中最大的具体数值：在$\mathcal{V}$ 中，若某次运行无法在$\bar{\text{KM}}(\mathcal{V})$ 中被模拟，那么它必定会在该分量于 KM($\mathcal{V}$) 中达到 ω 之前，某个时刻出现负的字母计数差；因此，在此之前，所有计数器值都至多为 k。

如何构造 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 的示例见图2，其中二者都是针对图1（左）中的布奇向量加法系统构造的。

在定理 3.5 的证明中，我们使用了定理 3.7（回想一下，正则语言就是零维布奇向量加法系统的语言）。这看起来可能像循环论证，但事实并非如此：我们将直接利用上述论证证明定理 3.7(1)+(2)。据此，我们证明定理 3.5，而定理 3.5 又用于推导引理 3.6 和定理 3.7(3)。

步骤 4：不可分离性见证与可判定性 由于具有可泵性，接下来只需判定一个 Büchi VASS 语言 $L(\mathcal{V})$ 是否包含于某个有限并 $\bigcup_{\boldsymbol{x} \in X} S_{\boldsymbol{x},\, k}$ for

some k。其中一个难点在于，我们无法界定 X 的基数。为解决这一问题，我们将 $L(\mathcal{V})$ 分解为有限并 $\bigcup_\pi L_\pi(\mathcal{V})$，其中 π 是一个轮廓，也就是说，它是在 $\mathcal{V}$ 的某次运行中无限次出现的 KM($\mathcal{V}$) 中的边集合。接着，我们证明每个 $L_\pi(\mathcal{V})$ 要么 (i) 包含于单个分隔器 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$，要么 (ii) 不属于任何有限并 $\bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},\ k}$。

在这里，关键是证明一个更强的事实：在情形 (i) 中，不仅 $L_\pi(\mathcal{V})$ 包含于某个 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 中，而且 KM($\mathcal{V}$) 中最终始终停留在 π的全部运行也包含于其中。加强结论的好处在于，KM($\mathcal{V}$) 的有限性使我们能够将包含于某个 $S_{\boldsymbol{x},k}$（其中 k）表述为关于 $\boldsymbol{x}$ 的一个有限 线性不等式系统：我们称，(1) 每个本原环的平衡以 $\boldsymbol{x}$ 为权重时至多为零；(2) 存在一个包含 π 中所有边的环，其平衡以 $\boldsymbol{x}$ 为权重时为负。在此，(1) 和 (2) 分别对应 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 的条件 a.) 和 b.)。若满足这两个条件，则 KM($\mathcal{V}$) 中沿着 π 的运行包含于某个 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 中（其中 k）。

接着我们证明，若该系统不可行，则$\mathcal{V}$ 存在逃逸出每个有限并 $\bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},k}$ 的运行。为此，我们使用 Farkas 引理：它指出，若不存在解，则对偶系统存在一个解。对偶系统的解可以解释为原始环的一个可执行线性组合，且这些环的平衡均非负。我们证明，这些环可以在 KM($\mathcal{V}$) 中排列成一种模式，并将其称为不可分离花。这样的不可分离花进而给出 KM($\mathcal{V}$) 中的一个运行序列 $\rho_1, \rho_2, \ldots$，使得对于每个向量 $\boldsymbol{x}$，ρ_k 都逃逸出 $S_{\boldsymbol{x},k}$。最后，可泵性使我们能够将 KM($\mathcal{V}$) 中的这些运行提升为$\mathcal{V}$ 的运行，从而得出不可分性。

这为我们提供了两种可能的判定过程：我们可以检查每个不等式系统是否有解，也可以检测 KM($\mathcal{V}$) 中的不可分离花。

4 基本分离器

我们证明定理 3.5：任意正则语言 R 在 Σ_n 上且具有 $R \cap D_n = \emptyset$，都包含于有限个语言 $P_{i,\ k}$ 和 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$的并中。注意，k 只需取一个值即可，因为对于每个 i，$\boldsymbol{x}$，k，我们都有 $P_{i,\ k} \subseteq P_{i,\ k+1}$ 以及 $S_{\boldsymbol{x},\ k} \subseteq S_{\boldsymbol{x},\ k+1}$。证明以一种方式分解语言 R 对应的布奇自动机，从而使我们无需考虑连通性问题，并能够运用线性代数技巧对环（及其字母计数差）进行推理。我们将用到以下线性规划中的基本事实 [46, 推论 7.1f]。

▶ **定理 4.1** (Farkas 引理（变体），[46])。设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ 是一个矩阵，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$是一个向量。那么，不等式系统 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，当且仅当对于每个满足 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$的向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^m_{\geq 0}$，都有 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$。

用轮廓分解我们将 $R = L(\mathcal{A})$ 分解为若干语言（不一定互不相交）的并集，每种语言都与一个所谓的轮廓相关联。稍后我们会看到，对于可泵送的 R，每个这样的轮廓语言都必须包含于单个$S_{\boldsymbol{x},k}$中。

▶ **定义 4.2.** 设 A 是一个布奇自动机。A 的轮廓是 A 的一组转移 π，满足存在 A 中的一个环 σ_π，使得 *(a)* σ_π 恰好包含 π中的转移，并且 *(b)* σ_π 以某个终态 q_π为起点（并以其为终点）。

我们用 $\Pi(\mathcal{A})$ 表示 A 的轮廓有限集。此外，对于 A 的每个接受运行 ρ，我们将其轮廓 $\Pi(\rho)$ 与之关联，该轮廓恰好包含 ρ中无限多次出现的转移。这个定义是合理的，因为接受运行中无限多次出现的转移必定由于重复而构成一个环，并且由于接受条件，该环会经过一个终态。

给定 $\mathcal{A}$ 的轮廓 π，我们将 $L_\pi(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A})$ 定义为所有具有 $\mathcal{A}$ 的接受运行 ρ 且满足 $\Pi(\rho) = \pi$ 的词所组成的语言。注意，这个语言仍然是正则的：可以从$\mathcal{A}$ 构造一个 Büchi 自动机，它猜测一个位置，在该位置之后只能出现来自 π 的转移

，并且一旦到达该位置，它就会在每个状态中记录来自 π 的已使用转移列表。只有当 π 的所有转移都已使用后，该状态才会变为终态，并将列表重置为空。

这样，我们现在可以将 R 视为语言 $L_\pi(\mathcal{A})$ 与 $\pi \in \Pi(\mathcal{A})$ 的并集。我们证明，每个语言 $L_\pi(\mathcal{A})$ 要么包含于某个 $S_{\boldsymbol{x},k}$，其中 $\boldsymbol{x}, k$，要么存在一个环，假设上一节中的可泵性成立，该环会使 $L_\pi(\mathcal{A})$ 与 D_n相交。

▶**引理 4.3**。设 A 是定义在 Σ_n 上的 *Büchi* 自动机，且 π 是其一个轮廓。那么以下条件之一成立：

(i) 存在一个数 $k \in \mathbb{N}$ 和一个向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$，使得 $L_\pi(\mathcal{A}) \subseteq S_{\boldsymbol{x},k}$，或者**(ii)** 存在一个环 σ'，它位于 上的 w'，满足 $\varphi(w') \geq \mathbf{0}$，且 σ' 包含来自 π 的所有转移 .

假设 $L_\pi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$，否则条件 (i) 显然成立。我们按如下方式构造一个线性不等式系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$。对于 π 中由转移构成的每个本原环读取的字 v，系统中都包含一个不等式 $\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v) \rangle \leq 0$。这里，本原环指不重复经过状态的环。此外，对于证明轮廓 π 的、位于 v_π 上的环 σ_π，系统还包含不等式 $\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\pi) \rangle \leq -1$。我们简要指出，系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 的解空间不依赖于所选证明循环 σ_π 的具体形式：为此，我们声称， $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 成立，当且仅当 π 中所有本原环的 $\boldsymbol{x}$- 加权平衡都不大于零，且 π 中至少有一个本原环的 $\boldsymbol{x}$- 加权平衡严格小于零。对于“若”方向，注意到，足够多次重复 σ_π 后，每个本原环都会作为一个（可能不连续的）子序列出现。这意味着，该重复序列，因而 σ_π，必定具有严格小于零的 $\boldsymbol{x}$-加权平衡。反过来，我们注意到， σ_π 可以分解为本原环。因此，如果 σ_π 的 $\boldsymbol{x}$-加权平衡严格小于零，那么其组成的本原环中也必定至少有一个具有严格小于零的加权平衡。

将 Farkas 引理应用于 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$，要么得到一个解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，要么得到一个向量$\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}^m_{\geq 0}$，满足 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$。在这两种情况下，我们都不失一般性地假设给定向量的各项属于 $\mathbb{N}$，因为总可以乘以分母的最小公倍数。

假设我们有一个解 $\boldsymbol{x}$。我们断言，此时 $L_\pi(\mathcal{A}) \subseteq S_{\boldsymbol{x},\ k}$，其中 $k = |Q_\pi| \cdot h$，且h 是 $\mathcal{A}$ 的转移标签的最大长度。这是因为 $\boldsymbol{x}$ 对本原环赋予非正权重，而 k 的选取方式保证：对于 $\mathcal{A}$ 中某个字 L_π 的任意因子 v，若 $|v| > k$，则v对应的转移序列必定包含一个本原环。因此，$\mathcal{A}$ 中某个字 L_π 几乎所有起始位置上的因子都必须具有 $\boldsymbol{x}$-加权平衡 $\leq k$。

若我们得到一个向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots\ldots, y_m)$，那么可以将其视为矩阵 $\boldsymbol{A}_\pi$ 中若干行的选择，其中第 j 行被选取了 y_j 次。由于每一行都对应一个环，这也就是对若干环的选择。于是，根据 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$，我们选取了 σ_π，并可在其中插入其他选定的环。根据 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \mathbf{0}$，这就构成了所需的环 σ'，且所有字母对的字母平衡均非负。详细证明见附录 C。

这里我们使用了一个线性不等式系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$，它仅取决于 $\mathcal{A}$ 和 π。我们的推理是：若该系统有解，则条件 (i) 必须成立。这一事实将在后续证明中引用，因此我们在此将其形式化。

▶ **推论 4.4**。若 A 是一个轮廓为 π 的布奇自动机，并且存在一个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$ 满足 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$，那么 $L_\pi(A) \subseteq S_{\boldsymbol{x},\ k}$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立。

由定理 3.7 和引理 4.3，我们现在可以证明定理 3.5。假设对于某个 Büchi 自动机 $\mathcal{A}$，$R = L(\mathcal{A})$。首先，将定理 3.7 应用于 $d = 0$，得到一个 Büchi 自动机$\mathcal{A}^{\mathsf{pump}}$，使得 $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}}) \cup P_\ell$，其中 $\ell \in \mathbb{N}$，且 $L(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}}) \cap D_n = \emptyset$。因此，只需证明 $L(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}})$ 包含于语言的有限并 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 中。反设不然。那么集合 $L(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}})$ 可分解为各集合 $L_\pi(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}})$，其中 $\pi \in \Pi(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}})$。由引理 4.3 可知，对于某个 π，条件 (ii) 必须成立：否则，每个 $L_\pi(\mathcal{A}^{\mathsf{pump}})$ 都会

包含于某个 $S_{x,k}$。但是，如果 (ii) 对 π 成立，那么 A_{pump} 中存在一个环 σ'，它包含π（因而会经过一个终态），并读取一个字 v，满足 $\varphi(v) \geq \mathbf{0}$。现在，对于某个有限前缀$u$，字 uv^ω 属于 $L(A_{pump})$。由于 $\varphi(v) \geq \mathbf{0}$，存在某个下界 $B \in \mathbb{Z}$，使得对每个 $i \in [1,n]$ 以及 uv^ω 的每个前缀 p，都有 $\varphi_i(p) \geq B$。最后，由于 $L(A_{pump})$ 可泵送，我们可以交换 $w = uv^\omega$ 中的一个前缀，从而得到另一个字 $w' \in L(A_{pump})$，其每个前缀 p 都满足 $\varphi(p) \geq \mathbf{0}$。因此 $w' \in D_n$，进而 $L(A_{pump}) \cap D_n \neq \emptyset$，矛盾。

5 判定正则可分性

现在，我们给出一个算法，用于判定给定的 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}$ 是否满足 $L(\mathcal{V}) \mid D_n$。我们首先应用定理 3.7，因为对于可抽取语言，我们只需处理一种类型的基本分离器。下一步是将轮廓的概念从 Büchi 自动机推广到 Büchi 向量加法系统。回顾一下，对于 $\mathcal{V}$ 中由 χ 个转移组成的序列，$\delta(\chi)$ 表示其对 $\mathcal{V}$ 的计数器所产生的效果。如果 KM($\mathcal{V}$) 中的 χ 是一个转移序列，那么 χ 由 $\mathcal{V}$ 的一个转移序列标记，因此我们相应地定义 $\delta(\chi)$。由于我们考虑的是输入字母表为 Σ_n 的 Büchi 向量加法系统，我们用 $\varphi(\chi)$ 表示输入字在 φ 下的像。同样，这一记法也用于 KM($\mathcal{V}$) 中的转移序列。我们还记 $\Delta(\chi) = (\delta(\chi)\ \varphi(\chi)$。

▶ **定义 5.1.** 设 V 是一个 *Büchi* 向量加法系统。V 的轮廓是 KM(V) 中的一个边集 π，且存在 KM(V) 中的一个环 σ，使得 *(i)* σ 恰好包含 π中的边，*(ii)* σ从一个终态开始（并在终态结束），且 *(iii)* $\delta(\sigma) \geq \mathbf{0}$。

显然，每个 Büchi 向量加法系统都有有限个轮廓，我们将其记为 Π(V)。此外，Π(V) 可以有效构造：给定一个边集，可以通过将问题简单归约为检查某个计数器的无界性，来判断它是否为一个轮廓。进一步地，对于 V 的每个运行 ρ，我们都可以关联一个轮廓：运行 ρ 必须在 KM(V) 中有一个对应的运行，该运行有一个有限边集 Π(ρ)，其中的边会被无限次使用。因此，ρ 可以分解为 $\rho_0\rho_1$，使得 ρ_1只包含来自 π的边。接着，ρ_1可以分解为 $\sigma_1\sigma_2\cdots$，使得每个 σ_i 至少使用一次来自 Π(ρ)的每条边，并且从一个终态开始（并在终态结束）。由于 $\leq$ 是 $\mathbb{N}^n$上的良拟序，存在 $r < s$，使得 $\delta(\sigma_r \cdots \sigma_s) \geq \mathbf{0}$。因此，$\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_s$是我们所需的转移序列，它表明 Π($\rho$) 是一个轮廓。对于每个 $\pi \in$ Π(V)，我们用 L_π(V) 表示由 V 的运行 ρ 所接受的所有词构成的集合，其中 Π(ρ) $= \pi$。那么显然：

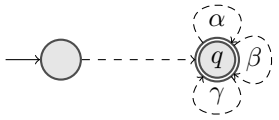
▶ **Lemma 5.2.** $L(\mathcal{V}) = \bigcup_{\pi \in \Pi(\mathcal{V})} L_\pi(\mathcal{V})$.

