arXiv:2301.11424v1 [math.CT] 26 Jan 2023

严格∞-范畴的归纳模型结构

Simon Henry 和 Felix Loubaton

摘要

我们构造了一个“标记的严格 ∞-范畴”的左半模型范畴，其中纤维对象是指其标记箭头满足自然闭包性质且弱可逆的对象。严格 ∞-范畴上的典范模型结构可以恢复为此模型结构的左 Bousfield 局部化。我们证明，将 Street 神经适当地扩展到标记情形，会在我们的模型范畴与复形集的 Verity 模型结构之间产生一个 Quillen 伴随，从而推广第二位作者先前的结果。最后，我们利用这一模型结构，在严格 ∞-范畴的背景下研究这样一种观点：弱 (∞,∞)-范畴存在若干种彼此不等价的概念，具体取决于所采用的 (∞,n)-范畴塔。我们证明，(∞,∞)-范畴至少应有三种不同的概念。

目录

1 引言 2
1.1 Street 神经作为右 Quillen 函子.3 1.2 (∞,∞)-范畴的两种（？）概念.3

2 ∞-范畴与标记的 ∞-范畴 5
2.1 ∞-范畴.5 2.2 标记的 ∞-范畴.8 2.3 m-标记的 ∞-范畴的张量积.9 2.4 半模型结构.12

3 方程与饱和：m-标记的 ∞-范畴中的 **17**
3.1 方程与饱和的定义.18 3.2 纤维对象的刻画.20 3.3 同构纤维化.24 3.4 等价.26 3.5 饱和局部化.27

4 与其他模型结构的比较 29
4.1 截断函子.29 4.2 与 ∞-Cat 上的 folk 模型结构的比较 . . . . . 36 4.3 folk 模型结构与 π-塔的极限 . . . . . 38 4.4 复杂单纯集与分层 Street 神经.42

1 引言

本文在第 2.2 节引入一个范畴 ∞-$\mathbf{Cat}^m$，其对象是“m-标记的（严格） ∞-范畴”，适用于 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。 ∞-$\mathbf{Cat}^m$ 的对象是严格的 ∞-范畴；与分层单纯集类似，其中一些箭头被“标记”。标记箭头要求对复合封闭，所有恒等态射以及所有维数 $> m$ 的箭头也都标记。范畴 ∞-$\mathbf{Cat}^m$ 带有两种闭幺半结构，分别记作 $\ominus$和 $\sim$；这两种结构在底层严格∞-范畴上均为 Gray-Crans 张量积，但对标记的作用方式不同。这两种幺半结构分别旨在作为“lax-Gray 张量积”和“伪 Gray 张量积”的模型。

我们的主要结果是在 ∞-$\mathbf{Cat}^m$ 上构造一种模型结构[1]，类似于 [19] 中严格 ∞-范畴上的典范（或“Folk”）模型结构：

1.1 定理。范畴 ∞-$\mathbf{Cat}^m$ 上存在一种组合左半模型结构，其对象为 m-标记的 ∞-范畴，并满足：

- 该模型结构对于两种张量积 $\sim$ 和 $\ominus$（见第 2.3 节）都是幺半的。
- 余纤维化是那些在底层 ∞-范畴之间属于典范模型结构余纤维化的映射。
- 纤维对象是标记的 ∞-范畴，其中所有标记箭头都存在标记弱逆；并且，如果存在标记箭头 $a \to b$，那么当且仅当 b 被标记时，a 才被标记。
- 纤维对象之间的纤维化就是“同构纤维化”（定义见第 3.3 节）。
- 纤维对象之间的弱等价就是“标记的 ∞-范畴之间的等价”（定义见第 3.4 节）。

这个模型结构是严格“(∞, m)-范畴”的一个模型，其中“可逆性”或维数为 $> m$ 的箭头是在弱意义下理解的。这个模型结构的存在性在第 2.4 节中得到证明，但它的一些性质，尤其是纤维对象以及纤维对象之间的纤维化的刻画，要到第 3 节才会得到证明。

我们还考虑这个模型结构的两种左 Bousfield 局部化：

- 第 3.5 节研究的饱和归纳模型结构，其纤维对象是这样的 ∞-范畴：其中每个在标记箭头意义下弱可逆的箭头也都是标记的。
- 第 4.2 节研究的余归纳模型结构，其纤维对象是这样的 ∞-范畴：其中每个余归纳可逆箭头（见定义 4.16）都是标记的。

第二个局部化等价于[2] ∞-范畴上的典范模型结构，见 [19]。

引入这一模型结构的动机来自两条不同的研究脉络，我们将在下文分别加以说明：

[1]我们使用“模型范畴”一词作为各种模型范畴的统称（Quillen 模型范畴、半模型范畴、弱模型范畴等.....）。[2]不过这并非通过 Quillen 等价实现。

1.1 Street 神经作为右 Quillen 函子

在 [20], 中，第二位署名作者证明，可以通过将顶维箭头弱可逆的单纯形定义为“薄”单纯形，使严格∞-范畴的 Street 神经成为一个复杂单纯集。

由此，自然会问：这个分层版本的 Street 神经是否也保纤维化，因而是纤维对象范畴之间的一个态射（本文将在命题 4.51 中证明这一点）。

事实上，更一般地，我们可以问，能否将这个版本的 Street 神经构造成一个右 Quillen 函子（相对于 [30] 中复形集上的 Verity 模型结构）。这无法直接实现，原因很简单：这个分层 Street 神经不是右伴随函子。解决这一问题的办法是在两边都引入标记：从严格 ∞-范畴到单纯集的通常 Street 神经是一个右伴随函子，而且可以将其扩展为从带标记的 ∞-范畴到“带标记”单纯集（或者说，按照 [30] 中的术语，分层单纯集）的右伴随函子。我们将在第 4.4 节证明，这个函子确实是一个右 Quillen 函子。

