arXiv:2301.11398v1 [math.SP] 26 Jan 2023

ˇSmigoc 在左半平面普适可实现性中的拼接法*

Jaime H. Alfaro, RicardoL. Soto†北方天主教大学
数学系，智利安托法加斯塔，邮政信箱 1280。

摘要

若尔当标准形由 Λ. 允许的每一种可能情形决定时，复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 若是某个非负矩阵的谱，则称其为可实现。若对 Λ. 允许的每一种可能若尔当标准形都可实现，则称其为普适可实现（$\mathcal{UR}$）。本文利用伴随矩阵ˇ并采用 Smigoc 提出的方法，为左半平面谱的普适可实现性给出一个充分条件，即$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 其中 $\lambda_1 > 0$，$\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0, i = 2, \ldots, n.$。此外，本文还说明了在一个非 $\mathcal{UR}$ 左半平面复数列表中加入一个负实数后，如何使新列表 $\mathcal{UR}$；并刻画了一族 $\mathcal{UR}$ 的左半平面列表。

AMS分类：15A18, 15A20,15A29
关键词：非负矩阵；伴随矩阵；普遍可实现性；Smigoc 拼接法。

1 引言

若复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是某个 $n \times n$ 非负矩阵 A的谱，则称其可实现；而 A 称为 Λ.的实现矩阵。谱的可实现性问题称为

*由北方天主教大学（Universidad Católica del Norte）VRIDT 036-2020、N´úcleo 6 UCN VRIDT 083-2020（智利）资助。
†电子邮件地址：rsoto@ucn.cl（R. L. Soto）、jaime.alfaro@ucn.cl（J. H. Alfaro）。

非负逆特征值问题（NIEP）。根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，我们知道，若 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是某个 $n \times n$ 非负矩阵 A的谱，则 A 的主特征值等于 A的谱半径，即 $\rho(A) =: \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ 。该特征值称为佩龙特征值。本文中我们将假设 $\rho(A) = \lambda_1$.

如果一个矩阵的每一行之和都等于同一个常数 $\alpha.$ ，则称该矩阵具有常数行和。所有行和等于 α 的矩阵集合记为 $\mathcal{CS}_{\alpha.}$。那么，任意矩阵 $A \in \mathcal{CS}_{\alpha}$ 都有特征向量 $\mathbf{e}^T = [1, 1, \ldots, 1]$，对应的特征值为 $\alpha.$。行和为常数的实矩阵很重要，因为已知寻找一个谱为 $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 的非负矩阵，等价于寻找一个属于 $\mathcal{CS}_{\lambda_1}$ 且谱为 Λ 的非负矩阵（见 [3]）。我们用 $\mathbf{e}_k$ 表示 n 维向量，其第 k^{th} 个位置n为 1，其余位置为 0。如果 $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，则 s_k（Λ） $= \sum \lambda_i^k$， $k = 1$，2，.....$_{i=1}$

若一个复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 存在一个针对 Λ 的可对角化实现矩阵，则称其为可对角化可实现（$\mathcal{DR}$）。若列表 Λ 对于 Λ. 所允许的每一种若尔当标准形（JCF）都是可实现的，则称其为普遍可实现（$\mathcal{UR}$）。谱的普适可实现性问题称为普遍可实现性问题（URP）。URP包含非负逆特征值问题（NIEP）；当给定的数 λ_1、λ_2、.....、λ_n 互异时，这两个问题是等价的。就 n而言，这两个问题对于 $n \geq 5$. 仍未解决。显然，如果 Λ 是 $\mathcal{UR}$，那么 Λ 必定是 $\mathcal{DR}$。关于URP的最早已知结果归功于 Minc [7, 8]。就URP而言，Minc [7] 证明了：如果复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是某个可对角化正矩阵的谱，那么 Λ 是 $\mathcal{UR}$。Minc的证明需要正性条件，而Minc本人提出的关于该结果是否对非负实现成立的问题，悬而未决近40年。最近，Minc 的结果在 [1, 4]中得到了两项扩展。在 [1], 中，Collao等人证明了：具有正列的非负矩阵 $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$与某个正矩阵相似。注意，如果 A 是具有正行的非负矩阵，且 A^T 具有正特征向量，那么 A^T 也与某个正矩阵相似。此外，如果 Λ 可由具有正列的矩阵$A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ 可对角化实现，那么 Λ 是 $\mathcal{UR}$。在 [4], 中，Johnson等人引入了ODP矩阵的概念，即所有非对角线元素均为正的非负矩阵（允许对角元素为零），并证明了