每个轮廓对应的不等式系统 下一步，我们将为每个轮廓$\pi \in$ Π(V)关联一个线性不等式系统。我们需要引入一些术语。π-环是 KM(V) 中仅包含 π中的边的环 σ。此外，如果 σ 访问 KM(V) 中的每个状态至多一次，但初始状态除外（它会被访问两次），那么 σ 就是一个原始 π-环。显然，原始 π-环的长度为 $\leq |\pi|$。此外，对于每个 π-环 σ，都可以依次切出原始 π-环，直至其变为空。因此，如果 τ_1、……、τ_m是 KM(V) 中的原始 π-环，那么就存在数值 r_1、……、$r_m \in \mathbb{N}$，使得 $\Delta(\sigma) = r_1 \cdot \Delta(\tau_1) + \cdots + r_m \cdot \Delta(\tau_m)$。若对某些 r_1、……、$r_m \geq 1$ 上述关系成立，我们就称 σ 为一个完整的 π-环。注意，如果 π 是一个轮廓，那么总能用一个完整的 π-环来见证这一点：任取一个见证 π 为轮廓的环 σ。那么，$\sigma^{|\pi|}$ 就将每个原始 π-环都作为子序列包含其中。因此，环 $\sigma^{m\cdot|\pi|}$ 是完整的：我们可以在每个因子 $\sigma^{|\pi|}$ 中进行切分，使得至少切出一次某个 τ_i。此外，$\sigma^{m\cdot|\pi|}$ 仍然见证 π 是一个轮廓，因为 $\delta(\sigma^{m\cdot|\pi|}) = m \cdot |\pi| \cdot \delta(\sigma) \geq \mathbf{0}$。

现在让我们构造与 π 相关联的不等式系统。设 σ 是一个完整的 π-环，它见证了 π 是一个轮廓，并设 τ_1、……、τ_m 是基本的 π-环。设 $\boldsymbol{A}_\pi \in \mathbb{Z}^{(m+1)\times n}$ 是一个行分别为 $\varphi(\tau_1)$、……、$\varphi(\tau_m)$ $\varphi(\sigma)$ 的矩阵，并设 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^{m+1}$ 是

列向量 (0、.....、0，-1)。那么显然，对于每个基本的 π-环 τ， $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 等价于 $\langle \boldsymbol{x}, \varphi(\sigma) \rangle < 0$，且等价于$\langle \boldsymbol{x}, \varphi(\tau) \rangle \leq 0$。

不可分离花 一个不可分离花是 Karp-Miller 图中的一种结构 KM($\mathcal{V}$)如右图所示。它由一个终态 q 和三个环 α，β，γ组成，它们都从 q出发，并满足给定条件。



$\delta(\alpha\beta\gamma) \geq \mathbf{0}$
$\varphi(\alpha\beta) \geq \mathbf{0}$
$\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$

让我们来直观地说明，为什么这种花结构是我们要寻找的关键结构。顾名思义，不可分离花保证存在一个不可分性见证，即一族被可泵布奇向量加法系统 $\mathcal{V}$ 接受、且能逃脱每个基本分离器$S_{\boldsymbol{x},k}$的词。因此，这族词中的每个词都需要有一条接受运行，而花结构的三个条件恰好提供了这样的运行：第一个条件确保这三个环确实对应于$\mathcal{V}$中一条可启用的转移序列。第二个条件保证，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$， $\boldsymbol{x}$加权字母平衡 α 或 β 为正；除非二者均为零，此时第三个条件确保 $\alpha\beta\gamma$ 的 $\boldsymbol{x}$加权平衡为零。这样，我们便可以为每个 k构造一条逃脱 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 的运行，且对所有 $\boldsymbol{x}$均成立：通过将每个环 α、 β和 γ充分重复，我们可以得到一条运行，使其对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$，要么 (i) 含有 $\boldsymbol{x}$加权平衡为 $> k$的因子，要么 (ii) 无穷多次达到某个 $\boldsymbol{x}$加权平衡。这两种性质都排除了其属于 $S_{\boldsymbol{x},k}$的可能性。命题 5.5 对此给出了形式化证明。

▶**定理 5.3**。 设 V 是一个布奇向量加法系统，且 $L(V)$ 可泵送。那么以下条件等价：*(i)* $L(V) \not| D_n$。*(ii)* 存在一个轮廓 $\pi \in \Pi(V)$ 使得系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$无解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$。*(iii)* 在KM($V$)中存在一个不可分离花。

判定过程 在证明定理 5.3 之前，我们先来看看如何利用它判定可分离性。给定布奇向量加法系统 $\mathcal{V}_1$ 和$\mathcal{V}_2$,，我们可以计算出$\mathcal{V}$，使得 $L(\mathcal{V}_1) \mid L(\mathcal{V}_2)$ 当且仅当 $L(\mathcal{V}) \mid D_n$，这由引理 3.4 得出。接着，定理 3.7 告诉我们， $L(\mathcal{V}_{\text{pump}})$ 可泵送，并且 $L(\mathcal{V}) \mid D_n$ 当且仅当 $L(\mathcal{V}_{\text{pump}}) \mid D_n$。最后，根据定理 5.3，我们可以通过检查系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 的可满足性，来检验 $L(\mathcal{V}_{\text{pump}}) \mid D_n$ ：如果对每个 $\pi \in \Pi(\mathcal{V}_{\text{pump}})$ 都存在一个解，那么系统具有可分离性；否则，系统具有不可分性。由于系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 是直接从 KM($\mathcal{V}_{\text{pump}}$) 构造出来的，我们需要显式构造后者。因此，我们的判定过程可能需要阿克曼时间，因为 Karp-Miller 图的规模可能达到阿克曼级别 [36, 定理 2]。

▶ **例5.4**。 考虑正则可分性问题的一个实例，其中两个输入分别是图1（左）中的布奇向量加法系统$\mathcal{V}$，以及另一个接受语言 D_1 的布奇向量加法系统。既然我们已经处于需要判定 $L(\mathcal{V}) \mid D_1$ 的情形，就可以跳过应用引理 3.4 的第一步。第二步是应用定理 3.7 并构造 $\mathcal{V}_{\text{pump}}$；对于这种情形，我们已在图2（右）中完成了这项工作。

现在我们需要构造 KM($\mathcal{V}_{\text{pump}}$)，它见图3。KM($\mathcal{V}_{\text{pump}}$) 中有两处相关部分，其中可以找到包含终态的环：（1）右侧部分，状态元组中两次出现 ω，且计数器值为 0；（2）顶部包含三元组 ω的部分。下文中我们只写出状态，因为根据上下文即可明确计数器值以及状态元组的其他内容。

对于第 (1) 部分，Büchi 向量加法系统$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 只有一个轮廓 π_1，其中仅包含 q_1 和 q_2 之间的两条边。由于每个 π_1-环 σ 都只由本原环 $q_1 \xrightarrow{\mathbf{0}|\varepsilon} q_2 \xrightarrow{\mathbf{0}|\bar{a}_1} q_1$的重复组成，因此我们有 $\varphi(\sigma) < 0$。所以，系统 $\boldsymbol{A}_{\pi_1} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 显然有一个解 $\boldsymbol{x} = 1$。

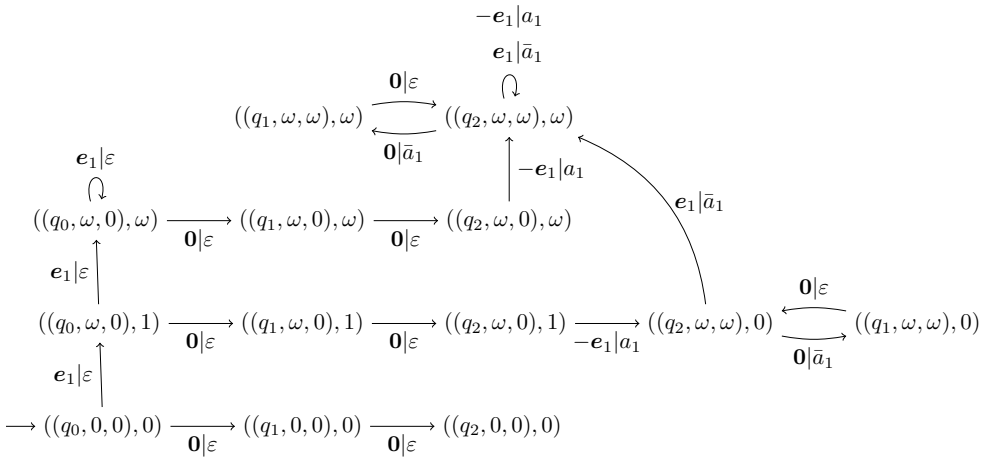


图3 图2（左）中 Büchi 向量加法系统$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 的 Karp-Miller 图 KM。为避免画面过于杂乱，这里没有标出终态；所有包含 q_1 的状态都视为终态。出于类似原因，我们也只用字母和计数器效应标注图中的边。完整的边标签应为$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 的完整转移，包括源状态和目标状态。

关于第 (2) 部分，$\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 还有另外两个轮廓：轮廓 π_2 仅包含 q_1 和 q_2之间的两条边，而轮廓 π_3还额外包含 q_2上的两条自环边。 π_2 的环与 π_1 的环几乎完全相同，唯一的区别是图中各节点的计数器值不同。因此，系统 $\boldsymbol{A}_{\pi_2}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{A}_{\pi_1}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 完全相同，并且同样显然有一个解 $\boldsymbol{x} = 1$。

对于 π_3，本原环既包括 q_2 上的自环边，也包括 π_2 的本原环。要得到一个完整的 π_3-环，只需将两个自环都插入 π_2-环在 q_2 处，从而形成环 $\sigma = q_1 \xrightarrow{\mathbf{0}|\varepsilon} q_2 \xrightarrow{-\boldsymbol{e}_1|a_1} q_2 \xrightarrow{\boldsymbol{e}_1|\bar{a}_1} q_2 \xrightarrow{\mathbf{0}|\bar{a}_1} q_1$。由于 σ 恰好包含所有本原环且彼此不重叠，因此它自动就是完整的。我们还有$\delta(\sigma) = 0$，这意味着 σ 是一个环，证明 π_3 是一个轮廓。因此，这些环得出以下不等式系统 $\boldsymbol{A}_{\pi_3}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$:

$1 \cdot x_1 \leq 0$ 环 $1 -1 \cdot x_1 \leq 0$ 环 $2 -1 \cdot x_1 \leq 0$ π_2-环 $-1 \cdot x_1 \leq -1$ 完整的 π_3-环

显然，这个系统无解；第一个和最后一个不等式互相矛盾。因此，我们得出结论： $L(\mathcal{V})$ 与 D_1 正则不可分。

虽然这不属于判定过程的一部分，但对于像这里这样的不可分实例，我们也可以在 KM($\mathcal{V}_{\text{pump}}$) 中找到一个不可分离花。在这种情况下，我们有 $\alpha = q_1 \xrightarrow{\mathbf{0}|\varepsilon} q_2 \xrightarrow{\mathbf{0}|\bar{a}_1} q_1$、$\beta = q_1 \xrightarrow{\mathbf{0}|\varepsilon} q_2 \xrightarrow{-\boldsymbol{e}_1|a_1} q_2 \xrightarrow{-\boldsymbol{e}_1|a_1} q_2 \xrightarrow{\mathbf{0}|\bar{a}_1} q_1$ 和 $\gamma = q_1 \xrightarrow{\mathbf{0}|\varepsilon} q_2 \xrightarrow{\boldsymbol{e}_1|\bar{a}_1} q_2 \xrightarrow{\boldsymbol{e}_1|\bar{a}_1} q_2 \xrightarrow{\mathbf{0}|\bar{a}_1} q_1$。这组环满足花的所有要求： $\delta(\alpha\beta\gamma) = 0$、 $\varphi(\alpha\beta) = 0$，以及 $\varphi(\alpha\beta\gamma) = -3 = 3 \cdot \varphi(\alpha)$。

不可分离花否定了可分离性 本节余下部分致力于证明定理 5.3。蕴含“(i)⇒(ii)”可通过将 KM($\mathcal{V}$) 视为 Büchi 自动机并应用推论 4.4 得出；参见引理 D.1。对于“(iii)⇒(i)”，我们采用引理 3.6：

14 BüchiVASS 中的正则可分性

▶ **命题 5.5.** 如果 $L(V)$ 是可泵送的，并且 KM(V) 含有一个不可分离的花，则 $L(V) \not| D_n$.