这个从标记的 ∞-范畴到分层单纯集的右 Quillen 函子，旨在作为从严格 (∞,∞)-范畴到弱 (∞,∞)-范畴的遗忘函子的模型。特别地，对应的从分层单纯集到标记的 ∞-范畴的左 Quillen 函子，是那个更为神秘的“严格化函子”的模型，它将弱 ∞-范畴映射为严格 ∞-范畴。

在 ∞-群胚的层面上，这个严格化函子本质上对应于（非阿贝尔）同调，这是通过严格 ∞-群胚与交叉链复形 ([7]) 之间的等价实现的。众所周知，根据同调的 Whitehead 定理，该函子是保守的。第一位署名作者猜想， [17] 更一般地说，对于所有 m，这个严格化函子在弱 (∞,m)-范畴上都应当是保守的。因此，我们可以在此给出这一猜想的一个具体版本：

1.2 猜想。第 4.4 节中的左 Quillen 函子 $|\_|\colon \mathrm{sSet}^m \to \infty\text{-}\mathrm{Cat}^m$ 反映余纤维对象之间的弱等价。

1.2 两种（？）(∞,∞)-范畴的概念

C.Schommer-Pries 和 C.Rezk 分别提出了 ([16])，认为弱 (∞,∞)-范畴的概念不止一种。更确切地说，他们都得出这样的结论：即使接受（如今这似乎已是明确的共识）有限 n 的弱 (∞,n)-范畴只有一种概念，仍至少有两种不同的方式可以由此构造出 (∞,∞)-范畴的概念。

在进一步讨论之前，我们应当说明，以下讨论大多是非正式且带有推测性的，其中大部分尚未在任何模型中形式化。事实上，本文的一个动机就是在严格 ∞-范畴的背景下，将其中一些内容形式化。

首先，让我们回顾一下 Rezk 和 Schommer-Pries 提出的论证，或者至少是我们对它的理解：从 (∞,n)-范畴到 $(\infty,n+1)$-范畴的遗忘（或包含）函子应当同时有一个左伴随 π_n，它自由地为所有 $(n+1)$-箭头添加逆元；还有一个右伴随τ_n，它会移除所有不可逆的 $(n+1)$-箭头。

这使我们能够构造两种不同的塔：

$$(\infty,0)\text{-Cat} \overset{\pi_0}{\leftarrow} (\infty,1)\text{-Cat} \overset{\pi_1}{\leftarrow} (\infty,2)\text{-Cat} \overset{\pi_2}{\leftarrow} \dots \overset{\pi_{n-1}}{\leftarrow} (\infty,n)\text{-Cat} \overset{\pi_n}{\leftarrow} \dots$$

$$(\infty,0)\text{-}\mathbf{Cat} \overset{\tau_0}{\leftarrow} (\infty,1)\text{-}\mathbf{Cat} \overset{\tau_1}{\leftarrow} (\infty,2)\text{-}\mathbf{Cat} \overset{\tau_2}{\leftarrow} \dots \overset{\tau_{n-1}}{\leftarrow} (\infty,n)\text{-}\mathbf{Cat} \overset{\tau_n}{\leftarrow} \dots$$

并且，可以对这两个塔中的任意一个取射影极限，从而给出 (∞,∞)-范畴的定义。

如果取 π-塔的极限，就会发现，所谓“余归纳”可逆的箭头（见定义 4.16）必须被视为可逆。确切地说，我们的意思是，如果 $F\colon X \to Y$是 π-塔极限中的一个态射，并且存在一个逆元，使得二者在一个余归纳可逆的自然变换意义下互为逆，那么 F 就是一个等价。

然而， τ-塔极限中的情形截然不同：给定一个按此意义定义的 (∞,∞)-范畴，它对应于一族 (∞,n)-范畴X_n ，满足 $X_n \simeq \tau_n X_{n+1}$；而一个 n-箭头对应于 X_n（或当 $k > n$ 时对应于 X_k ）中的一个 n-箭头。在这种情形下，等价有一个内在的定义：如果一个 n-箭头属于 X_{n-1} （等价地说，如果它在 (∞,n)-范畴 X_n 中可逆），就称它为等价。在这种情形下，余归纳可逆箭头不一定可逆，前提是见证其余归纳可逆性的高维胞腔中没有一个是可逆的。

为了清楚地表明二者不同，例如可以考虑协边的 (∞,∞)-范畴。在 τ-塔的极限中，可以通过令 X_n 为协边的 (∞,n)-范畴来定义它。在这个 (∞,∞)-范畴中，每个箭头都有一个对偶，因此根据 E.Cheng 的一个结果（见 [9]），协边 (∞,∞)-范畴中的每个箭头都是余归纳可逆的，尽管对于所有 n， X_n 中都存在许多不可逆的 n-箭头。因此，如果试图在 π-塔的极限中定义 X_n ，它将等价于一个 ∞-群胚。

利用标记的严格 ∞-范畴的模型结构，我们将在严格 ∞-范畴的语境中将这两种构造形式化。当然，这只是弱 ∞-范畴情形的一个玩具模型，但它已经很有意思，也将表明上面的图景虽然正确，却还需要稍作完善。

首先，我们将在第4.1节证明， ∞-Cat^{m}上用于 $m = \infty$ 的模型结构对应于上述 τ-塔的极限。更准确地说，我们将证明，它与适当的∞-Cat^m 的 $m < \infty$ 的同伦极限 Quillen 等价，并以 τ_n 函子作为转移函子。

我们所使用的塔的模型结构的同伦极限概念是在 [6], 中引入的，我们将使用他们对同伦极限的构造。这里有一个我们应当说明的小缺口： [6] 仅发展了 Quillen 模型范畴中此类极限的理论，而没有涉及半模型范畴；我们将直接把他们的构造应用于我们的左半模型范畴。为了使我们的论证在这一点上仍然完整，我们将证明 [6] 中的构造确实给出了一个左半模型范畴，但不会重新证明它对应于 [6, 定理 5.1]中的同伦极限。不过，需要指出的是，在实际应用中，[6] 中的论证似乎几乎无需修改即可迁移到我们的情形，因此这一缺口并不真正构成问题。