如果 Λ 是可对角化 ODP 可实现的，那么 Λ 是 $\mathcal{UR}$。注意，这两项扩展都将Minc 的结果作为 [7]中的一个特例。这两项扩展使我们能够显著扩大可证明为$\mathcal{UR}$的谱的集合，例如，某些具有 $s_1(\Lambda) = 0$的谱 $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，这是Minc 的结果无法做到的。特别地，我们将利用 [1] 中的扩展来得到一些结果。

备注 1.1 在 *[1],* 第2节的定理 2.1 和推论 2.1 中，假设若 A 非负且有一行为正，则具有正列的 A^T 与正矩阵相似，这一假设是错误的。原因是我们无法保证 A^T 有正特征向量。

关于非正普适实现，我们提到，在 [10,2]中，作者分别证明了以下复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$（Suleimanova 型，即

$$\lambda_1 > 0,\ \operatorname{Re}\lambda_i \le 0,\ |\operatorname{Re}\lambda_i| \ge |\operatorname{Im}\lambda_i|,\ i = 2, 3, \ldots, n,$$

ˇ或 Smigoc 型，即

$$\lambda_1 > 0,\ \operatorname{Re}\lambda_i \le 0,\ \sqrt{3}\,|\operatorname{Re}\lambda_i| \ge |\operatorname{Im}\lambda_i|,\ i = 2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

$_n$是 $\mathcal{UR}$，当且仅当它们可实现，当且仅当 $\sum_{i=1} \lambda_i \ge 0$.

论文结构：本文组织如下：第2节介绍用于推导本文结果的数学工具。第3节研究左半平面列表的 URP，并给出其成为 $\mathcal{UR}$ 的充分条件。第4节讨论将负实数 $-c$ 添加到左半平面列表 $\Lambda = \{\lambda_1, -a \pm bi, \ldots, -a \pm bi\}$ 后的影响；该列表可能并非 $\mathcal{UR}$ （甚至可能不可实现），也可能尚不确定是否如此。我们展示了 $\Lambda \cup \{-c\}$ 如何变为 $\mathcal{UR}$。此外，我们还刻画了一族 $\mathcal{UR}$ 的左半平面列表。第 5 节证明，两个可对角化可实现列表 $\Gamma_1 \in \mathrm{CS}_{\lambda_1}$ 和 $\Gamma_2 \in \mathrm{CS}_{\mu_1}$ 的合并是 $\mathcal{UR}$。文中还给出了示例来说明这些结果。

2 预备知识

ˇ在本文中，我们使用以下结果：第一个结果由 Smigoc[9], 给出，它提供了一种我们称为 ˇSmigoc 的拼接技术的方法，可由两个

大小分别为 n×n 和 m×m 的矩阵 A 和 B 构造出一个新的（$n+m-1$）×（$n+m-1$）矩阵 C，并以某种方式保留 A 和 B. 所对应的若尔当标准形。第二个结果由 Laffey 和 ˇSmigoc [6] 给出，解决了左半平面上复数列表的非负逆特征值问题，即满足 $\lambda_1 > 0$、Re $\lambda_i \leq 0$、 $i = 2$、.....、 n. 的列表。此外，我们还使用了 [6]中的引理 5。

定理 2.1 *[9]* 设 B 是一个 m×m 矩阵，其若尔当标准形中至少包含一个对应于特征值 c 的 1×1 约当块：

$$J(B) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & I(B) \end{bmatrix}.$$

设 t 和 s 分别为 B 的左、右特征向量，对应于上述标准形中的 1×1 约当块。此外，将向量 t 和 s 归一化，使得 $\mathrm{t}^T\mathrm{s} = 1$. 设 $J(A)$ 是以下 n×n矩阵的若尔当标准形

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{bmatrix},$$

其中 A_1 是一个 $(n-1)$×$(n-1)$ 矩阵，a 和 b 是 $\mathbb{C}^{n-1}$.中的向量。于是矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{at}^T \\ \mathbf{sb}^T & B \end{bmatrix}$$

的若尔当标准形为

$$J(C) = \begin{bmatrix} J(A) & 0 \\ 0 & I(B) \end{bmatrix}.$$

定理 2.2 *[6]*设 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是一个复数列表，满足$\lambda_1 \geq |\lambda_i|$ 且 Re $\lambda_i \leq 0, i = 2, \ldots, n.$ 那么 Λ 可实现，当且仅当

$$s_1 = s_1(\Lambda) \geq 0, \quad s_2 = s_2(\Lambda) \geq 0, \quad s_1^2 \leq n s_2.$$

