一种识别周期性固体介质中弹性波传播模式和极化带隙的新方法

Maria Jose Carrillo Munoz 和 Bhisham Sharma*

系　　航空航天工程系，威奇托州立大学，美国堪萨斯州威奇托市，邮编 67260-042

* 通讯作者：bhisham.sharma@wichita.edu

摘要

我们提出了一种新的计算方法，用于准确识别在周期性固体结构和超材料中传播的弹性波的传播模态和偏振。该方法利用在每个传播波解特征频率处计算出的特征向量，识别运动中总质量各平动和转动分量的贡献。我们通过定义相对有效模态质量向量，利用这些信息识别占主导地位的波传播模式。此外，我们通过定义一种新的偏振因子，将每个波解与其正确的偏振相关联。该因子量化波传播方向与晶格运动方向之间的相对取向，并给出介于 0 （纯 *S* 波）和 1 （纯 *P* 波）之间的正数值。此外，我们提出一种图形化表示方案，以便在传统色散图中更直观地呈现波偏振。我们将本方法的预测结果与先前发表的各种弹性动力学问题的结果进行比较，从而验证了该方法。最后，我们采用所提出的方法，分析方形平面梁晶格中各种晶格和结构参数扰动对弹性波传播及带隙特性的影响，并展示了此前未曾观察到的动态特性，包括各种极化带隙、类流体行为，以及延伸至 0 Hz 的超低频*SH*-和 *SV*-带隙。所提出的方法为通常采用的目视模式检查技术提供了一种替代性的计算方法，也为分析周期性固体介质中的弹性波响应提供了一种稳健的技术。

关键词： 弹性动 力学；带隙；超材料；波偏振；色散工程

1. 引言

人们对声子介质和超材料的兴趣，源于其新颖的体性质，以及通过结构控制弹性能流的可能性 [1-3]。传统上，对这类材料系统的研究主要聚焦于波衰减带隙的出现——即入射波在其中发生空间衰减的频率区间——以及这些带隙与其底层子结构的关系。在声子介质中，这种衰减是由子结构周期性及其产生的布拉格散射效应导致的 [4]；在超材料中，衰减则是由于局域子结构共振将入射弹性能量禁锢起来 [3, 5]。虽然超材料并不严格要求具有周期性子结构，但为了便于分析和后续制造，研究中通常会采用这一假设，从而同时产生布拉格散射和局部共振衰减效应 [6-8]。

与光子学对应物相比 [5], , 分析弹性波在这类结构中的传播在数学上更为复杂，这是因为弹性介质支持多种波模态或偏振 [9, 10], , 这些模态或偏振在较高频率下容易发生耦合[11-13], , 并且在波于子结构界面发生反射时会相互转换 [14, 15]。偏振定义为波传播方向（可用波矢方向方便地描述）与弹性粒子的振荡方向之间的相对取向 [16, 17]。无界均匀弹性介质支持三种互不耦合的波偏振传播 [10]: 一种*P*波，又称膨胀波、无旋波、纵波、压缩波、体积波或初波（*P*波），其粒子沿波传播方向平行振荡；以及两种*S*波，又称畸变波、等容波、旋转波、横波、剪切波或次波（*S*波），其粒子沿垂直于波传播方向的方向振荡。若粒子运动相对于由粒子振荡方向、波传播方向和全局坐标系选择所确定的平面发生在面内（水平方向）或面外（垂直方向），则两种*S*波进一步分别称为*SH*波或*SV*波。非均匀或各向异性的无界介质支持额外的耦合波形，其偏振既不平行也不垂直于传播方向 [18, 19]。根据占主导地位的偏振，这类耦合波被归类为准*P*波或准*S*波；若没有占主导地位的偏振，则可将这类波归类为混合波 [20]。有界介质中的波形通常更常被归类为纵波（等同于*P*波）、弯曲波或挠曲波或横波（等同于*SV*波）、剪切波（等同于*SH*波），以及粒子运动表现为绕传播方向扭转或转动的扭转波 [10]。

根据其底层子结构的不同——周期性、属性对比率、对称性和连通性都发挥着重要作用——声子介质和超材料会呈现不同的带隙。带隙既可根据其产生机制分类为布拉格 [4] 或局域共振带隙 [3], （如前所述），也可根据其衰减的波形类型分类。极化带隙 [21, 22] 仅限制特定极化波的传播；例如，*P*波带隙只会衰减入射的 *P*波，而其他极化的波则可在该频率范围内传播，且不会发生空间衰减。同一频率范围内所有极化带隙的叠加，会形成完整带隙或全带隙，在该带隙内，所有波无论其极化如何都会受到衰减 [21]。在多维结构中，还可根据带隙的方向特性进一步分类。方向带隙 [23-25] 是指仅衰减特定波矢方向上的波的频率范围；来自其他入射角或传播方向的波则可穿过结构而不受衰减。所有 4π 弧度范围内此类方向带隙的重叠，会形成绝对带隙或全向带隙 [26]。因此，根据极化和方向特性，带隙可分为偏振方向带隙、偏振全向带隙、完整方向带隙或完整全向带隙。由方向带隙或偏振方向带隙造成的波滤波，会迫使入射波沿其他允许的方向传播。研究人员已利用这一现象展示了在特定方向上实现弹性波波束形成或操控的可能性

[24, 25] ，这对于通过监测弹性能流 [27, 28]来无损识别损伤的逆问题也很有意义。近期，研究人员还观察到，子结构非均匀性 [29-31], 会导致偏振异常：通常速度较慢的 *S*波传播速度会超过 *P*波。

传统上，人们通过推导所研究结构的谱关系或色散关系来研究这些现象。多年来，人们采用了众多解析和数值技术来获得这些关系，包括使用等效弹簧-质量类比模型[4,32], 哈密顿能量法[33, 34], 空间谐波法[35], 导纳技术[36,37], 传递矩阵法[6, 38], 相控阵法[7, 39], 有限元法[25, 40-42], 以及谱元法[43, 44]。一般而言，这些方法结合代表性单胞和Floquet-Bloch周期边界条件，提取在整体结构中传播的波的波数-频率关系 [45]。随着子结构复杂性的增加，解析方法变得难以处理，而有限元法则为分析此类结构提供了可靠途径。无论选择何种方法，所得的谱曲线或谱面都能提供传播波色散行为的信息。随后，可以很容易地将全向带隙和完全带隙识别为不存在实值解的频率区间。然而，要将每条色散曲线或色散面与其对应的偏振联系起来，并进一步识别各个极化带隙和极化方向带隙，则需要进行更深入的分析。这些极化带隙最常通过观察高对称不可约布里渊区（IBZ）点处带隙边缘频率对应的振型来识别 [1, 21, 22, 46]。在较低频率下，波偏振通常彼此解耦，因此这一过程较为容易；但对于耦合波，手动识别偏振会变得复杂。此外，Manconi和Mace[12] 将曲线回避描述为这样一种现象：“具有变化参数的系统中，两条或多条特征值轨迹彼此偏离并发散，而不是相交”，以及波矢扫过IBZ时偏振可能发生连续变化 [17]，，这进一步增加了仅通过观察高对称点处振型来准确识别波偏振的难度。一些研究人员采用了其他方法来识别偏振。Manzanares-Martinez和Ramos-Mendieta[17] 针对矢状面声波，采用应变能平衡方法，获得了一维声子晶体晶胞中纵向位移和横向位移贡献的平均值；对于二维情形，作者不再定义局部波矢，而是通过计算平均压缩和剪切贡献，并将其近似为纵向振动和横向振动。类似地，Achaoui等人[47] 使用位移场分量的积分来表征波偏振，而不考虑波矢方向。最近，Bacigalupo和Lepidi[20], 采用了另一种考虑波矢方向的方法，提出了一族无量纲极化因子，用于量化周期性梁格材料中的波偏振和能量流，并展示了能量速度与群速度之间的一致性。为预测二维晶格中的面外波束形成，Zelhofer和Kochmann [25]利用计算得到的面内标量比区分面内和面外波模态，该比值基于质量归一化特征向量计算得出

Lee等人[30] 通过计算偏振方向与波矢方向之间相对角度的绝对值，识别出一种表现出偏振异常的双狭缝超材料的偏振特性。

在本研究中，我们提出一种系统方法，用于识别波传播模式，并将色散曲线准确地对应到各自的偏振。我们改造了振动模态分析中常用的模态参与因子概念 [48], ，用于量化每个方向运动分量对与各色散解相关联的波模态的相对参与程度 [49, 50], 。随后，通过定义偏振因子来计算波传播方向与质点运动方向之间的相对取向。该因子的数值范围为 0 到 1：0 表示纯*S*波，1 表示纯*P*波，而介于两者之间的数值则表示准偏振或混合偏振。此外，我们提出一种图示表达方案，以便更直观地在传统色散图中呈现波偏振。尽管本文侧重于利用数值提取色散曲线时计算得到的现有特征向量数据，但该方法也很容易适用于其他能够提供特征向量数据的技术。所提出方法的创新之处在于，它能够清晰揭示各色散解所对应的波传播模式和偏振；这种清晰度有助于识别此前在广泛研究的晶格几何结构中未曾观测到的新兴行为。下一节将介绍用于获取色散曲线的现有计算方法，并通过讨论在高对称点处常用的可视化模态振型分析方法所固有的问题，阐明本研究的动机。随后，我们将介绍所提出的方法和数据可视化方案，并通过将结果与先前发表的各类弹性动力学问题研究结果进行比较，对其进行验证。最后，我们运用所提出的方法研究方形平面梁晶格结构的弹性波传播行为，展示多种偏振带隙和方向带隙的存在，并分析各种晶格参数和结构参数扰动对各个带隙的影响。

2. 背景与研究动机

2.1. 弹性波色散关系

通过在代表性晶胞 [45] 上施加 Floquet-Bloch边界条件，可以方便地研究具有子结构周期性的声子结构和超材料中的弹性波传播。无限周期结构中的简谐位移场可表示为:

$$\mathbf{u}_A(\mathbf{r},t) = \mathbf{U}_A(\mathbf{r})\, e^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{U}_A$ 是位置矢量为 $\mathbf{r}$ 的点*A*处的复位移振幅，t 是时间变量，ω 是波频率，且 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。根据 Floquet-Bloch理论，周期结构中任意点*A* 的响应，都与位置矢量为 $\mathbf{r}'$ 的对应空间周期点*A′*的响应相关联，其关系通过复波矢$\mathbf{k}$ 表示为 [4, 45]:

$$\mathbf{U}_{A'}(\mathbf{r}') = \mathbf{U}_A(\mathbf{r})\, e^{-\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \tag{2}$$

在这种表示中，复波数的实部表示点 A 与 A′ 之间的相位差，而虚部（也称为波衰减因子）表示两点之间的波幅衰减率；波矢方向表示弹性波的传播方向。对于无耗线性材料，传播波的 k 为纯实数，而在波衰减带隙内则变为纯虚数；波衰减带隙是指波在其中发生空间衰减且无法通过结构传播的频率区间。通过在晶胞上施加 Floquet-Bloch边界条件，然后扫描所关注的波矢并计算特征频率解，可以研究传播波的色散行为以及带隙的存在性。这种方法通常称为 $\omega(\mathbf{k})$ 方法 [1, 46], ，它利用了如下定理：在物理空间中具有周期 L 的结构，在波矢空间（也称为倒易空间）中同样具有周期性，其周期为 $2\pi/L$。因此，沿 1、2 和 3 轴方向周期分别为 L_1, L_2, 和 L_3的晶胞，将得到波数周期分别为 $k_1 \rightarrow 2\pi/L_1$,$k_2 \rightarrow 2\pi/L_2$, 和 $k_3 \rightarrow 2\pi/L_3$的倒易空间。表示这一结果倒易空间的晶胞称为布里渊区 [45]。通过选择以点 k = 0 为中心的倒易晶胞，并仅取正 k 值，可以将计算波矢域缩减为 $k_1 \rightarrow [0,\pi/L_1]$, $k_2 \rightarrow [0, \pi/L_2]$, 和 $k_3 \rightarrow [0, \pi/L_3]$。这一缩减后的区域称为第一布里渊区，还可以利用其对称性进一步缩小为不可约布里渊区（IBZ）[45]。顾名思义，IBZ 是能够提供周期结构完整谱行为信息的最小倒易晶胞。因此， $\omega(\mathbf{k})$ 方法通过扫描 IBZ，同时求解结构所允许的仅含实数的频率来完成分析。