在第 4.2 节中，我们将证明，folk 模型结构等价于我们的模型结构的左 Bousfield 局部化；这相当于将所有余归纳可逆箭头变为等价。

然而，我们还将在第4.3节证明，folk 模型结构并不等价于 π-塔的极限。尚不清楚 π_n 塔的极限是否对应于对我们模型结构的进一步局部化，还是完全不同的东西；但我们发现，我们将在第4.3节给出的论证，用以区分 folk 模型结构与 π-塔的极限，而该论证表明，这个极限呈现出的行为并非 (∞,∞)-范畴概念通常所预期的，或者至少并非任何已知的 ∞-范畴模型所具有的典型行为。

回到弱 (∞,∞)-范畴的世界，这表明弱 (∞,∞)-范畴最有趣的两种概念是 τ_n 塔的极限（它对应于一种“归纳式”的等价概念），以及将余归纳等价转化为等价的局部化；但这种局部化应当不同于 π_n-塔的极限，后者或许并不是一种有趣的 (∞,∞)-范畴概念。我们的意思是，我们不知道有人曾尝试给出 (∞,∞)-范畴的具体定义，而这种定义似乎能产生与该极限等价的对象。我们所见过的所有定义，都可以合理地猜想为等价于 τ_n 塔的极限，或等价于其“余归纳式”局部化。

2 ∞范畴与标记的 ∞范畴

2.1 ∞范畴

球状集合是球状范畴 $\mathbb{G}$上的一个预层：

$$\mathbb{D}_0 \underset{i_0^-}{\overset{i_0^+}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_1 \underset{i_1^-}{\overset{i_1^+}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_2 \underset{i_2^-}{\overset{i_2^+}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_3 \underset{i_3^-}{\overset{i_3^+}{\rightrightarrows}} \mathbb{D}_4 \dots$$

满足关系 $i_n^\epsilon i_{n-1}^+ = i_n^\epsilon i_{n-1}^-$，对所有的 $n > 0$ 和 $\epsilon \in \{+,-\}$均成立。我们还用 i_k^ϵ 表示映射 $\mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_n$，其中 $k < n$ 由以 i_k^ϵ结尾的任意箭头串复合而成。这些映射和恒等箭头是范畴 $\mathbb{G}$中的全部映射。

若 X 是一个球状集合，则用 X_n 表示集合 $X(\mathbb{D}_n)$，其元素称为 n-箭头。由 $i_k^\epsilon\colon \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_n$ 诱导的映射 $X_n \to X_k$ 记为 π_k^ϵ。

2.1 定义。一个 ∞-范畴是一个球状集合 X，并附带复合运算

$$X_n \times_{X_k} X_n \to X_n \quad (0 \le k < n)$$

它将满足 $\pi_k^+(x) = \pi_k^-(y)$ 的两个 n-箭头（x、y）关联到一个 n-箭头$x\#_k y$，以及恒等态射

$$X_n \to X_{n+1}$$

将一个 n-箭头 x 与一个 $(n+1)$-箭头 $\mathbb{I}_x$ 相关联，并满足以下公理：

(1) $\forall x \in X_n, \pi_n^\epsilon(\mathbb{I}_x) = x$。

(2) 当复合有定义且 $k \leqslant n$ 时，$\pi_k^-(x\#_n y) = \pi_k^-(x)$ 和 $\pi_k^+(x\#_n y) = \pi_k^+(y)$。

(3) 当复合有定义且 $k > n$ 时，$\pi_k^\epsilon(x\#_n y) = \pi_k^\epsilon(x)\#_n \pi_k^\epsilon(y)$。

(4) $x\#_n \mathbb{I}_{\pi_n^+ x} = x$ 和 $\mathbb{I}_{\pi_n^- x}\#_n x = x$。

(5) 只要其中一个有定义，$(x\#_n y)\#_n z = x\#_n(y\#_n z)$。

(6) 如果 $k < n$

$$(x\#_n y)\#_k(z\#_n w) = (x\#_k z)\#_n(y\#_k w)$$

当左侧有定义时。

∞-范畴的态射是一个与两个运算均相容的球状集映射。∞-范畴构成的范畴记作 ∞-Cat。

2.2 定义. ∞-范畴中的一个 $(n+1)$-箭头 c 称为平凡的，或称为恒等箭头，若存在一个 n-胞腔 d 使得 $c = \mathbb{I}_d$。

2.3 例. 记号滥用地，我们也用 $\mathbb{D}_n$ 表示这样一个 ∞-范畴：对于任意 $k < n$，它只有两个 k-非平凡箭头，分别记作 e_k^- 和 e_k^+，以及一个非平凡的 n-箭头，记作 e_n，满足：

$$\begin{array}{llll} \pi_l^-(e_k^\epsilon) = e_l^- & \pi_l^+(e_k^\epsilon) = e_l^+ & \text{for } l \leq k < n \\ \pi_l^-(e_n) = e_l^- & \pi_l^+(e_n) = e_l^+ & \text{for } l \leq n \end{array}$$

∞-范畴 $\partial\mathbb{D}_n$ 由 $\mathbb{D}_n$ 删去 n-箭头 e_n得到。因此我们有一个态射

$$i_n \colon \partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n.$$

注意，$\partial\mathbb{D}_0 = \emptyset$

2.4 定义. 若 X 是一个 ∞-范畴，我们定义球状集 ΣX，称为 X的悬挂，其公式为

$$(\Sigma X)_0 = \{a, b\} \quad (\Sigma X)_{n+1} := X_n \cup \{\mathbb{I}^n a, \mathbb{I}^n b\}$$

