Filippo Saatkamp[1]
filippo.saatkamp@gmail.com

arXiv:2301.11285v1 [physics.class-ph] 21 Jan 2023

以从时空到仿射空间的映射所定义的参考系重新表述狭义相对论与电磁学

[1]慕尼黑大学数学硕士生

摘要

本文的出发点是 [1] 中介绍的若干种参考系（简称参考系）定义之一：在经典力学中，参考系可以定义为一个三元组（E、Π、t），其中 E 是一个三维欧几里得空间，Π 将时空 M 映射到 E，而 t 将 M 映射到 $\mathbb{R}$。这个定义使我们能够用参考系而非坐标，对牛顿力学进行直观且不依赖坐标的表述 [1]。具体而言，它以一组参考系的公设取代了在 M 上设定一组坐标图（图册）的公设。随后，通过选取仿射坐标即可重新得到这些坐标图。

本文的主要目的是继续这项工作，并以参考系为基础重新表述狭义相对论和电磁学。此外，我们对参考系的定义作了一些修改：为了体现可以选择不同时间原点的可能性，我们将参考系定义为一个四元组——额外的一项是一个一维仿射空间 A，且 t 将 M 映射到 A。此外，单位作为正空间的元素纳入理论，由此我们得到一种几何化且显然不依赖单位的重新表述。

每个参考系都使我们能够将时空识别为一个四维乘积空间，并且我们可以推广可微流形的定义，使参考系构成一个图册。这样，牛顿力学与狭义相对论之间唯一的区别，就在于所假定的转移函数类型不同——仿射空间之间的伽利略变换或庞加莱变换。本文第二章借此着重阐明两者的共同特征与差异。例如，我们用数学术语定义速度互易性，并证明这两类变换都具有这一现象。本章最后讨论惯性系与加速系。

第三章中，我们将重点放在狭义相对论和电磁学的重新表述上，并特别强调协变性。我们将世界线引入为时空的特定子集，将世界线的固有时定义为世界线上的仿射结构；电磁学的重新表述则以相对于参考系的微分形式表示为基础。

致谢

衷心感谢 Valter Moretti 仔细审阅稿件并提出宝贵意见。更广泛地说，他的教学工作——尤其是 [1] ——给予了我极大的启发；我也感谢他多次详尽解答我的问题。

目录

1 参考　系 4
1.1 数学设定.4 1.2 参考系.6 1.3 广义流形与切丛.7

2 经典力学与狭义相对论 9
2.1 伽利略变换.9 2.2 洛伦兹变换与庞加莱变换.11 2.3 洛伦兹变换的表示.13 2.4 定向.16 2.5 世界线.16 2.6 向量变换.18 2.7 速度互易性.20 2.8 推动变换的解释.22 2.9 惯性系与加速系.22

3 特殊 相对论与电磁学 26
3.1 固有时.26 3.2 黎曼度量.27 3.3 四维向量.27 3.4 协变电磁学.29

第1章

参考系

1.1 数学设定

单位 属于正空间——这句话只是概括了普遍接受的观点 ed
axio单位 [2]:

定义 1。令 $\mathbb{R}^+$ 为严格正实数的集合。正空间是一个集合 P，配备两个运算 $+\colon\ P \times P \to P$和 $\mathbb{R}^+ \times P \to P$，并具有以下性质:

- $+$ 是结合的且交换的。
- 对于所有 $u \in P\colon\ 1u = u$。
- 对于所有 x、$y \in \mathbb{R}^+$ 和 $u \in P\colon\ (x \cdot y)u = x(yu)$，且$(x + y)u = xu + yu$。
- 对于所有 $x \in \mathbb{R}^+$ 和 $u,\ v \in P\colon\ x(u + v) = xu + xv$。
- 运算 $\mathbb{R}^+ \times P \to P$是群（$\mathbb{R}^+,\ \cdot$）在 P 上的左自由传递作用。

话虽如此，令 $\mathbb{T}$ 为与时间单位相关联的正空间。 $\mathbb{T}$ 可以扩展为一维定向实向量空间 V[1]:

定义 2. 设 P 为正空间，则其扩张由一个定向实向量空间 X[1] 和一个函数 $i\colon\ P \to X$ 构成，满足

- i 的像等于 X的正部分。
- [1] 对 i 的像的限制映射是一个正空间同态。

给定 P的两个扩张，它们的正部分之间存在显然的对应，而这一双射可扩张为唯一的向量空间同构。

长度单位是正空间 $\mathbb{L}$ 的元素，面积单位是其平方 $\mathbb{L}^2$的元素，定义如下:

[1]Let $f\colon$ 设 $A \to B$ 是某个函数，且 $f(A) \subset U \subset B$，那么显然，函数 $A \to U$ 称为一个限制映射 o f f.

定义 3. 设 P 是一个正空间，则其平方是一个有序对 $(Q, (\cdot)^2)$，由一个正空间 Q 和一个函数组成

$$P \ni l \mapsto l^2 \in Q$$

使得

$$(\lambda u)^2 = \lambda^2 u^2$$

对所有的 $u \in P$和 $\lambda > 0$均成立。注意，$(\cdot)^2 : P \to Q$是双射。因此，如果 Q'是 P的另一个平方，那么显然存在一个双射 $Q \to Q'$，而且它实际上是正空间的同构。

箭头是实向量空间 V^3的元素，内积是一个从 $V^3 \times V^3$到 W^1的函数，是 $\mathbb{L}^2$的扩张。由于 W^1是定向的，它具有自然的序，因此命题

$$\forall v \in V^3 : 0 \leq \langle v, v \rangle$$

是有意义的。相关范数的陪域不是正空间 $\mathbb{L}$，因为向量的长度可以等于零。因此，我们必须引入一个新概念：非负空间。非负空间包含加法的单位元，且其中的元素可以乘以非负实数。给定正空间的定义，非负空间的定义显而易见。于是，内积的陪域是 W^1的非负部分的平方根，定义如下：

定义 4. 设 X 是一个非负空间，则其平方根由一个非负空间Y及一个函数组成

$$X \ni x \mapsto \sqrt{x} \in Y$$

满足

$$\sqrt{\lambda x} = \sqrt{\lambda}\sqrt{x}$$

对所有 $x \in X$ 和 $\lambda \geq 0$均成立。回想一下，同一个正空间的两个平方可以通过正空间的自然同构来等同。类似的构造允许我们通过非负空间的同构，将同一个非负空间的两个平方根等同起来。

最后，我们考虑一个速度 c ——从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{L}$ 的正空间同态——以及满足以下条件的唯一内积 $V^1 \times V^1 \to W^1$

$$\forall u \in \mathbb{T} : \sqrt{\langle u, u \rangle} = cu.$$

定义 5. 考虑某个速度 $v \in L(V^1, V^3)$，则函数

$$\begin{aligned} \|v\| : \mathbb{T} &\to \mathbb{L} \\ u &\mapsto \|vu\| \end{aligned}$$

称为其速度。

注记 1. 在电磁学这一节中，我们采用一套固定的单位。因此，自然会想到一个问题：物理定律在单位变换下是否保持不变——也就是说，如果某个方程在一种特定的单位选择下成立，我们如何知道它在所有可能的单位选择下都成立？为了回答这个问题，我们先在一个清晰的数学框架中重新表述它：

一般而言，我们考虑一列正空间 $X_1, \ldots, X_n$（例如与国际量制基本量纲相关联的正空间），以及一个取值于实向量空间 V 的物理量，它是一个函数

$$Q : \prod_{i=1}^{n} X_i \to V$$

且具有明确定义的量纲，这意味着存在一列

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$$

使得

$$Q(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = {\lambda_1}^{\alpha_1} \cdots {\lambda_n}^{\alpha_n} Q(x_1, \ldots, x_n)$$

对于所有 x 以及正实数 λ_1、……、λ_n。

That 话虽如此，最初的问题可以改述如下：如果我们考虑两个物理量 n-

，

$$Q, Q' \colon \prod_{i=1}^{n} X_i \to V$$

那么，要使下述蕴含成立，充分条件是什么：

$$\exists x : Q(x_1, \ldots, x_n) = Q'(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \forall x : Q(x_1, \ldots, x_n) = Q'(x_1, \ldots, x_n)$$

显然，在实际中始终成立的一个充分条件是，Q 和 Q' 具有相同的量纲。

1.2 参考系

定义 6. 集合 M 上的一个参考系由以下数据组成：

- 一个仿射空间 A^1，其平移空间为 V^1。
- 一个仿射空间 A^3，其平移空间为 V^3。
- 一个函数 $t \colon M \to A^1$ 和一个函数 $\Pi \colon M \to A^3$，使得诱导函数 $F \colon M \to A^1 \times A^3$ 是双射。

定义 7. 假设我们已经固定了一个参考系、一个时间单位 e_0 和一个长度单位。那么对于每一种选择

- 一个时间原点 $0 \in A^1$,
- 一个空间原点 $O \in A^3$ 和
- 一个正交归一基 e，其正交性是相对于由长度单位诱导的实值内积而言的

这个双射

$$\begin{aligned} A^1 \times A^3 &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (t, P) &\mapsto (e^0(t-0), e(P-O)) \end{aligned}$$

称为正交坐标系。

注记 2. 在 M 上的 [3] 参考系是一个极大图册 $\mathcal{A}$，满足

$$\forall \phi, \phi' \in \mathcal{A} : \exists B \in \mathrm{O}(3) : \mathrm{d}(\phi' \circ \phi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

成立。这个定义与我们的定义兼容，具体来说：给定一个参考系、一个时间单位和一个长度单位，我们可以将 R 与所有正交坐标系复合，从而得到这样一个图册。反过来，假设给定了以下数据：

- 满足（1.1）的极大图册 $\mathcal{A}$ 。
- 一个仿射空间 A^1 ，其平移空间为 V^1。
- 一个仿射空间 A^3 ，其平移空间为 V^3。
- 一个时间单位和一个长度单位。

令 $\mathcal{O}$ 为所有正交归一坐标的集合，则我们可以很容易地构造一个函数 R： $M \to A^1 \times A^3$ ，使得

$$\mathcal{A} = \{\kappa \circ R : \kappa \in \mathcal{O}\} : \tag{1.2}$$

我们只需选取某个 $\kappa \in \mathcal{O}$ 和一个 $\phi \in \mathcal{A}$ ，并令 $R := \kappa^{-1} \circ \phi$。事实上，每个满足（1.2）的函数 R 显然都具有这种形式。

1.3 广义流形与切丛

考虑集合 M 上的一组参考系，使得对于每一对参考系， $F' \circ F^{-1}$ 都连续可微。注意，存在唯一一种拓扑，使得所有参考系都是同胚。引入切丛的一种方法是使用坐标来定义图册，但这实际上是绕了远路：只需对可微流形及其切丛的定义进行推广，使参考系构成广义流形的图册即可。