对于复杂几何结构，上述技术通常采用有限元（FE）方法实现：使用适当的网格对晶胞建模，并根据式（2）约束边界节点。某些商用有限元软件（例如 COMSOL Multiphysics）允许直接施加复数值边界条件，而另一些软件（例如 Abaqus）则只允许施加实数值位移。Åberg 和 Gudmundson [42]指出，可将模型拆分为两个完全相同的“实部”和“虚部”网格部分，并将晶格点处的总复数值位移表示为A：

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{U}_{A_{\mathrm{re}}} + \mathrm{i}\,\mathbf{U}_{A_{\mathrm{im}}} \tag{3}$$

其中，$\mathbf{U}_{A_{\mathrm{re}}}$ 和 $\mathbf{U}_{A_{\mathrm{im}}}$ 分别表示实部模型和虚部模型中点 A 处对应节点的位移。然后对式（2）应用欧拉公式，即可实现复数Floquet-Bloch边界条件：

$$\mathbf{U}_{A'_{\mathrm{re}}} = \mathbf{U}_{A_{\mathrm{re}}} \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) + \mathbf{U}_{A_{\mathrm{im}}} \sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) \tag{4}$$

$$\mathbf{U}_{A'_{\mathrm{im}}} = \mathbf{U}_{A_{\mathrm{re}}} (-\sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))) + \mathbf{U}_{A_{\mathrm{im}}} \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})) \tag{5}$$

随后，通过线性扰动分析过程提取不可约布里渊区内各波矢对应的本征频率。对于边界节点按照式（4）和式（5）加以约束的晶胞，其自由振动运动方程为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{6}$$

其中， $\mathbf{u}$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}$ 分别为位移向量和加速度向量， $\ddot{\mathbf{u}}$ 表示 $\mathbf{u}$的二阶时间导数，$\mathbf{M}$和$\mathbf{K}$分别为全局质量矩阵和刚度矩阵。假设解为式（1）所示的简谐位移场，可得特征值问题：

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{U}=\mathbf{0} \tag{7}$$

通过引入约束矩阵 $\mathbf{Q}$，这些方程可以改写为关于无约束内部节点 $\mathbf{U}_{\mathrm{int}}$ 和主边界节点 $\mathbf{U}_{\mathrm{bdry}}$ 位移的形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{re}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{re}}}\cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}))+\mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{im}}}\sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{re}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{im}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{re}}}(-\sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})))+\mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{im}}}\cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{im}}} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{re}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{re}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{im}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{im}}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中，矩阵 $\mathbf{Q}$ 定义为：

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) & \mathbf{0} & \sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sin(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) & \mathbf{0} & \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}'-\mathbf{r})) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Th由此得到的特征值问题是波矢的函数，表示为 ：

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}\right)\mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{RE}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{RE}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{int}_{\mathrm{IM}}} \\ \mathbf{U}_{\mathrm{bdry}_{\mathrm{IM}}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{10}$$

求解该方程可得到与特定波矢对应的特征频率解。将这些解绘制为 ω v/s $\mathbf{k}$ 图，可更清晰地了解结构的色散行为和带隙的存在情况。对于一般的三维情形，可在整个不可约布里渊区体积内绘制解，以获得色散体；在覆盖二维不可约布里渊区的二维网格上绘图，可得到色散面；沿一维路径绘图（通常选择穿过不可约布里渊区边界的路径），则可得到色散曲线。所得信息还可进一步用于计算群速度和相速度，并研究结构的波传播方向性行为[24, 25, 51]。

2.2. 弹性波偏振

作为示例，考虑图1所示无限平面方形梁晶格的色散图，该晶格具有六个自由度，结果采用第2.1节所述的流程获得。我们在 Abaqus CAE 中将晶格建模为相互连接的三维可变形导线网络，

并采用具有二次插值的剪切柔性梁单元（B32）划分网格。假设晶胞位于*1-2*平面内，其沿*1*-轴和*2*-轴的晶格常数分别为$L_1 = 1$ m 和$L_2 = 1$ m。假设晶格单元的横截面为正方形，厚度为 77 mm。沿不可约布里渊区路径 O-X-M-O 得到的色散曲线如图1所示，其中频率轴以高对称点X处出现的第一个面内弯曲模态的频率为基准进行归一化（$k_1 = \frac{\pi}{L_1}$，$k_2 = 0$）。还展示了特定色散点位置处的振型。

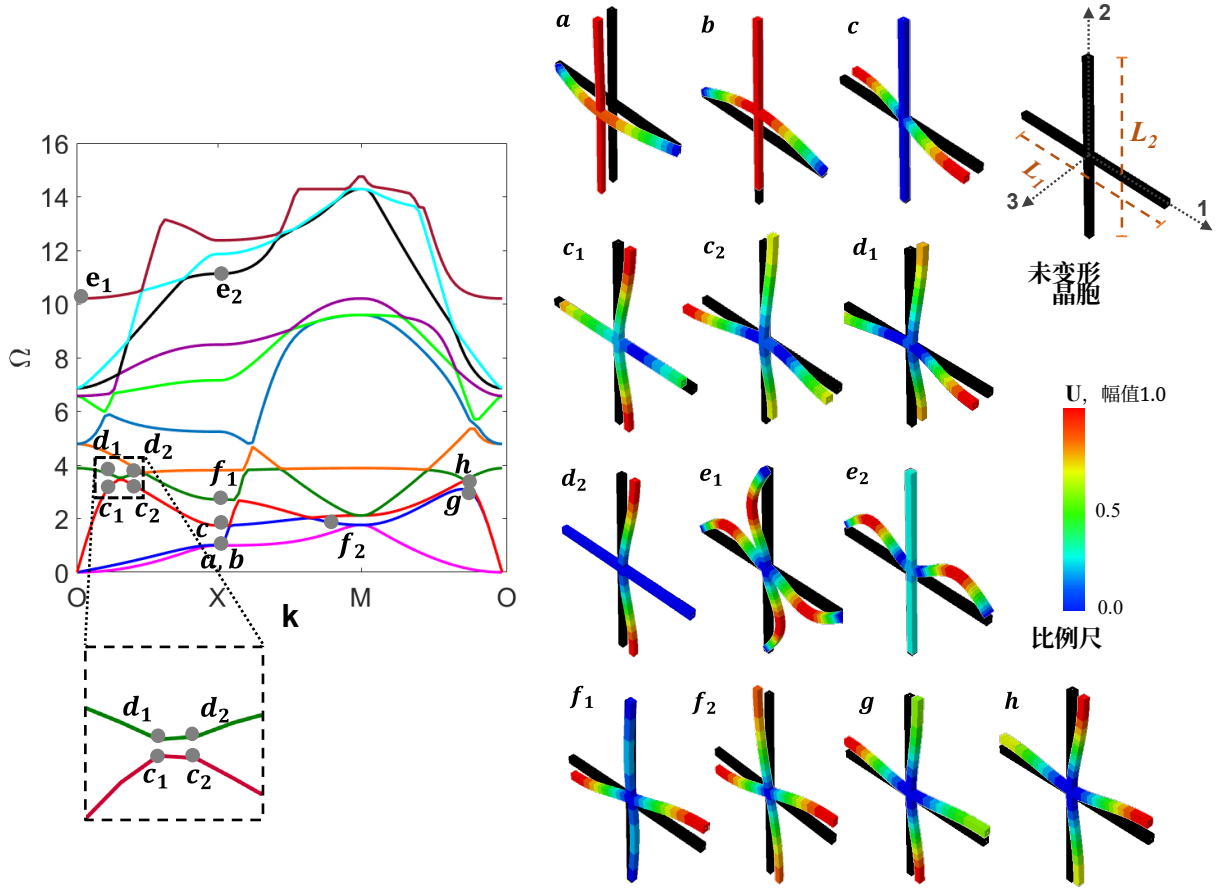


图1. 具有六个自由度的方形梁晶格的色散曲线，以及指定色散点处的晶胞振型。插图显示了发生在3rd 和4th 特征频率曲线之间的曲线避交现象。

色散图中以不同颜色表示的每条连续特征频率曲线，都是式（6）的一个解；每个特征频率则对应于该频率下特定的允许波传播模式或偏振。然而，每条连续曲线并不对应单一传播模式；要确定相关信息，还必须关注对应的特征向量。通常通过目视检查各特征频率处的振型来辨认相应的偏振；为识别衰减带隙，通常只关注带隙的起始和终止特征频率[21,52]。例如，高对称点 X 上 *a* 、 *b* 和 *c* 各点处的振型表明

其对应的特征频率曲线（此处分别以粉色、蓝色和红色表示），分别是第一支SV波、第一支SH波和第二支SV波的传播波解。然而，进一步检查第三条特征频率曲线（红色）上 c_1 和 c_2 两点的振型后发现，尽管 c_2 点确实对应第二支SV波，c_1 点却是P波模态。这种极化变化是由插图所示的曲线回避或模态回避现象[12, 13, 53]引起的：与P波和SV波相关的色散曲线会突然交换偏振，并彼此回避、分离，而不是相交。这里，包含 c_1 和 c_2, 两点的特征频率曲线与包含 d_1 和 d_2 两点的曲线发生了偏振交换，这一点可从 c_1 与 d_2, 两点以及 c_2 与 d_1两点处振型的相似性看出。这类曲线回避效应可能导致错误识别各条色散曲线对应的波偏振。目视检查振型这一方法的另一个误差来源是模态转换效应：单条色散曲线对应的偏振可能随波矢连续变化[17]。对于方形晶格，沿O-X方向的11^{th} 色散曲线中可见这类模态转换效应：该曲线起初（e_1）表现为一种混合波模态，垂直和水平晶格元件的面内弯曲运动分别呈现P模态和SH模态，且贡献相近；但随后逐渐转换为SH波模态，此时水平元件的面内弯曲运动占主导，如e_2点所示。沿X-M路径的3^{rd} 色散曲线中也发生了类似的模态转换：曲线从 f_1 点开始，此时水平元件沿2方向的弯曲运动占主导，随后逐渐转换为混合模态，其中水平和垂直元件的面内弯曲运动分别沿2和1方向。除模态回避和转换效应外，沿与晶格元件取向不一致的方向传播的波所对应的耦合振型（如g点所示），也进一步增加了准确识别波偏振的难度。因此，尽管完整带隙和全向带隙很容易通过不存在实数特征解的频率区间来识别，但依靠目视检查振型很容易导致极化带隙识别错误。

在此，我们提出一种替代方法，将色散曲线与各自的偏振对应起来。对于有限元网格，每个特征频率都与每个节点处的一个特征向量相关联。所提出的方法利用这些特征向量，计算每个特征频率下沿不同坐标方向运动的相对有效平动质量和转动质量。随后利用这些信息识别与各频率下波传播相关的结构振动模态。对于波矢沿结构构件方向的波，这足以正确识别其偏振；但为了确保准确识别波矢方向各异的波的偏振，我们还提出使用偏振因子。下一节将介绍所提出的方法。