其中，$\mathbb{I}_a^n$（分别为 $\mathbb{I}_b^n$）是 a（分别为 b）的 n 次迭代单位元。此外，ΣX 从 X 继承了一个 ∞-范畴结构。

最后，对于一个整数 n，我们将 ∞-范畴 $\Sigma^n X$定义为 X的 n 次迭代悬挂，并称其为 X的 n-悬挂。

接下来，我们定义多图的概念。R. Street 在 [28] 中首次将其称为“计算图”，并将其用于 2-范畴；而一般概念则在 [29]中初见端倪。据我们所知，文献中对多图的首次正式介绍见于 [25]，以及独立发表的 [8],，后者引入了“多图”这一名称。这里我们将利用多图范畴与 ∞-Cat 的一个（非满）子范畴相同这一点，给出一个更简洁的定义。更完整的介绍请参阅上述文献。

2.5 定义。

- 若一个 ∞-范畴 X 可以通过从空的 ∞-范畴出发，自由添加具有指定源和目标的箭头而构造出来，我们就称它为多图。也就是说，若 X 可表示为如下超限复合$\emptyset = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_i \to \mathsf{Colim}\, X_i = X$，其中对每个 i，映射 $X_i \to X_{i+1}$ 都是 $Y \times \partial\mathbb{D}_n \to Y \times \mathbb{D}_{n+1}$的一个推出，则称 X 为多图。
- 若多图中的一个箭头是在某个阶段自由添加的箭头之一，则称它为生成元。
- 若两个多图之间的 ∞-范畴态射将每个生成元映射为生成元，则称其为多图态射，或多图态射。
- n-多图是指其生成元的维数全为 $\leqslant n$ 的多图。

2.6 注。可以证明，多图的生成元恰好是那些无法以非平凡方式写成复合的箭头，因此生成元的概念不依赖于 X 的表示方式；而且，多图之间的任何同构都自动是多图态射。

2.7 例。对于 $n < 0$，唯一的 n-多图是空的 ∞-范畴；0-多图范畴等价于集合范畴，对应于离散的 ∞-范畴；1-多图范畴（以及它们之间的多图态射）等价于有向图范畴，并且它们对应于由图自由生成的范畴。

有时我们会区分两种看待多图的方式：一种是将其视为多图及多图态射范畴中的对象，另一种是将其视为相应的∞-范畴，我们称后者为该多图上的自由 ∞-范畴。

2.8 注。多图中的每个箭头都可以写成生成元的迭代复合（但不一定唯一）。对于一个 n-箭头 f，所有此类表达式中出现的 n 维生成元集合（甚至包括它们出现的次数）都相同。我们称一个 n-生成元出现在某个 n-箭头中，若它出现在任一此类表达式中。

2.9 构造。范畴 ∞-Cat 具有一种闭单体结构，称为 Gray 张量积或 Crans-Gray张量积，记作

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-}\mathbf{Cat} \times \infty\text{-}\mathbf{Cat} & \to & \infty\text{-}\mathbf{Cat} \\ X, Y & \mapsto & X \otimes Y \end{array}$$

其显式构造十分复杂，我们假定读者已经熟悉它。S. Crans 首先在其博士论文 [10]中引入了这一构造。关于该张量积的介绍，较接近其原始定义的可参阅 [1]，较为现代的论述可参阅 [27]。文献 [27] 中关于这一幺半结构存在性的证明存在一些漏洞，已在文献 [4]中修正。

从这两个定义中的任意一个都很容易看出，$\mathbb{D}_n \otimes \mathbb{D}_m$ 有唯一一个非平凡的 $n+m$维数箭。若 f和 g 分别是 X的一个 n-箭以及 Y的一个 m-箭，它们对应于态射 $f\colon \mathbb{D}_n \to X$和$g\colon \mathbb{D}_m \to Y$，我们将 $f \otimes g$ 记作 $X \otimes Y$的 $m+n$ 箭，它是由函子 $f \otimes g\colon \mathbb{D}_n \otimes \mathbb{D}_m \to X \otimes Y$将这个非平凡的（$n+m$）箭映射所得。

我们回顾一下 [3]:

2.10 命题。如果 X 和 Y 是多图，那么 $X \otimes Y$ 也是多图。 $X \otimes Y$ 的生成元是形如 $x \otimes y$ 的箭头，其中 x 和 y 分别是 X 和 Y 的生成元。

最后，我们回顾 [19] 中的结果： ∞-Cat 带有一种模型结构，称为 folk 模型结构，其中每个对象都是纤维对象，生成余纤维化为 $\partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n$。其弱等价构成了一类自然的 ∞-范畴等价，并将普通范畴之间的等价推广了。 [23] 证明了余纤维对象恰好是多图；由此还可推出，余纤维对象之间的余纤维化就是多图包含。 [3] 证明了对于 Gray 张量积，这种模型结构是幺半模型结构。

2.2 标记的 ∞-范畴

在本文余下部分，我们固定一个 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

2.11 定义。一个 m-标记的 ∞-范畴是一个 ∞-范畴 X，并附有一个集合 $M \subset \coprod_{k>0} X(k)$，其中包含一些正维数的箭头，称为标记箭头，且满足：

- 所有恒等箭头 $\mathbb{I}_x$ 都被标记。
- 所有维数严格大于 m 的箭头都被标记。
- 若 x 和 y 是被标记的 n-箭头，且 $x \#_k y$ 有定义，则 $x \#_k y$ 被标记。

m-标记的 ∞-范畴之间的态射，是底层 ∞-范畴之间将标记箭头映到标记箭头的态射。 m-标记的 ∞-范畴构成的范畴记作 $\infty\text{-Cat}^m$。