引理 2.1 *[6]*设 t 为非负实数， λ_2、 λ_3、.....、 λ_n 为实部小于或等于零的复数，且列表$\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ 在复共轭运算下封闭。令 $\rho = 2t - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n$, 并且

$$f(x) = (x-\rho)\prod_{j=2}^{n}(x-\lambda_j) = x^n - 2tx^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n. \qquad (2)$$

那么 $b_2 \leq 0$ 对 $j = 3$，4，...， n.均有 $b_j \leq 0$

ˇ 3 伴随矩阵与 Smigoc 拼接法。

如果复数列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 满足 $\lambda_1 > 0$、Re $\lambda_i \leq 0$、 $i = 2$、3、...、 $n.$，我们称该列表位于左半平面。本节将给出一个充分条件，使左半平面中的复数列表 $\mathcal{UR}$。当然，我们感兴趣的是考察包含位于 Smigoc 型列表的可实现区域之外的元素 ˇ 的复数列表。我们的策略是将给定列表 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 分解为若干子列表

$$\Lambda_k = \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots, \lambda_{kp_k}\},\ \lambda_{11} = \lambda_1,\ k = 1, 2, \ldots, t,$$

带有辅助列表

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Lambda_1 \\ \Gamma_k &= \{s_1(\Gamma_{k-1}), \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots, \lambda_{kp_k}\},\ k = 2, , \ldots, t, \end{aligned}$$

其中每个列表都是某个非负伴随矩阵 ˇ A_k 的谱，从而可以对矩阵 A_k 应用 Smigoc 的拼接技术，得到一个具有谱 Λ 的 $n{\times}n$ 非负矩阵，且适用于 $\Lambda.$ 所允许的每一种可能的若尔当标准形。在 $s_1(\Lambda) > 0$ 的情况下，若存在，我们可以选取子列表 Γ_k，使其成为某个具有正列的可对角化非负伴随矩阵的谱。ˇ 然后，经过 Smigoc 拼接，我们得到一个具有谱 Λ 且有正列的可对角化 $n{\times}n$ 非负矩阵 A ，它与一个可对角化正矩阵相似。因此，由 [1] 中的扩展可得， Λ 为 $\mathcal{UR}$。接下来，我们给出定理 2.1 的以下推论：

推论 3.1 设 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 是一个可实现的左半平面复数列表。假设对于 Λ 允许的每个若尔当标准形 J，都存在 Λ 的如下分解：

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_t,\ where \\ \Lambda_k &= \{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots, \lambda_{kp_k}\},\ k = 1, 2, \ldots, t,\ \lambda_{11} = \lambda_1, \end{aligned}$$

其中辅助列表

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Lambda_1, \\ \Gamma_k &= \{s_1(\Gamma_{k-1}), \lambda_{k1}, \lambda_{k2} \ldots, \lambda_{kp_k}\},\ k = 2, \ldots, t, \end{aligned}$$

是一个非负伴随矩阵的谱 A_k ，其若尔当标准形为 J，且 (A_k) 是 J $k = 1$, 2, . . ., t 的一个子矩阵。
那么， Λ 是普遍可实现的。

证明。由于每个矩阵 $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, t$ 都是非负伴随矩阵，且其若尔当标准形 $J(A_k)$ 是 J 的子矩阵，因此，将 ˇSmigoc 拼接法应用于矩阵 A_k，可得到一个谱为 Λ、若尔当标准形为 J 的 $n\times n$ 非负矩阵。由于 J 是 Λ 所允许的任意若尔当标准形，因此 Λ 是 $\mathcal{UR}$. ■

以下结果众所周知且很有用。

引理 3.1 设 A 是一个谱为 $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 且具有正行或正列的可对角化不可约非负矩阵。那么 A 与一个具有正行或正列的可对角化非负矩阵 $B \in \mathsf{CS}_{\lambda_1}$ 相似。

证明。若 A 是不可约非负矩阵，则它有一个正特征向量 $\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_n]$.。于是若 $D = dig\{x_1, \ldots, x_n\}$，矩阵

$$B = D^{-1}AD = \left[\frac{x_j}{x_i}a_{i,j}\right] \in CS_{\lambda_1}$$

是一个具有正行或正列的非负矩阵。 ■

假设推论 3.1 中的所有列表 Γ_k 都可以取为具有正列（最后一列）的可对角化非负伴随矩阵 A_k 的谱。那么，由于矩阵 A_k 的胶合给出一个具有正列且谱为 Λ 的 n 阶可对角化不可约非负矩阵 A，A 与一个谱为 Λ 的可对角化正矩阵相似，因此 Λ 是 $\mathcal{UR}$。下一个结果将说明这一点。