3. 方法

3.1. 传播模式识别

第2.1节所述的方法可得出与所关注的特定波矢对应的本征频率。色散曲线中的每个本征频率 th，ω^n，均对应于

每个有限元节点处的一个特征向量 $\mathbf{U}^n$。六个特征向量分量 $\mathbf{U}_j^n|_{j=1,\ 2,\ ..6}$——其中$\mathbf{U}_j^n|_{j=1,\ 2,\ 3}$分别对应沿*1*、*2*和*3*坐标方向的三个平移分量 u_1^n、u_2^n、u_3^n，而$\mathbf{U}_j^n|_{j=4,\ 5,\ 6}$分别对应绕*1*、*2*和*3*坐标方向的三个转动分量 θ_1^n、θ_2^n、θ_3^n ——提供了每个有限元节点在 ω^n 处相对运动的信息。通过计算相应的模态参与因子$\mathbf{\Gamma}^n$，可以估算各特征向量分量对整体振型的相对影响。该因子定义如下：

$$\mathbf{\Gamma}^n = \frac{\mathbf{U}^{n\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\mathbf{R}}{\mathbf{m}^n} \tag{11}$$

其中，**M**为全局质量矩阵，而**R** 和 $\mathbf{m}^n$ 分别为影响矩阵和广义质量，定义如下：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z-z_0) & -(y-y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z-z_0) & 0 & (x-x_0) \\ 0 & 0 & 1 & (y-y_0) & -(x-x_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{m}^n = \mathbf{U}^{n\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\mathbf{U}^n \tag{13}$$

这里，**R**表示由任意静态单位地面位移或转动所产生的位移，其中*x, y, z*为节点坐标分量，x_0, y_0, z_0 分别为旋转中心沿*1-, 2-,*和*3*轴的坐标。请注意，按此方式定义时，当旋转中心与重心重合，**R**会退化为单位矩阵。

模态参与因子通常用于模态分析，以了解在给定频率 [54-58], 下，各个固有模态对结构整体动力状态的参与情况；在此，我们提出使用它来了解各方向运动分量对与给定特征频率相关的振型的相对参与程度。因此，模态参与因子分量 Γ_j^n 描述j^{th} 方向运动分量对ω^n处整体振型的贡献。随后，可通过计算模态有效质量，利用模态参与因子量化沿各方向的平动（j = 1, 2, 3）或转动（j = 4, 5, 6）质量占比，计算公式如下：

$$\mathbf{m}_{\mathbf{eff}}^n = \mathbf{\Gamma}^{n\,2}\,\mathbf{m}^n \tag{14}$$

为便于比较，我们将平动和转动有效质量分量归一化为：

$$\mathbf{c}_j^n = \frac{m_{eff_j}^n}{M}, \qquad \text{for } j = 1, 2, \text{ and } 3 \text{ (translational mass)} \tag{15}$$

$$\mathbf{c}_j^n = \frac{m_{eff_j}^n}{I_j}, \qquad \text{for } j = 4, 5, \text{ and } 6 \text{ (rotational mass)} \tag{16}$$

其中，M 和 I_j 分别为结构的总平动质量和总转动质量。请注意，平动质量与方向无关，而转动质量（或转动惯量）

与方向有关，必须围绕适当的轴进行计算。为了更直观地展示在 ω^n 处各有效质量分量对总模态质量的相对贡献，我们进一步将它们分别相对于总平动有效质量和总转动有效质量进行归一化，得到：

$$q_{t_j}^n|_{j=1,2,3} = \frac{c_j^n}{\sum_{j=1}^{3} c_j^n} \tag{17}$$

$$q_{r_j}^n|_{j=4,5,6} = \frac{c_j^n}{\sum_{j=3}^{6} c_j^n} \tag{18}$$

其中，$q_{t_j}^n$ 和 $q_{r_j}^n$ 分别表示在 ω^n 处沿 j^{th} 方向的相对有效平动质量分量和转动质量分量。此额外归一化使相对有效质量分量的取值范围限定在0到1之间，其中0表示质量在该坐标方向上没有运动，1表示全部质量均沿该方向运动。

为清晰起见，以图1所示方形平面晶格的 3rd 和 4th 色散曲线中的位置 c_1, c_2, d_1, 和 d_2 为例。四个点的波矢方向均沿*1*-轴。采用上述步骤计算得到的这四个点的模态有效质量向量和相对有效模态质量向量列于表1，其中 ω^n 为各位置的频率，Ω^n 为归一化频率。在 c_1 和 d_2, 处，模态质量向量预测结构质量的主要运动为沿1轴的面内位移；相反，在 c_2 和 d_1 处，运动主要表现为沿*3*轴的位移（即面外位移）以及绕*2*轴转动，表明这两个点均对应面外传播模式。通过观察图1所示振型可验证这些预测，从而有助于识别受曲线避交现象影响的这四个点的正确传播模式。同样，第3.2节将进一步研究的位置 *g*和*h,* 也被识别为面内模式。图1所示所有位置的模态有效质量向量和相对有效模态质量向量见附录表A1。

表1。图1所示特定点的模态有效质量向量、相对有效模态质量向量及所识别的传播模式。

位置	归一化频率 Ω^n	模态有效质量向量 $\mathbf{m}_{\mathbf{eff}}^n$	相对有效平动质量 $\mathbf{q}_t^n = \langle q_{t_1}^n, q_{t_2}^n, q_{t_3}^n \rangle$	相对有效转动质量 $\mathbf{q}_r^n = \langle q_{r_4}^n, q_{r_5}^n, q_{r_6}^n \rangle$	传播 mode
c_1	3.41	〈14.4, 0, 0, 0, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	〈0.035, 0.996, 0.004〉	面内
c_2	3.40	〈0, 0, 0.183, 0, 0.292, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
d_1	3.47	〈0, 0, 0.125, 0, 0.246, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
d_2	3.49	〈13.2, 0, 0, 0, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	〈0, 0.994, 0057〉	面内
g	2.98	〈7.21, 7.21, 0, 0, 0, 0.297〉	〈0.5, 0.5, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
h	3.19	〈8.31, 8.31, 0, 0, 0, 0〉	〈0.5, 0.5, 0〉	〈0.195, 0.038, 0.767〉	面内

3.2 偏振识别

如前所述，波偏振是弹性粒子的振荡方向与波矢之间的相对取向。波矢方向是先验已知的，而振荡方向则由模态参与因子$\boldsymbol{\Gamma}^n$表示，该因子量化了各方向运动分量对任一给定特征频率下振型的贡献。因此，这两个向量之间的相对取向可用偏振因子 $\boldsymbol{\Phi}^n$计算，其定义如下:

$$\boldsymbol{\Phi}^n = |\cos \boldsymbol{\varphi}^n| \tag{19}$$

其中

$$\cos \boldsymbol{\varphi}^n = \frac{\langle \boldsymbol{\Gamma}_t^{\boldsymbol{n}}, \mathbf{k}_d \rangle}{\|\boldsymbol{\Gamma}_t^{\boldsymbol{n}}\| \|\mathbf{k}_d\|} \tag{20}$$

这里， $\boldsymbol{\Gamma}_t^n$ 和 $\mathbf{k}_d$ 分别是模态参与因子和平移分量的局部倒易晶格矢量，定义如下:

$$\boldsymbol{\Gamma}_t^{\boldsymbol{n}} = \langle \boldsymbol{\Gamma}_1^n, \boldsymbol{\Gamma}_2^n, \boldsymbol{\Gamma}_3^n \rangle \tag{21}$$

$$\mathbf{k}_d = \langle \Delta k_1, \Delta k_2, \Delta k_3 \rangle \tag{22}$$

其中， Δk_1、 Δk_2、 Δk_3分别是沿*1*-、*2*-和*3*-轴的波矢分量增量。

偏振因子取值为 0 到 1 之间的正数，用于量化波传播方向与晶格运动方向之间的相对夹角：0 表示振荡方向垂直于波传播方向，即*S*波；1 表示振荡方向平行于波传播方向，即*P*波。对于不具有纯偏振的情况，若偏振因子小于 0.1，可称为“准*S*” 波；若大于 0.9，则可称为“准*P*”波；偏振值介于这两个界限之间的波可归类为“混合”波。

表2。计算得到的平动模态参与因子、局部波矢取向、偏振因子以及识别出的波偏振。

位置	归一化频率 Ω^n	平动分量 模态参与因子 $\boldsymbol{\Gamma}_t^n$	局部波向量 $\mathbf{k}_d$	极化因子 $\boldsymbol{\Phi}^n$	Wave 极化
c_1	3.4128	〈1.83, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	1	*P*-波
c_2	3.4037	〈0, 0, −0.1160〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
d_1	3.4771	〈0, 0, −0.15〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
d_2	3.4954	〈1.35, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	1	*P*-波
g	2.9817	〈0.497, −0.497, 0〉	〈−1, −1, 0〉	0	*SH*-波
h	3.1927	〈0.566, 0.566, 0〉	〈−1, −1, 0〉	1	*P*-波

为清晰起见，重新考察图1中的位置 c_1, c_2, d_1, 和 d_2 ，如上文所述。计算得到的模态参与因子、局部倒易晶格矢量和偏振因子见表2。位置 c_1 和 d_2 处的偏振因子表明，结构的振荡方向

与波传播方向平行，因此正确地将这些位置处的特征频率识别为*P*-波解。类似地，c_2 和 d_1 处的偏振因子正确地将这些位置识别为*S*-波解；由于如表1所示，这两个位置的主导运动方向均沿面外轴，因此还可进一步将传播模式区分为*SV*-波解。

通过考察*g*点和*h*点，可以进一步说明计算极化因子的必要性——这两点的波矢相同，但频率不同。由于波矢并未沿晶格元件方向，通常难以确定这些位置的极化情况。如表2所示，它们的极化因子表明，位置*g*处的振荡方向垂直于波的传播方向，而位置*h*处的振荡方向则平行于波的传播方向。因此，位置*g*和*h*处的本征频率必须分别归类为*SH*波和*P*波。图1所示所有位置的模态参与因子、局部倒易晶格矢量和极化因子的计算结果见附录表A2。

3.3. 可视化方案

为便于直观展示各相对有效模态质量向量分量对结构在任一本征频率解下整体运动的贡献，我们采用以下配色方案表示每个分量：

- $q_{t_1}^n \rightarrow$ 蓝色实心方块
- $q_{t_2}^n \rightarrow$ 绿色实心三角形
- $q_{t_3}^n \rightarrow$ 红色实心菱形
- $q_{r_1}^n \rightarrow$ 蓝色空心圆
- $q_{r_2}^n \rightarrow$ 绿色空心圆圈
- $q_{r_3}^n \rightarrow$ 红色空心圆圈

随后，我们将这些分量叠加到色散点上，并通过颜色强度标尺体现各分量的贡献。对于每个分量，最低颜色强度表示数值为 0，即该分量不参与运动；最亮的颜色强度表示数值为 1，意味着该分量在整体运动中占主导地位。为使图示更加清晰，我们将平动和转动的相对有效模态质量向量分量分别绘制在两个相邻的图中。同样，为了清楚区分*S*-波和*P*-波，我们使用星号分别绘出每个特征频率解对应的偏振因子，并以从青色到黑色变化的颜色强度表示：青色表示纯*S*-波，黑色表示纯*P*-波。

图2展示了该可视化方案的一个应用示例。这里，我们使用上述可视化方案绘制了图1中所示方形晶格的色散曲线。从图中可以看出，所提出的可视化方案有助于更准确地识别波传播模式，并清晰地区分各波动解对应的极化。因此，与逐点目视分析振型相比，该方案能够更直接、更准确地识别各种带隙。在本文余下部分，我们将使用该方案分析各种结构的波传播行为。