证明。 假设 KM$(\mathcal{V})$ 中存在不可分离花 α, β, γ，并且还有 $L(\mathcal{V}) \mid D_n$。根据引理 3.6，存在一个 $k \in \mathbb{N}$ 和一个有限集 $X \subseteq \mathbb{N}^n$，使得 $L(\mathcal{V}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X} S_{\boldsymbol{x},\, k}$。我们声称，对于每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$，以下至少有一项成立：

$$\langle \boldsymbol{x}, \varphi(\alpha) \rangle > 0, \qquad \langle \boldsymbol{x}, \varphi(\beta) \rangle > 0, \qquad \text{or } \langle \boldsymbol{x}, \varphi(\alpha\beta\gamma) \rangle = 0. \tag{1}$$

事实上，若 h$\boldsymbol{x}, \varphi(\alpha)$i ≤ 0 且 h$\boldsymbol{x}, \varphi(\beta)$i ≤ 0，则 $\varphi(\alpha\beta) \geq \mathbf{0}$ 意味着 h$\boldsymbol{x}, \varphi(\alpha)$i $=$h$\boldsymbol{x}, \varphi(\beta)$i $= 0$。由于对于某个 $N \in \mathbb{Q}$, $\varphi(\alpha\beta\gamma) = N \cdot \varphi(\alpha)$，我们有 $\varphi(\alpha\beta\gamma) = \mathbf{0}$。这就证明了该断言。由 (1) 可知，序列 $\alpha^{k+1}\beta^{k+1}\gamma^{k+1}$ 要么有一个因子 χ，满足 h$\boldsymbol{x}, \varphi(\chi)$i $> k$，要么 h$\boldsymbol{x}, \varphi(\alpha^{k+1}\beta^{k+1}\gamma^{k+1})$i $= 0$。由于 $\delta(\alpha^{k+1}\beta^{k+1}\gamma^{k+1}) \geq \mathbf{0}$，存在一个运行 ρ，使得 $\rho\alpha^{k+1}\beta^{k+1}\gamma^{k+1}$ 是 V 中的一个运行。因此，$\rho(\alpha^{k+1}\beta^{k+1}\gamma^{k+1})^\omega$ 是 V 中的一个运行，其字对于任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$都不属于 $S_{\boldsymbol{x},k}$，这与 $L(\mathrm{V}) \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X} S_{\boldsymbol{x},k}$ 矛盾。◀

构造不可分离花接下来需要证明蕴含关系“(ii)⇒(iii)”。假设存在一个轮廓 $\pi \in \Pi(\mathcal{V})$，其对应的不等式系统 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 无解。根据 Farkas 引理，存在一个 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{N}^{m+1}$，使得 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$。现在，我们利用这个向量 $\boldsymbol{y}$在 KM$(\mathcal{V})$ 中构造一个不可分离花。

令 σ 为 KM(V) 中用于构造 $\boldsymbol{A}_\pi$ 的完整 π-环。令 $\tau_1, \ldots, \tau_m$ 为这些本原 π-环。由于 σ 是完整的，存在一个向量 $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$，使得$r_1, \ldots, r_m \geq 1$ 且 $\Delta(\sigma) = r_1 \cdot \Delta(\tau_1) + \cdots + r_m \cdot \Delta(\tau_m)$。此外，由于 σ包含 π的每条边，我们不失一般性地可以写成 $\sigma = \sigma_0 \cdots \sigma_m$，使得在 σ_{i-1}与 σ_i之间，σ到达 τ_i的初始状态。该分解允许我们进一步插入本原环的重复项。对于满足 $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{r}$的 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{N}^m$，我们将 $\sigma^{\boldsymbol{z}}$定义为 $\sigma_0 \tau_1^{z_1 - r_1} \sigma_1 \cdots \tau_m^{z_m - r_m} \sigma_m$。于是$\Delta(\sigma^{\boldsymbol{z}}) = z_1 \cdot \Delta(\tau_1) + \cdots + z_m \cdot \Delta(\tau_m)$。特别地，对于 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{r}$，我们有 $\Delta(\sigma^{\boldsymbol{s}}\sigma^{\boldsymbol{t}}) = \Delta(\sigma^{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}})$。

回顾一下，Karp-Miller 图中的每个转移都由一个向量加法系统转移标记，因此 KM$(\mathcal{V})$ 中的每个转移序列 χ 都由 $\mathcal{V}$ 中的一个转移序列标记，我们将其记为 trans(χ)。现在，我们将 α、β和 γ 定义为适当向量 $\boldsymbol{z}$对应的转移序列 trans$(\sigma^{\boldsymbol{z}})$。对于 α，我们取 trans(σ)，即标记完整 π-环的转移。注意，$\sigma = \sigma^{\boldsymbol{r}}$。接下来，我们将 $\beta =$定义为 trans$(\sigma^{\boldsymbol{s}})$，并将 $\gamma =$定义为 trans$(\sigma^{\boldsymbol{t}})$。向量 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的选取必须满足不可分离花的要求：$\varphi(\alpha\beta) \geq \mathbf{0}$、$\delta(\alpha\beta\gamma) \geq \mathbf{0}$，以及 $\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$。

步骤 I：构造 $\boldsymbol{\beta}$。我们将定义 $\boldsymbol{s}$，使得 $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\sigma^{\boldsymbol{r}}\sigma^{\boldsymbol{s}}) = \varphi(\sigma^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}}) \geq \mathbf{0}$。剩下的两个要求（即 $\delta(\alpha\beta\gamma) \geq \mathbf{0}$ 和 $\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$）将在步骤 II 中通过适当选择 $\boldsymbol{t}$ 来保证。现在来说明如何选取 $\boldsymbol{s}$。回顾一下，$\boldsymbol{y}$ 是应用 Farkas 引理得到的向量。可以将其理解为：为轮廓中的每个本原环 τ_i 分配重复次数 y_i，并为完整的 π-环 σ 分配重复次数 y_{m+1}。由于 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \mathbf{0}$，且我们的目标是使 $\varphi(\alpha\beta)$ 非负，因此我们将用 $\boldsymbol{y}$ 构造向量 $\hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m) \in \mathbb{N}^m$，使得 $\varphi(\sigma^{\hat{\boldsymbol{y}}}) = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi$。正确的定义是，对于 $i \in [1, m]$，令 $\hat{y}_i := y_i + y_{m+1} \cdot r_i$，因为

$$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \varphi(\tau_i) + y_{m+1} \cdot \varphi(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} (y_i + y_{m+1} r_i) \varphi(\tau_i) = \varphi(\sigma^{\hat{\boldsymbol{y}}}).$$

现在我们选择 $M \in \mathbb{N}$，使得 $\boldsymbol{s} = M \cdot \hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{r}$。这是可行的，因为 $\hat{\boldsymbol{y}}$中的所有项都是正数，这归因于 $y_{m+1} > 0$ 由 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$，并且根据定义，对所有 i 都有 $r_i > 0$。于是我们有 $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\sigma^{\boldsymbol{r}}\sigma^{\boldsymbol{s}}) = \varphi(\sigma^{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}}) = \varphi(\sigma^{M \cdot \hat{\boldsymbol{y}}}) = M \cdot \varphi(\sigma^{\hat{\boldsymbol{y}}}) \geq \mathbf{0}$。

步骤 II：构造 γ。接下来需要定义 t，使得 $\gamma = \text{trans}(\sigma^t)$ 满足 $\delta(\alpha\beta\gamma) = \delta(\sigma^{r+s+t}) \geq \mathbf{0}$，并且 $\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$。思路是选择 t，使得 $r+s+t$ 是 r的正倍数。这样的选择是可行的，因为 r 的所有项均为正数：我们选择 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $t := N \cdot r - s - r \geq r$。那么确实有 $\delta(\alpha\beta\gamma) = \delta(\sigma^{r+s+t}) = \delta(\sigma^{N \cdot r})$ $N \ \delta \ \sigma^r = N \ \delta \ \sigma \geq \mathbf{0}$ $\varphi \ \alpha\beta\gamma = \varphi \ \sigma^{r+s+t} = \varphi \ \sigma^{N \cdot r} = N \ \varphi \ \sigma^r = N \ \varphi \ \alpha$ $\cdot ( ) \cdot ( )$ and $( )$ $( ) ( ) \cdot ( ) \cdot ( )$。

6 一维 BüchiVASS

我们的第二项贡献是精确确定一维可 se.

▶**定理6.1.** 对于采用二进制编码更新的一维 *Büchi* 向量加法系统，正则可分性是PSPACE完全的。

对于下界，我们使用从一维向量加法系统的有限词语言的不相交问题 $L_1 \cap L_2 \stackrel{?}{=} \emptyset$ 出发的简单归约 [24]。然而，我们还证明，即使保证输入语言彼此不相交，可分离性仍是 PSPACE-hard。参见附录 E.1。

对于上界，我们依赖第 5 节中的结果，但需要做一些修改。在那里，为了简化论述，我们首先使输入语言可泵送，这可能导致阿克曼级膨胀。然而，仔细考察这些结果会发现，我们也可以直接在第 3 节定义的$\mathcal{V}$ 的 Karp-Miller 图上检查¯可分离性。

▶ **命题 6.2**。 设 V 是一个 *Büchi* 向量加法系统，具有 $L(V) \subseteq \Sigma_n^\omega$。则 $L(V) \not| D_n$ 当且仅当¯$\mathsf{KM}(V)$ 具有一朵不可分离花。

¯命题 6.2 使我们能够将不可分性表述为：$\mathcal{V}$ 中存在一条满足特定约束的运行。回顾一下，若 $\mathcal{V}$ 是一维的且定义在 Σ_1 上，则 $\mathcal{V}$ 有两个计数器，其中第二个跟踪字母平衡。

▶ **推论 6.3**。 设 V 是一个 1维 *Büchi* 向量加法系统，具有 $L(V) \subseteq \Sigma_1^\omega$以及 $L(V) \cap D_1 = \emptyset$。¯则 $L(V) \not| D_1$ 当且仅当存在状态 p、q、r，其中 r 为终态，且 V 中存在如下运行：

$$(q_0,0,0) \xrightarrow{*} \overbrace{(p,x_1,y_1) \xrightarrow{*} (p,x_2,y_2)}^{\sigma_1} \xrightarrow{*} \overbrace{(q,x_3,y_3) \xrightarrow{*} (q,x_4,y_4)}^{\sigma_2}$$
$$\xrightarrow{*} \overbrace{(r,x_5,y_5) \xrightarrow{*} \underbrace{(r,x_6,y_6)}_{\beta} \xrightarrow{*} (r,x_7,y_7)}^{\alpha} \xrightarrow{*} \overbrace{(r,x_8,y_8)}^{\gamma}$$

(1) $y_3 < y_4$ 并且还满足 ***(a)*** $x_3 \leq x_4$或 ***(b)*** $x_1 < x_2$ 并且 $y_1 \leq y_2$**(2)** $y_5 \leq y_7$**(3)** $x_5 \leq x_8$ **(4)** 若 $y_5 = y_6$，则 $y_5 = y_8$。

¯注意，KM($\mathcal{V}$) 中的不可分离花在第二个坐标上必须具有 ω，¯这意味着字母平衡无界。否则，它将产生 $\mathcal{V}$ 的一条接受运行，但这不可能存在，因为 $L(\mathcal{V}) \cap D_1 = \emptyset$。如果花在第二个坐标上具有 ω，我们就可以像上面那样构造一条有限 运行。环 σ_1 和 σ_2，再加上条件 1，确保第二个坐标确实变为 ω。条件 2 表示 $\varphi(\alpha\beta) \geq \mathbf{0}$。条件 3 表示 $\delta(\alpha\beta\gamma) \geq \mathbf{0}$。最后，为了表达 $\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$，注意对于整数 $a \in \mathbb{Q} \cdot b$，当且仅当 $b = 0$ 蕴含 $a = 0$。条件 4 表示 $y_6 - y_5 = 0$ 蕴含 $y_8 - y_5 = 0$。

为了应用推论 6.3 来判定 $L(\mathcal{V}_1) \mid L(\mathcal{V}_2)$ 对于一维布奇向量加权自动机 $\mathcal{V}_1$,$\mathcal{V}_2$（带二进制计数器更新），我们希望沿用一般情形的方法，先使用引理 3.4 构造 $\mathcal{V}$，使得 $L(\mathcal{V}_1) \mid L(\mathcal{V}_2)$ 当且仅当 $L(\mathcal{V}) \mid D_1$。然后，我们将基于 $\mathcal{V}$¯构造二维布奇向量加法系统 $\mathcal{V}$ 来跟踪字母平衡，并¯在 $\mathcal{V}$ 上检查推论 6.3 的条件。问题在于，在采用二进制¯更新时，中间的 $\mathcal{V}$ 可能会变得指数级庞大。我们利用这样一个事实：$\mathcal{V}$¯也可以使用二进制计数器。这样，我们便能直接构造 $\mathcal{V}$ 的紧凑变体：

▶ **引理 6.4.** 给定一个1维布奇向量加法系统 V_1,V_2 （采用二进制更新），存在一个1维布奇向量加法系统 V，使得 $L(V_1) \cap L(V_2) = \emptyset$ 当且仅当 $L(V) \cap D_1 = \emptyset$，且 $L(V_1) \mid L(V_2)$ 当且仅当 $L(V) \mid D_1$；并且¯我们可以在关于 $|V_1| + |V_2|$ 的多项式时间内构造2维布奇向量加法系统 V（二进制更新）。

检测 2-向量加法系统中的受约束运行 接下来需要检查是否存在满足推论 6.3 所述条件的运行¯$\mathcal{V}$，并检查 $L(\mathcal{V}_1) \cap L(\mathcal{V}_2) = \emptyset$ 是否成立。这两个问题都可归约为我们所称的*2*维-向量加法系统的受约束运行问题。回顾一下，*Presburger*算术是 $(\mathbb{N}, +, <, 0, 1)$ 的一阶理论。我们将使用其存在量词片段来表达向量加法系统计数器值的条件，例如推论 6.3 中的条件。受约束运行问题如下：

给定一个二维向量加法系统 V（其更新以二进制编码）、一个数 $m \in \mathbb{N}$、V 中的状态 $q_1, \ldots, q_m$、一个无量词 Presburger 公式 $\psi(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$，以及 $s, t \in [1, m]$, $s \leq t$。问题：是否存在一条运行 $(q_0, 0, 0) \xrightarrow{*} (q_1, x_1, y_1) \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} (q_m, x_m, y_m)$，它访问一个

在 (q_s, x_s, y_s) 和 (q_t, x_t, y_t) 之间的终态，并满足 $\psi(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$? 引理 6.4 和推论 6.3 表明，若 $L(\mathrm{V}_1) \cap L(\mathrm{V}_2) = \emptyset$，则 $L(\mathrm{V}_1) \mid L(\mathrm{V}_2)$ 可归约¯为 V 上的受约束运行问题。此外，通过乘积构造，检查 $L(\mathrm{V}_1) \cap L(\mathrm{V}_2) = \emptyset$ 可归约为检查一个二维向量加权自动机的空性。当且仅当存在一条接受运行，使得 $(q_0, 0, 0) \xrightarrow{*} (q, x, y) \xrightarrow{*} (q, x', y')$，且 $(x, y) \leq (x', y')$ 并且 q 为终态时，这个二维向量加权自动机才有接受运行。因此，这个问题也可归约为二维向量加权自动机的受约束运行问题。由此，我们需要证明：

▶**命题 6.5.** 2维向量加法系统的受约束运行问题可在PSPACE内求解。

对于命题 6.5，我们证明，若存在受约束运行，那么就存在一个运行，其沿途的计数器值至多为指数级。为此，我们使用了来自 [5] 的方法。

更高维度下的复杂性 我们留下两个自然问题有待解决：(i) 对每个 $d \geq 2$，布奇 d 维向量加法系统的正则可分性具有怎样的复杂度？(ii) 布奇向量加法系统（其中维度是输入的一部分）的正则可分性具有怎样的复杂度?