定义 8. 设给定一个拓扑空间 M 和一个正整数 n。

- 广义 n 维参考系（简称 n-参考系）是一个有序对 (A, F)，其中 A 是一个 n 维仿射空间，且 F: $M \to A$ 是一个同胚。[2]
- 设 $\mathcal{A}$ 是 M 上的 n-参考系集合。如果转移函数

$$F' \circ F^{-1} : A \to A'$$

对所有 F、 $F' \in \mathcal{A}$ 都是可微的，则 $(M, \mathcal{A})$ 称为 n 维可微空间。

注记 3. 设 M 为一个可微空间。我们要强调的是，并未假设转移函数的微分连续。如果它们连续，则称 M 为连续可微空间。

定义 9. 设 M 为一个 n 维可微空间。预切丛由以下数据组成：

- 一个集合 TM。
- 一个函数 $\pi : TM \to M$。

[2]更一般地说， F 可以是 M 的一个子集与 A的一个子集之间的双射，但这已足以满足我们的需要。根据带边界或不带边界的可微流形的通常定义，推广应当很直接。

• 对于每个 $p \in M$，在 T_pM 上有一个 n 维实向量空间结构：$= \pi^{-1}(\{p\})$（特别是，对于所有 $p \in M$，T_pM 都非空，即 π 是满射）。

定义 10. 设 $(M, \mathcal{A})$ 是一个可微空间。切丛是一个二元组 (TM, d)，其中TM 是一个预切丛，且 d 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的函数，并具有以下性质：

• 设 (F, A) 是 $\mathcal{A}$ 中的某个参考系，V 是 A 的平移空间，则 $\mathrm{d}F\colon TM \to A \times V$ 是双射，

$$\forall x \in A : \forall v \in V : \mathrm{d}F^{-1}(x, v) \in T_{F^{-1}(x)}M$$

并且对于所有 $p \in M$，显然的函数 $\mathrm{d}F_p\colon T_pM \to V$ 是向量空间同构。请注意，我们滥用了记号，用同一个字母表示参考系及其对应的双射，即 $F = (A, F)$。本文后续部分也会出现这种情况。

• 若 F 和 F' 是 $\mathcal{A}$ 中的两个参考系，则 $\mathrm{d}F' \circ \mathrm{d}F^{-1} = \mathrm{d}(F' \circ F^{-1})$。

注记 4. 设 $(M, \mathcal{A})$ 是一个连续可微空间。

• 我们可以在 TM 上考虑唯一的拓扑，使得对于所有 $F \in \mathcal{A}$，$\mathrm{d}F$ 都是一个同胚。于是，参考系的微分构成切丛的一个连续图册。此外，每个微分都是切丛的一个平凡化，因此我们得到一个向量丛。

• 切丛在自然同构意义下是唯一的：若 (TM', d') 是另一个切丛，则向量丛同构

$$\Phi := \mathrm{d}'F \circ \mathrm{d}F^{-1}\colon TM \to TM'$$

与 F 无关。

• 为证明切丛的存在性，我们先注意到预切丛的存在性：例如，对于每个 $p \in M$，我们可以选取一个 n 维实向量空间 T_pM，然后考虑它们的不交并。话虽如此，设 TM 是一个预切丛。对于每个 $p \in M$，我们可以选取一个参考标架 F，再选取一个向量空间同构 $\mathrm{d}F_p \in L(T_pM, V)$（其中 V 是与 F 相关联的仿射空间的平移空间），并令

$$\mathrm{d}F' := \mathrm{d}(F' \circ F^{-1})_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p$$

对所有 $F' \in \mathcal{A}$ 均成立。最终我们得到一个切丛 (TM, d)。

第 2 章

经典力学与狭义相对论

2.1 伽利略变换

鉴于我们对加速系的讨论，引入作为更大群的子群的伽利略群是很有用的。此外，伽利略变换的微分是保定向的（其含义将在下文定义），这一点将发挥重要作用，因此我们先给出一个技术性引理:

引理 1. 设 V^n 和 W^n 是两个实向量空间，并假设 $A \in L(V, W)$ 可逆。那么，基 $v_1 \ldots, v_n$ 和 $w_1 \ldots, w_n$ 具有相同的定向，当且仅当 $Av_1, \ldots, Av_n$ 和 $Aw_1, \ldots, Aw_n$ 具有相同的定向。这有两个推论:

- 函数 A 在定向集合之间定义了一个双射。
- 如果 $V = W$，那么 A 要么是保定向的，要么是反定向的。

证明。注意，如果 $e \in L(V, \mathbb{R}^n)$ 是与基 $e_1, \ldots, e_n$ 相关联的向量空间同构，那么 $e \circ A^{-1} \in L(V, \mathbb{R}^n)$ 就是与基 $Ae_1, \ldots, Ae_n$ 相关联的向量空间同构。也就是说，假设 e 和 e' 是 V的两个定向相同的基，即 $\det(e' \circ e^{-1}) > 0$。那么 $e \circ A^{-1}$ 和 $e' \circ A^{-1}$ 的定向也相同:

$$\det(e' \circ A^{-1} \circ (e \circ A^{-1})^{-1}) = \det(e' \circ e^{-1}) > 0.$$

□

定义 11。设 $F = (A^1, T, A^3, \Pi)$ 和 $F' = (B^1, T', B^3, \Pi')$ 是两个参考系，则当且仅当 $F' \circ F^{-1}$ 是一般运动学群的一个元素

- $T' = \phi \circ T$，其中 ϕ: $A^1 \to B^1$ 为仿射函数，且 $\mathrm{d}\phi = 1$。

- $\forall t \in A^1$ 该函数

$$\begin{aligned}\Sigma_t \colon A^3 &\to B^3\\ p &\mapsto (\Pi' \circ F^{-1})(t,p)\end{aligned}$$

是仿射的。

- 函数的像

$$\begin{aligned}R \colon A^1 &\to L(V^3, V^3)\\ t &\mapsto \mathrm{d}\Sigma_t\end{aligned}$$

是旋转群的子集（即 R_t 是保定向且正交的）。

定义 12. 设 $F = (A^1, T, A^3, \Pi)$ 和 $F' = (B^1, T', B^3, \Pi')$ 是两个参考系，则转移函数 $T := F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，当且仅当

- T 是一般运动学群的一个元素，并且
- $\forall p \in A^3$ 函数

$$\begin{aligned}A^1 &\to B^3\\ t &\mapsto (\Pi' \circ F^{-1})(t,p) = \Sigma_t(p)\end{aligned}$$

是仿射的，且其微分与 p 无关。

注记 5. 设 (V_1, V_2, W_1, W_2) 是同一域上的向量空间列表。那么每个

$$A \in L(V_1 \oplus V_2, W_1 \oplus W_2)$$

都可以与满足下述条件的唯一矩阵对应

$$\forall (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2 : A(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} v_1 + A_{12} v_2 \\ A_{21} v_1 + A_{22} v_2 \end{pmatrix}$$

两个线性算子的复合对应于矩阵的乘积。注意，$A_{ij} \in L(V_j, W_i)$。

引理 2. 设 F 和 F' 是两个参考系，则 $T := F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，当且仅当 T 是仿射的，且

$$\mathrm{d}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$$

对于某个旋转 $R \in L(V^3, V^3)$。

证明。假设转移函数 $F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，则很容易证明它具有上述性质。为证明反方向，我们首先证明定义 11 中的函数 $R\colon A^1 \to L(V^3, V^3)$ 是常数：给定某个 $v \in V^3$，我们可以选择 p, $q \in A^3$，使得 $v = q - p$，于是 $R_t v = \mathrm{d}(\Sigma_t)(q-p) = \Sigma_t(q) - \Sigma_t(p)$ 对所有 $t \in A^1$ 都成立。这意味着

$$A^1 \ni t \mapsto R_t v \in V^3$$

对每个 $v \in V^3$ 都是常数。话虽如此，在证明的其余部分中，令 R 为 $L(V^3, V^3)$ 中的一个旋转。

注意，存在一个 $v \in L(V^1, V^3)$，使得

$$\Sigma_{t+u}(p) = \Sigma_t(p) + vu$$

对所有 $t \in A^1, u \in V^1, p \in A^3$：根据假设，函数 $A^1 \ni t \mapsto \Sigma_t(p) =: p(t) \in B^3$ 是仿射的，且其微分 $v := \mathrm{d}p \in L(V^1, V^3)$ 与 p 无关。
话虽如此，考虑 $t \in A^1, u \in V^1, p \in A^3, x \in V^3$，则

$$(F' \circ F^{-1})(t+u, p+x) = (\phi(t+u), \Sigma_{t+u}(p+x)) = (F' \circ F^{-1})(t,p) + (u, vu + Rx)$$

这表明 $F' \circ F^{-1}$ 是仿射的，且其微分具有所需的形式。 □

注记 6. 根据我们的定义，伽利略变换的微分是保定向的。这使我们能够在第 2.4 节中将切丛的定向与 V^3 的定向等同起来；但更重要的是，这意味着在 2.6 中定义的向量变换是保定向的。

引理3. 考虑两个参考系 F 和 F'。固定某个时间和长度单位。设ϕ 和 ϕ' 是 F 和 F'的正交归一坐标。若与 ϕ 和 ϕ' 关联的基具有相同的定向，则 $F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，当且仅当

$$\mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$$

对于某个 $R \in$SO(3)。

证明。由以下事实可得：设 A 和 B 是两个仿射函数，则$B \circ A$ 是仿射的，并且

$$\mathrm{d}(B \circ A) = \mathrm{d}B \circ \mathrm{d}A.$$

此外，若 A 可逆，则 A^{-1} 是仿射的，且 $\mathrm{d}(A^{-1}) = (\mathrm{d}A)^{-1}$。现在关键在于认识到$\phi$ 和 ϕ' 是仿射的，并计算微分。 □

2.2 洛伦兹变换与庞加莱变换

定义 13. 考虑定义在 $V^1 \oplus V^3$ 上的双线性形式 η，其定义如下：

$$\forall v, w \in V^1 : \forall x, y \in V^3 : \eta \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \langle v, w \rangle - \langle x, y \rangle.$$

一个向量space 上的自同态 Λ，作用于 $V^1 \oplus V^3$，若保持 η，即

$$\forall u, u' \in V^1 \oplus V^3 : \eta(\Lambda u, \Lambda u') = \eta(u, u').$$

注记 7。当然，一个自同态保留 η 当且仅当它保留 $-\eta$。但度规号差并非任意选定：最重要的原因见注记 14；更具审美意味的原因是，在固有时的定义中，我们不需要考虑度规的绝对值。

引理4。设 Λ 是一个洛伦兹变换。注意， $\Lambda_{11} \in L(V^1, V^1)$可以视为一个实数：若 $A \in L(V^1, V^1)$且 m: $\mathbb{R} \times V^1 \to V^1$ 是与 V^1相关的数乘，那么存在唯一的 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $A = m(x,)$。话虽如此， $1 \leq |\Lambda_{11}|$。

证明。设 e_0 为一个时间单位，且 (e_1, e_2, e_3) 是 V^3 的一组基，使得

$$\forall i, j : \frac{\langle e_i, e_j \rangle}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \delta_{ij}.$$

于是我们得到 $V^1 \oplus V^3$ 的一组基 (e_0, e_1, e_2, e_3)。最后，我们通过以下方式定义 $\widehat{\eta}$: $V \to V^*$

$$\forall v, w \in V : \frac{\eta(v, w)}{\langle e_0, e_0 \rangle} =: (\widehat{\eta} v) w.$$