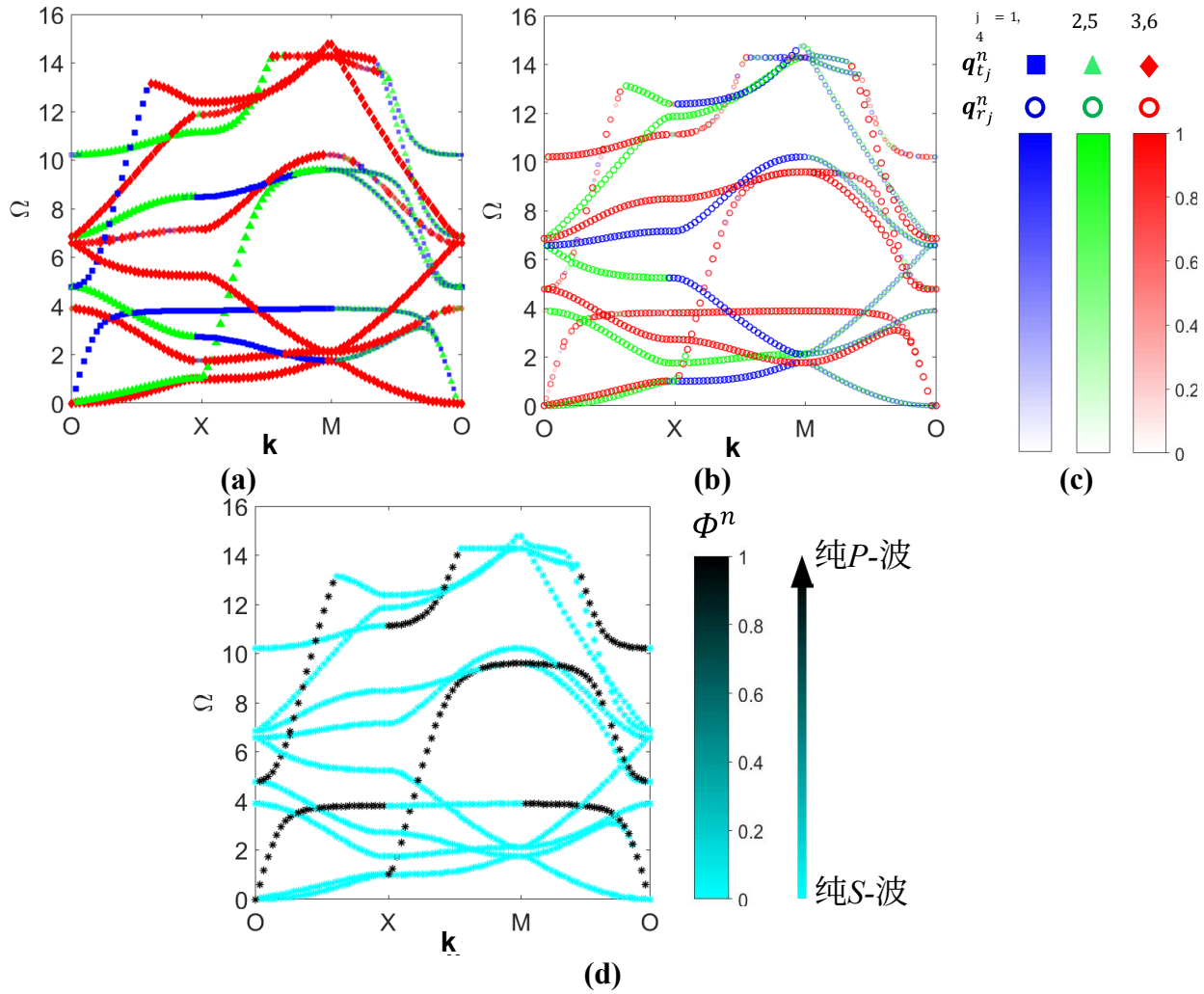


图2。叠加相对有效模态质量矢量分量的色散曲线。**图2(a)**显示平移分量，**图2(b)**显示转动分量，**图2(c)**显示各分量所用的色标和符号。**图2(d)**显示极化图以及用于识别不同极化值的色标。

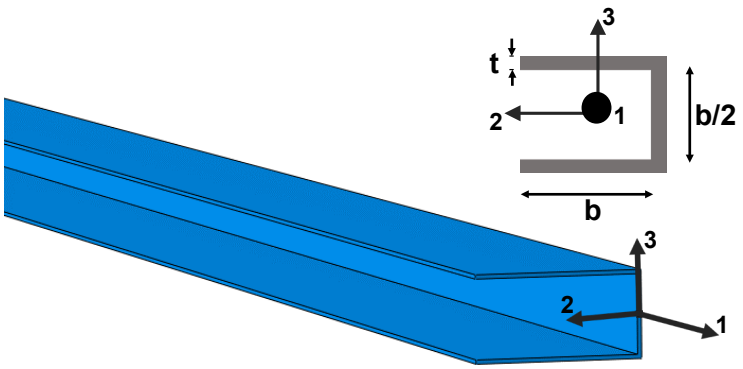
4. 方法验证

这里，我们通过将传播模式和极化预测与文献中已发表的结果进行比较，验证所提出的方法。首先，我们使用耦合梁模型验证该方法正确预测模态耦合的有效性。然后，我们使用该方法识别局域共振夹层梁中的波衰减带隙，最后再对三维复合超结构进行识别。

4.1. 耦合梁中的模态识别

考虑一根具有开放对称槽形截面的棱柱形薄壁悬臂梁，如图 3 所示。该梁最初由 Noor 等人采用混合一维有限元方法进行研究，并通过基于 Sanders-Budiansky 壳理论的二维板壳模型进行了验证。[59] 这根梁

表现出显著的弯曲-扭转耦合，若不通过目视分析振型，则难以识别。为展示所提出方法的准确性，我们分析该梁的自由振动行为，并将利用相对有效模态质量向量预测的模式类型，与 Noor 等人的结果以及通过目视检查各个振型得到的结果进行比较。我们采用连续体实体壳单元（CSS8）将该梁建模为三维可变形实体，其棱柱形横截面位于 2-3 平面内，长度方向沿 1 轴；几何参数和材料参数均选取为与 Noor 等人所用参数一致，并汇总于图 3 中。

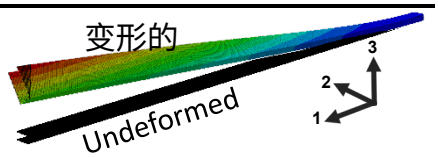
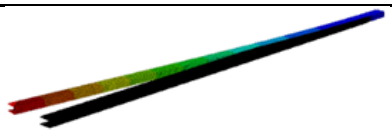


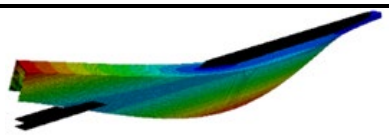
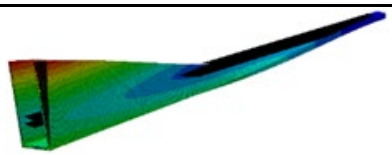
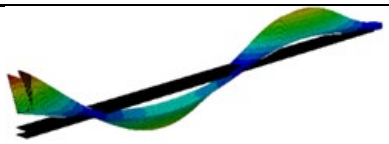
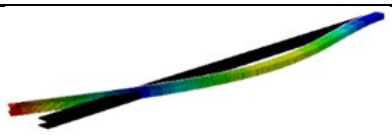
弹性模量 = 68.95 GPa 泊松比 = 0.32 密度 = 2600 kg/m^{3}梁长 = 1.016 m b = 2.54 cm t = 63.5 mm

图 3。 所分析的薄壁悬臂梁具有开放式对称槽形截面。图中展示了 Noor 等人 [59] 使用的几何和材料属性。

我们采用线性扰动法提取前六阶本征频率及其对应的特征向量，并据此计算相应的相对有效模态质量向量，以帮助识别各个模式属于弯曲、扭转还是耦合（混合）模式。求解器（Abaqus CAE）中显示的相对有效模态质量分量和振型如表 3 所示。

表 3。 FE 求解器得到的前六阶固有频率、相对有效质量向量分量和振型。

Mode 编号, n	固有频率, ω^n (Hz)	相对有效平动质量 $\mathbf{q}_t^n = \langle q_{t_1}^n, q_{t_2}^n, q_{t_3}^n \rangle$	相对有效转动质量 $\mathbf{q}_r^n = \langle q_{r_4}^n, q_{r_5}^n, q_{r_6}^n \rangle$	变形与未变形模态形状
1	11.43	〈0, 0, 1〉	〈0.372, 0.628, 0〉	
2	23.158	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	

3	42.705	〈0, 0, 1〉	〈0.656, 0.344, 0〉	
4	57.925	〈0, 0, 1〉	〈0.624, 0.376, 0〉	
5	106.96	〈0, 0, 1〉	〈0.212, 0.788, 0〉	
6	144.5	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	

根据 Noor 等人提出的方法及所提取的振型，相对有效模态质量向量预测，除第二和第六模式外，所有模式均存在显著的弯曲-扭转耦合；第二和第六模式分别是第一和第二水平弯曲模态，其特征是沿*2*轴纯平移（$q_{t_2}^n = 1$）以及绕*3*轴转动（$q_{r_6}^n = 1$）。其余四种模式的耦合行为表现为竖向平移（$q_{t_3}^n$）与绕*2*轴的弯曲相关转动（$q_{r_5}^n$）以及绕*1*轴的扭转相关转动（$q_{r_1}^n$）同时发生。此外，每种耦合模式中弯曲运动和扭转运动的参与程度，可通过各自相关转动的相对值看出：第一和第五模式中，弯曲相关转动占主导；第三和第四模式中，扭转相关转动占主导。这也与 Noor 等人基于应变能所作的预测一致。因此，相对有效模态质量向量能够准确识别全部六种模式，包括耦合模式。

4.2. 铁木辛柯梁中的传播模式与带隙识别

考虑一根周期性嵌入内部谐振器的夹层梁，如 Sharma 等人 [7]此前的研究所述。周期性嵌入弹簧-质量谐振器会因局部共振和布拉格散射效应而形成弯曲波衰减带隙。此处，我们根据文献 [7] 所述的材料和几何参数，将夹层梁建模为铁木辛柯梁，并采用前文所述的单胞方法求得色散曲线；所选晶胞使谐振器连接到中心节点，并在端节点处施加Floquet-Bloch边界条件。我们将梁建模为沿*1*轴延伸的三维线体，并采用二次插值的剪切柔性梁单元（B32）。我们沿纵向（*1*-）方向扫描波矢，采用线性扰动法提取特征值和特征向量。随后，使用 Matlab 脚本根据提取的特征向量计算相对有效模态质量向量。

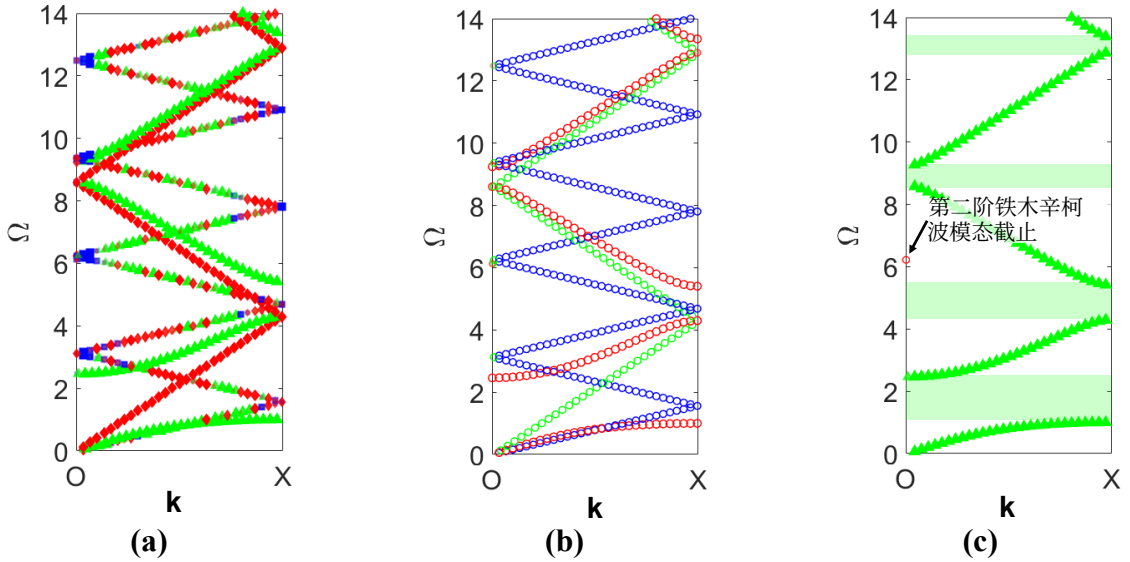


图4。 局域共振夹层梁的色散曲线，研究见参考文献 [7]。**图4(a)**显示相对有效模态质量向量的平移分量，**图4(b)**显示其转动分量。**图4(c)**仅显示沿*2*-方向平动的弯曲波解。符号和色标如图2(c)所示。