注意，若 $m = \infty$，那么定义中的第二个条件便不复存在；这正是我们感兴趣的主要情形。

2.12 例。若 X 是一个 ∞-范畴，我们将所有正维数箭头都标记的 m-标记 ∞-范畴 $(X, X_{>0})$ 记作 $X^{\#}$ 。我们将仅标记恒等箭头以及当 $k > m$ 时的 k-箭头的 m-标记 ∞-范畴记作 $X^{\flat}$ 。

2.13 构造。若 X 是一个 ∞-范畴，且 $M \subset \coprod_{k>0} X_k$ 是 X的一组箭头，我们用 $\overline{M}$ 表示满足以下条件的最小箭头集合： $M \subset \overline{M}$，并且 $(X, \overline{M})$ 是一个 m-标记的 ∞-范畴。也就是说， $\overline{M}$是由维数严格大于 m 的箭头集合，以及所有可写成 M 中 n-箭头与形如 $\mathbb{I}_x$的箭头的迭代复合的 n-箭头组成的并集，其中 x 是一个 $(n-1)$-箭头。例如 $X^{\flat} = (X, \overline{\emptyset})$。

2.14 构造。 m-标记的 ∞-范畴范畴具有所有余极限，并且这些余极限可以通过 ∞-范畴的余极限以及构造 2.13 来轻松描述：若 $(X_i, M_i)_{i \in I}$ 是以范畴 I 为指标的 m-标记的 ∞-范畴图表，则：

$$\operatorname*{Colim}_{i \in I}(X_i, M_i) = \left(\operatorname*{Colim}_{i \in I} X_i, \overline{\cup_i f_i(M_i)} \right)$$

其中， f_i 表示典范映射 $f_i \colon X_i \to$ 余极限$_{i \in I}\, X_i$ ，而 $f_i(M_i)$ 就是形如 $f_i(x)$（其中 $x \in M_i$）的箭头集合。

只需验证右侧具有余极限的泛性质，即可轻松证明这一点。

2.15 定义。特殊的 m-标记多图是形如 $(X, \overline{M})$ 的 m-标记 ∞-范畴，其中 X 由一个多图自由生成，且 M 仅包含 X 的生成元。

2.16 命题。若 $(X, \overline{M})$ 是特殊的 m-标记多图，则一个 n-箭头 f 属于 $\overline{M}$，当且仅当 $n > m$，或者当所有出现在 f 中的生成 n-箭头都属于 M。

证明。满足此条件的箭头是由标记的 n-箭头和低维箭头的恒等态射复合而成的，因此必属于 $\overline{M}$。反过来，这个箭头集合包含 M 和所有恒等态射（因为它们的表达式中没有出现 n 维箭头），且对复合封闭。 □

2.3 m-标记 ∞-范畴的张量积

本节将在 m-标记 ∞-范畴的范畴上构造两种闭幺半结构，分别称为伪 Gray 张量积 $\tilde{\ominus}$ 和 *lax-Gray* 张量积 $\ominus$。这两种结构都通过对构造 2.9 中的 Gray 张量积 $\bigcirc$ 施加不同的标记而得到。例如，lax-Gray 张量积 $\mathbb{D}_1 \ominus \mathbb{D}_1$ 是 $C_1^\flat$，其中 C_1 是该多图

$$C_1 = \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \right)$$

当 $\mathbb{D}_1 \tilde{\ominus} \mathbb{D}_1$ 是特殊的 m-标记多图 $(C_1, \overline{D})$，其中 D 仅包含 C_1 的唯一二维生成元。因此，除非 $m = 0$ 或 $m = 1$，这两个张量积彼此不同。在导出或同伦论层面，伪 Gray 张量积应当对应于笛卡尔积。

形式定义如下

2.17 构造。给定两个 m-标记的 ∞-范畴 (X, M) 和 (Y, N)，我们在 $X \otimes Y$ 中定义两个箭头集合：

- $M \ominus N$ 是由以下形式的箭头组成的集合：$x \otimes y \in X \otimes Y$，其中 $x \in M$ 或 $y \in N$。
- $M \tilde{\ominus} N$ 包含 $M \ominus N$ 中的所有箭头，以及所有形如 $x \otimes y$ 的箭头，其中 x 和 y 的维数均为 > 0。

注意，$M \ominus N$ 和 $M \tilde{\ominus} N$ 并非 $X \otimes Y$ 上的标记：它们在复合下不封闭。因此我们定义：

$$(X, M) \ominus (Y, N) = (X \otimes Y, \overline{M \ominus N})$$

$$(X, M) \tilde{\ominus} (Y, N) = (X \otimes Y, \overline{M \tilde{\ominus} N})$$

我们将在引理 2.37 中证明，这两者都使 m-标记的 ∞-范畴构成一个幺半闭范畴。

为证明这一点，引入以下记号会很方便：

2.18 记号。对于 ∞-范畴中箭头的子集 A 和 B，我们用$A \otimes B$ 表示形如 $a \otimes b \in X \otimes Y$的箭头集合，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。对于X 和 ∞-范畴，我们用 $X_{\geqslant 0}$ 表示 X 的所有箭头组成的集合，并用 $X_{>0}$表示维数为 > 0的所有箭头组成的集合。因此，对于到m的标记 ∞-范畴(X, M)和(Y, N)，可以将上述定义改写为：

$$\begin{array}{rcl} M \ominus N & = & (M \otimes Y_{\geqslant 0}) \cup (X_{\geqslant 0} \otimes N) \\ M \ominus N & = & (M \ominus N) \cup (X_{>0} \otimes Y_{>0}) \\ & = & (M \otimes Y_{\geqslant 0}) \cup (X_{\geqslant 0} \otimes N) \cup (X_{>0} \otimes Y_{>0}) \end{array}$$