Then

$$1 = \frac{\eta(e_0, e_0)}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \frac{\eta(\widehat{\eta}^{-1} e^0, \widehat{\eta}^{-1} e^0)}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \frac{\eta(\Lambda^{-1} \widehat{\eta}^{-1} e^0, \Lambda^{-1} \widehat{\eta}^{-1} e^0)}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \frac{\eta(\widehat{\eta}^{-1} e^0 \Lambda, \widehat{\eta}^{-1} e^0 \Lambda)}{\langle e_0, e_0 \rangle}$$
$$= \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} e^0 \Lambda e_k e^0 \Lambda e_l \frac{\eta(\widehat{\eta}^{-1} e^k, \widehat{\eta}^{-1} e^l)}{\langle e_0, e_0 \rangle} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha$$

因此

$$\Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha \tag{2.1}$$

至此证明完毕。 □

定义 14。设 Λ 是一个洛伦兹变换。引理4表明， Λ_{11} 要么为正定，要么为负定。如果 Λ_{11} 为正定，则称 Λ 为保时向。如果 Λ 还保定向，则称 Λ 为正保时向。

定义 15。设 R 和 R' 是两个参考系，且 $T := R' \circ R^{-1}$ 是仿射的。如果 $\mathsf{d}T$ 是一个保时向洛伦兹变换，则称 T 为庞加莱变换。我们已经说明，在伽利略变换的定义中要求保定向是合理的。

引理 5。设 F 和 F' 为两个参考系。此外，固定一组自然单位，并设 ϕ 和 ϕ' 分别为 F和 F' 的正交归一坐标，使得与 V^3 相关联的基具有相同的定向。

- $F' \circ F^{-1}$ 是仿射的，当且仅当 $\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1}$ 是仿射的。
- 如果 $F' \circ F^{-1}$ 是仿射的，那么 $\mathsf{d}(F' \circ F^{-1})$ 是洛伦兹变换，当且仅当 $\mathsf{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1})$ 是洛伦兹变换。
- 假设 $F' \circ F^{-1}$ 是仿射的，且 $\mathsf{d}(F' \circ F^{-1})$ 是洛伦兹变换。如果与 ϕ 和 ϕ' 相关联的 V^3的基具有相同的定向，那么 $\mathsf{d}(F' \circ F^{-1})$ 是正保时向的，当且仅当 $\mathsf{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1})$ 是正保时向的。

证明。第一项的证明可参见引理3的证明。要证明第二项，可以先引入一些新术语：

□

定义16. 设 V是域 F上的某个向量空间。如果 A: $V \times V \to F$是双线性的，则称有序对(V, A)为双线性空间。

定义 17. 设 (V, A) 和 (W, B) 是同一域上的两个双线性空间。若 $T \in L(V, W)$ 满足

$$\forall u, v \in V : B(Tu, Tv) = A(u, v).$$

引理 6. 设 U、V、W 是同一域上的双线性空间。若 $A \in L(U, V)$ 和 $B \in L(V, W)$ 是积保持的，那么 $A^{-1} \in L(V, U)$ 和 $B \circ A \in L(U, W)$ 也都是积保持的。

证明. 证明留作练习。 □

引理 5 的证明. 现在证明很直接：由于坐标系是仿射的，且它们的微分是积保持的（关于闵可夫斯基度量），结论由最后一个引理得出：若 $\mathrm{d}(F' \circ F^{-1})$ 是洛伦兹变换，则

$$\mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1}) = \mathrm{d}(\phi') \circ \mathrm{d} \circ F' \circ F^{-1}) \circ (\mathrm{d}\phi)^{-1}$$

是洛伦兹变换；反过来，若 $\mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1})$ 是洛伦兹变换，则

$$\mathrm{d}(F' \circ F^{-1}) = (\mathrm{d}\phi')^{-1} \circ \mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1}) \circ \mathrm{d}\phi$$

是一个洛伦兹变换。

由于我们已经证明了第二项，第三项归结为以下事实：由于基 $\mathrm{d}\phi$ 和 $\mathrm{d}\phi'$ 具有相同的定向，因此 $\mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1})$ 的行列式为正，当且仅当 $\mathrm{d}(R' \circ R^{-1})$ 保定向。这很容易验证。 □

2.3 洛伦兹变换的表示

定义 18。我们在 $V^1 \oplus V^3$ 上定义如下内积:

$$\forall v, w \in V^1 : \forall x, y \in V^3 : \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} = \langle v, w \rangle + \langle x, y \rangle$$

若一个洛伦兹变换关于此内积是对称且正定的，则称其为洛伦兹推动。

引理 7。洛伦兹推动是正保时向的。

证明。考虑一个与引理4的证明中类似的基，则洛伦兹变换 Λ 是推动（正保时向）当且仅当矩阵 $(e^i \Lambda e_j)_{0 \le i,j \le 3}$ 是推动（正保时向），因此该命题归结为 [4]中的定理2。 □

定义19. 假设 $v \in L(V^1, V^3)$ 且 $\|v\| < c$。我们令

$$\gamma := \left[1 - \frac{\|v\|}{c} \frac{\|v\|}{c}\right]^{-1/2} \in [1, \infty[$$

并通过以下方式定义 $J \in L(V^3, V^1)$

$$\forall x \in V^3 : Jx = \frac{\langle vu, x\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

其中 u 是 V^1 的一组基（但 J 不依赖于 u 的选取）。最后，令 $P \in L(V^3, V^3)$ 为 V^3 在 v 的像上的投影。于是

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma J \\ \gamma v & I + (\gamma - 1)P \end{pmatrix} =: \Lambda(v)$$

可以验证这是一个洛伦兹推动。

推论1. 设 Λ 是一个正保时向洛伦兹变换，则存在唯一的旋转 $R \in L(V^3, V^3)$ 和唯一的 $v \in L(V^1, V^3)$，满足 $\|v\| < c$，使得

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \Lambda(v).$$

类似地，存在唯一的旋转 R' 和唯一的 $v' \in L(V^1, V^3)$，满足 $\|v'\| < c$，使得

$$\Lambda(v') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \Lambda.$$

事实上，$R = R'$ 且 $v' = R \circ v$。

证明. 这是以下两个定理的直接推论： □

定理1. 设 Λ 是一个洛伦兹推动，则存在唯一的 $v \in L(V^1, V^3)$，使得 $\|v\| < c$ 且 $\Lambda = \Lambda(v)$。

证明. 考虑集合 $X := \{v \in L(V^1, V^3) : \|v\| < c\}$，并令

$$Y \subset L(V^1 \oplus V^3, V^1 \oplus V^3)$$

为所有推动构成的集合。可以验证

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma J \\ \gamma v & I + (\gamma - 1)P \end{pmatrix} \in Y$$

对于所有 $v \in X$ 均成立，因此我们要证明函数 $\Lambda\colon X \to Y$ 是双射。为此，我们考虑 $V^1 \oplus V^3$ 的一组基 e，类似于引理4的证明中所用的基，并证明 Λ 是双射函数的复合：

- 考虑双射函数

$$A\colon L(V^1, V^3) \to \mathbb{R}^3$$
$$v \mapsto \sum_{i=1}^{3} (e^i \circ v)(e_0)$$

~我们有 $A(X) = B(0, 1)$，因此得到一个双射 $A\colon X \to B(0, 1)$。

- 该函数

$$\begin{aligned} B\colon B(0,1) &\to \mathbb{R}^3 \\ v &\mapsto \frac{v}{\sqrt{1-v^t v}} \end{aligned}$$

是双射（该函数

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 &\to B(0,1) \\ B &\mapsto \frac{B}{\sqrt{1+B^t B}} \end{aligned}$$

是其逆函数。）

- 令 $Z \subset \mathbb{R}^{4\times 4}$ 为所有推动的集合，则

$$\begin{aligned} C\colon \mathbb{R}^3 &\to Z \\ B &\mapsto \left[\begin{array}{c|c} \gamma & B^t \\ \hline B & I + \frac{BB^t}{1+\gamma} \end{array}\right] \end{aligned}$$

其中 $\gamma(B) := \sqrt{1+B^t B}$ 是一个双射函数（证明见 [4]）。

- 该函数

$$\begin{aligned} D\colon \mathbb{R}^{4\times 4} &\to L(V^1 \oplus V^3, V^1 \oplus V^3) \\ A &\mapsto e^{-1} \circ A \circ e \end{aligned}$$

$\tilde{}$是双射，且 $D(Z) = Y$，因此我们可以考虑双射 $D\colon\ Z \to Y$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$可以验证，$\Lambda = D \circ C \circ B \circ A$。 □

众所周知，$\mathbb{R}^4$ 上的每个洛伦兹变换都可以分解为一个推动和一个空间旋转（例如参见 [5]）。此外，[4] 中指出，这种分解实际上就是极分解。其优点在于，极分解定理同样可以应用于定义 13 中的洛伦兹变换：

定理 2. 假设 $A \in L(V^1 \oplus V^3,\ V^1 \oplus V^3)$ 是可逆的。

- 存在唯一的一对（Λ，Ω），满足：$A = \Lambda\Omega$，并且 – Λ 是对称且正定的 – Ω 关于定义 18 中的内积是正交的。

- 存在唯一的一对（Λ'，Ω'），满足：$A = \Lambda'\Omega'$，并且 – Λ' 是对称且正定的 – Ω' 关于定义 18 中的内积是正交的。

- $\Omega = \Omega'$ 和 $\Lambda' = \Omega\Lambda\Omega^\dagger$

- 设 A 是一个洛伦兹变换，那么 Λ 也是洛伦兹变换，因此是一个推动。由于洛伦兹变换构成一个群（ $V^1 \oplus V^3$上向量空间自同构群的一个子群），这意味着 $\Omega = \Lambda^{-1}A$ 是一个洛伦兹变换。因此，

$$\Lambda' = \Omega\Lambda\Omega^{-1}$$

  也是一个洛伦兹变换。

- 现在假设 A 是一个正保时向洛伦兹变换。由于正保时向变换构成洛伦兹群的一个子群，上一条表明 Ω 是一个正保时向洛伦兹变换。再结合 Ω 是正交的这一事实，可知存在一个旋转 $R \in L(V^3, V^3)$，使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \Omega.$$

证明。前三条是有限维情形下极分解定理的特例。详见 [6] ，其中有全面的讨论。我们可以像证明引理 7 那样进行证明，这样，我们关于 Λ 是一个洛伦兹变换的断言就归结为 [4]中的定理 2。 □

2.4 定向

考虑集合 M 上的一组参考系，其所有转移函数都是庞加莱变换（伽利略变换）。那么， M 上存在唯一的拓扑，使得所有参考系都是同胚；而 [7] 中的命题 15.9 告诉我们，切丛恰有两种连续定向。此外， V^3 的定向与 M的连续定向之间存在一个自然的双射：