图 4(a-b) 展示了局域共振夹层梁在允许所有自由度运动时，识别出的传播模态对应的色散曲线；所有频率均以局域共振频率（200 Hz）归一化。为便于与已发表的结果进行比较，[7], 图 4(c) 展示了仅允许沿*2*轴发生弯曲位移、并允许绕*3*轴转动时得到的色散曲线，这与 Sharma 等人 [7]所采用的假设一致。正如预期的那样，当夹层梁的自由度不受限制时，其色散曲线在该频率范围内呈现多种波模态。周期性嵌入局域共振器会在局域共振频率附近形成低频带隙，并在较高频率处形成多个布拉格带隙。由于共振器运动受限于*2*方向，所形成的所有带隙均具有偏振特性，只能衰减位移偏振方向为*2*方向的弯曲波。图 4(c) 更清楚地显示了这些偏振弯曲带隙的存在：除经典铁木辛柯梁模态（弯曲模态，以及反映剪切变形和转动惯量影响的高阶模态）外，其他所有模态均被抑制。预测的带隙与 [7]中的图 3(b) 所示结果完全吻合。此外，在 $\Omega = 6.12$ 处也准确捕捉到了第二铁木辛柯模态；空心红圈清楚地显示了该模态，并表明绕*3*轴的转动占主导。因此，所提出的方法结合可视化方案，能够轻松识别每种传播波模态，进而准确评估带隙偏振特性。

4.3. 内嵌谐振夹杂的复合*3D*打印超结构 *s*

最后，考虑 Matlack等人 [21]研究的复合3D打印超结构的波衰减行为。该超结构由表面涂覆一层薄聚碳酸酯的钢夹杂组成，并周期性地嵌入3D打印的聚碳酸酯立方晶格中。这种设计通过局部共振与布拉格带隙之间的相互作用，产生低频衰减带隙。在此，我们采用参考文献 [21] 提供的参数复现这一设计，并将预测得到的带隙与 Matlack等人在参考文献 [21]图2(a)所示高刚度情形下获得的结果进行比较。我们使用三维十节点四面体单元（C3D10）将超结构建模为无限长梁。随后，将沿 O-X 路径的色散曲线与相对模态有效质量向量叠加，并绘于图5(a-c)。为清晰起见，我们在图5(a)中绘制位移分量，在图5(b)中绘制转动，在图5(c)中绘制极化因子。然后，我们分别在图5(a)、图5(b)和图5(c)中标出弯曲带隙、扭转带隙和纵向带隙。通过将带隙预测结果与参考文献 [21], 图 S4 进行比较，验证了带隙识别的准确性；该识别过程无需分析每个 $\omega(\boldsymbol{k})$点对应的单独振型。

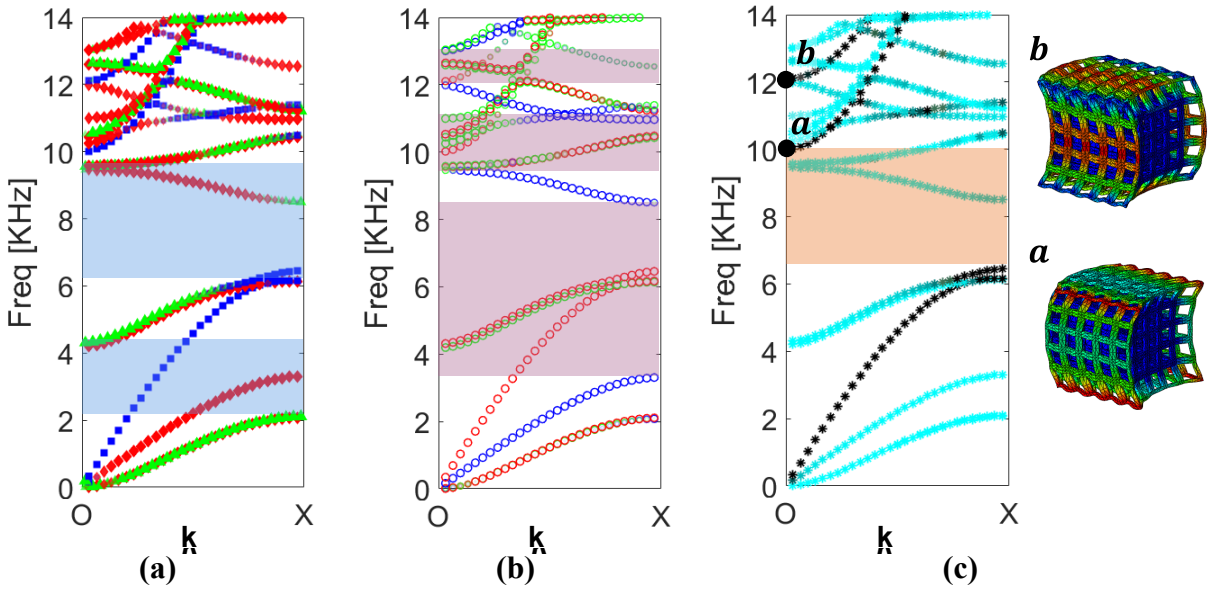


图 5。文献 [21] 中研究的复合 3D 超结构沿 O-X 波矢方向的色散曲线。**图 5(a)**显示相对有效模态质量向量的平移分量，**图 5(b)**显示其转动分量。**图 5(c)**显示位置 *a* 和 *b* 处的偏振因子和振型。图 5(a)、(b) 和 (c) 中的阴影区域分别为识别出的弯曲（蓝色）、扭转（红色）和纵波（橙色）带隙。

与参考文献 [21], 一致，高刚度复合梁设计产生了明显的极化带隙，这些带隙相互重叠，形成了频率范围为 6400 Hz 至 8400 Hz 的全方向带隙。虽然预测的弯曲带隙与参考文献 [21], 中识别出的带隙一致，但

利用相对模态有效质量向量还可以获得更多信息。首先，我们发现还存在两个额外的扭转带隙——其特征是绕轴向的转动占主导——且它们出现在更高频率处；若使用模态振型可视化，这些带隙很难被识别。其次，此处利用极化因子识别出的纵向带隙频率范围比参考文献 [21]中识别出的范围更窄。作者通过观察振型，错误地将高阶纵向模态的截止频率识别为带隙截止频率。实际上，正如极化图所正确预测的那样，纵向模态在更低频率处开始出现；图 5(c) 所示位置 a 和 b 处的振型也验证了这一点。因此，本文提出的方法有助于避免传播模式和带隙的误判，尤其是高频处出现复杂振型时。

5. 方法应用

在此，我们以所提出方法的应用为例，研究方形平面晶格的弹性波传播行为。具体而言，我们关注极化带隙的存在性，以及晶格参数扰动对各个带隙的影响。我们选择第2.1节中研究并在图1中展示的方形晶格作为基础晶格，并系统地扰动其边长比、竖向支杆横截面、内角偏斜度和节点连接类型。所有晶格均在 Abaqus CAE 中采用具有六个自由度的 B32梁单元建模——即允许出现面外模态——并使用所提出的方法提取色散关系和模态识别信息。为确保比较一致，所有晶格的质量始终保持相同。为便于清晰讨论，我们仅分析沿 O-X 波矢方向的极化带隙演变。此处，所有本征频率均以高对称点X处出现的第一个面内弯曲模态的特征频率进行归一化。

5.1. 边长比的影响

我们将边长比定义为 $\epsilon = {}^{L_2}\,/_{L_1}$，其中$L_2$ 和L_1 分别为晶胞沿*2*-轴和*1*-轴的晶格常数。我们通过逐步增大ϵ来改变方形晶格，同时保持其总质量等其他晶格参数不变。图6展示了沿O-X方向，色散曲线及其识别出的传播模式和对应的极化因子随ϵ 变化的情况。图6(a)中绘出了平移分量，图6(b)中绘出了转动分量，图6(c)中绘出了极化因子。为清晰起见，图6(a)中用符号v_i标出了*SV*-带隙的起始频率和截止频率，图6(b)中用符号h_i标出了*SH*-带隙，图6(c)中用符号p_i标出了*P*-带隙。这里，我们将ϵ 从1（即方形晶格）变化至$\epsilon = 1.75$；同时也展示了$\epsilon = 3$ 的极端情况。

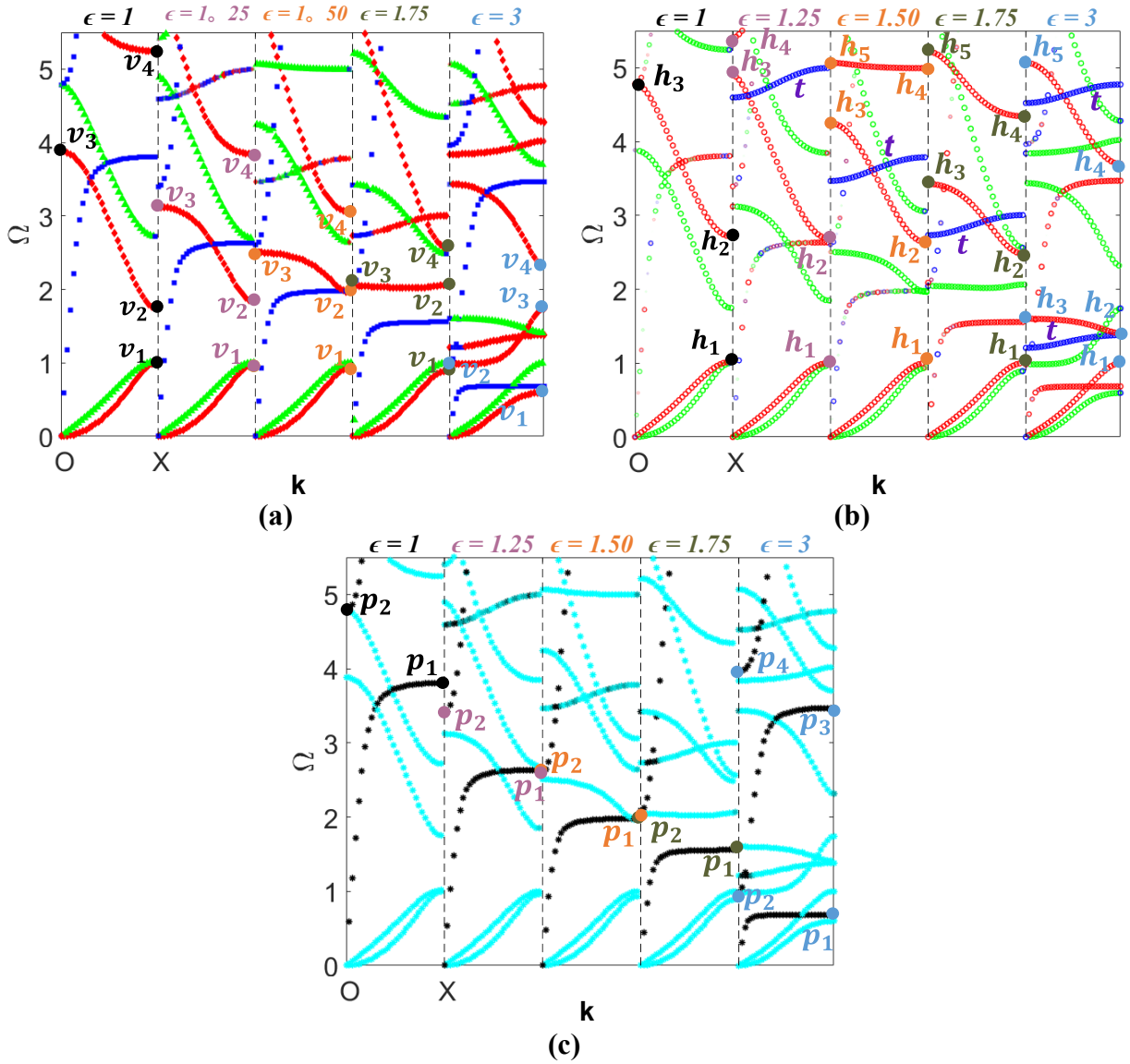


图6。边长比 ϵ 变化对 O-X 波矢方向上色散行为和带隙演化的影响。*SV*-带隙（v_i）的相对有效平动质量以及起始频率和截止频率标示于**图6(a)**；*SH*-带隙（h_i）的相对有效转动质量以及起始频率和截止频率标示于**图6(b)**；*P*-带隙（p_i）的极化因子以及起始频率和截止频率标示于**图6(c)**。图6(b)中标记为*t* 的曲线表示以绕*1*-轴转动为主的驻波。