推论 3.2 设 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 2, \ldots, n$, $s_1(\Lambda) > 0$ 是一个可实现的左半平面复数列表。若 Λ 存在推论 3.1 中的分解，且所有列表 Γ_k 都是带有正列的可对角化非负伴随矩阵 A_k 的谱，则 Λ 普遍可实现。

证明。只需对分解的两个列表 Γ_k 证明该结果。设 Γ_{k-1} 和 Γ_k、$k = 2$... ... t 分别是矩阵 A_{k-1} 和 A_k 的谱，其中这些矩阵是具有正列（最后一列）的可对角化非负伴随矩阵。于是 A_{k-1} 和 A_k 是不可约的。特别地，A_k 具有一个正特征向量 s，并且由于 A_k^T 也是不可约的，A_k 也具有一个正左特征向量 t^T，其中 $\mathsf{t}^T\mathsf{s} = 1$. 现在，设

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} A_{1,k-1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & s_1(\Gamma_{k-1}) \end{bmatrix}.$$

由于 A_{k-1} 的最后一列为正，向量 a 也是正的，并且 ^{T} 是一个正子矩阵。因此， A_{k-1} 与 A_k 的胶合，

$$C_k = \begin{bmatrix} A_{1,k-1} & \mathbf{at}^T \\ \mathbf{sb}^T & A_k \end{bmatrix},$$

是一个可对角化非负矩阵，且其最后一列为正。注意， C_k 也不可约。于是， C_k 此外还具有一个正特征向量，并且由引理 3.1 C_k 与一个具有常数行和且最后一列为正的矩阵相似。因此， C_k 与一个可对角化正矩阵相似。然后，将 Smigoc 拼接法应用于所有矩阵 A_k ，得到一个 n×n 的可对角化不可约非负矩阵 A ，它有一列为正，且谱为 Λ。因此， A与一个谱为 Λ 的可对角化正矩阵相似，并且根据 [1] Λ 中的扩展， $\mathcal{UR}$。 ■

注意，若在推论 3.2 中有 $\lambda_i \neq 0$、 $i = 2$、.....、 n； s_1（Λ） > 0； b_2（A_k） > 0，则可以保证存在一个 n×n 的可对角化不可约非负矩阵 A ，其谱为 Λ 且有一列为正。因此，这足以证明 Λ. 的普适可实现性

例 3.1 考虑以下列表

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{23, -2, -2, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i, -1 \pm 5i, -2 \pm 7i, -2 \pm 7i\}, \ with \\ \Gamma_1 &= \{23, -1 \pm 5i\}, \ \Gamma_2 = \{21, -2, -1 \pm 5i, -2 \pm 7i\}, \\ \Gamma_3 &= \{13, -2, -1 \pm 5i, -2 \pm 7i\}. \end{aligned}$$

可对角化伴随矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 598 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 21 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57\,876 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35\,002 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6266 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1695 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35\,828 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20\,618 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3194 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 903 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ˇ 分别实现列表 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3。将 Smigoc 的拼接技术应用于矩阵 A_1、A_2 和 A_3，可得到一个 13×13 的可对角化不可约非负矩阵，它具有一个正列，且其谱为 $\Lambda.$。因此，根据引理 3.1 和 *[1]*，Λ 是普适可实现的。

4 在非普适可实现列表中添加一个负实数的效果

本节将说明，如何向复数列表 $-c$ 中添加一个负实数

$$\Lambda = \{\lambda, -a \pm bi, \ldots, -a \pm bi\},\ \lambda, a, b > 0,\ \text{with } s_1(\Lambda) > 0,$$

使其不是 $\mathcal{UR}$，或者我们不知道它是否是

$$\Lambda_c = \{\lambda, -c, \underbrace{-a \pm bi, \ldots, -a \pm bi}_{(n-2) \text{ complex numbers}}\}$$

$\mathcal{UR}$。例如，列表 $\Lambda_1 = \{6, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}$ 是可实现的，但我们不知道它是否为 $\mathcal{UR}$；而 $\Lambda_2 = \{17, -3 \pm 9i, -3 \pm 9i\}$ 则不可实现。不过，只要分别向这两个列表添加适当的负实数 $-c$，它们都会变成 $\mathcal{UR}$。