假设我们已经选定了 V^3的一个定向。由于 V^1 是定向的，该定向确定了 $V^1 \oplus V^3$的一个定向。此外，如果 F是某个参考系，那么向量空间同构

$$\mathrm{d}F_p \in L(T_pM, V^1 \oplus V^3)$$

使我们能够为所有 $p \in M$ 指定 T_pM 的一个定向（见引理 1）。该指定与 F 无关，并且等于 M的两个连续定向之一。

2.5 世界线

我们首先概述本节的主要结果，并重点介绍狭义相对论与牛顿力学之间的差异：

考虑集合 M 上的参考系 F，以及 M 的子集 W。我们的目标是定义 W 相对于 F 是世界线的含义，以便证明以下结果：如果 W 相对于 F 是世界线，且 F' 是另一个参考系，那么 W 相对于 F' 也是世界线。当然，恰当的定义取决于对参考系之间关系的假设。在狭义相对论中，自然的要求是世界线相对于 F 的速度不超过光速，并且我们将证明这一要求具有协变性（即该理论与实验数据相符）。在较简单的伽利略情形中，则不要求这一点。

定义20（狭义相对论中的世界线）。设 W 是 M 的子集， $i\colon\ W\to M$ 为包含映射， F 是一个参考系。假设 $t\colon\ M\to A^1$ 和 $\Pi\colon\ M\to A^3$ 是与 F 相关联的两个投影。若满足以下条件，则称 W 相对于 F 是一条世界线:

- t在 W 上的限制 $M\to A^1$ 是单射,
- 其像是一个区间 $I\subset A^1$,
- 函数
$$P\coloneqq \Pi\circ i\circ t^{-1}\colon I\to A^3$$
可微，且 $\|v\|\leq c$ 满足 $v\colon =\mathrm{d}P\colon\ I\to L\left(V^1,V^3\right)$ 。

定理 3. 若 $W\subset M$ 相对于参考系 F是一条世界线，则 W 相对于每个参考系都是一条世界线。

证明。设 $W\subset M$ 相对于 F是一条世界线。我们要证明 W 相对于 F'也是一条世界线。证明分为两部分：第一部分，我们证明投影 t' 在 W上的限制 $M\to F^1$ 是单射，且其像是一个区间。第二部分，我们证明 $\|\mathrm{d}P'<c\|$。

第一部分：令 $t\colon\ W\to I\subset A^1$ 为显然的双射。只需证明 $t'\circ t^{-1}$ 严格递增。为此，考虑引理4的证明中所用的基 e 。只需证明

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\coloneqq\frac{\mathrm{d}(t'\circ t^{-1})e_0}{e_0}>0$$

（左边显然与 e无关）。首先，我们注意到 $t'\circ t^{-1}=\Pi\circ T\circ X$ ，其中 $X\colon\ I\to A^1\times A^3$ 是世界线相对于 F的表示,

$$T\coloneqq F'\circ F^{-1}\colon A^1\times A^3\to B^1\times B^3$$

且 $\Pi\colon\ B^1\times B^3\to B^1$ 是显然的投影。因此，若 $\Lambda\coloneqq\mathrm{d}T$，则:

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\Pi\circ T\circ X)e_0}{e_0}=(e^0\circ\Lambda\circ\mathrm{d}X)e_0=e^0\Lambda\sum\nolimits_{\alpha=0}^{3}e^\alpha(\mathrm{d}Xe_0)e_\alpha$$
$$=e^0\Lambda e_0+e^0\Lambda\sum\nolimits_{\alpha=1}^{3}e^\alpha v(e_0)e_\alpha=e^0\Lambda e_0+\sum\nolimits_{\alpha=1}^{3}e^\alpha v(e_0)e^0\Lambda e_\alpha$$

注意到 $0<e^0\Lambda e_0$ ，因为 Λ 是保时向的，所以只需证明

$$\left|\sum\nolimits_{\alpha=1}^{3}e^\alpha v(e_0)e^0\Lambda e_\alpha\right|<e^0\Lambda e_0.$$

即可完成证明。(2.1)意味着

$$\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{3}\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i}<e^0\Lambda e_0$$

而速度的条件为

$$\sqrt{\sum\nolimits_{\alpha=1}^{3}e^\alpha ve_0}=\frac{\|ve_0\|}{u}=\frac{\|ve_0\|}{ce_0}=\frac{\|v\|}{c}<1$$

现在，利用柯西-施瓦茨不等式即可得到所需结果：

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{3} e^{\alpha} v(e_0) e^0 \Lambda e_\alpha\right| \leq \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} e^{\alpha} v(e_0) e^{\alpha} v(e_0)} \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} e^0 \Lambda e_\alpha e^0 \Lambda e_\alpha}$$
$$\leq \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} e^0 \Lambda e_\alpha e^0 \Lambda e_\alpha} < e^0 \Lambda e_0$$

第 2 部分：关键在于认识到 $\|v\| < c$ 和

$$0 < \frac{\langle e_0, e_0\rangle - \langle \mathrm{d}Pe_0, \mathrm{d}Pe_0\rangle}{\langle e_0, e_0\rangle} = \frac{\eta(\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0)}{\langle e_0, e_0\rangle}$$

是等价的。考虑显然的函数 $t\colon I' \to I$，则

$$X' = T \circ X \circ t$$

因此根据链式法则

$$\frac{\eta(\mathrm{d}X'e_0, \mathrm{d}X'e_0)}{\langle e_0, e_0\rangle} = \left[\frac{\eta(\mathrm{d}T\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}T\mathrm{d}Xe_0)}{\langle e_0, e_0\rangle} \circ t\right] \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \left[\frac{\eta(\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0)}{\langle e_0, e_0\rangle} \circ t\right] \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} > 0.$$

□

注记 8. 在牛顿力学中，我们不要求世界线的速度不超过光速，也就是说，我们只需删去定义20中的最后一项。这样，定理 3 的证明类似，但要简单得多：我们只需证明 $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t > 0$，而根据伽利略变换的定义可知 $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t \equiv 1$。

推论2. . 设 F 是集合 M上的一个参考系，则每个 $P \in A^3$ 都可以视为一个常函数 $P\colon A^1 \to A^3$，从而视为一条世界线 $P \subset M$（在 F 下，图像$P\colon A^1 \to A^3$ 的原像）。这在狭义相对论和牛顿力学中都成立。

证明。由定理 3 可直接得出此结论。 □

2.6 向量的变换

定理4。设 F和 F'是两个参考系，且 $F' \circ F^{-1}$是伽利略变换或庞加莱变换。回顾推论2： F中的每个点都对应一条世界线。

1. F 中的每个点相对于 F'都具有恒定速度。此外，所有点的速度都相同。这个速度称为 F 相对于 F' 的速度，记作 $v(F|F')$。由此可以定义一个函数

$$\Phi\colon A^3 \times A^3 \to V^3$$

其中， $\Phi(P, Q)$是从 P指向 Q、位于 F'中的向量（与时间无关）。

2. 如果 $P, Q, X, Y \in A^3$和 $Q - P = Y - X$，那么

$$\Phi(P, Q) = \Phi(X, Y)$$

因此，我们可以定义一个函数 $T(F \to F')\colon V^3 \to V^3$。

3. 如果 $F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，即

$$\mathrm{d}(F' \circ F^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

对于某个旋转 $R \in L(V^3, V^3)$ 和 $v \in L(V^1, V^3)$，则

$$T(F \to F') = R.$$

4. 如果 $F' \circ F^{-1}$ 是庞加莱变换，即

$$\mathrm{d}(F' \circ F^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma J \\ \gamma v & I + (\gamma - 1)P \end{pmatrix}$$

（见推论1），则

$$T(F \to F') = R + (\gamma - 1)(R \circ P) - \gamma(R \circ v \circ J).$$

5. 在这两种情况下，$v(F|F') = Rv$ 且 $v(F'|F) = -v$。

6. 以上各项表明，T 是一个保定向向量空间同构，即每个基都映射为具有相同定向的另一个基。这是以下要求的结果：庞加莱变换（伽利略变换）的微分是一个保定向向量空间同构。

证明。

记号：

- 给定 $P \in A^3$，该函数也记作 P。
$$A^1 \ni t \mapsto (t, P) \in A^1 \times A^3$$
- 给定 $x \in V^3$，该函数也记作 x。
$$V^1 \ni t \mapsto (t, x) \in V^1 \times V^3$$
- $T := F' \circ F^{-1}$：$A^1 \times A^3 \to B^1 \times B^3$
- Π^1：$B^1 \times B^3 \to B^1$ 和 Π^3：$B^1 \times B^3 \to B^3$ 是典范投影。

1.

设 $P \in A^3$，则

$$P' := (\Pi^3 \circ T \circ P) \circ (\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1} : B^1 \to B^3$$

其在 F' 中的轨迹。由于仿射函数的复合仍为仿射函数，且仿射函数的逆函数也是仿射函数，因此 P' 是一个仿射函数。这已经表明，P 在 F' 中具有恒定速度。现在我们证明每个点都具有相同的速度：

考虑

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L(V^1, V^1 \oplus V^3),$$

那么 $\mathrm{d}(P') = A$ 因此

$$\mathrm{d}(P') = \underbrace{\mathrm{d}\Pi^3 \circ \mathrm{d}T \circ A}_{=\gamma Rv} \circ (\underbrace{\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ A}_{=\gamma})^{-1} = R \circ v =: v(F|F') \in L(V^1, V^3).$$

2. 和 4.（3. 类似）

选择 $P, Q \in A^3$ 使得 $Q - P = x \in V^3$。我们的目标是证明

$$\forall t \in B^1 : Q(t) - P(t) = Rx + (\gamma - 1)(R \circ P)x - \gamma(R \circ v \circ J)x.$$

首先，注意到

$$(\Pi^3 \circ T \circ Q) \circ (\Pi^1 \circ T \circ Q)^{-1} - (\Pi^3 \circ T \circ P) \circ (\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1} = (\mathrm{d}\Pi \circ \mathrm{d}T) \begin{pmatrix} (\Pi^1 \circ T \circ Q)^{-1} - (\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1} \\ Q - P \end{pmatrix}$$

现在我们来证明

$$\forall t \in B^1 : (\Pi^1 \circ T \circ Q)^{-1}(t) - (\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1}(t) = -Jx$$

因为这就完成了证明:

选择一个原点 $O \in M$，并令

$$\begin{array}{cc} F\colon A^1 \to V^1 & \widetilde{F}\colon B^1 \to V^1 \\ G\colon A^3 \to V^3 & \widetilde{G}\colon B^3 \to V^3 \\ H\colon A^1 \times A^3 \to V^1 \times V^3 & \widetilde{H}\colon B^1 \times B^3 \to V^1 \times V^3 \end{array}$$

为所诱导的双射。注意

$$(\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1} = F^{-1} \circ (\underbrace{\widetilde{F} \circ \Pi^1 \circ \widetilde{H}^{-1}}_{=\mathrm{d}\Pi^1} \circ \underbrace{\widetilde{H} \circ T \circ H^{-1}}_{\mathrm{d}T} \circ \underbrace{H \circ P \circ F^{-1}}_{=P-O})^{-1} \circ \widetilde{F}$$