沿O-X方向，方形晶格ϵ = 1的色散曲线显示，在所考察的频率范围内存在两个*SV*-极化带隙（v_1至v_2 和v_3至v_4）、两个*SH*-极化带隙（h_1至h_2，以及h_3 及以上），还有一个*P*-极化带隙（p_1至p_2）。*SV*-和*SH*-带隙在Ω = 1 至1.748之间重叠，这表明在此频率范围内，只有*P*-波能够沿O-X方向在晶格中传播。这种行为类似于“类流体”行为

Ma 等人最近针对具有各向异性局域共振单胞的三维弹性超材料展示了这一点。随着边长比增大，晶格对称性的降低打破了方形晶格在高对称点 X 处的 SV 本征模态与 SH 本征模态之间的简并，发生频率为 $\Omega = 1$ 。随着 ϵ 增大，第一 SV 带隙的下界 v_1，逐渐移向较低频率，而上界 v_2，则移向较高频率，因此第一 SV 带隙宽度随 ϵ 增大而增加。另一方面，第一 SH 带隙的下界 h_1，保持不变，因为它是归一化频率；上界 h_2，则逐渐移向较低频率，导致第一 SH 带隙宽度随 ϵ 增大而减小。尽管第一 SH 和 SV 带隙宽度的这些变化可能微不足道，但高阶带隙的变化则更为显著。增大 ϵ 会缩小第二 SV 带隙的宽度，同时使其移至相对较低的频率范围。同样，第二 SH 带隙也会随 ϵ 增大而移向较低频率；但与第二 SV 带隙不同，该带隙的宽度会随 ϵ 增大而增加，并且在 $\epsilon = 3$ 的极端情况下会出现超宽 SH 带隙。此外，比较带隙边界曲线的起始和结束位置可知，对于 SH 和 SV 偏振，第一带隙均由布拉格效应驱动，而第二带隙则由晶格共振效应引起 [7]。这些观察结果与以下事实一致：增大 ϵ 不会改变沿 O-X 方向的晶格周期性，但会降低沿 2 轴和 3 轴方向的有效晶格刚度，从而降低导致第二带隙的晶格结构共振频率。在 $\epsilon = 3$ 的极端情况下，第一 SV 带隙转变为共振驱动带隙，而第二 SV 带隙则转变为布拉格带隙。有趣的是，在 $\epsilon = 1.25$ 处出现了一条近乎平坦的能带（图6(b)中标记为 t），其绕 1 轴的转动占主导；该能带随 ϵ 增大而移向较低频率；当 $\epsilon = 3$ 时可观察到两条这样的能带。这些能带的平坦性表明，它们是旋转驻波，在有限结构中表现出类似扭转的行为。

这种刚度降低的影响也体现在*P*-带隙上。该带隙由垂直于波传播方向的竖直晶格支杆中出现的第一个结构共振所产生，这一点可从上、下边界曲线的变化看出。随着ϵ 增加，有效刚度降低，导致共振频率下降，p_1,并使*P*-带隙向较低频率移动。最终，当$\epsilon = 1.75$时，*P*-带隙与第一个*SV*- 和*SH*-带隙在$\Omega = 1.75$至2.5之间重叠，从而形成全方向带隙，使沿O-X传播的所有波均发生空间衰减，而不受其偏振影响。在 $\epsilon = 3$这一极端情况下，各个共振与布拉格效应之间的相互作用导致第一个*SV*- 和*SH*-带隙解耦，但*P*-带隙与*SV*-带隙重叠，因此出现一个频率区域，在该区域内只有*SH*-偏振的波能够通过晶格传播。

5.2. 晶格内角的影响

图7展示了色散曲线和沿O-X方向的波偏振随晶格内角Θ变化的情况。此处，我们通过改变

竖向支杆相对于水平晶格支杆的方向来改变Θ。与ϵ的变化相比，改变Θ会显著改变晶格的色散行为，这表明晶格的弹性波传播行为对晶格中的旋转对称性要敏感得多。鉴于斜晶格的低频模态数量较多，此处我们将分析范围限制在$\Omega = 2.5$。

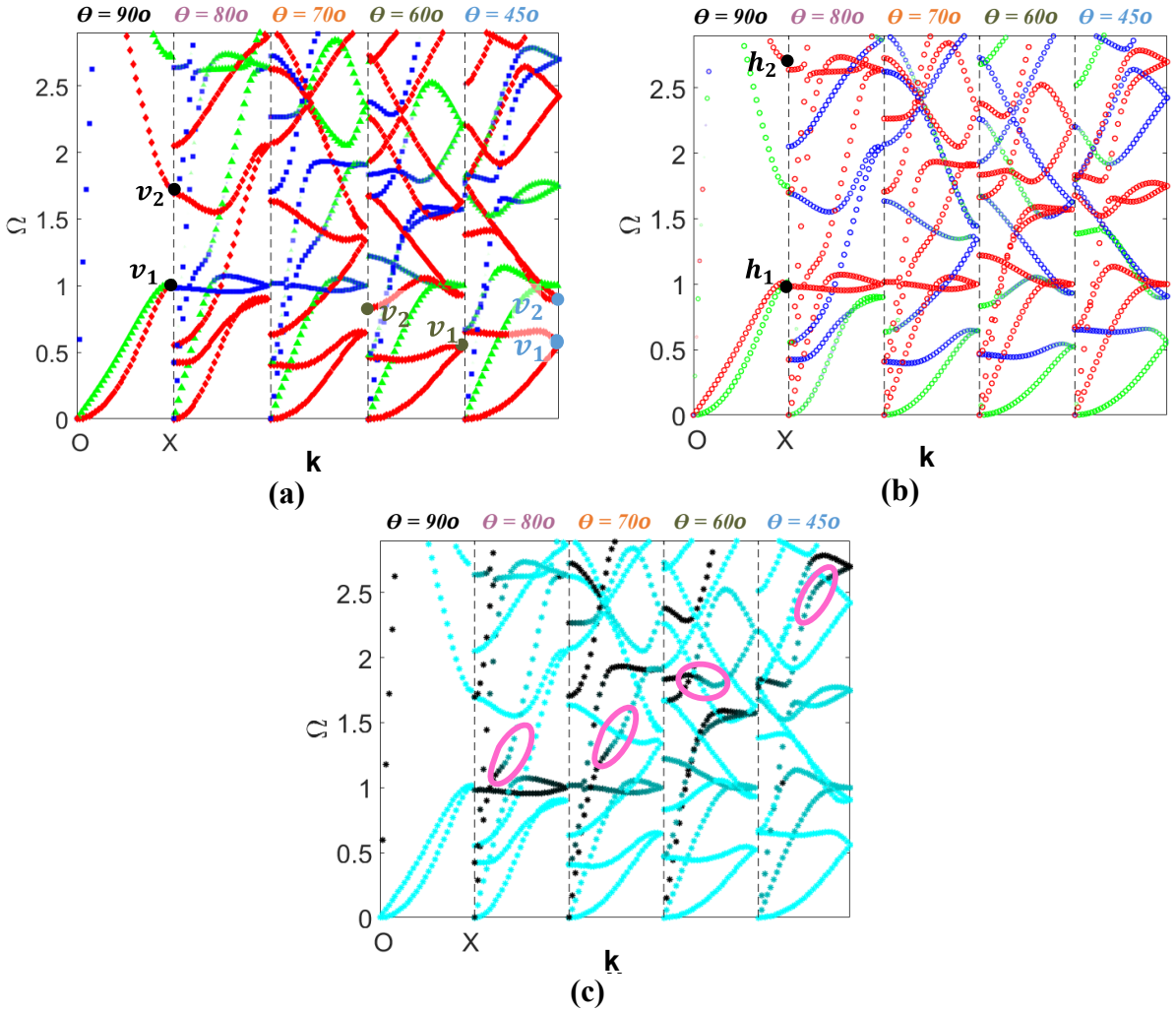


图 7。 晶格内角 Θ 的变化对沿 O-X 波矢方向的色散行为和带隙演化的影响。*SV*-带隙（v_i）的相对有效平动质量及起始频率和截止频率如**图 7(a)**所示；*SH*-带隙（h_i）的相对有效转动质量及起始频率和截止频率如**图 7(b)**所示；极化因子如**图 7(c)**所示，其中椭圆标记展示了 P 波与 S 波传播模式之间模态转换的示例。

将方形晶格（Θ = 90o）改变为角度为 Θ = 80o 的斜晶格后，此前观察到的、起始于 Ω = 1 的布拉格*SV*- 和*SH*-带隙消失，分别标记为v_1-至-v_2 和h_1-至-h_2，。相反，角度畸变导致

出现了多种新的*SV*传播模式，这些模式不同于方形晶格在相同频率范围内观察到的模式——新模式主要由面外运动与绕1轴的类扭转旋转耦合而成。随着角度畸变增大，在 = 60o 和 45o 的情况下，低频*SV*带隙重新出现。改变竖向支杆的方向还会在水平方向引入额外刚度，这一点可从第一条*SH*曲线斜率的增大看出。此外，晶格支杆相对于波矢方向的取向会导致*P*-和*SH*-模式发生面内耦合与模式转换。在偏振角图（图 7(c)）中，可以更清楚地观察到这些耦合的面内传播模式；较深的色散点表示平行于波矢方向的晶格运动占比更高——图 7(c) 标出了同一传播带内两种模式之间转换的代表性情形。因此，极化图有助于更轻松地识别*P*-波解，并相应确定此类波无法传播的频率区间。

5.3 竖向支杆截面宽度的影响

在本例中，我们通过改变竖向支杆的截面形状来调整晶格；具体而言，通过改变其沿*1*-和*3*-方向的截面宽度比来改变竖向支杆。将截面宽度比为 1 的构型作为基础晶格构型——即由方形水平支杆和竖向支杆构成的方形晶格——随后在保持竖向支杆截面积以及晶格总质量不变的情况下，增大其截面宽度比，以改变竖向支杆的形状。我们用符号*V*表示竖向支杆的矩形度。所有其他晶格参数（包括晶格常数L_1和L_2）均保持不变。