根据 Gray 张量积的定义，我们得到以下结果：

2.19 引理。设 X 和 Y 是两个 ∞-范畴，则

$$\overline{X_{\geqslant 0} \otimes Y_{\geqslant 0}} = (X \otimes Y)_{\geqslant 0}$$

$$\overline{X_{>0} \otimes Y_{\geqslant 0} \cup X_{\geqslant 0} \otimes Y_{>0}} = (X \otimes Y)_{>0}\,.$$

也就是说，$X \otimes Y$由形如 $x \otimes y$的箭头在复合下生成，而 $X \otimes Y$ 中维数为 > 0 的箭头由形如 $x \otimes y$ 的箭头在复合下生成，其中 x 或 y 的维数为 > 0

2.20 引理。设 X 是一个 ∞-范畴，且 M、N 是 X的两个箭头子集，则：

$$\overline{M \cup N} = \overline{\overline{M} \cup N} = \overline{M \cup \overline{N}} = \overline{\overline{M} \cup \overline{N}}$$

证明。这是显然的。 □

2.21 引理。设 X、Y 是两个 ∞-范畴，且 $M \subset X_{\geqslant 0}$ 和 $N \subset Y_{\geqslant 0}$。则：

$$\overline{M \otimes N} = \overline{\overline{M} \otimes N} = \overline{M \otimes \overline{N}} = \overline{\overline{M} \otimes \overline{N}}$$

证明。我们只证明等式 $\overline{M \otimes N} = \overline{M} \otimes N$。等式 $\overline{\overline{M \otimes N}} = M \otimes \overline{N}$ 的证明方法完全相同，最后一个等式则可立即将结果应用于 M 和 $\overline{N}$得到。我们也只证明 $m = \infty$ 的情形；一般 m 的情形可立即推出，因为它在这些等式的两边都标记了所有维数为 $> m$ 的箭头。显然的包含关系 $M \subset \overline{M}$蕴含 $\overline{M \otimes N} \subset \overline{M} \otimes N$，因此只需证明 $\overline{M} \otimes N \subset \overline{M \otimes N}$。~~令 K~~ 为 X 中满足对所有 $n \in N$ 都有 $k \otimes n \in \overline{M \otimes N}$ 的箭头 k 所成的集合。为完成证明，我们需要证明 K 在恒等态射和复合下封闭。若 $k = \mathbb{I}_x$，则 $k \otimes n = \mathbb{I}_{x \otimes n} \in \overline{M \otimes N}$。现在设 k、$k' \in K$是维数为 n的箭头，且 $k \#_i k'$ 有定义。它们由映射 $\mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_i} \mathbb{D}_n \to X$ 编码，并令$y \in N$为 Y中维数为 m 的箭头，由映射 $\mathbb{D}_m \to Y$编码。

这些共同诱导出一个映射 e:$\left(\mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_i} \mathbb{D}_n\right) \otimes \mathbb{D}_m \to X \otimes Y$。$\left(\mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_i} \mathbb{D}_n\right) \otimes \mathbb{D}_m$ 是一个维数为 $m + n$ 的多图，其中只有两个最大维数的生成箭头，它们分别映射到 $k \otimes y$ 和 $k' \otimes y$，而根据假设，$k \otimes y$ 和 $k' \otimes y$ 属于 $\overline{M \otimes N}$。

现在，与 $(k \#_i k') \otimes y$ 对应的箭头属于 $\left(\mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_i} \mathbb{D}_n\right) \otimes \mathbb{D}_m$，因为其中出现的所有最高维生成元都属于 $\overline{M \otimes N}$。我们已经证明，对于所有 $y \in N$，都有 $k \#_i k' \otimes y \in \overline{M \otimes N}$，因此 $k \#_i k' \in K$，证明至此完成。

□

2.22 引理。设 X、Y 是两个 ∞-范畴，$M \subset X_{\geqslant 0}$ 和 $N \subset Y_{\geqslant 0}$。那么我们有

$$\begin{aligned}\overline{M \ominus N} &= \overline{\overline{M} \ominus \overline{N}} \\ \overline{M \oslash N} &= \overline{\overline{M} \oslash \overline{N}}.\end{aligned}$$

证明。由记号 2.18 中 $M \ominus N$ 和 $M \oslash N$ 的公式可知，这是引理 2.20 和引理 2.21 的直接推论。 □

2.23 引理。设 X、Y、Z 是三个 ∞-范畴，$M \subset X_{>0}$、$N \subset Y_{>0}$ 和 $P \subset Z_{>0}$。那么我们有

$$\begin{aligned}\overline{(M \ominus N) \ominus P} &= \overline{M \ominus (N \ominus P)} \\ \overline{(M \oslash N) \oslash P} &= \overline{M \oslash (N \oslash P)}\end{aligned}$$

证明。我们先考察第一个等式。令

$$E := (M \otimes Y_{\geqslant 0} \otimes Z_{\geqslant 0}) \cup (X_{\geqslant 0} \otimes N \otimes Z_{\geqslant 0}) \cup (X_{\geqslant 0} \otimes Y_{\geqslant 0} \otimes P).$$

引理 2.19、2.20 和 2.21 推出以下等式：

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \overline{M \otimes \overline{Y_{\geqslant 0} \otimes Z_{\geqslant 0}} \cup X_{\geqslant 0} \otimes (N \otimes Z_{\geqslant 0} \cup Y_{\geqslant 0} \otimes P)} \\ &= \overline{M \otimes (Y \otimes Z)_{\geqslant 0} \cup X_{\geqslant 0} \otimes (N \ominus P)} \\ &= \overline{M \ominus (N \ominus P)}\end{aligned}$$

类似的计算也表明 $\overline{E} = (M \ominus N) \ominus P$，由此完成第一个等式的证明。

对于第二个等式，我们定义

$$F := (X_{\geqslant 0} \otimes Y_{>0} \otimes Z_{>0}) \cup (X_{>0} \otimes Y_{\geqslant 0} \otimes Z_{>0}) \cup (X_{>0} \otimes Y_{>0} \otimes Z_{\geqslant 0})$$