因此对所有 $P \in A^3$ 设定 $\vec{P} := P - O$，可得

$$(\Pi^1 \circ T \circ Q)^{-1} - (\Pi^1 \circ T \circ P)^{-1} = F^{-1} \circ (\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ \vec{Q})^{-1} \circ \widetilde{F} - F^{-1} \circ (\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ \vec{P})^{-1} \circ \widetilde{F} = (\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ \vec{Q})^{-1} \circ \widetilde{F} - (\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ \vec{P})^{-1} \circ \widetilde{F}.$$

由于

$$\forall x \in V^3 : \forall t \in V^1 : (\mathrm{d}\Pi^1 \circ \mathrm{d}T \circ x)^{-1}(t) = \frac{t}{\gamma} - Jx$$

我们最终得到了所需的结果。 □

2.7 速度互易性

定理 5。

- 如果 F 和 F' 测量彼此的速度，那么测得的速度相等:

$$\|v(F|F')\| = \|v(F'|F)\|$$

- 如果 F' 中的观察者用箭头表示 $v(F|F')$的方向，那么从 F中的观察者看来，该箭头与$v(F'|F)$方向相反。换句话说，存在一个正实数 α，使得

$$T(F \to F') \circ v(F'|F) = -\alpha v(F|F') \in L(V^1, V^3).$$

- 如果 $F' \circ F^{-1}$ 是伽利略变换，那么 $\alpha = 1$，如果 $F' \circ F^{-1}$ 是庞加莱变换，那么

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}$$

（这是长度收缩的一种表现。）

证明。我们证明洛伦兹情形，因为伽利略情形类似且更简单：

定理4告诉我们，$v(F|F') = Rv$和 $v(F'|F) = -v$，因此 $\|v(F|F')\| = \|v(F'|F)\|$。由于 $P \circ v = v$ 和

$$v \circ J \circ v = \frac{\|v\|}{c}\frac{\|v\|}{c}v \in L(V^1, V^1)$$

我们得到了所需的结果：

$$T(F \to F') \circ v(F'|F) = -T(F \to F') \circ v = -(R \circ v) - (\gamma - 1)(R \circ P \circ v) + \gamma(R \circ v \circ J \circ v)$$
$$= -\gamma Rv + \gamma RvJv = -\gamma\left[1 - \frac{\|v\|}{c}\frac{\|v\|}{c}\right]Rv = -\frac{Rv}{\gamma} = -\frac{v(F|F')}{\gamma}$$

□

注记 9. 在牛顿力学中，我们可以假设对于每对参考系，$\mathsf{d}(F' \circ F^{-1})$ 都是一次伽利略推动——原因在于伽利略推动构成一个群。然后这些方程

$$T(F \to F') \circ v(F'|F) = -v(F|F')$$
$$v(P|F') = T(F \to F') \circ v(P|F) + v(F|F')$$

（其中 P 是一条世界线）可简化为

$$v(F'|F) = -v(F|F')$$
$$v(P|F') = v(P|F) + v(F|F')$$

因为对于每一对参考系，$T(F \to F') = 1$。但这一假设并没有物理上的依据。事实上，这一假设可能会造成误导：于是我们会产生这样的印象，认为速度互易性意味着

$$\forall F, F' : v(F'|F) = -v(F|F'),$$

但是，由于洛伦兹推动不构成一个群，因此在狭义相对论的背景下，速度互易性似乎并不成立。

2.8 对推动的解释

定理 6. 设 F和 F'是 M上的两个参考系，使得 $F' \circ F^{-1}$是一个伽利略变换， ϕ和 ϕ'分别是 F和 F'的正交归一坐标。若 e和 e'是与 ϕ和 ϕ'相关联的 V^3的基，则其微分为

$$\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

当且仅当 F观察者发现两个基相同时，才是推动，即

$$\forall i : T(F' \to F) e_i{}' = e_i.$$

证明。设 $A \in L(V^3, V^3)$是由 $\forall i \colon e_i{}' = Ae_i$定义的同构，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\phi' \circ F' \circ F^{-1} \circ \phi^{-1}) = \mathrm{d}\phi' \circ \mathrm{d}(F' \circ F^{-1}) \circ \mathrm{d}\phi^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \circ A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R \circ v & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e \circ A^{-1} \circ R \circ v & e \circ A^{-1} \circ R \circ e^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

且 $e \circ A^{-1} \circ R \circ e^{-1} = 1 \Leftrightarrow A = R \Leftrightarrow A = T(F' \to F)$。 □

注 10。若 $F' \circ F^{-1}$ 是庞加莱变换，则上一个定理不成立：如果 $\mathrm{d}(\phi' \circ R' \circ R^{-1} \circ \phi^{-1})$ 恰好是推动，那么在 F中的观察者不会认为 F' 的基与 F 的基相同：令 $\kappa := \phi \circ R$，那么这归结为这样一个事实：向量空间同构

$$T(\kappa \to \kappa') \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

以显而易见的方式定义，却不会将标准基映射到标准基。

2.9 惯性系和加速系

相对于另一个参考系加速的参考系

设 F 是集合 M 上的一个参考系，且 $P \subset M$ 是相对于 F 的一条世界线。自然会想知道是否存在唯一的参考系 F'（例如，在仿射变换 T 下唯一，其中

$$\mathrm{d}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

对 V^3 上的某个旋转 R 成立），使得

1. P 是相对于 F' 的一条世界线， P 在 F' 中静止；
并且 2. F' 中的所有点都是相对于 F 的世界线。

我们考虑两种简单情形：

- 如果相对于 F， P 具有恒定速度，且 P 的速度严格小于 c，那么至少有两种数学上的选择：我们可以将 F 与适当的伽利略变换或庞加莱变换复合，从而得到一个相对于 F甚至具有匀速的参考系。

- 假设 P 在 F中做匀速圆周运动。我们直观地预期可以找到：1. 一个参考系 F'，使得 F' 中的所有点都以相同的角速度[1]绕同一根轴旋转；以及 2. 一个参考系 F''，使得 F''中的所有点相对于 F具有相同的速度（即 P的速度）。事实上，我们可以将 F 与一般运动学群中的适当变换复合，以构造这样的参考系。

总之，一般运动学群是伽利略群的自然扩张，使我们能够在牛顿力学中考虑加速系：如果两个参考系之间的转移函数属于一般运动学群、但不属于伽利略群，就可以定义这两个参考系彼此相对加速。不过，通常所说的加速系是相对于惯性系加速的，而我们尚未引入惯性系。严格来说，本章其余部分只适用于牛顿力学，因为我们还没有洛伦兹群的类似扩张。

速度和加速度的变换

设 F 和 F' 是集合 M 上的两个参考系，且其转移函数属于一般运动学群。下文采用定义 11中的记号。我们假设 ϕ 在 A^1 上是恒等映射，即 $A^1 = B^1$ 且 $T = T'$。（无论如何，ϕ 的微分在 V^1 上都是恒等映射，因此这种推广——如果确有必要——是显而易见的。）

话虽如此，设 $w \subset M$ 是相对于 F的世界线，且 P是相对于 F的位置：$I \to A^3$。我们假设 P 二阶可微，也就是说，速度 v：$I \to L(V^1, V^3)$ 和加速度 a：$I \to Q(V^1, V^3)$ 存在。请注意，w 也是相对于 F'的世界线，而 $P' = \Sigma P$是相对于 F'的位置。我们作出以下两个技术假设：

- R 和 R^{-1} 关于算子范数均可微。

对于每个 $O \in A^3$，函数 ΣO：$A^1 \to B^3$ 都是二阶可微。

在这种情况下，P' 最终可证明是二阶可微的，下面我们确定v 与 v' 之间以及 a 与 a'之间的关系。为此，我们考虑以下函数

$$\dot{\Sigma}\colon A^1 \times A^3 \to L(V^1, V^3)$$

and

$$\ddot{\Sigma}\colon A^1 \times A^3 \to Q(V^1, V^3)$$

通过要求 $\dot{\Sigma O} = \mathrm{d}(\Sigma O)$ 和 $\ddot{\Sigma O} = \mathrm{d}(\dot{\Sigma O})$ 来定义（即 $\dot{\Sigma O}$ 和 $\ddot{\Sigma O}$ 分别是 O 相对于 F'的速度和加速度）。话虽如此，对 $P' = \Sigma P$ 应用乘积法则，首先得到

$$v' = Rv + \dot{\Sigma} P. \tag{2.2}$$

为了后续推导，先引入 $B := \dot{R}R^{-1}$ 对 (2.2) 求导可得

$$a' = Ra + 2\dot{R}v + \ddot{\Sigma} P = Ra + 2BRv + \ddot{\Sigma} P. \tag{2.3}$$

选择一个原点使我们能够进一步分解 (2.2) 和 (2.3) 的右端：设 $O \in A^3$ 并令集合 $x := P - O$，则有 $\Sigma P = \Sigma O + Rx$，因此根据乘积法则：

$$v' = Rv + BRx + \dot{\Sigma} O \tag{2.4}$$

$$a' = Ra + 2BRv + BBRx + \dot{B}Rx \tag{2.5}$$

[1]请注意，F' 相对于 F 的速度没有上界：随着我们远离旋转轴，各点的速度趋于无穷大。

最后，我们使用以下引理引入 F 相对于 F' 的角速度，并将这些方程改写为更常见的形式。

引理 8. 设 A^1 是一个仿射空间，其平移空间为 V^1，且

$$U\colon A^1 \to L(V^3, V^3)$$

有一个函数满足以下性质：

- U 的像是正交群的子集。
- U 和 U^{-1} 都是可微的。

设 $\dot{U}$ 是 U 的微分，即 $\dot{U} = \mathrm{d}U\colon A^1 \times V^1 \to L(V^3, V^3)$，则 $\dot{U}U^{-1}$ 是反对称的。因此，如果我们确定 V^3 的定向和一个长度单位，则存在唯一的

$$\omega\colon A^1 \times V^1 \to V^3$$

使得

$$\dot{U}U^{-1}v = \omega \times v$$

对于所有函数 $v\colon\ A^1 \to V^3$。

证明。设 v 和 w 是定义在 A^1上的两个可微向量值函数，则

$$\langle v, w\rangle = \langle Uv, Uw\rangle$$

因此根据乘积法则

$$\langle \mathrm{d}v, w\rangle + \langle v, \mathrm{d}w\rangle = \mathrm{d}\langle v, w\rangle = \mathrm{d}\langle Uv, Uw\rangle = \langle \dot{U}v + U\mathrm{d}v, Uw\rangle + \langle Uv, \dot{U}w + U\mathrm{d}w\rangle$$
$$= \langle \dot{U}v, Uw\rangle + \langle U\mathrm{d}v, Uw\rangle + \langle Uv, \dot{U}w\rangle + \langle Uv, U\mathrm{d}w\rangle$$

由于 U 是正交的，这等价于

$$0 = \langle \dot{U}v, Uw\rangle + \langle Uv, \dot{U}w\rangle.$$

由于 U可逆，且 $U^{-1}\colon\ A^1 \to L(V^3, V^3)$ 可微（ U^{-1}的微分等于$U^{-1}\dot{U}U^{-1}$），我们可以考虑可微函数 $U^{-1}v$和 $U^{-1}w$，从而得到

$$0 = \langle \dot{U}U^{-1}v, w\rangle + \langle v, \dot{U}U^{-1}w\rangle.$$

□

函数

$$\omega = \omega(F|F')\colon A^1 \to L(V^1, V^3)$$

通过最后一个引理与 B 相关联的量称为 F 相对于 F' 的角速度。我们用它改写（2.4）和（2.5）：

$$v' = Rv + \omega \times Rx + \dot{\Sigma}O \tag{2.6}$$
$$a' = Ra + 2\omega \times Rv + \omega \times (\omega \times Rx) + \dot{\omega} \times Rx + \ddot{\Sigma}O \tag{2.7}$$