图8展示了沿 O-X方向的色散曲线和波偏振随V变化的情况。总体而言，第一SV带隙不受V变化的影响，因为该带隙由布拉格效应产生，其边界由水平支杆的面外运动决定。第一SH带隙的下边界频率（h_1）同样不受V变化的影响，而其上边界频率（h_2）则随V增大而升高，因而带隙变宽。相比之下，由结构共振效应产生的第二SV带隙（v_3-至-v_4）会随V增大而向较低频率移动，这是因为竖向支杆的面外刚度随之降低。该带隙最终与第一SH带隙重叠，形成定向S波带隙，此时只有P波能够传播（V = 2.5）。请注意，在第5.1节中增大ϵ 时也观察到了类似的带隙；然而在该情况下，重叠的SV带隙和SH带隙均由布拉格效应产生。此外，增大V会提高竖向支杆的面内刚度，使由竖向支杆共振引起的第一P带隙（p_1-至-p_2）向较高频率移动。在V = 2时，约在Ω = 5 处可观察到一种以绕1轴转动为主的传播模式（图8(b)中标记为t），与第5.1节中观察到的模式相似。这种转动模态中P模态与SV模态存在显著耦合，可能是由竖向支杆横截面不对称性造成的；它随V增大而向较低频率移动，最终在V = 4这一极端情况下转变为一种传播模式，其特征由纯P模态过渡为纯SV模态。

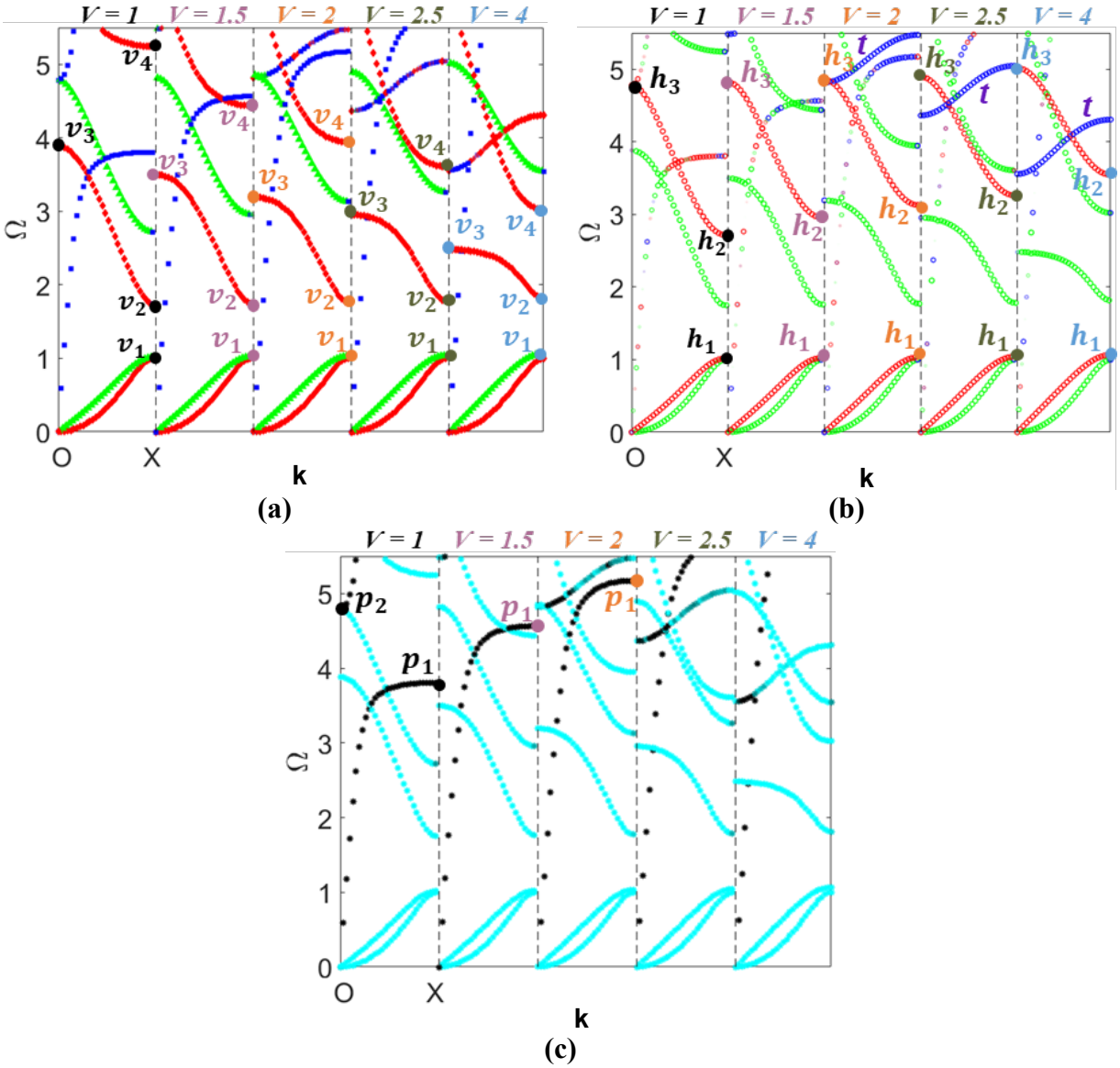


图 8。竖向支杆横截面宽度比 *V* 的变化对沿 O-X 波矢方向的色散行为和带隙演化的影响。*SV*-带隙（v_i）的相对有效平动质量以及起始频率和截止频率见**图 8(a)**；*SH*-带隙（h_i）的相对有效转动质量以及起始频率和截止频率见**图 8(b)**；*P*-带隙（p_i）的偏振因子以及起始频率和截止频率标示于**图 8(c)**。图 8(b) 中标记为*t* 的曲线表示由绕*1*-轴转动主导运动的驻波。

5.4 晶格节点变化的影响

在此，我们考察改变方形晶格中连接水平支杆与竖向支杆的节点性质所产生的影响。此前，Wang 等人[60] 考察了节点连接性对三角形和六边形欧拉-伯努利晶格结构波传播行为的影响。他们的结果表明，改变连接方式会引起局域共振效应

这可能会也可能不会导致完全带隙的产生，具体取决于全局晶格拓扑。

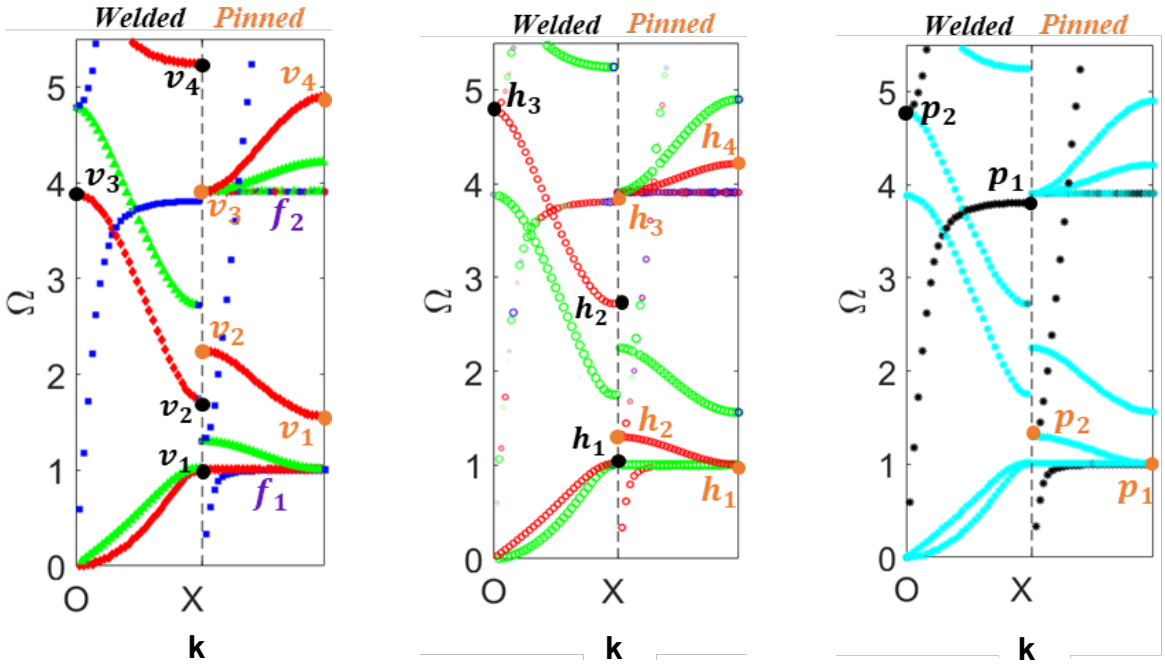


图 9。 沿 O-X 波矢方向，将晶格节点类型由焊接改为铰接对色散行为和带隙演化的影响。*SV*-带隙（v_i）的相对有效平动质量以及起始频率和截止频率见**图 9(a)**；*SH*-带隙（h_i）的相对有效转动质量以及起始频率和截止频率见**图 9(b)**；*P*-带隙（p_i）的极化因子以及起始频率和截止频率标示于**图 9(c)**。图 9(a) 中标记为f_1 和f_2 的曲线表示铰接节点晶格中的驻波或结构共振。

图 9 对比了具有焊接节点和铰接节点的方形晶格的色散曲线和波极化图。与 Wang 等人 [60], 的观察一致，将方形晶格的节点连接方式改为铰接节点会显著改变其色散行为；具体而言，在铰接晶格中可以观察到两条平坦的色散曲线（标记为 f_1 和 f_2），而焊接晶格中不存在这两条曲线，它们表明存在驻波或结构共振。有趣的是，铰接晶格呈现出多个宽广的 *S* 波带隙，包括延伸至 0 Hz 的超低频*SH* 和 *SV* 波带隙，这表明存在一个传播截止频率，在该频率以下所有 *S* 波均发生空间衰减。*SH* 波的截止频率（h_1）低于 *SV* 波的截止频率（v_1）；也就是说，在低于第一个晶格单元弯曲共振频率时，铰接晶格主要表现为类流体结构，仅支持 *P* 波传播。在该共振频率以上还观察到一个 *P* 波带隙（p_1 至 p_2），它与 *SV* 波带隙重叠，形成一个只有 *SH* 波能够穿过该结构传播的频率区间。第二个 *SH* 和 *SV* 波带隙由布拉格效应引起，且二者均终止于第二个结构共振处（v_3 和 h_3 位于平带 f_2 上）。这两种带隙的重叠

会产生第二个类流体行为频率区域，其范围为 v_2 至 v_3。值得注意的是，Wang 等人的结果中也能看到超低频 *S*- 波带隙（见 [60] 随附的补充信息中的图 S8(d)）；本文所展示的可视化方案更便于识别这一现象及其他涌现行为，例如具有铰接节点的方形晶格的类流体行为，而这些现象原本可能很容易被忽略。

6. 结论

本文提出了一种新方法，可准确识别在周期结构和结构化超材料中传播的弹性波的传播模式与极化。该方法旨在替代常用的目视模式检查技术，并将模态参与因子的概念加以扩展，用于量化在每个色散解处，平动和转动运动的各分量对结构整体波动的贡献。对于沿波矢方向取向的结构，该信息足以识别低频弹性波对应的极化；而对于更复杂的情况，我们提出采用一种新的偏振因子，以避免错误识别极化。通过将本方法的预测结果与先前发表的结果进行比较，验证了其稳健性。最后，我们运用所开发的方法，研究晶格和结构参数扰动对平面方形梁晶格波传播行为的影响。通过展示此前未曾观察到的各种定向带隙和极化带隙，以及类流体行为和超低频带隙等新颖动力学特性，我们证明了该方法的有效性。因此，本文提出的方法为研究具有复杂弹性波传播行为的周期介质提供了一种稳健的计算途径。