鉴于正则可分性问题与不相交问题通常（但并非总是如此 [32, 48]）在可判定性方面一致，我们预期，在每个固定维度 d 下，正则可分性的复杂度为 PSPACE，而在一般情况下为指数空间。固定 d 维情形的下界可由定理6.1推出，而一般情形的下界可由 [14] 推出（因为不相交问题是指数空间完全的 [22, 34]）。然而，目前尚不清楚如何证明上界。

最明显的障碍在于，不可分离花涉及一个非线性条件：要求 $\varphi(\alpha\beta\gamma) \in \mathbb{Q} \cdot \varphi(\alpha)$ 无法用 Presburger 算术表达。有若干通用结果给出了在向量加法系统 [18, 3, 4] 中检测特定类型运行的指数空间上界。然而，能够直接表达的数值性质仅限于 Presburger算术。我们之所以能够得到 $d = 1$ 的 PSPACE 上界，唯一原因是该非线性条件在一维时退化为线性条件：它等价于“$\varphi(\alpha\beta\gamma) = 0$ 或 $\varphi(\alpha) \neq 0$”。

参考文献

1 Parosh Aziz Abdulla、Mohamed Faouzi Atig、Vrunda Dave 和 Shankara Narayanan Krishna。《字符串约束的可分离性问题》。载于 Igor Konnov 和 Laura Kovács 编，第*31*届并发理论国际会议，*CONCUR 2020*，*2020*年*9*月*1*日至*4*日，奥地利维也纳（虚拟会议），第171卷，收录于*LIPIcs*，第16:1–16:19页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2020年。doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2020.16。2 Parosh Aziz Abdulla、K¯arlisČer¯ans、Bengt Jonsson 和 Yih-Kuen Tsay。《良拟序域上程序的算法分析》。《信息与计算》，160(1-2):109–127，2000年。doi:10.1006/inco.1999.2843。

3 Mohamed Faouzi Atig 和 Peter Habermehl。《Petri网的 Yen 路径逻辑》。国际计算机科学基础期刊，22(4):783–799，2011年。 doi:10.1142/S0129054111008428。4 Michel Blockelet 和 Sylvain Schmitz。《向量加法系统可覆盖性图的模型检测》。载于 Filip Murlak 和 Piotr Sankowski 编，《2011年计算机科学数学基础会议——第36届国际研讨会，MFCS 2011》，波兰华沙，2011年8月22日至26日。会议论文集，第6907卷，收录于《计算机科学讲义》，第108–119页。施普林格，2011年。 doi:10.1007/978-3-642-22993-0_13。5 Michael Blondin、Matthias Englert、Alain Finkel、Stefan Göller、Christoph Haase、Ranko Lazic、Pierre McKenzie 和 Patrick Totzke。《二维带状态向量加法系统的可达性问题》。ACM期刊，68(5):34:1–34:43，2021年。 doi:10.1145/3464794。6 Heino Carstensen。《确定性 Petri 网的无限行为》。载于 Michal Chytil、Ladislav Janiga 和 Václav Koubek 编，《1988年计算机科学数学基础会议》，MFCS'88，捷克斯洛伐克卡尔斯巴德，1988年8月29日至9月2日。会议论文集，第324卷，收录于《计算机科学讲义》，第210–219页。施普林格，1988年。 doi:10.1007/BFb0017144。7 Pierre Chambart、Alain Finkel 和 Sylvain Schmitz。《迹有界良结构转换系统的前向分析与模型检测》。《理论计算机科学》，637:1–29，2016年。 doi:10.1016/j.tcs.2016.04.020。8 Christian Choffrut、Flavio D'Alessandro 和 Stefano Varricchio。《稀疏上下文无关语言与有界有理关系的可分离性》。《理论计算机科学》，381(1-3):274–279，2007年。 doi:10.1016/j.tcs.2007.04.003。9 Lorenzo Clemente、Wojciech Czerwinski、Slawomir Lasota 和 Charles Paperman。《Parikh自动机的正则可分性》。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Piotr Indyk、Fabian Kuhn 和 Anca Muscholl 编，《第44届自动机、语言与程序国际研讨会》，ICALP 2017，2017年7月10日至14日，波兰华沙，第80卷，收录于 LIPIcs，第117:1–117:13页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2017年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2017.117。10 Lorenzo Clemente、Wojciech Czerwinski、Slawomir Lasota 和 Charles Paperman。《向量加法系统可达集的可分离性》。载于 Heribert Vollmer 和 Brigitte Vallée 编，《第34届计算机科学理论方面研讨会》，STACS 2017，2017年3月8日至11日，德国汉诺威，第66卷，收录于 LIPIcs，第24:1–24:14页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2017年。 doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2017.24。11 Lorenzo Clemente、Slawomir Lasota 和 Radoslaw Piórkowski。《定时博弈与确定性可分离性》。载于 Artur Czumaj、Anuj Dawar 和 Emanuela Merelli 编，《第47届自动机、语言与程序国际研讨会》，ICALP 2020，2020年7月8日至11日，德国萨尔布吕肯（虚拟会议），第168卷，收录于 LIPIcs，第121:1–121:16页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2020.121。12 Wojciech Czerwiński、Piotr Hofman 和 Georg Zetzsche。《向量加法系统语言的无界性问题》。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Christos Kaklamanis、Dániel Marx 和 Donald Sannella 编，《第45届自动机、语言与程序国际研讨会论文集》（ICALP 2018），第107卷，收录于莱布尼茨信息学国际论文集（LIPIcs），第119:1–119:15页，德国 Dagstuhl，2018年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.119。13 Wojciech Czerwinski 和 Slawomir Lasota。《单计数器自动机的正则可分性》。载于《第32届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会》，LICS 2017，冰岛雷克雅未克，2017年6月20日至23日，第1–12页。IEEE计算机学会，2017年。 doi:10.1109/LICS.2017.8005079。14 Wojciech Czerwinski、Slawomir Lasota、Roland Meyer、Sebastian Muskalla、K. Narayan Kumar 和 Prakash Saivasan。《良结构转移系统的正则可分性》。载于 Sven Schewe 和 Lijun Zhang 编，《第29届并发理论国际会议》（CONCUR 2018），第118卷，收录于莱布尼茨信息学国际论文集（LIPIcs），第35:1–35:18页，德国 Dagstuhl，2018年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer

计算机科学。URL: http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2018/9573, doi:10.4230/LIPIcs.CONCUR.2018.35。15 Wojciech Czerwiński、Wim Martens 和 Tomás Masopust。通过子序列和后缀高效分离正则语言。载于 Fedor V. Fomin、Rusins Freivalds、Marta Z. Kwiatkowska 和 David Peleg（编辑），自动机、语言与编程——第40届自动机、语言与程序国际研讨会，ICALP 2013，拉脱维亚里加，2013年7月8日至12日，论文集，第二部分，《计算机科学讲义》第7966卷，第150–161页。施普林格，2013年。 doi:10.1007/978-3-642-39212-2_16。16 Wojciech Czerwiński、Wim Martens、Lorijn van Rooijen、Marc Zeitoun 和 Georg Zetzsche。通过分段可测试语言实现可判定分离的刻画。《离散数学与理论计算机科学》，19(4)，2017年。 doi:10.23638/DMTCS-19-4-1。17 Wojciech Czerwiński 和 Georg Zetzsche。向量加法系统中正则可分离性的一种方法。载于 Holger Hermanns、Lijun Zhang、Naoki Kobayashi 和 Dale Miller（编辑），第三十五届 ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS 2020）论文集，第341–354页。ACM，2020年。 doi:10.1145/3373718.3394776。18 Stéphane Demri。关于向量加法系统的选择性无界性。《计算机与系统科学杂志》，79(5)：689–713，2013年。 doi:10.1016/j.jcss.2013.01.014。19 Catherine Dufourd、Alain Finkel 和 Philippe Schnoebelen。可判定性与不可判定性之间的重置网。载于 Kim Guldstrand Larsen、Sven Skyum 和 Glynn Winskel（编辑），自动机、语言与编程，第25届自动机、语言与程序国际研讨会，ICALP'98，丹麦奥尔堡，1998年7月13日至17日，论文集，《计算机科学讲义》第1443卷，第103–115页。施普林格，1998年。 doi:10.1007/BFb0055044。20 Jacques Duparc、Olivier Finkel 和 Jean-Pierre Ressayre。Petri 网 ω-语言的 Wadge 层级。载于 Vasco Brattka、Hannes Diener 和 Dieter Spreen （编辑），逻辑、计算与层级，《 Ontos 数理逻辑》第 4 卷，第 109–138 页。德古意特，2014年。 doi:10.1515/9781614518044.109。21 Javier Esparza。关于若干 μ-演算和 Petri 网模型检测的可判定性。载于 Sophie Tison（编辑），代数与编程中的树——CAAP，《 LNCS》第787卷，第115–129页。施普林格，1994年。22 Javier Esparza。Petri 网问题的可判定性与复杂性——导论。载于 G. Rozenberg 和 W. Reisig（编辑），Petri 网讲义 I：基本模型。《 Petri 网进展》，《计算机科学讲义》第1491卷，第374–428页，1998年。23 John Fearnley 和 Marcin Jurdziński。双时钟定时自动机中的可达性是 PSPACE-完全的。载于 Fedor V. Fomin、R^{-}usinš Freivalds、Marta Kwiatkowska 和 David Peleg（编辑），自动机、语言与编程，第212–223页，柏林、海德堡，2013年。施普林格柏林海德堡。24 John Fearnley 和 Marcin Jurdzinski。双时钟定时自动机中的可达性是 PSPACE-完全的。《信息与计算》，243：26–36，2015年。 doi:10.1016/j.ic.2014.12.004。25 Alain Finkel 和 Philippe Schnoebelen。无处不在的良结构转换系统！《理论计算机科学》，256(1-2)：63–92，2001年。 doi:10.1016/S0304-3975(00)00102-X。26 Olivier Finkel。上下文无关 ω-语言的博雷尔秩和 Wadge 度。《数学结构与计算机科学》，16(5)：813–840，2006年。 doi:10.1017/S0960129506005597。27 Olivier Finkel 和 Michal Skrzypczak。非确定性和无歧义 Petri 网在无限词上的表达能力。《基础信息学》，183(3-4)：243–291，2021年。 doi:10.3233/FI-2021-2088。28 Peter Habermehl。Petri 网线性时间 μ-演算的复杂性。载于 ICATPN，《LNCS》第1248卷，第102–116页。施普林格，1997年。29 Christopher Hugenroth。关于依据 Wagner 层级分离无限词上的正则语言。载于 Mikolaj Bojanczyk 和 Chandra Chekuri （编辑），第41届 IARCS软件技术与理论计算机科学基础年会，FSTTCS 2021，2021年12月15日至17日，虚拟会议，《LIPIcs》第213卷，第

46:1–46:13。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2021年。 doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2021.46。30 Harry B. Hunt III。文法问题的可判定性。《ACM期刊》，29(2)：429–447，1982年。31 Richard M. Karp 和 Raymond E. Miller。并行程序模式。《计算机与系统科学期刊》，3(2)：147–195，1969年。URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000069800115, doi:https://doi.org/10.1016/S0022-0000(69)80011-5。32 Eryk Kopczynski。不可见下推语言。载于 Martin Grohe、Eric Koskinen 和 Natarajan Shankar（编辑），第31届 ACM/IEEE计算机科学逻辑年会论文集，LICS '16，美国纽约州纽约，2016年7月5日至8日，第867–872页。ACM，2016年。 doi:10.1145/2933575.2933579。33 Jérôme Leroux 和 Sylvain Schmitz。揭秘向量加法系统中的可达性。载于第30届 ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS 2015，日本京都，2015年7月6日至10日，第56–67页。IEEE计算机学会，2015年。URL： https://doi.org/10.1109/LICS.2015.16, doi:10.1109/LICS.2015.16。34 Richard Lipton。可达性问题是指数空间困难。耶鲁大学计算机科学系，报告第62号，1976年。35 Tomás Masopust。通过分段可测试语言进行分离是 P时间完全的。《理论计算机科学》，711：109–114，2018年。 doi:10.1016/j.tcs.2017.11.004。36 Ernst W Mayr 和 Albert R Meyer。Petri 网有限包含问题的复杂性。《ACM期刊》（JACM），28(3)：561–576，1981年。37 Richard Mayr。不可靠计算中的不可判定问题。《理论计算机科学》，297(1-3)：337–354，2003年。 doi:10.1016/S0304-3975(02)00646-1。38 Théo Pierron、Thomas Place 和 Marc Zeitoun。无限词的量词交替。载于 Bart Jacobs 和 Christof Löding（编辑），软件科学与计算结构基础——第19届国际会议，FOSSACS 2016，作为欧洲软件理论与实践联合会议 ETAPS 2016 的一部分举行，荷兰埃因霍温，2016年4月2日至8日，论文集，《计算机科学讲义》第9634卷，第234–251页。施普林格，2016年。 doi:10.1007/978-3-662-49630-5_14。39 Thomas Place、Lorijn van Rooijen 和 Marc Zeitoun。通过局部可测试语言和局部阈值可测试语言分离正则语言。载于 Anil Seth 和 Nisheeth K. Vishnoi（编辑），IARCS软件技术与理论计算机科学基础年会，FSTTCS 2013，2013年12月12日至14日，印度古瓦哈提，《LIPIcs》第24卷，第363–375页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2013年。 doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2013.363。40 Thomas Place 和 Marc Zeitoun。使用一阶逻辑分离正则语言。载于 Thomas A. Henzinger 和 Dale Miller（编辑），第二十三届 EACSL计算机科学逻辑年会（CSL）与第二十九届 ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS）联合会议，CSL-LICS '14，奥地利维也纳，2014年7月14日至18日，第75:1–75:10页。ACM，2014年。 doi:10.1145/2603088.2603098。41 Thomas Place 和 Marc Zeitoun。分离与后继关系。载于 Ernst W. Mayr 和 Nicolas Ollinger（编辑），第32届计算机科学理论方面国际研讨会，STACS 2015，德国加兴，2015年3月4日至7日，《LIPIcs》第30卷，第662–675页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2015年。 doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2015.662。42 Thomas Place 和 Marc Zeitoun。使用一阶逻辑分离正则语言。《计算机科学逻辑方法》，12(1)，2016年。URL: https://doi.org/10.2168/LMCS-12(1:5)2016,doi:10.2168/LMCS-12(1:5)2016。43 Thomas Place 和 Marc Zeitoun。在完全无歧义的情况下进行分离。载于 Ioannis Chatzigiannakis、Christos Kaklamanis、Dániel Marx 和 Donald Sannella（编辑），第45届自动机、语言与程序国际研讨会，ICALP 2018，2018年7月9日至13日，布拉格，