本节从一个引理开始，该引理给出了计算列表 Λ_c 在式 (2) 中的系数 b_2 的公式（引理 2.1）

引理 4.1 设

$$\Lambda_c = \{\lambda, -c, \underbrace{-a \pm bi, \ldots, -a \pm bi}_{(n-2)\ complex\ numbers}\}$$

为可实现的复数左半平面谱列表，并令 $\Lambda_c = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_t$ 是 Λ_c的分解，$-c \in \Lambda_t$带有辅助列表 Γ_k及其对应的伴随矩阵 A_k、$k = 1$、2、.....、t，如推论 3.1 所示，该分解与由 $\Lambda_c.$ 允许的目标若尔当标准形相关。于是，矩阵A_k、$k = 1$、2、.....、t中位置（$n-1$，n）处的元素为

$$b_2 = p(2a\lambda - 2a^2 n + (4k - 2p + 1)a^2 - b^2) + c(\lambda - (n-2)a), \qquad (3)$$

其中，（$k-1$）是 Λ_c的可对角化分解中最后一个列表 Γ_t的对数 $-a\pm bi$与分解中每个前置列表 Γ_k、 $k=1$、.....、 $t-1$的对数 $-a\pm bi$之和，而 p 是相应列表 Γ_k. 的对数$-a\pm bi$ 。此外， b_2 会随 k 的增加而增加。

证明。众所周知， $b_2=\sum \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}$，其中有 $\lambda_{ji}\in\Gamma_k$，由此得到式 (3) 中的 $1\le j_1<j_2\le n b_2$ 。此外，显然当 k 增大时， b_2 也会增大。

■

例 4.1 考虑

$$\Lambda_c=\{\frac{77}{4},-3,\underbrace{-2\pm 5i,\ldots,-2\pm 5i}_{8\ complex\ numbers}\}.$$

Λ_c 的可对角化分解中的最后一个可对角化列表为

$$\Gamma_4:(x-\frac{29}{4})(x+3)(x+2-5i)(x+2+5i)$$

其实现矩阵为

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2523}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{841}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{\frac{39}{4}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow b_2(A_4)=\frac{39}{4} \\
b_2 &= p(2a\lambda-2a^2n+(4k-2p+1)a^2-b^2)+c(\lambda-(n-2)a) \\
b_2(A_4) &= (4\frac{77}{4}-80+(8-2+1)4-25)+3(\frac{77}{4}-16)=\frac{39}{4}.
\end{aligned}$$

假设我们想要得到一个若尔当标准形为

$$\mathbf{J}=diag\{J_1(\frac{77}{4}),J_1(-3),J_2(-2+5i),(J_2(-2-5i)\}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\Gamma_1' &= \{\frac{77}{4},-2\pm 5i,-2\pm 5i\} \\
\Gamma_2' &= \{\frac{45}{4},-3,-2\pm 5i,-2\pm 5i\}.
\end{aligned}$$

若 A_1'、A_2' 分别是 Γ_1' 和 Γ_2' 的伴随实现矩阵，那么根据引理 **4.1**，$b_2(A_2') = \frac{103}{4}$、$b_2(A_1') = 80$ 保证 A_1' 和 A_2' 均为非负。接下来，将 A_1' 与 A_2' 胶合，得到一个若尔当标准形为 J 的非负矩阵。

定理 4.1 设 $\Lambda = \{\lambda, -a \pm bi, \ldots, -a \pm bi\}$、固定的 λ、a、$b > 0$ 为一个复数列表，满足 $s_1(\Lambda) > 0$. 若

$$\frac{(2n-11)a^2 + b^2}{2a} \leq \lambda, \tag{4}$$

且存在实数 $c > 0$ 使得

$$\frac{2a(na-\lambda) + b^2 - 7a^2}{\lambda - (n-2)a} \leq c \leq \lambda - (n-2)a, \tag{5}$$

then

$$\Lambda_c = \{\lambda, -c, \underbrace{-a \pm bi, \ldots, -a \pm bi}_{(n-2)\ complex\ numbers}\}$$

变为普遍可实现。

证明。考虑分解 $\Lambda_c = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \cdots \cup \Lambda_{\frac{n-2}{2}}$，其中

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \{\lambda, -a \pm bi\}, \\
\Lambda_k &= \{-a \pm bi\},\ k = 2, \ldots, \frac{n-4}{2}, \\
\Lambda_{\frac{n-2}{2}} &= \{-c, -a \pm bi\}.
\end{aligned}$$