致谢

本研究未获得公共、商业或非营利部门资助机构提供的任何专项资助。

附录

表A1。 图1中标记位置的计算模态有效质量向量、相对有效模态质量向量及识别出的传播模式。

位置	归一化频率 Ω^n	模态有效质量向量 $\mathbf{m}_{\mathbf{eff}}^n$	相对有效平动质量 $\mathbf{q}_t^n = \langle q_{t_1}^n, q_{t_2}^n, q_{t_3}^n \rangle$	相对有效转动质量 $\mathbf{q}_r^n = \langle q_{r_4}^n, q_{r_5}^n, q_{r_6}^n \rangle$	传播 mode
a	0.978	〈0, 0, 20.931, 0, 0.010, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
b	1.000	〈0.0, 21.202, 0, 0, 0, 0.002〉	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
c	1.738	〈0, 0, 0.146, 0, 0.985, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
c_1	3.412	〈14.390, 0, 0, 0, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	〈0.003, 0.996, 0〉	面内

c_2	3.402	〈0, 0, 0.183, 0, 0.292, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
d_1	3.481	〈0, 0, 0.125, 0, 0.246, 0〉	〈0, 0, 1〉	〈0, 1, 0〉	面外
d_2	3.493	〈13.239, 0, 0, 0, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	〈0, 0.994, 006〉	面内
e_1	10.079	〈0, 0.02, 0, 0, 0, 0〉	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
e_2	10.985	〈0, 1.233, 0, 0, 0, 0〉	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
f_1	2.692	〈0, 0.013, 0, 0, 1.260〉	〈0, 1, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
f_2	1.866	〈14.4, 0, 0, 0, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
g	2.985	〈7.21, 7.21, 0, 0, 0, 0.297〉	〈0.5, 0.5, 0〉	〈0, 0, 1〉	面内
h	3.193	〈8.309, 8.309, 0, 0, 0, 0〉	〈0.5, 0.5, 0〉	〈0.195，0.038，0.767〉	面内

表 A2。 图1中标记位置的平动模态参与因子、局部波矢取向、偏振因子以及识别出的波偏振。

位置 归一化频率 Ω^n **Γ**		模态参与因子的平移分量 $\boldsymbol{n}$ t	局部波矢 $\mathbf{k}_d$ 偏振因子 $\boldsymbol{\Phi}^n$		波偏振
a	0.978	〈0, 0, 0.691〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
b	1.00	〈0, 0.976, 0〉	〈1, 0, 0〉	0	*SH*-波
c	1.738	〈0, 0, 0.143〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
c_1	3.412	〈1.827, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	1	*P*-波
c_2	3.402	〈0, 0, −0.116〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
d_1	3.481	〈0, 0, −0.150〉	〈1, 0, 0〉	0	*SV*-波
d_2	3.493	〈1.346, 0, 0〉	〈1, 0, 0〉	1	*P*-波
e_1	10.079	〈0, −0.013, 0〉	〈1, 0, 0〉	0	*SH*-波
e_2	10.985	〈0, 0.493, 0〉	〈1, 0, 0〉	0	*SH*-波
f_1	2.692	〈0, 0.007, 0〉	〈1, 0, 0〉	0	*SH*-波
f_2	1.866	〈0.156, 0, 0〉	〈0, 1, 0〉	0	*SH*-波
g	2.985	〈0.497, −0.497, 0〉	〈−1, −1, 0〉	0	*SH*-波
h	3.193	〈0.566, 0.566, 0〉	〈−1, −1, 0〉	1	*P*-波

参考文献

[1] M.I. Hussein、M.J. Leamy、M. Ruzzene，《声子材料与结构动力学：历史起源、近期进展与未来展望》，《应用力学评论》，66（2014年）。[2] S.A. Cummer、J. Christensen、A. Alù，利用声学超材料控制声音，《自然综述：材料》，1（2016年）1-13。[3] G. Ma、P. Sheng，声学超材料：从局部共振到广阔前景，《科学进展》，2（2016年）e1501595。[4] L. Brillouin，《周期结构中的波传播》，第2版，Dover出版社，纽约（1946年）。[5] T.J. Cui、D.R. Smith、R. Liu，《超材料》，施普林格，2010年。

[6] L. Liu, M.I. Hussein，周期性弯曲梁中的波动及布拉格散射与局域共振之间转变的表征，应用力学杂志，79 (2012).[7] B. Sharma, C.-T. Sun，含有周期性嵌入谐振器的夹层梁中的局域共振与布拉格带隙，《声学与振动杂志》，364 (2016) 133-146.[8] L. Raghavan, A.S. Phani，周期介质中的局域共振带隙：理论与实验，《美国声学学会杂志》，134 (2013) 1950-1959.[9] J. Achenbach，《弹性固体中的波传播》，爱思唯尔，2012.[10] J.F. Doyle，结构中的波传播，载于：《结构中的波传播》，施普林格，1989，第126-156页。[11] G. Armstrong，悬臂梁中扭转与弯曲振动模态之间的耦合，载于，杜伦大学，1972。[12] B.R. Mace, E. Manconi，波动与色散现象：模态回避、锁定和强耦合效应，《美国声学学会杂志》，131 (2012) 1015-1028.[13] E. Manconi, B. Mace，结构动力学中的模态回避与强耦合效应，《振动与声学杂志》，139 (2017) 021009.[14] S. Mizuno，非均匀超晶格散射声子的共振与模态转换，《物理评论B》，68 (2003) 193305.[15] N. Joel，氟化锂晶体中弹性波的反射与极化：从纵波到横波的模态转换，《物理学会会刊》(1958-1967)，78 (1961) 38.[16] J. Willis，弹性波散射的极化方法——I. 单个夹杂引起的散射，《固体力学与物理学杂志》，28 (1980) 287-305.[17] B. Manzanares-Martinez, F. Ramos-Mendieta，声子晶体中的矢状面声波：波数依赖偏振，《物理评论B》，76 (2007) 134303.[18] D.L. Anderson，层状各向异性介质中的弹性波传播，《地球物理研究杂志》，66 (1961) 2953-2963.[19] M. Musgrave，弹性波在晶体及其他各向异性介质中的传播，《物理学进展报告》，22 (1959) 74.[20] A. Bacigalupo, M. Lepidi，周期性梁格材料中的声波偏振与能量流，International Journal of Solids and Structures，147 (2018) 183-203.[21] K.H. Matlack, A. Bauhofer, S. Krodel, A. Palermo, C. Daraio，用于低频宽带振动吸收的复合3D打印超结构，Proc Natl Acad Sci U S A，113 (2016) 8386-8390.[22] G. Ma, C. Fu, G. Wang, P. Del Hougne, J. Christensen, Y. Lai, P. Sheng，全固态弹性超材料中的偏振带隙与类流体弹性，《自然·通讯》，7 (2016) 1-8.[23] A. Bayat, S. Gaitanaros，三维周期晶格中的波传播方向性，应用力学杂志，85 (2017).[24] M. Ruzzene, F. Scarpa, F. Soranna，二维胞元结构中的波束效应，《智能材料与结构》，12 (2003) 363-372。

[25] A.J. Zelhofer, D.M. Kochmann，二维结构晶格中的声波定向传播，International Journal of Solids and Structures，115-116 (2017) 248-269.[26] B. Manzanares-Martínez, J. Sánchez-Dehesa, A. Håkansson, F. Cervera, F. Ramos-Mendieta，有限一维声子系统中全向弹性带隙的实验证据，Applied physics letters，85 (2004) 154-156.[27] Y. Wang, Z. Li, M.V. Golub, G. Huang, W. Chen, C. Zhang，界面脱层诱发多层介质中导波的单向传播，Mathematics and Mechanics of Solids，(2022) 10812865221092680.[28] H. Miao, F. Li，用于结构健康监测和无损检测的水平剪切波换能器：综述，Ultrasonics，114 (2021) 106355.[29] K. Helbig, J.M. Carcione，各向异性介质中的反常偏振，European Journal of Mechanics-A/Solids，28 (2009) 704-711.[30] H.J. Lee, J.R. Lee, S.H. Moon, T.J. Je, E.C. Jeon, K. Kim, Y.Y. Kim，用于弹性波偏振异常的偏心双缝超材料，Sci Rep，7 (2017) 15378.[31] G.U. Patil, K.H. Matlack，用于反常弹性波偏振的三维负泊松比晶格材料，J Acoust Soc Am，145 (2019) 1259.[32] H. Huang, C. Sun，具有负有效质量密度的声学超材料中的波衰减机制，New Journal of Physics，11 (2009) 013003.[33] D. Mead，具有多重耦合的线性周期系统中谐波传播的一般理论，《声学与振动杂志》，27 (1973) 235-260.[34] D. Mead, S. Parthan，二维周期板中的自由波传播，《声学与振动杂志》，64 (1979) 325-348.[35] D. Mead, K. Pujara，周期支承梁的空间谐波分析：对流随机载荷下的响应，Journal of sound and vibration，14 (1971) 525-541.[36] D.J. Mead，周期支承无限梁中的自由波传播，《声学与振动杂志》，11 (1970) 181-197.[37] D.J. Mead，周期系统中的波传播与固有模态：I. 单耦合系统，《声学与振动杂志》，40 (1975) 1-18.[38] Y.-K. Lin, T. McDaniel，梁式周期结构的动力学，(1969).[39] D.J. Mead，一种分析周期结构中波传播的新方法；在周期性铁木辛柯梁和加筋板中的应用，《声学与振动杂志》，104 (1986) 9-27.[40] R.M. Orris, M. Petyt，周期结构中谐波传播的有限元研究，《声学与振动杂志》，33 (1974) 223-236.[41] W. Axmann, P. Kuchment，一种计算光子与声学带隙材料谱的高效有限元法：I. 标量情形，Journal of Computational Physics，150 (1999) 468-481.[42] M. Åberg, P. Gudmundson，标准有限元程序在计算具有周期微结构材料的色散关系中的应用，《美国声学学会杂志》，102 (1997) 2007-2013。

[43] N.G. Guarin-Zapata, J.，《基于声子晶体理论的谱有限元法评估》，《计算声学杂志》，23（2015年）。[44] J.F. Doyle，《采用有限元方法的非线性结构动力学》，剑桥大学出版社，2014年。[45] C. Kittel、P. McEuen、P. McEuen，《固体物理学导论》，Wiley纽约，1996年。[46] A.S. Phani，M.I. Hussein，《晶格材料动力学》，约翰·威立父子出版社，2017年。[47] Y. Achaoui、A. Khelif、S. Benchabane、V. Laude，材料各向异性条件下二维声子晶体和波导中的偏振态与能级排斥，《物理学杂志D：应用物理》，43（2010年）185401。[48] I.J. Pérez-Arriaga、G.C. Verghese、F.C. Schweppe，《电力系统选择性模态分析及其应用，第一部分：启发式介绍》，《IEEE电力设备与系统汇刊》，（1982年）3117-3125。[49] P. Jayakumar，《结构动力学中的建模与识别》，（1987年）。[50] W.T. Thomson，《振动理论及其应用》，CRC出版社，2018年。[51] M. Ruzzene、F. Scarpa、F. Soranna，二维胞元结构中的波束效应，《智能材料与结构》，12（2003年）。[52] A.S. Phani、J. Woodhouse、N.A. Fleck，二维周期晶格中的波传播，《美国声学学会杂志》，119（2006年）1995-2005。[53] N. Perkins、C. Mote Jr，《关于特征值问题中曲线回避的评论》，《声学与振动杂志》，106（1986年）451-463。[54] A.S. Veletsos、Carlos E. Ventura，非经典阻尼线性系统的模态分析，《地震工程与结构动力学》，14.2（1986年）217-243。[55] J.-T. Chen、H-K. Hong、Chau-Shioung Yeh，支承运动问题中模态参与因子的模态反应法，《工程数值方法通讯》，11.6（1995年）479-490。[56] U. Füllekrug，《基座驱动试验中有效质量和模态质量的确定》，国际模态分析会议（IMAC），第14届，密歇根州迪尔伯恩，（1996年）。[57] M. Nieto、M. Elsayed、D. Walch，模态参与因子及其在航空航天领域的潜在应用：综述，（2018年）。[58] M. Aenlle、M. Juul、R. Brincker，《结构动力学中的模态质量与振型长度》，《冲击与振动》，2020（2020年）。[59] A.K. Noor、J.M. Peters、B.-J. Min，薄壁梁自由振动的混合有限元模型，《有限元分析与设计》，5（1989年）291-305。[60] P. Wang、F. Casadei、S.H. Kang、K. Bertoldi，通过调谐连接性实现周期梁晶格中的局域共振带隙，《物理评论B》，91（2015年）。