捷克共和国，LIPIcs第107卷，页137:1–137:14。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2018年。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2018.137。44 Thomas Place 和 Marc Zeitoun。基于群的连接层次结构的分离与覆盖。载于第34届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS 2019），温哥华（加拿大不列颠哥伦比亚省），加拿大，2019年6月24日至27日，页1–13。IEEE，2019年。 doi:10.1109/LICS.2019.8785655。45 Andreas Podelski 和 Andrey Rybalchenko。线性排序函数综合的完备方法。载于 VMCAI，LNCS第2937卷，页239–251。施普林格，2004年。46 Alexander Schrijver。线性与整数规划理论。John Wiley & Sons, Inc.，美国纽约州纽约市，1986年。47 Thomas G. Szymanski 和 John H. Williams。自底向上语法分析技术的非规范扩展。SIAM计算杂志，5(2)，1976年。48 Ramanathan S. Thinniyam 和 Georg Zetzsche。正则可分性与交集非空性是相互独立的问题。载于第39届IARCS软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS 2019）论文集，LIPIcs第150卷，德国Dagstuhl，2019年。Schloss Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心。49 Rüdiger Valk。Petri 网的无限行为。《理论计算机科学》，25(3):311–341，1983年。50 Joachim von zur Gathen 和 Malte Sieveking。线性整数等式与不等式的解的界。美国数学学会会刊，72(1):155–158，1978年。51 Georg Zetzsche。通过分段可测试语言实现可分性，以及超越子词的向下闭包。载于 Anuj Dawar 和 Erich Grädel 编，第第三十三届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会（LICS 2018）论文集，页929–938。ACM，2018年。 doi:10.1145/3209108.3209201。

概述的证明细节

A.1 定理3.2 第一部分的证明

这里我们证明定理3.2的第一部分，具体如下：

▶ **定理A.1**。 存在 *Büchi* 向量加法系统语言 L_1， L_2 满足 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ 且 $L_1 \not| L_2$。**证明**。我们选择 $L_1 = L$（$\mathcal{V}$），其中 $\mathcal{V}$ 是图 1（左）中的 Büchi 向量加法系统，并且 $L_2 = D_1$，Dyck 语言。我们断言，每个 $w \in L$（$\mathcal{V}$）都可以写成 $w = uv_1v_2 \cdots$ with$\varphi_1(v_\ell) < 0$ 对每个 $\ell \in \mathbb{N}$均成立。这显然意味着 L（$\mathcal{V}$） $\cap D_1 = \emptyset$。假设 $w \in L$（$\mathcal{V}$）。注意，在 q_2 上，读取 a_1 会使计数器减一，而读取 $\bar{a}_1$ 会使计数器加一。因此，从配置 (q_2， x) 出发，在 q_2 中读取字 v，其平衡值 $\varphi_1(v)$ 至多为 x。此外，如果 $\varphi_1(v)$ > 0，那么计数器就会减小。进一步地，为了访问 q_1，平衡值必须至少下降一次。因此，在对终态 q_1的任意两次（不一定连续）访问之间，以下情况之一成立：(i) 计数器严格减小；或 (ii) 输入字 v 满足 $\varphi_1(v) < 0$。由于 q_1 被无限次访问，我们可以对$w = uv_1v_2 \ldots$作分解，使得读完 v_ℓ后，我们处于 (q_1， x_ℓ)，并且有 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$。那么，对于任意 v_ℓ，“(i)”都不可能成立，因此对于每个 ℓ，我们都有 φ_1 (v_ℓ) < 0。由此，命题得证。

剩下要证明 $L(\mathcal{V})$ $\not| D_1$。反设存在一个有 n 个状态的 Büchi 自动机 $\mathcal{A}$，使得 $L(\mathcal{V}) \subseteq L$ ($\mathcal{A}$) 且 $L(\mathcal{A}) \cap D_1 = \emptyset$。注意，$\mathcal{V}$接受 $(a_1^n \bar{a}_1^{n+1})^\omega$：我们在 q_0 中将计数器提升到 n，然后从 q_1 到 q_1，循环读取每个 $a_1^n \bar{a}_1^{n+1}$。然而，$\mathcal{A}$ 的一次运行必须在 a_1^n 的某个非空因子上形成环，因此对于某个$m > n$，它也会接受 $w = (a_1^m \bar{a}_1^{n+1})^\omega$。由于 $w \in D_1$，这就产生了矛盾。◀

定理3.2 的第二部分在附录 F 中得到证明。

A.2 引理 3.4 的证明

▶ **引理 3.4**。给定布奇向量加法系统 V_1 和 V_2，，我们可以计算一个定义在 Σ_n 上的布奇向量加法系统 V，使得 t当且仅当 $L(V_1) \mid L(V_2)$ $L(V) \mid D_n$，其中 n 是 V_2的维度。

证明中需要用到无限词的有理转导这一概念。

有理转导 有限状态布奇转导器是一个元组 $\mathbf{T} = (Q, \Sigma, \Gamma, E, q_0, Q_f)$，由有限状态集 Q、输入字母表 A、初始状态 $q_0 \in Q$、终态集 $Q_f \subseteq Q$和转移关系 $E \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$组成。对于转移 $(q, a, b, q') \in E$，我们也记作 $q \xrightarrow{(a,b)} q'$。转导器 $\mathbf{T}$ 识别二元关系 $T(\mathbf{T}) \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$，其中恰好包含满足以下条件的所有对 $(u, v) \in \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$：存在一个转移序列

$$q_0 \xrightarrow{(a_1,b_1)} q_1 \xrightarrow{(a_2,b_2)} \cdots$$

使得 $u = a_1 a_2 \cdots$、 $v = b_1 b_2 \cdots$，并且对于无穷多个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $q_i \in Q_f$。如果存在一个有限状态 Büchi 换能器 $\mathcal{T}$，满足$T = T(\mathcal{T})$，我们就称关系 $T \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$ 是有理的。对于语言 $L \subseteq \Gamma^\omega$ 和关系 $T \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$，我们定义

$$TL = \{u \in \Sigma^\omega \mid \exists v \in L \colon (u, v) \in T\}.$$

此外，对于关系 $T \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$ 和 $S \subseteq \Theta^\omega \times \Sigma^\omega$，我们定义

$$S \circ T = \{(u, w) \in \Theta^\omega \times \Gamma^\omega \mid \exists v \in \Sigma^\omega \colon (u, v) \in S,\ (v, w) \in T\}.$$

通过一个简单的乘积构造，我们可以看到，对于有理换位 S 和 T，关系 $S \circ T$也（有效地）是有理的。只需交换两个输入坐标，也可以证明，如果 $T \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$ 是有理的，那么

$$T^{-1} = \{(u, v) \in \Gamma^\omega \times \Sigma^\omega \mid (v, u) \in T\}.$$

下面的结论也完全显然。

▶ **引理 A.2**。语言 $L \subseteq \Sigma^\omega$ 是 *Büchi* 向量加法系统语言，当且仅当存在一个有理转导 T 和一个数 $n \in \mathbb{N}$，使得 $L = TD_n$。此外，该转换可以在指数时间内完成。

在这里，n维 Büchi 向量加法系统底层的自动机被转换为一个输入为 D_n 的转导器，反之亦然。更确切地说，对于 $h \in \mathbb{N}$，在第 i个计数器上执行的 $+h$ 操作被转换为字符串 $(a_i)^h$，而 $-h$则被转换为 $(\bar{a}_i)^h$。这里，$\mathbf{0}$向量被转换为 $a_1\bar{a}_1$ 而非 ε，以确保 Büchi 向量加法系统的每个无限运行实际上都对应于 D_n中的一个无限字。该构造之所以无法在多项式时间内完成，唯一的原因是我们假设 Büchi 向量加法系统的计数器操作采用二进制编码。具体而言，上文提到的字符串 $(a_i)^h$ 需要 h 步才能写出，而 Büchi 向量加法系统的大小仅取决于 $\log h$。不过，如果计数器更新采用一进制编码，或者对诸如 $(a_i)^h$ 这样的字符串进行某种指数压缩，该构造只需多项式时间即可完成。

我们还需要以下引理。证明与 [17]中相应的证明完全相同。唯一的区别是，我们处理的是无限词而非有限词。

▶ **引理 A.3.** 设 $T \subseteq \Sigma^\omega \times \Gamma^\omega$ 是有理的，且 $L \subseteq \Sigma^\omega$ 和 $K \subseteq \Gamma^\omega$。那么 $L \mid TK$ 当且仅当 $T^{-1}L \mid K$。

证明。 假设 $L \subseteq R$ 且 $R \cap TK = \emptyset$ 对某个正则 R 成立。显然 $T^{-1}L \subseteq T^{-1}R$ 且 $T^{-1}R \cap K = \emptyset$。因此，正则集合 $T^{-1}R$ 见证了 $T^{-1}L \mid K$。反过来，若 $T^{-1}L \mid K$，则 $K \mid T^{-1}L$，于是根据第一个方向，$(T^{-1})^{-1}K \mid L$。由于 $(T^{-1})^{-1} = T$，这就表示 $TK \mid L$，从而 $L \mid TK$。◀

现在我们可以证明引理 3.4 了。

引理 3.4 的证明。 给定 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$，其中 $\mathcal{V}_2$ 是 n 维的，引理 A.2 使我们能够在指数时间内计算出一个有理转导 T 使得 $L(\mathcal{V}_2) = TD_n$。我们再次应用引理 A.2，构造一个 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}$ 用于 $T^{-1}L(\mathcal{V}_1)$。于是我们有

$$L(\mathcal{V}_1) \mid L(\mathcal{V}_2) \iff L(\mathcal{V}_1) \mid TD_n \iff T^{-1}L(\mathcal{V}_1) \mid D_n \iff L(\mathcal{V}) \mid D_n,$$

其中第二个等价关系得益于引理 A.3。◀

B 可泵性证明细节

下面我们正式定义 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}_{\text{pump}}$ 的构造。

▶ 定义 *B.1.* 设 $V = (Q, q_0, T, F)$ 是一个定义在 Σ_n 上的 d 维 *Büchi* 向量加法系统。那么 $V = (Q, q_0, T, F)$ 是一个定义在 Σ_n 上的 $(d+n)$ 维 *Büchi* 向量加法系统，其转移按如下方式构造：$(q, \varepsilon, (\delta, \varphi(w))\ q') \in T$ 当且仅当 $(q, w, \delta, q') \in T$。

此外，$V_{\text{pump}} = (Q_{\text{pump}}, q_{\text{pump}0}, T_{\text{pump}}, F_{\text{pump}})$ 是一个定义在 Σ_n 上的 d 维 *Büchi* 向量加法系统，构造如下：

- $Q_{\text{pump}} = Q \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^{d+n}$，即 *KM(V)* 的状态为 $q_{\text{pump}0} = (q_0, 0) F_{\text{pump}} = F \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^{d+n}$，并且 $(q_{\text{pump}}, w, \delta, q'_{\text{pump}}) \in T_{\text{pump}}$ 当且仅当 *KM(V)* 中存在一条转移 $(q_{\text{pump}}, t, q'_{\text{pump}})$，其标记为 $t = (q, \varepsilon, (\delta, \varphi(w))\ q') \in T$。

我们将定理 3.7 的前两部分拆分为引理 B.2 和 B.3，并分别证明。第三部分随后由引理 3.6 得出，而引理 3.6 又由定理 3.5 得出。

▶**引理 B.2。** $L(V_{\text{pump}})$ 是可泵送的。

证明。考虑某个 $w \in L(V_{\text{pump}})$ 和某个 $k \in \mathbb{N}$。令 ρ 为 V 在 w 上的一条接受运行。根据 L_{pump} 的构造，KM(V) 中存在一条对应的运行 $\bar{\rho}$。令 $\Omega \subseteq [d+1, d+n]$ 为这样一组坐标：在 $\bar{\rho}$ 运行过程中，KM(V) 的状态最终会在这些坐标上携带 ω。那么在某个时刻，$\bar{\rho}$ 会经过一个扩展配置 $(q, \bar{\boldsymbol{m}}) \in Q \times \mathbb{N}_\omega^{d+n}$，其中 $\bar{\boldsymbol{m}}$ 中 Ω 内的所有坐标都是 ω。将 $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \bar{\rho}_1$ 分解，使得 $\bar{\rho}_0$ 到达 $(q, \bar{\boldsymbol{m}})$。令 $\rho = \rho_0 \rho_1$ 和 $w = w_0 w_1$ 分别为 ρ 和 w 对应的分解。那么 ρ_0 会在 V 中到达一个配置 $(q, \boldsymbol{m}) \in Q \times \mathbb{N}^d$。

令 $\ell = \max^{i \in [1,n]}\{0, -\varphi_i(w_0)\} + k$。根据 Karp-Miller 图的构造，存在一条运行 $\bar{\rho}'_0$ in V，它到达配置 $(q, \bar{\boldsymbol{m}}') \in \mathbb{N}^{d+n}$ such that $\bar{\boldsymbol{m}}'(i) \geq \boldsymbol{m}(i)$ for $i \in [1, d+n] \setminus \Omega$，且 $\bar{\boldsymbol{m}}'(i) > \boldsymbol{m}(i) + \ell$ for $i \in \Omega$。于是 $\bar{\rho}'_0$ 对应于 V 中的一条运行。它到达配置 $(q, \boldsymbol{m}')$，其中 $\boldsymbol{m}' \geq \boldsymbol{m}$，因此 $\rho'_0 \rho_1$ 是 V 的一条运行。它读取字 $w'_0 w_1 \in L_{\text{pump}}$，其中 w'_0 是 ρ'_0 读取的前缀。由于 w'_0 也由 V 中的 $\bar{\rho}'_0$ 读取，因此它是 D_n 中某个字的前缀，这由 V 的附加计数器所保证。

我们断言，现在有 $\varphi(w'_0) \geq \varphi(w_0)$，并且对于每个 $i \in [1, n]$，只要 w 曾变为负数，就有 $\varphi_i(w'_0) \geq \max\{\varphi_i(w_0), 0\} + k$。第一个条件由以下事实得出

：$\varphi_i(w_0') = \boldsymbol{m}'(d+i) \geq \boldsymbol{m}(d+i) = \varphi_i(w_0)$。对于第二个条件，注意，如果 w 曾在坐标 i 上变为负数，那么 $\bar{\rho}$ 必然会访问某个配置，其中坐标 i 上有一个 ω。特别地，我们有 $d+i \in \Omega$，因此 $\varphi_i(w_0') = \boldsymbol{m}'(d+i) \geq \boldsymbol{m}(d+i) + \ell = \varphi_i(w_0) + \max^{i\in[1,n]}\{0, -\varphi_i(w_0)\} + k \geq \max\{\varphi_i(w_0), 0\} + k$。◀

▶ **引理 B.3.** 存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $L(V_{\mathsf{pump}}) \subseteq L(V) \subseteq L(V_{\mathsf{pump}}) \cup P_k$。