我们取辅助子列表

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Lambda_1 = \{\lambda, -a \pm bi\} \\
\Gamma_2 &= \{\lambda - 2a, -a \pm bi\} \\
\Gamma_3 &= \{\lambda - 4a, -a \pm bi\} \\
&\vdots \\
\Gamma_{\frac{n-4}{2}} &= \{\lambda - (n-6)a, -a \pm bi\}, \\
\Gamma_{\frac{n-2}{2}} &= \{\lambda - (n-4)a, -c, -a \pm bi\},
\end{aligned}$$

其中$\Gamma_{\frac{n-4}{2}}$和 $\Gamma_{\frac{n-2}{2}}$是可对角化伴随矩阵的谱

$$A_{\frac{n-4}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (a^2+b^2)(\lambda-(n-6)a) \\ 1 & 0 & 2a\lambda - a^2(2n-11) - b^2 \\ 0 & 1 & \lambda-(n-4)a \end{bmatrix}$$

and

$$A_{\frac{n-2}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (a^2+b^2)(\lambda-(n-4)a)c \\ 1 & 0 & 0 & (a^2+b^2)(\lambda-(n-4)a) + (7a^2 - b^2 + 2a\lambda - 2a^2n)c \\ 0 & 1 & 0 & (\lambda-(n-2)a)c + (7a^2 - b^2 + 2a\lambda - 2a^2n) \\ 0 & 0 & 1 & \lambda-(n-2)a-c \end{bmatrix},$$

分别。注意，子列表$\Gamma_{\frac{n-6}{2}}, \ldots, \Gamma_2, \Gamma_1$ 与列表 $\Gamma_{\frac{n-4}{2}}$ 含有相同的一对复数，但佩龙特征值更大。因此，如果 $\Gamma_{\frac{n-4}{2}}$ 是可对角化伴随可实现的，那么 $\Gamma_{\frac{n-6}{2}}, \ldots, \Gamma_2, \Gamma_1$ 也可对角化伴随可实现。因此，由引理 2.1 可知，我们只需考虑 $A_{\frac{n-4}{2}}$ 中位置 (2, 3) 处的元素，以及 $A_{\frac{n-2}{2}}$. 中位置 (3, 4) 处的元素。由 (4) 和 (5)，这些元素均为非负，因此 $A_{\frac{n-4}{2}}$ 和 $A_{\frac{n-2}{2}}$ 是可对角化伴随实现矩阵。因此，对矩阵 $A_1, \ldots, A_{\frac{n-2}{2}}$ 应用 ˇSmigoc 拼接法 $\frac{n-4}{2}$ 次后，我们得到一个 $n \times n$ 的可对角化非负矩阵 A，其谱为 Λ_c. 。因此， Λ_c 是 $\mathcal{DR}$.

为了得到一个 $n\times n$ 的非负矩阵 A ，其谱为 Λ_c ，且具有非对角若尔当标准形 J，我们取 $\Lambda_c = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_t$ ，其辅助列表 Γ_k 是一个伴随矩阵 A_k 的谱，而该矩阵的若尔当标准形是 J 的子矩阵。接下来需要证明所有 A_k 都是非负的。为此，我们根据公式 (3) 计算 $b_2(A_t)$，其中 A_t （其 Γ_t 包含 $-c$）是 Λ_c. 的可对角化分解中最后一个可对角化矩阵。由 (4) 和 (5)，$b_2(A_t) \geq 0$. 。根据引理 4.1，所有 $b_2(A_k)$ $k = 1$、.....、$t-1$ 都是非负的。因此，矩阵 A_k 的胶合给出一个 $n\times n$ 的非负矩阵 A ，其具有所需的若尔当标准形 J。

■

例 4.2 *i)* $\Lambda = \{6, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}$ 可由伴随矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 140 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 104 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

以及一个非对角约当标准形实现。我们不知道 Λ 是否有可对角化实现。接着，考虑列表

$$\Lambda_c = \{6, -c, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}.$$

条件 (4) 得到满足，并且由 (5) 可得 $1 \leq c \leq 2$. 于是，对于 $c = 2$，我们有

$$\Gamma_1 = \{6, -1 \pm 3i\}, \quad \Gamma_2 = \{4, -2, -1 \pm 3i\}$$

分别是可对角化非负伴随矩阵的谱

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ and \ \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ˇ。于是，由 Smigoc 拼接法可得到一个谱为 Λ_c. 的可对角化非负矩阵。显然，由与 Λ_c 相关联的特征多项式， Λ_c 也有一个伴随矩阵实现 A_3,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 880 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 348 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 104 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其若尔当标准形的块均为最大尺寸。注意，(3) 中的公式给出 ($k = 2$, $p = 1$, $t = 2$) $b_2(A_2) = 2$，而 ($k = 3$, $p = 2$) 给出 $b_2(A_3) = 4$. 因此 Λ_c 是 $\mathcal{UR}$。注意，若 $1 \leq c \leq 2$，则