牛顿力学中的惯性系

为了定义惯性系，我们在集合 M 上固定一组参考系，使得所有转移函数都是一般运动学群的元素。由于伽利略群是其子群，我们可以通过如下定义引入一个等价关系：当且仅当两个参考系之间的转移函数是伽利略变换时，这两个参考系等价。

现在，牛顿第一定律的目的在于定义惯性系，即一个特定的等价类：

粗略地说，牛顿力学中讨论的物理定律只在伽利略变换下保持不变，因此可以将惯性系的集合精确定义为这些定律成立的等价类。我们用一个例子来阐明这一思想，并说明我们的表述如何与牛顿第一定律和第二定律原本以力为基础的表述相衔接：

首先，我们假定给定了一个有限的世界线集合。[2] 接下来，我们假定存在一个参考系，使得可以为这些世界线指定与时间无关的质量，从而这些世界线相对于该参考系的表示构成一个常微分方程的解，这个方程称为牛顿力学的 n 体问题。这样的参考系称为惯性系。由于 (2.7) 在伽利略变换下化为 $a' = Ra$ ，其等价类中的所有参考系也都是惯性系，并且质量与代表元无关。此外，(2.7) 表明我们无法找到另一个含有惯性系的等价类，也就是说，惯性系恰好构成一个等价类。

如果我们固定一个参考系，那么就可以为每条世界线赋予两个力：实际的力——质量乘以加速度——以及由常微分方程预测的力。当参考系为惯性系时，这两个力相等。如果我们将牛顿第一定律和第二定律中提到的力理解为由常微分方程预测的力，那么这些定律不过是在刻画惯性系（并且与我们的定义一致）：

> 1. 每个物体都保持静止状态，或沿直线做匀速运动，除非受到施加于其上的力而被迫改变这种状态。2. 物体运动的变化与施加于其上的力成正比；变化方向与施加该力的直线方向一致。

[2]由于转移函数属于一般运动学群，因此不涉及参考系而讨论世界线是有意义的

第 3 章

狭义相对论与电磁学

从现在起，我们考虑定义在集合 M 上的一组参考系，使得所有转移函数都是庞加莱变换。

3.1 固有时

注释 11。设 A^1 是与某个参考系 R 相关联的仿射空间。由于平移空间 V^1 是定向的， A^1 显然具有全序。此外，给定 x、$y \in A^1$，且满足 $x < y$，我们可以考虑区间 $I := [x, y]$ 及其序拓扑 T。设 Σ 为 Borel σ-代数（即包含 T 的最小 σ-代数），那么存在唯一的局部有限向量值测度μ: $\Sigma \to V^1$，使得对于所有满足 $p \leq q$ 的 p、 $q \in I$，均有 $\mu([p, q]) = q - p$。如果 ϕ: $I \to \mathbb{R}$ 连续，那么 ϕ 有界（因为 (I, T) 是紧空间）。因此， $\phi \in \mathcal{L}^1(I, \Sigma, \mu)$，并且

$$\int_x^y \phi \in V^1$$

是其积分的记法。

定义 21。设 $W \subset M$ 为一条世界线， R 为一个参考系，而 t: $M \to A^1$ 为与 R 相关联的投影。根据我们对世界线的定义， W 在 t 下的像是一个区间$I \subset A^1$，且 t: $W \to I$ 是双射。因此， W 继承了一种与 R 无关的序，因为庞加莱变换的微分是保时向的。话虽如此，与一条世界线相关联的固有时是函数

$$\begin{aligned} W \times W &\to V^1 \\ (x, y) &\mapsto y - x \end{aligned}$$

定义如下：设 $x < y$，且令 e_0 为 V^1 的一组基。则积分

$$y - x \coloneqq \int_{t(x)}^{t(y)} \sqrt{\frac{\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0}{\langle e_0, e_0 \rangle}}$$

注释 11 中定义的内容与 e_0 和 R 无关。如果 $y \leq x$，则 $y - x \coloneqq -(x - y)$。

证明。具体而言，以下计算涉及两个测度空间（I, Σ, μ）和（I', Σ', μ'）。此外，我们在此采用一种记号上的简化，将显然的双射 $t\colon W \to I$ and$t\colon I' \to I$ 视为双射。如定理 3 证明的第二部分所示，我们有

$$\sqrt{\frac{\mathrm{d}X'e_0, \mathrm{d}X'e_0}{\langle e_0, e_0\rangle}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0}{\langle e_0, e_0\rangle} \circ t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

因此，证明归结为一次变量替换：

$$\int_{t'(x)}^{t'(y)} \sqrt{\frac{\mathrm{d}X'e_0, \mathrm{d}X'e_0}{\langle e_0, e_0\rangle}} = \int_{t'(x)}^{t'(y)} \sqrt{\frac{\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0}{\langle e_0, e_0\rangle} \circ t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \int_{t(x)}^{t(y)} \sqrt{\frac{\mathrm{d}Xe_0, \mathrm{d}Xe_0}{\langle e_0, e_0\rangle}}$$

□

3.2 黎曼度量

Let F和 R是 M上的两个参考系，并考虑洛伦兹变换 $\Lambda \coloneqq \mathrm{d}($$R \circ F^-$ [1]).
此外 还假设 $p \in M$和 $v, w \in T_pM$。那么

$$\eta(\mathrm{d}R_p v, \mathrm{d}R_p w) = \eta(\Lambda \mathrm{d}F_p v, \Lambda \mathrm{d}F_p w) = \eta(\mathrm{d}F_p v, \mathrm{d}F_p w)$$

因此

$$\eta_p(v, w) \coloneqq \eta(\mathrm{d}F_p v, \mathrm{d}F_p w)$$

不依赖于 F。

3.3 四维向量

定义 22。设 $W \subset M$ 是一条世界线， $i\colon W \to M$ 是显然的包含映射，且 F 是一个参考系。注意，固有时使我们能够对从 W 到某个仿射空间的函数求导。

- 对所有 $p \in W$，线性算子

  $$U_p \coloneqq (\mathrm{d}F_p)^{-1} \circ \mathrm{d}(F \circ i)_p \in L(V^1, T_pM)$$

  is 称为 p 处的四维速度；根据我们的定义，它显然与参考系无关
  of 切丛/根据链式法则。

- 对于所有 $p \in W$ 二次函数

  $$\begin{aligned} A_p\colon V^1 &\to T_pM \\ u &\mapsto (\mathrm{d}F_p)^{-1}\mathrm{d}(\mathrm{d}(F \circ i)u)_p u \end{aligned}$$

  称为 p处的四加速度。由于所有转移函数都是仿射的， A_p 与 F无关：如果 R是另一个参考系，那么转移函数 $R \circ F^{-1}$的微分是常数，因此

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}(R \circ i)u) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(R \circ F^{-1} \circ F \circ i)u) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(R \circ F^{-1})\mathrm{d}(F \circ i)u) = \mathrm{d}(R \circ F^{-1})\mathrm{d}(\mathrm{d}(F \circ i)u).$$

• 此外，如果将质量 m 与 W关联起来，那么 $f \coloneqq mA$ 称为四维力。

定义 23. 假设给定一条世界线 W、一个质量 m 和一个参考系 F。此外，令 $\boldsymbol{X}\colon I \to A^3$ 为相对于 F 的轨迹。那么其微分

$$\boldsymbol{V} \coloneqq \mathrm{d}\boldsymbol{X}\colon I \to L(V^1, V^3)$$

称为相对于 F 的速度，并且

$$\gamma \coloneqq \left[1 - \frac{\|\boldsymbol{V}\|}{c}\frac{\|\boldsymbol{V}\|}{c}\right]^{-1/2} \colon I \to [1, \infty[$$

称为洛伦兹因子。此外，

$$\boldsymbol{P} \coloneqq \gamma m \boldsymbol{V}\colon I \to L(V^1, V^3)$$

称为相对于 F 的动量，并且

$$\boldsymbol{F} \coloneqq \mathrm{d}\boldsymbol{P}\colon I \to Q(V^1, V^3)$$

称为相对于 F的力。

引理 9. 假设给定一条世界线 W、一个质量和一个参考系 F。此外，令$t\colon M \to A^1$为与 F相关的投影。根据世界线的定义，我们得到一个双射函数 $t\colon W \to I$，其映射到某个区间 $I \subset A^1$。也就是说，相对于 F的四维速度和四维力可表示如下：令 u 为 V^1的一组基，则

$$\mathrm{d}F \circ Uu \circ t^{-1} = \gamma(u, \boldsymbol{V}u) \tag{3.1}$$

and

$$\mathrm{d}F \circ fu \circ t^{-1} = \gamma(u\frac{\langle \boldsymbol{F}u, \boldsymbol{V}u\rangle}{\langle u, u\rangle}, \boldsymbol{F}u) \tag{3.2}$$

其中截面 $Uu\colon\ W \to TM$和 $fu\colon\ W \to TM$以显然的方式定义。

证明。我们使用以下两个事实：

• 令 $\tau\colon = t^{-1}\colon\ I \to W$。根据我们对固有时的定义和微积分基本定理，有 $\mathsf{d}\tau/\mathsf{d}t = 1/\gamma$。因此，根据反函数法则，$\mathsf{d}t/\mathsf{d}\tau = \gamma \circ t$。

• 设 $X\colon\ I \to A^1 \times A^3$是相对于 F的四维位置，则 $X = F \circ i \circ \tau$。

现在，(3.1) 的证明显而易见：

$$\mathrm{d}F \circ Uu \circ \tau = \mathrm{d}F \circ (\mathrm{d}F)^{-1} \circ \mathrm{d}(F \circ i)u \circ \tau = \mathrm{d}(F \circ i)u \circ \tau = \mathrm{d}(F \circ i \circ \tau \circ t)u \circ \tau$$
$$= \mathrm{d}(X \circ t)u \circ \tau = (\mathrm{d}X)u\frac{(\mathrm{d}t)u}{u} \circ \tau = (\mathrm{d}X)u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \circ \tau = \gamma(\mathrm{d}X)u = \gamma(u, \boldsymbol{V}u)$$

接下来，我们要证明 (3.2)。令 $\boldsymbol{U}\colon = \gamma\mathsf{d}X$，则上面的方程意味着

$$\mathsf{d}F \circ mAu \circ \tau = \mathsf{d}F \circ (\mathsf{d}F)^{-1} \circ m\mathsf{d}(\mathsf{d}(F \circ i)u)u \circ \tau = m\mathsf{d}(\mathsf{d}(F \circ i)u)u \circ \tau$$
$$= m\mathsf{d}(\mathsf{d}(F \circ i)u \circ \tau \circ t)u \circ \tau = \mathsf{d}(m\boldsymbol{U}u \circ t)u \circ \tau = \gamma\mathsf{d}(m\boldsymbol{U}u)u.$$