引理 2.19 的第二个等式意味着：

$$\overline{F} = \overline{X_{k \geqslant 0} \otimes Y_{>0} \otimes Z_{>0} \cup X_{>0} \otimes (Y \otimes Z)_{>0}}$$

进而有

$$\begin{aligned}\overline{E \cup F} &= \overline{M \otimes (Y \otimes Z)_{\geqslant 0} \cup X_{\geqslant 0} \otimes (N \oslash P) \cup X_{>0} \otimes (Y \otimes Z)_{>0}} \\ &= \overline{M \oslant (N \oslash P)}\end{aligned}$$

这里再次通过类似的计算可得 $\overline{E \cup F} = (M \oslash N) \oslash P$，由此证明得证。

□

2.24 引理。设 X 是一个 ∞-范畴，$M \subset X_{>0}$。那么，将空集视为 ∞-范畴 $\mathbb{D}_0$ 的子集时，满足（在以下识别 $\mathbb{D}_0 \otimes X \simeq X \otimes \mathbb{D}_0 \simeq X$ 下）：

$$\begin{aligned}\emptyset \ominus M = M \ominus \emptyset = M \\ \overline{\emptyset \oslash M} = \overline{M \oslash \emptyset} = \overline{M}\end{aligned}$$

证明。第一个等式可直接由 $\ominus$ 的定义得出。对于第二种情况，我们还利用了 $(\mathbb{D}_0)_{>0} \otimes X_{>0}$ 的所有箭头都是恒等态射，因此都属于 $\overline{M}$。

□

2.25 命题。上文定义的 lax-Gray 张量积 $\ominus$ 和伪 Gray 张量积 $\sim$ 都是m-标记的 ∞-范畴上的幺半结构。在这两种情况下，遗忘函子到 ∞-范畴都是幺半函子，且其单位元为 $\mathbb{D}_0^\flat = \mathbb{D}_0^\#$ 。

证明。注意，由于 $\mathbb{D}_0$ 中维数为 >0 的所有箭头都是恒等态射，因此 $\mathbb{D}_0^\flat = \mathbb{D}_0^\# = (\mathbb{D}_0, \overline{\emptyset})$。

该命题恰好说明， ∞-范畴的 Gray 张量积的结构映射（结合律同构和单位元同构）保持我们在张量积上指定的标记。

对于单位元，设 (X, M) 是一个 m-标记的 ∞-范畴。引理 2.21 和 2.24 推出

$$\begin{array}{rcccl} (X,M)\ominus(\mathbb{D}_0,\overline{\emptyset}) & = & (X\otimes\mathbb{D}_0, \overline{M\ominus\emptyset}) & = & (X,M) \\ (X,M)\owedge(\mathbb{D}_0,\overline{\emptyset}) & = & (X\otimes\mathbb{D}_0, \overline{M\owedge\emptyset}) & = & (X,M) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcccl} (\mathbb{D}_0,\overline{\emptyset})\ominus(X,M) & = & (\mathbb{D}_0\otimes X, \overline{\emptyset\ominus M}) & = & (X,M) \\ (\mathbb{D}_0,\overline{\emptyset})\owedge(X,M) & = & (\mathbb{D}_0\otimes X, \overline{\emptyset\owedge M}) & = & (X,M). \end{array}$$

对于结合律同构，设 (X, M)、(Y, N) 和 (Z, P) 是三个 ∞-范畴。引理 2.21 推出

$$\begin{array}{rcl} \big((X,M)\ominus(Y,N)\big)\ominus(Z,P) & = & (X\otimes Y\otimes Z, \overline{(M\ominus N)\ominus P}) \\ \big((X,M)\owedge(Y,N)\big)\ominus(Z,P) & = & (X\otimes Y\otimes Z, \overline{(M\owedge N)\ominus P}) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcl} (X,M)\ominus\big((Y,N)\ominus(Z,P)\big) & = & (X\otimes Y\otimes Z, \overline{M\ominus(N\ominus P)}) \\ (X,M)\owedge\big((Y,N)\ominus(Z,P)\big) & = & (X\otimes Y\otimes Z, \overline{M\owedge(N\ominus P)}). \end{array}$$

引理 2.23 表明， $X\otimes Y\otimes Z$ 上的这两种标记在 lax 情形和伪情形下是一致的。 □

2.26 命题。伪 Gray 张量积和 lax-Gray 张量积 $\ominus$ 与 $\sim$ 分别保持每个变量上的余极限。

特别地，由于 ∞-Cat^m 是局部可呈现的，这立即意味着两个张量积都是闭幺半结构。

证明。由 Gray 张量积 $\otimes$ 在每个变量上保持余极限这一事实，以及构造 2.14 和引理 2.21 中对 m-标记的 ∞-范畴的余极限的描述，可得结论。 □

2.4 半模型结构

本节中，我们将在范畴 ∞-Cat^m 上构造一个左半模型结构。

2.27 定义。我们将集合 $I = I^m \cup I^a$ 定义为 ∞-Cat^m 中的生成余纤维化集合，其中：

$$I^a = \{i_n \colon \partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n, |n \geqslant 0\}$$

$$I^m = \{\mathbb{D}_n \to (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}}) \quad , n \geqslant 0\}$$

∞-Cat^m 中的箭头若对 I 中的所有箭头都具有右提升性质，则称为平凡纤维化。
∞-Cat^m 中的箭头若对所有平凡纤维化都具有左提升性质，则称为余纤维化。

2.28 注. 由小对象论证可立即得出，每个箭头都可以分解为一个余纤维化后接一个平凡纤维化，并且所有余纤维化都是 I 中箭头的推出之超限复合的收缩。

2.29 注. 若箭头 $\pi\colon X \to Y$ 在 I^a 中所有箭头下都具有右提升性质，当且仅当它在遗忘函子到 ∞-Cat 下的像是一个平凡纤维化；也就是说，对于 X 中任意一对平行的 n-箭头 u, v，映射 $\mathrm{Hom}_X(u,v) \to \mathrm{Hom}_Y(\pi(u)\ \pi(v))$ 是满射。