$$\Lambda_c = \{6, -c, -1 \pm 3i, -1 \pm 3i\}$$

也为 $\mathcal{UR}$。

ii) 考虑列表 $\Lambda = \{17, -3 \pm 9i, -3 \pm 9i\}$. 由于 $s_1(\Lambda) = 5$ 且 $s_2(\Lambda) =$1, Λ 不可实现。根据条件 (5), $\frac{24}{5} \leq c \leq 5$. 那么对于 $c = 5$,

$$\Lambda_c = \{17, -5, -3 \pm 9i, -3 \pm 9i\}$$

是 $\mathcal{UR}$。事实上，

$$\Gamma_1 = \{17, -3 \pm 9i\} \; and \; \Gamma_2 = \{11, -5, -3 \pm 9i\}$$

是可对角化非负伴随矩阵的谱，它们通过 Smigoc 拼接法得到一个谱为 Λ_c. 的可对角化非负矩阵。由与 Λ_c 相关联的特征多项式，我们得到一个谱为 Λ_c 且具有非对角约当标准形的非负伴随矩阵。因此， Λ_c 是 $\mathcal{UR}$.

注意，在定理 4.1 中，尽管 $s_1(\Lambda) > 0$，但如果 $s_1(\Lambda)$ 足够小，就存在一些列表 Λ_c，它们不是 $\mathcal{UR}$ ，或者我们无法证明它们是通过我们的方法得到的。然而，根据定理 4.1，我们可以计算出一个佩龙特征值 λ，它保证对于一族列表 Λ_c，当 $c > 0$ 且 $n \geq 6$ 时， Λ_c 将是 $\mathcal{UR}$。接下来，以下结果刻画了一族普适可实现的左半平面列表 $\mathcal{UR}$。

推论 4.1 该族的左半平面列表

$$\Lambda_c = \{\frac{1}{2a}((2n-7)a^2 + b^2), -c, \underbrace{-a \pm bi, \ldots, -a \pm bi}_{(n-2) \; complex \; numbers}\},$$

其中 $0 < \sqrt{3}a < b$、 $0 < c \leq \frac{b^2 - 3a^2}{2a}$ 均普遍可实现。

证明。显然，对于 $\lambda = \frac{1}{2a}((2n-7)a^2 + b^2)$，定理 4.1 中的条件 (4) 和 (5) 均得到满足。此外，由 $0 < \sqrt{3}a < b$, $\lambda - (n-2)$ $a = \frac{b^2 - 3a^2}{2a} > 0$. ■

那么，根据推论 4.1，一些普适可实现的左半平面谱列表如下：

$$i) \; \Lambda_c = \{\frac{2n-3}{2}a, -c, \underbrace{-a \pm 2ai, \ldots, -a \pm 2ai}_{(n-2) \text{ complex numbers}}\}, \text{ with } 0 < c \leq \frac{a}{2}$$

$$ii) \; \Lambda_c = \{(n+1)a, -c, \underbrace{-a \pm 3ai, \ldots, -a \pm 3ai}_{(n-2) \text{ complex numbers}}\}, \text{ with } 0 < c \leq 3a$$

$$iii) \; \Lambda_c = \{\frac{2n+9}{2}a, -c, \underbrace{-a \pm 4ai, \ldots, -a \pm 4ai}_{(n-2) \text{ complex numbers}}\}, \text{ with } 0 < c \leq \frac{13}{2}a$$

$$iv) \; \Lambda_c = \{\frac{8n-3}{8}a, -c, \underbrace{-a \pm \frac{5}{2}ai, \ldots, -a \pm \frac{5}{2}ai}_{(n-2) \text{ complex numbers}}\}, \text{ with } 0 < c \leq \frac{13}{8}a,$$

等等。

注意，在推论 4.1 中，如果 c 严格小于其上界，那么如我们所见， Λ_c可由一个末列为正的可对角化矩阵实现。于是，根据 [1]中的扩展， Λ_c 是 $\mathcal{UR}$。

5 谱的合并

设 $\Gamma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 和 $\Gamma_2 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$ 是复数列表。在 [5] 中，作者将谱 Γ_1与 Γ_2 的合并定义为

$$\Gamma = \{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_2, \ldots, \mu_m\},$$