此外

$$\mathrm{d}(m\boldsymbol{U}u)u = \mathrm{d}(\gamma mu, \gamma m\boldsymbol{V}u)u = (\mathrm{d}(\gamma mu)u, \mathrm{d}(\gamma m\boldsymbol{V}u)u) = (\mathrm{d}(\gamma mu)u, \boldsymbol{F}u).$$

集合 $x \coloneqq \mathsf{d}(\gamma mu)u\colon I \to V^1$，那么接下来只需证明

$$\gamma\frac{\langle \boldsymbol{F}u, \boldsymbol{V}u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = x.$$

注意

$$\eta(\boldsymbol{U}u, \boldsymbol{U}u) = \frac{\langle u, u\rangle - \langle \boldsymbol{V}u, \boldsymbol{V}u\rangle}{1 - \frac{\langle \boldsymbol{V}u, \boldsymbol{V}u\rangle}{\langle u, u\rangle}} = \langle u, u\rangle$$

即，函数 $\eta(\boldsymbol{U}u, \boldsymbol{U}u)\colon I \to W^1$为常数。根据乘积法则

$$0 = \eta(\mathrm{d}(m\boldsymbol{U}u)u, \boldsymbol{U}u) = \langle x, \gamma u\rangle - \langle \gamma\boldsymbol{F}u, \gamma\boldsymbol{V}u\rangle$$

或者等价地，$\langle x, u\rangle = \gamma\langle \boldsymbol{F}u, \boldsymbol{V}u\rangle$。这便得到了所需结果：

$$x = \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = \gamma\frac{\langle \boldsymbol{F}u, \boldsymbol{V}u\rangle}{\langle u, u\rangle}u$$

□

3.4 协变电磁学

我们开始重新表述经典电磁学。 [8] 中的阐述一直是重要的启发。

从现在起，我们假设已固定一组单位，所有物理量均相对于这些单位定义。例如，对于每个 $p \in M$，度规

$$\eta_p\colon T_pM \times T_pM \to W^1$$

都可以视为一个物理量

$$\widehat{\eta}_p\colon \mathbb{L} \to L(T_pM, T_pM^*)$$

，因为每个长度单位都定义了一个面积单位，因而也定义了 W^1 的一个基。关于物理量的精确定义以及理论在单位变换下的不变性的讨论，参见注记 1。

定义 24。设 n 为一个整数，$0 < n < 4$ 和 $p \in M$。给定一个参考系 R 和一个长度单位 u，向量空间同构

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_n\colon \Lambda^n(T_pM^*) \to \Lambda^{n-1}(V^*) \oplus \Lambda^n(V^*)$$

（其中 $V = V^3$）定义如下：

- Fir首先，注意存在唯一的时间单位 e_0，使得 $ce_0 = l$。此外，向量 space 同构
  $$\mathrm{d}R_p \in L(T_pM, V^1 \oplus V^3)$$
  这使得可以将 V^1 和 V^3 识别为 T_pM的子空间。话虽如此，我们仅通过要求其在 V^3 上的限制等于零来定义$e^0 \in T_pM^*$。

- 现在考虑某个 $\alpha \in \Lambda^k(T_pM^*)$，并令

$$i\colon \Lambda(V^*) \to \Lambda(T_pM^*)$$

是由参考系定义的典范包含。由于

$$x \coloneqq e_0 \lrcorner \alpha$$

and

$$y \coloneqq \alpha - e^0 \wedge x$$

都在 i 的像中,

$$\mathcal{R}\alpha \coloneqq (i^{-1}x, i^{-1}y)$$

是定义良好的。

注 12. 从现在起，我们假设给定以下数据:

- 一个参考系 R。
- 两个实值且正定的物理量[1] k 和 α，其量纲任意。特别地，k 和 α 可以是无量纲的，例如 $k = \alpha = 1$。
- 一组世界线 W，其中每条世界线在 W 中都关联有一个质量和一个电荷。

我们通过要求库仑定律具有如下形式来定义电荷

$$\|\boldsymbol{F}\| = \frac{k}{4\pi}\frac{q}{d}\frac{q'}{d}$$

其中 d 是 q 与 q' 之间的距离。注意，电荷的量纲取决于 k 的量纲。为了引入电磁场，我们作出理想化假设：存在两个唯一的向量场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们从 M 映射到 V^3，满足

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

对于 W 中的所有世界线均成立。（$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的量纲取决于 k 和 α 的量纲，只有当 α 是速度时，它们才相等。）我们可以证明这一假设具有协变性，即若 R' 是另一个参考系，则存在唯一的向量场 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{B}'$，使得

$$\boldsymbol{F}' = q(\boldsymbol{E}' + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')$$

对于 W 中的所有世界线均成立。事实上，这直接由以下定理得出 m:

推论 3（洛伦兹力的协变性）。在注 12 的情形下，当且仅当:

- 存在唯一的 2-形式 F 使得

$$f^\flat = q\frac{\alpha}{c}U \lrcorner F$$

对于 W 中的所有世界线。

[1] 如果一个实值物理量在一组单位下为正定，那么它在所有单位组下都为正定 s.

- 存在唯一一对向量场 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$，使得

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

对于 W 中的所有世界线。

在存在性和唯一性成立的情况下，

$$F = \mathcal{R}^{-1}(-\boldsymbol{E}^\flat/\alpha, *\boldsymbol{B}^\flat).$$

证明。注意

$$\begin{aligned} V^3 \oplus V^3 &\to \Lambda^2(T_pM^*) \\ (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) &\mapsto \mathcal{R}^{-1}(-\boldsymbol{E}^\flat/\alpha, *\boldsymbol{B}^\flat) \end{aligned}$$

对于每个 $p \in M$，这是一个向量空间同构。也就是说，以下引理完成了证明：

□

引理 10。考虑注 12 中的情形。若 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是从 M 到 V^3 和 $F = \mathcal{R}^{-1}(-\boldsymbol{E}^\flat/\alpha, *\boldsymbol{B}^\flat)$ 的两个向量场，则对于 W 中的每条世界线，我们有以下等价关系：

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow f^\flat = q\frac{\alpha}{c}U \lrcorner F$$

证明。令

$$(\mathscr{E}, \mathscr{B}) \coloneqq (-\boldsymbol{E}^\flat/\alpha, *\boldsymbol{B}^\flat)$$

并考虑以下命题：

$$P \coloneqq \left[\frac{\boldsymbol{v}}{c} \lrcorner \boldsymbol{F}^\flat = -q\frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \lrcorner \mathscr{E} \text{ and } \boldsymbol{F}^\flat = q\alpha(-\mathscr{E} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \lrcorner \mathscr{B})\right]$$

通过证明以下等价关系，我们即可完成证明（最后一个等价关系显然成立，因为$\mathcal{R}_1$ 是双射）：

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow P \Leftrightarrow \mathcal{R}_1(f^\flat) = \mathcal{R}_1(q\frac{\alpha}{c}U \lrcorner F) \Leftrightarrow f^\flat = q\frac{\alpha}{c}U \lrcorner F$$

首先，我们证明

$$(\boldsymbol{E} + \frac{\alpha}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})^\flat = \alpha(-\mathscr{E} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \lrcorner \mathscr{B})$$

为了得到第一个等价关系：设 $\Omega \in \Lambda^3(V^*)$ 是与定向内积空间 V^3 相关联的体积形式，则 $\boldsymbol{X} \lrcorner \Omega = *\boldsymbol{X}^\flat$（见 [9]中的习题 2-28），因此

$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})^\flat = \boldsymbol{B} \lrcorner \boldsymbol{v} \lrcorner \Omega = -\boldsymbol{v} \lrcorner \boldsymbol{B} \lrcorner \Omega = -\boldsymbol{v} \lrcorner \mathscr{B}.$$

第二个等价关系可直接由以下两个方程得出：

$$\mathcal{R}_1(f^\flat) = \gamma(\tfrac{\boldsymbol{v}}{c} \lrcorner \boldsymbol{F}^\flat, -\boldsymbol{F}^\flat) \tag{3.3}$$

$$\mathcal{R}_1(U \lrcorner F) = \gamma(-\boldsymbol{v} \lrcorner \mathscr{E}, c\mathscr{E} + \boldsymbol{v} \lrcorner \mathscr{B}) \tag{3.4}$$

（3.3）的证明：首先，注意如果 $x \in \mathbb{R}$ 和 $X \coloneqq (\mathrm{d}R)^{-1}(xe_0, \boldsymbol{X})$，那么

$$\mathcal{R}_1(X^\flat) = (x, -\boldsymbol{X}^\flat).$$

现在，所需的方程由此得出

$$(\mathrm{d}R)f = \gamma(\tfrac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c}e_0, \boldsymbol{F}).$$

（3.4）的证明：考虑 $x := e_0 \lrcorner F$和 $y := F - e^0 \wedge x$。我们可以使用

$$U \lrcorner F = U \lrcorner (e^0 \wedge x) + U \lrcorner y = -e^0 \wedge (U \lrcorner x) + (U \lrcorner e^0) \wedge x + U \lrcorner y$$

and

$$(\mathrm{d}R)U = \gamma \begin{pmatrix} ce_0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

从而得到所需结果。 □

公理1。考虑注 12中的设定。此外，假设

- ρ 是关于 R的电荷密度，即对于所有可测的 $V \subset A^3$， ρ 在 V上的积分给出 V内部的电荷。
- $\boldsymbol{J}$ 是关于 R的电流密度，即对于 A^3 中的所有曲面 S， $\boldsymbol{J}$ 在 S 上的曲面积分给出通过 S的电流。

那么麦克斯韦方程组成立：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= k\rho & \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{E}}{\alpha} &= -L_{e_0}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \frac{k}{\alpha}\frac{\boldsymbol{J}}{c} + L_{e_0}\frac{\boldsymbol{E}}{\alpha} \end{aligned}$$

注记 13. 文献中出现的麦克斯韦方程组的不同形式，源于对量 k 和 α的不同选择：

	k	α
SI	$1/\epsilon_0$	c
海维赛-洛伦兹单位制	1	1
高斯单位制	4π	1

在 [10]中可以找到类似的表格。我们强调，对 k 和 α 的选择与单位制的选择无关。单位仍然可以任意选择。

定理 7. 若考虑 2-形式 $F := \mathcal{R}^{-1}(-\boldsymbol{E}^\flat/\alpha, *\boldsymbol{B}^\flat)$（如推论 3 中所述， F不依赖于 R）以及向量 $J := (\mathrm{d}R)^{-1}(c\rho e_0, \boldsymbol{J})$，则有以下等价关系：

$$\mathrm{d}F = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\times\dfrac{\boldsymbol{E}}{\alpha} = -L_{e_0}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

and

$$*\mathrm{d}*F = \frac{k}{\alpha}\frac{J^\flat}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = k\rho \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{k}{\alpha}\dfrac{\boldsymbol{J}}{c} + L_{e_0}\dfrac{\boldsymbol{E}}{\alpha} \end{cases}$$