证明。由构造可知，包含关系 $L(\mathrm{V}_{\mathsf{pump}}) \subseteq L(\mathrm{V})$ 显然。对于第二个包含关系，令 $k \in \mathbb{N}$ 为 KM(V) 中各状态所出现的最大数值。我们声称，此时 $L(\mathrm{V}) \subseteq P_k \cup L(\mathrm{V}_{\mathsf{pump}})$。设 $w \in L$ 由 V 中的一次运行 ρ 接受，并假设$w \notin P_{i,k}$对某个 $i \in [1,n]$成立。如果 u是 w的前缀，那么若对 u的每个前缀 v 都有$\varphi_i(u) < 0$ 且 $\varphi_i(v) \geq 0$，就称 $i \in [1,n]$ 在 u处交叉。注意，只要 i 在 u处交叉，就存在 u的某个前缀 v，使得 $\varphi_i(v) > k$：否则，w 就会属于 $P_{i,k}$。这意味着ρ 在 KM(V) 中有一条对应的运行：每当某个计数器在 $[d+1, d+n]$ 中降至零以下时，它此前必定高于 k，因此曾被设为 ω。因此，w 也被 KM(V) 接受，从而 $w \in L(V_{\mathsf{pump}})$。◀

C 基本分隔器的证明细节

引理 4.3 的证明。 首先，如果 $L_\pi(\mathcal{A})$ 为空，则条件 (i) 显然成立。因此，在下文中我们假设 $L_\pi(\mathcal{A}) \neq \emptyset$，特别地，轮廓 q_π所关联的终态 π 可从 $\mathcal{A}$ 的初始状态到达。

我们希望建立一个线性不等式系统，该系统有解 $\boldsymbol{x}$ 当且仅当存在某个 k 使得 $L_\pi(\mathcal{A}) \subseteq S_{\boldsymbol{x},k}$。因此，让我们讨论上述包含关系成立所必需的一些要求。这些要求将针对 π中的转移环提出，并且我们确保它们能够表示为线性不等式。

包含恰好 π 中各个转移的环 σ_π 必须对应于一个字 $v_\pi \in \Sigma_n^*$，其中包含$\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\pi)\rangle \leq -1$。否则，我们可以无限次重复 σ_π，并在其前面添加一段从 $\mathcal{A}$ 的初始状态通向 q_π 的任意前缀，从而得到一个违反 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 的要求 b.) 的字。$\mathcal{A}$ 中 π 的任意本原环 σ 都必须对应于一个字 v，其中包含 $\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v)\rangle \leq 0$。否则，我们像之前一样，从某个到达 q_π 的任意前缀开始无限次重复 σ_π，然后将环 σ 的 $k+1$ 次插入执行到 σ_π 的每个副本中。这样得到的字会违反 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 的要求 a.)，并且对于任意 k，我们都可以这样做。

现在，我们可以利用这些关于环的要求，为 $\boldsymbol{x}$ 构造一个线性不等式组$\boldsymbol{A}_\pi\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$。对于与字 $v_\pi \in \Sigma_n^*$ 对应的环 σ_π，我们添加不等式

$$x_1\varphi_1(v_\pi) + x_2\varphi_2(v_\pi) + \ldots + x_n\varphi_n(v_\pi) \leq -1,$$

对于 π 中每个由字 $v \in \Sigma_n^*$ 上的转移构成的本原环 σ，我们添加不等式

$$x_1\varphi_1(v) + x_2\varphi_2(v) + \ldots + x_n\varphi_n(v) \leq 0.$$

我们来说明，证明循环 σ_π 的具体选择不会影响系统 $\boldsymbol{A}_\pi\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 的可满足性。为此，我们说明，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$ 是该系统的有效解，当且仅当 (1) 所有本原环的 $\boldsymbol{x}$-加权平衡均不大于零，且 (2) 至少有一个本原环的 $\boldsymbol{x}$-加权平衡严格小于零。条件 (1) 显然等价于为每个本原环添加的不等式。

对于约束（2），假设不等式 $\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\pi)\rangle \leq -1$ 成立。现在注意，σ_π 的任何有效选择都是一个环，因此可以通过有限次将本原环嵌入彼此而构造出来。如果所有本原环的 $\boldsymbol{x}$加权平衡都非负，那么 σ_π 的 $\boldsymbol{x}$加权平衡就不可能为负。

24 布奇VASS中的正则可分性

对于另一个蕴含方向，假设约束（2）成立，并令具有负 $\boldsymbol{x}$加权平衡的本原环为 σ'。由于 σ_π 的任何有效选择都包含 π中的每个转移，其重复 $|\pi|$次所得的 $\sigma_\pi^{\downarrow}\pi$ 包含每个本原环作为一个（可能不连续的）子序列。现在，如果从 $\sigma_\pi^{\downarrow}\pi$中删除 σ' ，剩余的（可能不连通的）转移序列仍可组合成一组环，因为 σ' 是一个环。因此，这组环的 $\boldsymbol{x}$加权平衡之和等于各本原环的 $\boldsymbol{x}$加权平衡之和，故根据条件（1），其值至多为零。然后将 σ' 加回去，可知$\langle \boldsymbol{x}, \varphi($ $v_\pi^{\downarrow}\pi|)\rangle$ 为负，因此$\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\pi)\rangle$ 也为负。由于字母平衡只能取整数值，且按 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}$ 加权不会改变这一点，因此$\langle \boldsymbol{x}, \varphi(v_\pi)\rangle \leq -1$。

通过约束 (1) 和 (2) 对解 $\boldsymbol{x}$ 的刻画显然独立于 σ_π，这意味着后者的具体选择不会影响系统$\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$的可满足性。此外，对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^d$ 的限制并无实际意义，因为我们总能根据 $\mathbb{Q}^d$ 中的一个解计算出 $\mathbb{N}^d$中的一个解，具体说明如下。

对这个方程组应用 Farkas 引理（定理 4.1），我们要么得到一个合适的解向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^n$，要么得到一个向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^m$，满足 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \mathbf{0}^\top$ 和 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$，其中 m 是 $\boldsymbol{A}_\pi$ 的行数。

在第一种情况下，我们可以将 $\boldsymbol{x}$ 的各个分量乘以它们的分母的最小公倍数（记作 ℓ），从而得到合适的向量 $\ell \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \in \mathbb{N}^n$。此外，我们令 $k = |Q_\pi| \cdot h$，其中 $|Q_\pi| \supseteq\{q_\pi\}$ 是 A 中与 π 里的转移相邻的所有状态所组成的集合，而 h 是 A 的转移标签中出现的最长字的长度。由此我们可以证明 L_π(A)$\subseteq S_{\boldsymbol{x}',k}$：A 中的每个字 $w \in L_\pi$ 都可分解为 uv，其中 $v = v_0 v_1 v_2 \cdots$，使得 u 从 A 的初始状态导向 q_π，并且每个 v_j 都对应于 q_π 上的某个环 σ_j，该环至少包含一次 π 中的每个转移。于是，按照 $S_{x,k}$ 的要求，我们有 $\mathbf{h}\boldsymbol{x}', \varphi(v_j)\mathbf{i} = \ell \cdot \mathbf{h}\boldsymbol{x}, \varphi(v_j)\mathbf{i} < \ell \cdot 0 = 0$：每个环 σ_j 都可以从 σ_π开始构造；它对该值的贡献至多为 -1，再插入有限多个本原环，而这些环增加的值都至多为 0。此外，我们还需要证明，对于 v 的每个因子 f，都有 $\mathbf{h}\boldsymbol{x}', \varphi(f)\mathbf{i} \leq k$。为导出矛盾，假设至少存在一个 v 的因子 f，使得上述条件不成立。由于 f 满足 $\mathbf{h}\boldsymbol{x}', \varphi(f)\mathbf{i} > |Q_\pi| \cdot h$，且 h 是转移标签的最大长度，因此与 f 对应的转移序列长度必定大于 $|Q_\pi|$。于是，该序列会重复经过某个状态，因此必定包含一个本原环。然而，所有这类本原环对 $\mathbf{h}\boldsymbol{x}', \varphi(f)\mathbf{i}$ 的值的贡献都至多为 0，这意味着可以从 f 中删去与该环对应的字，同时仍满足上述要求。重复删除本原环，直到得到一个长度为 $|f'| \leq |Q_\pi| \cdot h$、且满足 $\mathbf{h}\boldsymbol{x}', \varphi(f')\mathbf{i} > |Q_\pi| \cdot h$ 的字 f'。这就产生了矛盾，因此不存在诸如此类的因子 f。

在另一种情形中，我们还将 $\boldsymbol{y}$ 乘以其各项的最小公倍数，记为 ℓ，从而得到 $\ell \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' \in \mathbb{N}^m$。此外，矩阵 $\boldsymbol{A}_\pi$ 的每一行本质上都包含其对应环的φ-值。条件 $\boldsymbol{y}'^\top \boldsymbol{A}_\pi = \ell \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_\pi \geq \ell \cdot \mathbf{0}^\top = \mathbf{0}^\top$ 于是可以看作是对环的选择，这些环的合并 φ-值均为 0 或更大。再者，条件 $\boldsymbol{y}'^\top \boldsymbol{b} = \ell \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < \ell \cdot 0 = 0$ 确保 σ_π 至少被选择一次，因为 $\boldsymbol{b}$ 的所有其他项均为 0，这意味着如果未选择 σ_π，我们将有 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = 0$。这意味着我们可以通过匹配的状态将所有选中的环合并为一个大环 σ'，这是可行的，因为 σ_π 访问了 Q_π中的所有状态。由于由 $\boldsymbol{y}$ 选择的所有环的合并 φ-值均为 0 或更大，因此 σ' 对应于一个字 w'，且 $\varphi(w')$ ≥ 0。最后， σ' 也按要求包含了 π 的所有转移，因为它包含环 σ_π。◀

关于定理 3.5 我们在 4 中提到，对于基本分隔器的有限并 $P_{i,\ k}$ 和 $S_{\boldsymbol{x},\ k}$，只需一个 k 值即可。这是因为我们有 $P_{i,\ k} \subseteq P_{i,\ k+1}$ 和

$S_{\boldsymbol{x},\,k} \subseteq S_{\boldsymbol{x},\,k+1}$ 对每个 $i \in [1,n]$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$。因此，只需证明以下内容：设 A 是一个 *Büchi* 自动机，满足 $L(A) = R \subseteq \Sigma_n^\omega$ 和 $R \cap D_n = \varnothing$。那么存在一个有限集 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ 和一个数 $k \in \mathbb{N}$，使得 $R \subseteq \bigcup_{i\in[1,n]} P_{i,\,k} \cup \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},\,k}$。

这里的 R 按照定理原始表述的含义是一个 分隔候选，因为它是 ω-正则的，且与 D_n 不相交。

定理 3.5 的证明。我们先对 A 应用定理 3.7，得到一个 Büchi 自动机 $\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}$，其语言是可泵送的，以及一个数 ℓ，使得 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \subseteq L(\mathrm{A}) \subseteq L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \cup P_\ell$。这样使用该定理是可行的，因为 Büchi 自动机可以看作零维 Büchi VASS。由于 $L(\mathrm{A}) \cap D_n = \emptyset$ 且 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \subseteq L(\mathrm{A})$，我们有 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \cap D_n = \emptyset$。现在只需证明基本分隔定理对 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$ 成立：若存在 X, k 使得 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \subseteq \bigcup_{i\in[1,n]} P_{i,k} \cup \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},k}$，那么 $L(\mathrm{A}) \subseteq L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \cup P_\ell \subseteq \bigcup_{i\in[1,n]} P_{i,o} \cup \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},o}$，其中 $o =$ 是 k 和 ℓ 的最大值。

现在考虑分解 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) = \bigcup_{\pi\in\Pi(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})} L_\pi(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$。如果我们能证明每个语言 $L_\pi(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$ 都包含于有限个基本分离器的并中，那么问题就解决了。接下来，固定 $\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}$ 的一个轮廓 π。

现在我们对 $\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}$ 和 π 应用引理 4.3。如果条件 (i) 成立，那么这已经得出 $\boldsymbol{x}$，k，使得 $L_\pi(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \subseteq S_{\boldsymbol{x},\,k}$，我们无需再考虑语言 $P_{i,\,k}$。

在另一种情况下，条件 (ii) 得出 $\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}$ 中的一个环 c'，它包含 π 中的所有转移，且其对应的字 w' 满足 $\varphi(w') \geq 0$。由于条件 (i) 不成立，我们知道 $L_\pi(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$ 非空，这意味着与 π 中的转移相邻的所有状态都能从 $\mathcal{A}$ 的初始状态到达，包括与 π 关联的终态 q_π。令 u' 为一个从 $\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}$ 的初始状态到达 q_π 的字。那么 $\tilde{w} = u'(w')^\omega \in L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$。

令 m 为 $\tilde{w}$ 的任意索引 i 和前缀对应的 φ_i 的最小值，形式化地说，即 $m = \min_{i\in[1,n],\, v\in\mathrm{prefix}(\tilde{w})} \varphi_i(v)$。由于 $\varphi(w') \geq 0$，我们知道 $m \in \mathbb{Z}$ 定义良好。此外，由于 $L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$ 是可泵送的，因此存在一个分解 $\tilde{w} = u_0 w_1$ 和一个字 $v_0 \in \Sigma_n^*$，使得 $v_0 w_1 \in L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}})$、$\varphi(v_0) \geq \varphi(u_0)$，并且对于所有满足存在一个 $v \in$ 前缀$(\tilde{w})$ 且 $\varphi_i \geq 0$ 的指标 i，都有 $\varphi_i(v_0) \geq \varphi_i(u_0) + |m|$。接着，在 $\tilde{w}$ 中用 v_0 替换 u_0，只会增大其各个前缀的 φ_i 值；事实上，根据 $|m|$ 的选取，所有低于 0 的这类值现在都升至 0 以上。这意味着 $v_0 w_1 \in L(\mathcal{A}_{\mathsf{pump}}) \cap D_n$，这与假设矛盾。◀

D 可判定性的证明细节

▶ **引理 3.6. </style}若 是可泵送的，则 当且仅当，其中 表示，**k 对于某个有限集 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ 以及某个 $k \in \mathbb{N}$。

证明。 “若”方向显然。反过来，设 $L \mid D_n$。根据定理 3.5，我们有 $L \subseteq \bigcup_{i\in[1,n]} P_{i,k} \cup \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},k}$ 对于某个有限集 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ 和 $k \in \mathbb{N}$。我们断言 $L \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},k}$，由此得到 $L \mid_{\mathsf{lim}} D_n$。事实上，给定 $u \in L$，可泵性保证存在一个字 $u' \in L$，使得$u' \sim u$ 且 $u' \notin P_{i,k}$ 对任意 $i \in [1,n]$均成立。由于 $u' \in L \subseteq P_k \cup \bigcup_{\boldsymbol{x}\in X} S_{\boldsymbol{x},k}$，我们得出 $u' \in S_{\boldsymbol{x},k}$。最后注意，字对 $S_{\boldsymbol{x},k}$ 的隶属关系不会因改变字的有限前缀而受到影响。因此，我们也有 $u \in S_{\boldsymbol{x},k}$。◀