并证明，如果 Γ_1 和 Γ_2 是可对角化 ODP 可实现的，那么它们与 Γ_1 和 Γ_2的合并也可对角化 ODP 可实现，因此根据 [4]中的扩展， Γ 是 $\mathcal{UR}$。下面给出一个类似的结果:

定理 5.1 设 $\Gamma_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 > |\lambda_i|$, $i = 2, \ldots, n$是一个可对角化非负 n×n 矩阵 $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ 的谱，且其末列为正。设 $\Gamma_2 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$, $\mu_1 > |\mu_i|$, $i = 2, \ldots, m$是一个可对角化非负 m×m 矩阵 $B \in \mathcal{CS}_{\mu_1}$ 的谱，且其末列为正。那么

$$\Gamma = \{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_2, \ldots, \mu_m\}$$

是普遍可实现的。

证明。设 $A \in \mathcal{CS}_{\lambda_1}$ 是一个谱为 Γ_1 且最后一列为正的可对角化非负矩阵。那么 A 与一个可对角化正矩阵 A'. 相似。如果 α_1, ..., α_n 是 A' 的对角元，那么

$$A_1 = A' + \mathbf{e}[0, 0, \ldots, \mu_1] = \begin{bmatrix} A'_{11} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & \alpha_n + \mu_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{CS}_{\lambda_1 + \mu_1}$$

是可对角化正矩阵，其谱为 $\{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，对角元素为 α_1、 α_2、 .....、 $\alpha_n + \mu_1$.。设$B \in \mathcal{CS}_{\mu_1}$是一个可对角化非负矩阵，其谱为 Γ_2，且最后一列为正。则 B 与一个可对角化正矩阵 B' 相似，且

$$B_1 = B' + \mathbf{e}[\alpha_n, 0, \ldots, 0]$$

是可对角化正矩阵，其谱为 $\{\mu_1+\alpha_n,\mu_2,\ldots,\mu_m\}$.。现在，通过对矩阵 A_1 和 B_1 应用 Smigoc 拼接法，我们得到一个可对角化正矩阵 C，其谱为 Γ.。因此， Γ 是 $\mathcal{UR}$ ■

定理 5.1 在许多情况下有助于判定左半平面复数列表是否具有普遍实可实现性，例如：

例 5.1 列表

$$\Gamma=\{30,-1,-5,-1\pm 3i,-1\pm 3i,-1\pm 3i,-3\pm 9i,-3\pm 9i\}\ \mathcal{UR}?$$

注意，根据第4节的结果，

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{21,-5,-3\pm 9i,-3\pm 9i\}.\\ \Gamma_2 &= \{9,-1,-1\pm 3i,-1\pm 3i,-1\pm 3i\}\end{aligned}$$

是具有常数行和及正列（最后一个）的可对角化非负矩阵的谱。因此，它们与可对角化正矩阵相似；根据定理 5.1，合并 Γ 也是可对角化正矩阵的谱。因此， Γ 是 $\mathcal{UR}$。

参考文献

[1] M. Collao、M. Salas、R. L. Soto，《双随机矩阵普适可实现的谱》，Special Matrices 6（2018）301-309。[2] R. C. Diaz、R. L. Soto，《左半平面中的非负逆初等因子问题》，Linear Multilinear Algebra 64（2016）258-268。[3] C. R. Johnson，《与双随机矩阵相似的行随机矩阵》，Linear Multilinear Algebra 10（1981）113-130。[4] C. R. Johnson、A. I. Julio、R. L. Soto，《具有Jordan结构的非负可实现性》，Linear Algebra Appl. 587（2020）302-313。[5] C. R. Johnson、A. I. Julio、R. L. Soto，《谱的可对角化可实现性与普适可实现性的指标》，已投稿。[6] T. J. Laffey、H. ˇSmigoc，《具有负实部的谱的非负实现》，Linear Algebra Appl. 416（2006）148-159。

[7] H. Minc, 《非负矩阵的逆初等因子问题》, 美国数学会会刊 83（1981年）665-669。[8] H. Minc, 《双随机矩阵的逆初等因子问题》, Linear Multilinear Algebra 11（1982年）121-131。[9] H. Smigoc, 《非负矩阵的逆特征值问题》, Linear Algebra Appl. 393（2004年）365-374。[10] R. L. Soto、R. C. D´íaz、H. Nina、M. Salas, 《具有给定谱和初等因子的非负矩阵》, Linear Algebra Appl. 439（2013年）3591-3604。