证明。我们将在下面的注记之后证明这个定理： □

注记 14。

- 上一个定理证明了麦克斯韦方程组的协变性：如果它们在一个参考系中成立，那么在所有参考系中都成立。
- 此外，这表明 $J \coloneqq (\mathrm{d}R)^{-1}(c\rho e_0, \boldsymbol{J})$ 与 R无关，即四维电流确实是一个四维向量。

- 如果我们考虑黎曼度量 $-\eta$，并仍通过推论 3 定义 F，那么只有将定理 7 中的 F 替换为 $-F$时，定理 7 才成立。
- 在本节中，我们假定已固定 M 的一个连续定向（或等价地，固定了 V^3的一个定向，见第 2.4 节）。然而，麦克斯韦方程组在改变定向时保持不变：如果我们用.....– .....F来表述麦克斯韦方程组，那么这是因为两个霍奇星算子的复合（与单个霍奇星算子不同）在改变定向时保持不变。– .....$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则可以如下看出这一点：如果 $\boldsymbol{B}$ 是相对于一个定向的磁场，那么 $-\boldsymbol{B}$ 就是相对于另一个定向的磁场。同样，如果 $\boldsymbol{X}$ 是某个向量场，而 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{X}$ 是相对于一个定向的旋转，那么 $-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{X}$ 就是相对于另一个定向的旋转。

定理 7 的证明。警告：在此证明中，我们考虑两个不同的黎曼流形：欧几里得空间 E^3 （与参考系相关联的仿射空间 A^3，以及相对于长度单位定义在 V^3 上的内积）和闵可夫斯基空间。为避免混淆，我们使用粗体符号：若 β 是 E^3上的外形式，则 $\mathrm{d}\beta$ 是它的外微分，而 $*\beta$ 是它的霍奇对偶。

首先，我们利用以下事实：对每个向量场 $\boldsymbol{X}$，都有 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{X} = *\mathrm{d}*\boldsymbol{X}^\flat$ 和 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{X} = (*\mathrm{d}\boldsymbol{X}^\flat)^\sharp$ （见 [9] 中的习题 2-28 ），从而改写麦克斯韦方程组：

$$
\begin{aligned}
*\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha} &= -L_{e_0}\boldsymbol{B}^\flat & *\mathrm{d}*\boldsymbol{B}^\flat &= 0 \\
\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha} &= \frac{k}{\alpha}\rho & *\mathrm{d}\boldsymbol{B}^\flat &= \frac{k}{\alpha}\frac{\boldsymbol{J}^\flat}{c} + L_{e_0}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha}
\end{aligned}
$$

由于 $** = 1$ 在 $\Lambda^3(V^*)$上，我们可以简化两个方程：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha} + L_{e_0}*\boldsymbol{B}^\flat &= 0 & \mathrm{d}*\boldsymbol{B}^\flat &= 0 \\
\mathrm{d}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha} &= \frac{k}{\alpha}\rho & -L_{e_0}\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha} + *\mathrm{d}\boldsymbol{B}^\flat &= \frac{k}{\alpha}\frac{\boldsymbol{J}^\flat}{c}
\end{aligned}
$$

现在我们令

$$
(\mathscr{E}, \mathscr{B}) \coloneqq (-\frac{\boldsymbol{E}^\flat}{\alpha}, *\boldsymbol{B}^\flat)
$$

再将方程重写一遍：

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{d}\mathscr{E} + L_{e_0}\mathscr{B} &= 0 & \mathrm{d}\mathscr{B} &= 0 \\
-*\mathrm{d}*\mathscr{E} &= \frac{k}{\alpha}\rho & -L_{e_0}\mathscr{E} - *\mathrm{d}*\mathscr{B} &= -\frac{k}{\alpha}\frac{\boldsymbol{J}^\flat}{c}
\end{aligned}
$$

因此，还需要证明:

$$\mathcal{R}_3(\mathrm{d}F)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-\mathbf{d}\mathscr{E}+L_{e_0}\mathscr{B}=0\\ \mathbf{d}\mathscr{B}=0\end{cases}$$

and

$$\mathcal{R}_1(*\mathrm{d}*F)=\mathcal{R}_1\frac{J^\flat}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}-*\mathbf{d}*\mathscr{E}=\dfrac{k}{\alpha}\rho\\ -L_{e_0}\mathscr{E}-*\mathbf{d}*\mathscr{B}=-\dfrac{k}{\alpha}\dfrac{\boldsymbol{J}^\flat}{c}\end{cases}$$

由于

$$\mathcal{R}_1(J^\flat)=(c\rho,-\boldsymbol{J}^\flat)$$

（参见引理 10 的证明），下一个引理完成证明: □

引理 11. 设 F 是 M 上的一个 2-形式，且 $F=\mathcal{R}^{-1}(\mathscr{E},\mathscr{B})$，则:

$$\mathcal{R}_3(\mathrm{d}F)=(-\mathbf{d}\mathscr{E}+L_{e_0}\mathscr{B},\mathbf{d}\mathscr{B}) \tag{3.5}$$

$$\mathcal{R}_1(*\mathrm{d}*F)=(-*\mathbf{d}*\mathscr{E},-*\mathbf{d}*\mathscr{B}-L_{e_0}\mathscr{E}) \tag{3.6}$$

证明. 下文中，定义 24 中的同构 i 和 $\mathcal{R}$ 通常省略不写，例如

$$F=e^0\wedge\mathscr{E}+\mathscr{B}=(\mathscr{E},\mathscr{B}).$$

我们先证明 (3.5)，再利用这一结果证明 (3.6):

回忆

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=0}^{3}e^i\wedge L_{e_i}\omega$$

对于每个外形式 ω。一方面，我们可以使用

$$\forall i: L_Xe^i=L_X\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}(L_Xx^i)=\mathrm{d}(e^iX)$$

（参见 [8] 中的方程 4.21）得到

$$\mathrm{d}(e^0\wedge\mathscr{E})=\sum_{i=0}^{3}e^i\wedge L_{e_i}(e^0\wedge\mathscr{E})$$

$$=\sum_{i=0}^{3}e^i\wedge(\underbrace{L_{e_i}e^0\wedge\mathscr{E}}_{=\mathrm{d}(e^0e_i)\wedge\mathscr{E}=0}+e^0\wedge L_{e_i}\mathscr{E})=\sum_{i=0}^{3}e^i\wedge e^0\wedge L_{e_i}\mathscr{E}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}e^i\wedge e^0\wedge L_{e_i}\mathscr{E}=-e^0\wedge\sum_{i=1}^{3}e^i\wedge L_{e_i}\mathscr{E}=-e^0\wedge\mathbf{d}\mathscr{E}$$

另一方面

$$\mathrm{d}\mathscr{B}=e^0\wedge L_{e_0}\mathscr{B}+\sum_{i=1}^{3}e^i\wedge L_{e_i}\mathscr{B}=e^0\wedge L_{e_0}\mathscr{B}+\mathbf{d}\mathscr{B}.$$

总之，

$$\mathbf{d}F=\mathbf{d}(e^0\wedge\mathscr{E}+\mathscr{B})=\mathbf{d}(e^0\wedge\mathscr{E})+\mathbf{d}\mathscr{B}=e^0\wedge(-\mathbf{d}\mathscr{E}+L_{e_0}\mathscr{B})+\mathbf{d}\mathscr{B}=(-\mathbf{d}\mathscr{E}+L_{e_0}\mathscr{B},\mathbf{d}\mathscr{B})。$$

为证明 (3.6)，我们需要以下引理。 □

引理 12。设 V 是一个 n 维的定向实向量空间，并配有一个非退化对称双线性形式 g。若 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的正向定向正交规范基，则

$$*e^{i_1 \ldots i_k} = e^{i_1} g^{-1} e^{i_1} \cdots g^{i_k} g^{-1} e^{i_k} \epsilon_{i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n} e^{i_{k+1} \ldots i_n}$$

其中右端不是一个和：假设 $0 < k < n$ 和 $i_1 < \ldots < i_k$，则 $(i_{k+1}, \ldots, i_n)$ 是满足以下条件的唯一元组：$i_{k+1} < \ldots < i_n$ 且 $(i_1, \ldots, i_n)$ 是 $(1, \ldots, n)$ 的一个置换。

证明。关于基于坐标不变定义推导霍奇对偶的坐标表示，参见 [11] 中第168页。

□

定理 7 的证明。令 $(e_i)_{1 \le i \le 3}$ 为 V^3 的正向定向正交规范基，则

$$(\mathrm{d}{R_p}^{-1} e_i)_{0 \le i \le 3}$$

向定向正交规范基 osit向定向正交规范基 $T_p M$，我们可以利用 (3.5) 和引理 12 得到

$$\mathcal{R} * F = \mathcal{R} * \mathcal{R}^{-1}(\mathscr{E}, \mathscr{B}) = (*\mathscr{B}, -*\mathscr{E}).$$

于是 (3.5) 推出

$$\mathcal{R}\mathrm{d} * F = \mathcal{R}\mathrm{d}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} * F = \mathcal{R} * \mathrm{d}\mathcal{R}^{-1}(*\mathscr{B}, -*\mathscr{E}) = \mathcal{R} * \mathrm{d}\mathcal{R}^{-1}(*\mathscr{B}, -*\mathscr{E}) = (-\mathbf{d}*\mathscr{B} - L_{e_0} * \mathscr{E}, -\mathbf{d}*\mathscr{E}).$$

设 α 是 M 上的一个 3-形式，满足 $\alpha = \mathcal{R}^{-1}(x, y)$，那么我们可以再用一次引理 12，证明 $\mathcal{R} * \alpha = (*y, *x)$，由此证毕。 □

参考文献

[1] Valter Moretti。《分析力学》。施普林格，即将出版。[2] Josef Janyˇska、Marco Modugno 和 Raffaele Vitolo。“物理尺度的代数方法”。载于：《应用数学学报》110.3（2010年），第 1249–1276 页。 DOI: 10.1007/s10440-009-9505-6.[3] Valter Moretti。“Teoria della Relativit`a Speciale”。载于：（2020年）。[4] Valter Moretti。“极分解定理与洛伦兹群的相互作用”。载于：（2002年）。 DOI: 10.48550/ARXIV.MATH-PH/0211047. URL: https://arxiv.org/abs/math-ph/0211047.[5] Helmuth K. Urbantke Roman U. Sexl。《相对论、群与粒子》。施普林格，2000年。 ISBN: 978-3-211-83443-5.[6] Valter Moretti。《数理物理中的几何方法 I》。载于：（2020年）。[7] John M. Lee。《光滑流形导论》。第 2 版。施普林格，2012年。 DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5.[8] Theodore Frankel。《物理学的几何：导论》。第 3 版。剑桥大学出版社，2011年。 DOI: 10.1017/CBO9781139061377.[9] John M. Lee。《黎曼流形导论》。第 2 版。施普林格，2018年。 DOI: 10.1007/978-3-319-91755-9.[10] John David Jackson。《经典电动力学》。威利，1998年。 ISBN: 978-0-471-30932-1.[11] Alexander Altland 和 Jan von Delft。《物理学家的数学：入门概念与方法》。剑桥大学出版社，2019年。 DOI: 10.1017/9781108557917.