▶ **引理 D.1.** 设 $\pi \in \Pi(V)$。若 $\boldsymbol{A}_\pi \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}^n$，则 $L_\pi(V) \subseteq S_{\boldsymbol{x},k}$ 对于某个 $k \in \mathbb{N}$。

证明。 我们将 KM($\mathcal{V}$) 视为 Büchi 自动机。于是，π 尤其是 KM($\mathcal{V}$) 的一个轮廓。此外，证明 π 是一个轮廓的环，在 KM($\mathcal{V}$) 作为 Büchi 自动机时，也是 π 的一个可接受环。因此，推论 4.4 推出 $L_\pi(\mathcal{V}) \subseteq L_\pi(\mathrm{KM}(\mathcal{V})) \subseteq S_{\boldsymbol{x},\,k}$ 对于某个$k \in \mathbb{N}$。

◀

E 一维 Büchi 向量加法系统的证明细节

E.1 定理6.1：PSPACE困难性

我们从一维向量加法系统有限词语言交集空性的直接归约开始。假设 $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$ 是带有简洁编码的计数器更新、并以终态接受的一维向量加法系统的有限词语言。判断交集 $L_1 \cap L_2$ 是否为空是 PSPACE 完全问题 [24]。我们构造 Büchi 向量加法系统，分别对应 $L_1\#^\omega$ 和 $L_2\#^\omega$，其中 # 是一个新字母。由于 L_1 和 L_2 是有限分支良结构转移系统的可覆盖语言，根据 [14, 定理 7]，我们知道 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ 当且仅当 $L_1 \mid L_2$。此外，引入新字母 # 后，很容易看出 $L_1 \mid L_2$ 当且仅当 $L_1\#^\omega \mid L_2\#^\omega$。

不相交语言的困难性 在上述 PSPACE 困难性证明中，可以注意到，语言 $L_1\#^\omega$ 和 $L_2\#^\omega$ 当且仅当它们不相交时才具有正则可分性。为了进一步凸显良结构转移系统语言的有限字情形（其中不相交性与可分离性一致 [14]）和无限字情形之间的差异，我们希望证明：即使承诺输入语言彼此不相交，问题仍然具有 PSPACE 困难性。注意，在这一承诺下，有限字情形中的可分离性变得平凡。

这里，我们直接从有界单计数器自动机中的配置可达性归约 ，该问题已在 [23] 中被证明是 PSPACE 困难的。

有界单计数器自动机 $B = (\mathcal{V}_B,\ b)$ 由一个一维向量加法系统 $\mathcal{V}_B$ 以及其计数器值的上界 $b \in \mathbb{N}$ 构成。这意味着，只有当转移满足向量加法系统的触发限制，且还会到达满足 $m \le b$ 的配置 $(q,\ m)$ 时，B 中的转移才可执行。这里，计数器值和上界 b 均以二进制编码。特别地，B 的大小等于底层向量加法系统的大小加上 $\log\ b$，配置 $(q,\ m)$ 的大小为 $\log\ m$。

现在我们要构造两个一维布奇向量加法系统$\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$,，使它们的语言总是不相交，但它们可被 ω-正则分离，当且仅当 $(q,\ m)$ 无法从 $(q_0,\ 0)$ 在$B = (\mathcal{V}_B,\ b)$ 中到达。令 T 为 B 的转移集合。我们使用 $\Sigma = T \cup \{\#\} \cup \Sigma_1$ 作为 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$的字母表。令 $\mathcal{V}_{D1}$ 为接受 D_1 的一维布奇向量加法系统，即 $\mathcal{V}_{D1}$ 由一个同时为初始状态和终态的状态构成，并带有两个自环 $\boldsymbol{e}_1|a_1$ 和 $-\boldsymbol{e}_1|\bar{a}_1$。此外，令$\mathcal{V}_S$ 为图 1（左）中的一维布奇向量加法系统，它接受语言 S，满足 $S \cap D_1 = \emptyset$ 但不满足 $S \not\parallel D_1$；我们在第 3 节中讨论过这一系统（参见定理3.2第一条陈述的证明）。

我们通过复制$\mathcal{V}_1$ 来开始构造：复制$\mathcal{V}_B$，将其中所有状态设为非终态，并使每条转移 $t \in T$ 都以其自身 t 为标签。然后，我们再添加$\mathcal{V}_{D1}$ 的一个副本，其中唯一的状态仍为终态。为了连接这两个副本，我们添加一条转移 $-m|\#$，从$\mathcal{V}_B$ 的状态 q 指向$\mathcal{V}_{D1}$的初始状态。

对于$\mathcal{V}_2$，我们也从复制$\mathcal{V}_B$ 开始，其中所有状态均为非终态，且转移都以其自身为标签；但我们还反转每个转移效果，将其从 $z \in \mathbb{Z}$ 改为 $-z$。然后，我们添加一个新的初始状态 q_0'，使其具有与$\mathcal{V}_B$的初始状态相同的出边转移，只是将这些转移原有的效果 z 改为 $b - z$。q_0' 的这些新转移以其原始副本 T为标签。此外，我们还添加$\mathcal{V}_S$ 的一个副本，其中 q_2 仍为终态。随后通过一条转移 $m - b|\#$将这两个副本连接起来，该转移从 q 指向$\mathcal{V}_S$的初始状态。如果$(q, m) = (q_0,0)$，我们还会添加一条转移 $0|\#$，从 q_0' 指向$\mathcal{V}_S$的初始状态。

现在令 R_1 为在 T 上、能够在 $\mathcal{V}_B$ 中覆盖 (q, m) 的所有转移序列集合，这些序列不一定遵守界限 b。形式化地说，若 ρ 在 $\mathcal{V}_B$ 中从 $(q_0,0)$ 到达 (q, m')，其中某个 $m' \in \mathbb{N}$ 满足 $m' \ge m$，则 $\rho \in R_1$。此外，令 R_2 为在遵守上界 b的情况下、在T 上将 q 的计数器值降至低于 m所需的所有转移序列集合，但不

一定遵守 VASS计数器的下界 0。形式化地说，若 ρ 在 B' 中从 $(q_0,0)$ 到达 (q,z')，其中某个 $z' \in \mathbb{Z}$ 满足 $z' \leq m$，则 $\rho \in R_2$；这里 $B' = (\mathcal{V}', b)$，而 $\mathcal{V}'$ 只是将 $\mathcal{V}$ 解释为一个 $\mathbb{Z}$-向量加法系统。现在我们要说明，存在一些语言 L_1, L_2，使得 $L(\mathcal{V}_1) = R_1 \# L_1$，且 $L(\mathcal{V}_2) = R_2 \# L_2$。

$L(\mathrm{V}_1) = R_1 \# L_1$ 很容易看出，因为 V_1 忠实地模拟 V_B，且只有在到达配置 (q,m) 或更大的配置时才能读取 #。对于 $L(\mathrm{V}_2) = R_2 \# L_2$，注意在读取 # 之前，$\mathrm{V}_2$ 实质上以 b 而非 0 为起点，模拟计数器值取反后的 V_B。由于 V 可以超过 b，这实质上模拟了在 B 中低于 0 的情形。只有当 q 中的计数器值至少为 $m - b$ 时才能读取 #，这对应于取反前至多为 m。现在我们来证明 $L(\mathrm{V}_1) \cap L(\mathrm{V}_2) = \emptyset$，并且进一步证明 $L(\mathrm{V}_1) \mid L(\mathrm{V}_2)$ 当且仅当 $(q_0, 0) \to (q, m)$ 在 B 中成立。

配置 (q,m) 在 B 中不可达，等价于 R_1 与 R_2 不相交。在这种情况下，$L(\mathrm{V}_1)$ 和 $L(\mathrm{V}_2)$ 也必须不相交，因为它们的词中位于 '#' 之前的前缀不可能相同。不过，它们是 ω-正则可分的：设 Q 为 B 的状态，则一个具有指数规模状态集 $Q \times \{0, \ldots, b\}$ 的 Büchi 自动机 A 可以模拟 B。为了使 A 接受所有前缀属于 R_1 的词，我们添加一个在所有输入字母上都有自环的终态；任何会使计数器值超过 b 的转移都可以到达该状态。现在，$L(\mathrm{V}_1) \subseteq L(A)$ 显然成立。由于不满足界限 b 的转移序列不可能是 R_2 中元素的前缀，因此 $L(A) \cap L(\mathrm{V}_2) = \varnothing$ 立即成立。因此，$L(A)$ 是 $L(\mathrm{V}_1)$ 与 $L(\mathrm{V}_2)$ 的 ω 正则分隔语言，这也意味着它们不相交。

如果 (q,m) 在 B 中可达，则存在一个有限转移序列 $\rho \in R_1 \cap R_2$。读取ρ后，分别会到达 V_1，中的 (q,m) 和 V_2 中的 $(q, b-m)$。因此，若紧接着读取 #，任一布奇向量加法系统的计数器值都将为 0。这意味着 $\rho\#D_1 \subseteq L(\mathrm{V}_1)$ 和 $\rho\#S \subseteq L(\mathrm{V}_1)$，因为在此前缀之后，任一向量加法系统的第二个分量都会得到忠实模拟。因此，对于 $\rho\#D_1$ 中的所有词，正则分隔语言 A 必须接受这些词；而对于 $\rho\#S$ 中的词，则不得接受。通过添加一个新的初始状态 q_{init} 到 A，并将原始 A 中经由 $\rho\#$ 可达的状态的所有出边转移添加到 q_{init}，我们便得到一个 ω-正则分隔语言，用来分隔 D_1 和 S。这与我们此前得出的结论矛盾：如定理 3.2 前半部分的证明所示，这些语言不能由 ω-正则分隔语言分隔。

还需证明，当 (q,m) 在 B 中可达时，$L(\mathcal{V}_1) \cap L(\mathcal{V}_2) = \emptyset$。对于 T 上的转移序列 ρ，我们知道，当且仅当 $\rho \in R_1 \cap R_2$ 时，ρ 到达 B 中的 (q,m)。因此，两个词 $w_1 \in L(\mathcal{V}_1)$ 和 $w_2 \in L(\mathcal{V}_2)$ 只有在 ρ 具有此性质时，才能在前缀 $\rho\#$ 上一致。然而，在这种情况下，对于某个 $w_1' \in D_1$，$w_1 = \rho\# w_1'$；对于某个 $w_2' \in S$，$w_2 = \rho\# w_2'$。由于 D_1 和 S 不相交，这就得到 $w_1 \neq w_2$。

E.2 命题 6.2 的证明

▶ **命题 6.2**。设 V 是一个 *Büchi* 向量加法系统，且 $L(V) \subseteq \Sigma_n^\omega$。则 $L(V) \not\parallel D_n$ 当且仅当 $\bar{}$*if*$\mathsf{KM}(V)$ 具有一个不可分离花。

证明。我们首先应用定理 3.7，得到 $\mathcal{V}_{\mathsf{pump}}$ 满足 $L(\mathcal{V}_{\mathsf{pump}}) \not\parallel D_n$ 当且仅当$L(\mathcal{V}) \not\parallel D_n$。回忆一下，$\mathcal{V}_{\mathsf{pump}}$ 是通过 $\mathcal{V}$ 与 $\mathsf{KM}(\mathcal{V})$的乘积构造的，这意味着$\bar{}$每个 $\mathcal{V}_{\mathsf{pump}}$ 的环也是 $\mathsf{KM}(\mathcal{V})$的环。

对于正向推论，我们得到 $\mathsf{KM}(\mathcal{V}_{\mathsf{pump}})$ 含有一个不可分离花。根据定理 5.3，它的三个环分别对应 $\mathcal{V}_{\mathsf{pump}}$ 的三个环，而这些环也会出现在$\bar{}\mathsf{KM}(\mathcal{V})$ 中，并且仍然满足不可分离花的要求。

对于“仅当”方向，注意到 $\mathsf{KM}(\mathcal{V}_{\mathsf{pump}})$ 本质上是 $\mathsf{KM}(\mathcal{V})$ 与 $\mathsf{KM}(\mathcal{V})$ 的乘积构造。此外，$\mathcal{V}$ 允许的任何转移序列也都被

$\mathcal{V}$允许，因为前者只是以增加更多计数器的形式添加了限制，并未移除任何计数器。因此，KM($\mathcal{V}$) 中的每个环（包括组成其不可分离花的那些环）也会作为一个环出现在 KM(λ_{pump}) 中。这意味着 KM(λ_{pump}) 也有一个不可分离花，由定理 5.3 可知 $L(\lambda_{\mathsf{pump}}) \not\parallel D_n$。◀

E.3 引理 6.4 的证明

▶ **引理 6.4**。给定一个带有二进制更新的1维 *Büchi* 向量加法系统 V_1,V_2，存在一个1维 *Büchi* 向量加法系统 V，使得 $L(V_1) \cap L(V_2) = \emptyset$ 当且仅当 $L(V) \cap D_1 = \emptyset$, $L(V_1) \mid L(V_2)$ 当且仅当 $L(V) \mid D_1$；并且我们可以在关于 $|V_1| + |V_2|$ 的多项式时间内，构造出这个2维 *Büchi* 向量加法系统 V（带有二进制更新）。

证明。回想一下，$\mathcal{V}$ 是由字母表 Σ_n 上的 Büchi 向量加法系统 $\mathcal{V}$ 构造而成的，方法是添加 n个额外计数器，并对每个转移 t 将其标签 $w \in \Sigma_n^*$ 替换为 ε，再向 t 添加 $\varphi(w)$ 对 n 个额外计数器产生的效果。具体定义见附录 B。为了证明引理 6.4，我们需要论证可以修改引理 3.4，使其直接构造 $\mathcal{V}$ 而非 $\mathcal{V}$，并且修改后的版本可在多项式时间内完成。

如果我们分析附录 A 中引理 3.4 的证明，就会发现该构造的时间复杂度是指数级的。这里的瓶颈是引理 A.2。不过，我们在引理 A.2 的证明中已经提到，如果能以某种方式压缩最终得到的指数长度转移标签，其相关复杂度就会从指数时间降至多项式时间。对此，合适的压缩方式是将指数长度的字符串 $w \in \Sigma_n^*$ 替换为它对字母平衡的影响 $\delta(w)$；这正是我们从 $\mathcal{V}$ 转到 $\mathcal{V}$ 时所做的。由于我们用二进制编码 $\delta(w)$，这实现了指数压缩，因此直接构造 $\mathcal{V}$ 的时间复杂度仅为多项式级，符合要求。

请注意，对于作为输入的两个一维 Büchi 向量加法系统，我们有 $n = 1$。不过，我们的证明表明，即使对于任意维度的 Büchi 向量加法系统 n，仍然可以在多项式时间内构造 $\mathcal{V}$。◀

E.4 命题 6.5 的证明

▶**命题 6.5**。对于二维向量加权自动机，受约束运行问题可在PSPACE内求解。

证明。我们证明，若存在受约束运行，则存在一种受约束运行，使得沿途所有计数器的取值都至多为指数级。为此，我们借助 [5] 关于线性路径方案的一个结果。

对于二维向量加法系统$\mathcal{V}$，一个线性路径方案（LPS）是形如 $S = \sigma_0\lambda_1\sigma_1 \cdots \lambda_n\sigma_n$的正则表达式。其字母表是$\mathcal{V}$的转移集合，其中每个因子 λ_i都对应于$\mathcal{V}$中的一个转移环。

每个 LPS S都会在 V 的配置上诱导一个可达关系 $\to_S$：当且仅当存在若干数 x_1、……、$x_n \in \mathbb{N}$，使得 $\sigma_0\lambda_1^{x_1}\sigma_1 \cdots \lambda_m^{x_n}\sigma_n$ 是 V 中从配置（q，x，y）到配置（q'，x'，y'）的一次运行时，才有（q，x，y）$\to_S$（q'，x'，y'）。在 [5, 定理 3.1], 中证明了：对于二维向量加权自动机 V 中任意两个状态 q、q'，都存在一个 LPS 集合 S，其中每个 LPS 的长度均为多项式级，使得对于 x、y、x'、$y' \in \mathbb{N}$，（q'，x'，y'）可从（q，x，y）到达，当且仅当对于 S 中某个 S，有（q，x，y）$\to_S$（q'，x'，y'）。

在 [5], 此基础上，可得到一个用于二维向量加法系统中配置可达性的 PSPACE 算法：如果存在一次运行能够到达某个配置，那么就存在一种形如 $\sigma_0\lambda_1^{x_1}\sigma_1 \cdots \lambda_n^{x_n}\sigma_n$的运行，其中某个线性路径方案 $\sigma_0\lambda_1\sigma_1 \cdots \lambda_n\sigma_n$ 的长度是多项式级的。现在，$\sigma_0\lambda_1^{x_1}\sigma_1 \cdots \lambda_n^{x_n}\sigma_n$ 是在两个给定配置之间的一次运行这一事实，可以用一组线性不等式表示

关于 $x_1, \ldots, x_n$。由于每个可解的多项式规模线性不等式组都有一个各条目至多为指数级的解，因此可以得到一次运行，使得所有计数器都至多为指数级。

我们只需稍微扩展一下 [5] 中的论证：首先，我们想要猜测一个线性不等式系统，其解满足 Presburger公式 ψ。为此，我们将 ψ 视为命题公式，并把每个原子公式当作一个命题。对于 Presburger算术，原子公式要么是等式 $t_1 = t_2$，要么是不等式$t_1 < t_2$，其中 t_1, t_2 是变量和/或常数 0，1 上的加法项。基于对 ψ的这种命题化视角，我们可以猜测其命题的一种赋值，并验证该赋值是否满足命题；这一过程可在多项式空间内完成。如果该赋值将形如 $t_1 = t_2$ 的原子公式设为假，就意味着 $t_1 < t_2$ 或 $t_2 < t_1$ 必须成立。类似地，如果将 $t_1 < t_2$ 设为假，那么 $t_1 = t_2$ 或 $t_2 < t_1$ 必须成立。在这两种情况下，我们只需从必须成立的两个原子公式中猜测一个。将这些猜测与被设为真的、未作改动的原子公式合在一起，就得到一个等式与不等式系统，其解满足 ψ。形式上，该系统由矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^{\ell \times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{Z}^{k \times m}$ 以及向量 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^{\ell}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}^{k}$ 构成，其元素均以二进制编码，使得$x \in \mathbb{N}^m$ 是一个解，当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$。事实上，对于我们对 Presburger 的定义，一元编码就足够了，因为例如数值为 3 的元素会来自变量 y对应的项 $y + y + y$，这意味着所有元素的大小都关于 ψ的规模呈多项式关系。不过，我们不要求使用一元编码，也可以使用二进制编码。

现在我们只需检查是否存在一个受约束运行 $(q_0, 0, 0) \xrightarrow{*} (q_1, x_1, y_1) \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} (q_m, x_m, y_m)$，其计数器值确实满足这些等式和不等式。当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} < \boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d}$ 时，情况如此，其中 $\boldsymbol{z} = (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m)$。如果存在这样的受约束运行，那么对于每个 $i \in [1, m]$，都存在一个 LPS，适用于部分 $(q_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}) \xrightarrow{*} (q_i, x_i, y_i)$，使得该运行符合这些 LPS 中的每一个。通过加入 (a) [5]，中确保所有计数器保持非负的线性不等式，以及 (b) 我们的线性不等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} < \boldsymbol{b}$ 和等式 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$，我们得到一个关于 LPS 中指数的新线性不等式系统（大小为多项式）。

通过 [50] 这类系统，其极小解的条目数至多呈指数级增长，从而得到一次运行，其中计数器值至多呈指数级增长。二进制编码意味着，这些解只占用多项式空间。更具体地说，这意味着我们可以在 PSPACE 中简单地猜测受约束运行中的配置（q_1、x_1、y_1）到（q_m、x_m、y_m），然后检查系统的等式和不等式是否对这些配置成立，即检查它们是否确实是该系统的解。至此，我们完成了对判定过程的描述。

最后需要说明的是，[50] 假设不等式的形式为 $t_1 \leq t_2$ 而不是$t_1 < t_2$。然而，由于我们要在 $\mathbb{N}^m$中寻找解，因此可以简单地将 $t_1 < t_2$ 表示为 $t_1 + 1 \leq t_2$，以规避这一问题。◀

F 正则可分性与交集

本节证明定理3.2的第二部分。为此，我们给出一类良结构转移系统：对于它们的 ω-语言，交集是可判定的，而正则可分性则不可判定。字母表为 Σ 的 d 维重置布奇向量加法系统是一个元组 $\mathsf{V} = (Q, q_0, T, F)$。它与布奇向量加法系统的唯一区别在于有限转移集合：除了添加一个向量外，还可以重置一个计数器，$T \subseteq Q \times (\mathbb{Z}^d \cup \{\mathrm{r}1, \ldots, \mathrm{r}_d\}) \times \Sigma^* \times Q$。配置的定义与布奇向量加法系统相同，但转移关系需要作相应调整。若存在一个转移 (q, x, w, q')，使得满足以下条件之一，则有 $(q, \boldsymbol{m}) \xrightarrow{w} (q', \boldsymbol{m}')$：(i) $x \in \mathbb{Z}^d$ 且 $\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + x$；或 (ii) 对某个 $i \in [1, d]$，$x = \mathrm{r}_i$，且对于 $j \in [1, d] \setminus \{i\}$，$\boldsymbol{m}'(j) = \boldsymbol{m}(j)$，并且 $\boldsymbol{m}'(i) = 0$。接受条件的定义与之前相同，语言（由无限字组成）$L(\mathsf{V})$ 也一样。

30 BüchiVASS 中的正则可分性

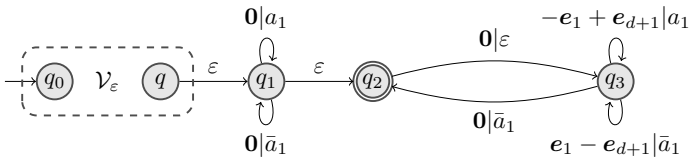


图 4 定理 F.2 证明中的弱 Büchi 重置 VASS $\mathcal{V}'$ 。

对于一般的布奇重置 VASS，空性和交集都是不可判定的 [37, 定理 10]。我们考虑该模型的一个轻微限制，使这些问题变得可判定。如果不存在从终态到重置转移的路径，则称布奇重置 VASS 是弱 的。特别地，接受运行只能执行有限次重置。注意，通常的$\mathcal{V}_1$ 和$\mathcal{V}_2$ 的乘积构造会得到一个用于 $L(\mathcal{V}_1) \cap L(\mathcal{V}_2)$ 的布奇重置 VASS，且该构造保留弱性。

▶定理 *F.1. </style}*对于弱 *Büchi* 重置 *VASS*，空性（因此交集）是可判定的。

在这里，可以使用标准技术判定空性。我们按通常方式对配置排序：如果 $q = q'$ 且 $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{m}'$，则有 $(q, \boldsymbol{m}) \leq (q', \boldsymbol{m}')$。首先可以观察到，对于任意 Büchi VASS V，所有能够作为无限接受运行起点的配置 $(q, \boldsymbol{m})$ 所构成的集合 $U(\mathrm{V}) \subseteq Q \times \mathbb{N}^d$ 向上闭合。此外，利用饱和过程，我们可以有效地计算出 $U(\mathrm{V})$ 的有限多个极小元素 $(q_1, \boldsymbol{m}_1) \ldots, (q_\ell, \boldsymbol{m}_\ell)$。详情见本节末尾的引理 F.3。接下来，对于弱 Büchi 重置 VASS V，我们进行如下操作。我们构造 Büchi VASS V′, ，它由 V 删除所有重置转移后得到。现在， $L(\mathrm{V})$ 非空，当且仅当 V 作为重置 VASS，能够覆盖 $U(\mathrm{V}')$ 中的任一配置 $(q_1, \boldsymbol{m}_1) \ldots, (q_\ell, \boldsymbol{m}_\ell)$。由于重置 VASS 中的可覆盖性是可判定的，因此也可以判定后者是否成立 [19, 25, 2]。

▶ **定理 F.2.** 对于字母表为 Σ_1 的弱 *B.* 重置 *VASS*，与 D_1 的正则可分性是不可判定的。

我们从重置 VASS 的库所有界性问题进行归约。重置 VASS 是一种没有输入词且没有终态的 Büchi 重置 VASS。对于 $k \in \mathbb{N}$，如果对每个可达配置 $(q, \boldsymbol{m})$，都有 $\boldsymbol{m}(1) \leq k$，则称重置 VASS $\mathcal{V}$ 是 k-位置有界。此外，若$\mathcal{V}$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 是 k-位置有界的，则称$\mathcal{V}$ 位置有界。于是，库所有界性问题询问给定的重置 VASS 是否位置有界。已知重置 VASS 的位置有界性问题（更一般地说，有界性问题）是不可判定的i [19, 定理 8] （更简单的证明见 [37, 定理 18]）。

给定一个 d 维重置 VASS $\mathcal{V}$，我们构造一个 $(d+1)$ 维弱 Büchi 重置 VASS $\mathcal{V}'$，满足

$$L(\mathcal{V}') = \{w \in S_{1,k} \mid k \in \mathbb{N},\ \mathcal{V} \text{ can reach some } (q, \mathbf{m}) \in Q \times \mathbb{N}^d \text{ with } \boldsymbol{m}(1) \geq k\}. \tag{2}$$

在描述 $\mathcal{V}'$, 之前，请注意， $L(\mathcal{V}')$ | D_1 当且仅当 $\mathcal{V}$ 位置有界时成立。若$\mathcal{V}$ 是 k-位置有界的，则 $L(\mathcal{V}')$ $\subseteq S_{1,\ k}$，因此 $L(\mathcal{V}')$ | D_1。另一方面，若$\mathcal{V}$ 不位置有界，则$L(\mathcal{V}') = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_{1,\ k}$。对于图1（左）中的 Büchi 向量加法系统，可以证明 $L(\mathcal{V}')$ $\not|$ D_1。

构造如图 4 所示。虚线框中包含 V_ε，它是通过将 V 的每个转移（p， $\boldsymbol{u}$， q）改为（p，（$\boldsymbol{u}$， $\mathbf{0}$） ε， q）得到的。在图中， q表示 V_ε的任意状态，也就是说，对于 V_ε中的每个状态 q，都有一个转移（q，$\mathbf{0}$，ε，q_1）。注意，在状态 q_1、q_2、q_3中，V' 的行为与图1（左）中的 Büchi 向量加法系统完全相同，只是额外的计数器保证，对于每个因子，从配置（q_1，（k， $\boldsymbol{u}$））出发，字母 a_i 上的平衡由 k 界定。因此，从（q_1，（k， $\boldsymbol{u}$））出发的接受语言恰好是$S_{1,\ k}$。这表明 V' 接受语言（2）。

▶ **引理 F.3.** 设 *V* 是一个 *Büchi* 向量加法系统。我们可以计算集合 $U(V)$，其中包含存在无限接受运行的最小配置。

证明。判定给定的 Büchi 向量加法系统是否存在接受运行 [21, 28] 是可判定的。我们将这一结果加强为：检查给定的 Büchi 向量加法系统 V 是否存在一条从某个向下闭配置集出发的接受运行。该向下闭集由有限个理想的并 I 表示，每个理想都由一个广义配置 $(q, m) \in Q \times (\mathbb{N} \cup \{\omega\})^d$ 表示。算法如下。我们根据 V 构造一个插桩 Büchi 向量加法系统 V^I，I 使其从一个构件开始运行 I，再从该构件转移到 V。这个构件会选取其中一个理想，比如 (q, m)，并将每个计数器递增 c，使其不超过 $m(c)$。注意，$m(c)$ 可能是 ω，此时我们可以为该计数器赋任意值。经过这一初始阶段后，V^I 转移到 V 的状态 q。构件中的状态不是接受状态，因此 V^I 最终会转移到 V，以获得一条无限接受运行。具体来说，V 中存在一条从 I 中某个配置出发的接受运行，当且仅当 V^I 存在一条接受运行。

借此，我们可以对标记集合 S 进行饱和处理，该集合最初为 $S = \emptyset$。我们反复检查：是否存在一个接受运行，其起始配置属于由理想集合 I 表示的向下闭配置集。起初，我们只需检查是否存在任意运行，$I = Q \times \{\omega^d\}$。如果不存在这样的运行，我们就返回 S。如果存在这样的运行，我们就可以重构一个配置 $(q, m) \in I$, $m \in \mathbb{N}^d$，借助它，$\mathcal{V}^I$ 从用于 I 的构件移动到 $\mathcal{V}$。这可以通过枚举来完成。我们将 (q, m) 加入 S，并通过减去新 S 的向上闭包，细化由 I 表示的向下闭集。这个差集可以有效计算，并会得到一个新的理想集合；我们据此重复检查是否存在接受运行。该过程会终止：集合 S 表示一个配置的向上闭集，而由于良拟序，每个这样的集合的无限序列最终都会稳定。当该集合稳定时，我们将不再找到接受运行，并返回。◀