π 在 I^m 中所有箭头下都具有右提升性质，当且仅当对于任意满足 $\pi(f)$ 在 Y 中为标记的箭头 $f \in X$，f 在 X 中为标记。平凡纤维化是同时具有这两种性质的映射。

2.30 注. ∞-Cat^m 的余纤维对象恰好是 m-标记的 ∞-范畴，其底层 ∞-范畴是由多图自由生成的，并带有任意可能的标记（而不只是 2.15 中的特殊标记）。事实上，从空的 ∞-范畴出发，仅对 I^a 中的箭头取推出并作超限复合，恰好得到所有不带标记的多图。对 I^m 取推出只是改变标记，并且可以将任意箭头标记；因此，再对 I^m 中的箭头取推出，就能得到所有带任意可能标记的多图。最后，[23] 中已证明多图在 ∞-Cat 中对收缩封闭，因此它们构成了所有余纤维对象。

推出积，或角积（有时也称为 Leibniz 积）$f \hat{\ominus} g$ 和 $f \hat{\ominus} g$ 按通常方式定义：若 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon A \to B$ 是 ∞-$\mathbf{Cat}^m$ 中的两个箭头，则 $f \hat{\ominus} g$ 是典范箭头：

$$X \ominus B \coprod_{X \ominus A} Y \ominus A \to Y \ominus B$$

且 $f \hat{\ominus} g$ 是典范箭头

$$X \ominus B \coprod_{X \ominus A} Y \ominus A \to Y \ominus B$$

关于推出积的一般理论及其形式性质，请参阅 [18] 的附录。

2.31 命题。若 f 和 g 是 ∞-Cat^m 中的两个余纤维化，则 $f \hat{\ominus} g$ 和 $f \hat{\ominus} g$ 都是余纤维化。

证明。由角积的通常性质，只需在 f 和 g 是生成余纤维化时验证这一点。若 f 和 g 都属于 I^a，则 $f \ominus g$ 的定义域和陪域中均没有标记箭头，并且它与 ∞-Cat 中的角积 $f \hat{\otimes} g$ 相同；已知该角积在 [3] 中是一个余纤维化。$f \ominus g$ 也相同，只是其中有些箭头带有标记；但我们总可以通过沿 I^m 中的箭头取额外的推出，添加这些标记，因此它仍是一个余纤维化。

遗忘函子 ∞-Cat$^m \to \infty$-Cat 对张量积是幺半函子，并且保余极限，因此保角积。特别地，若 f 或 g 属于 I^m，则它经此遗忘函子映为同构，因此 $f \mathbin{\hat{\ominus}} g$ 和 $f \mathbin{\hat{\ominus}} g$ 在其底层 ∞-范畴之间诱导出同构。现在，若 $f\colon (X, N) \to (X, M)$ 是 ∞-Cat^m 中的一个态射，且它在底层 ∞-范畴上诱导出同构，那么它是 I^m 中箭头的一个推出：只需取这样的推出，使 M 中的所有箭头都带有标记。 □

2.32 构造。我们定义 $I := \mathbb{D}_1^\sharp = (\mathbb{D}_1, \{e_1\})$。它是一个有两个对象 e_0^- 和 e_0^+ 以及一个标记箭头 $e_1\colon e_0^- \to e_1^+$ 的 ∞-范畴。我们将分别记对应于两个对象 e_0^- 和 e_0^+ 的两个映射 $\mathbb{D}_0 \to I$ 为 j_- 和 j_+。这给出一个图表：

$$\mathbb{D}_0 \coprod \mathbb{D}_0 \rightarrowtail I \to \mathbb{D}_0$$

它将在 ∞-Cat^m 上的半模型结构中充当区间对象。

我们将取形如 $j_+ \hat{\ominus} i$ 的映射集作为“生成无害余纤维化”的集合（也称为“平凡余纤维化的伪生成集”），其中 i 是生成余纤维化，具体而言：

2.33 定义。

- 我们称 ∞-Cat^m 中的一个箭头为朴素纤维化，若它对所有形如 $j_+ \hat{\ominus} i$ 的箭头都具有右提升性质，其中 $j_+\colon \mathbb{D}_0 \to I$ 如构造 2.32 中所述，而 i 是定义 2.27 中的生成余纤维化之一。
- 我们称 ∞-Cat^m 中的箭头为无害余纤维化，如果它对所有朴素纤维化都具有右提升性质。
- 我们称 ∞-Cat^m 中的余纤维化为无圈的，如果它对纤维对象（朴素意义下）之间的所有朴素纤维化都具有提升性质。
- 我们称 ∞-Cat^m 中的映射为纤维化，如果它对所有无圈余纤维化都具有右提升性质。

如前所述，由小对象论证可立即得出，每个箭头都可以分解为一个无害余纤维化后接一个朴素纤维化，并且所有无害余纤维化都是由“生成无棱角余纤维化”的推出所作超限复合的收缩。

2.34 注。由命题 2.31 可立即得出，由于 j_+ 是余纤维化，所有形如 $j_+ \hat{\ominus} i$ 的映射都是余纤维化。特别地，所有平凡纤维化也都是朴素纤维化，所有无害余纤维化也都是余纤维化。

2.35 命题。无圈余纤维化与纤维化在 ∞-Cat^m 上构成一个余纤维生成的弱分解系统。一个对象是“朴素纤维化的”，当且仅当它是纤维对象；更一般地，纤维对象之间的一个箭头是纤维化，当且仅当它是朴素纤维化。

证明。由 [15] 第 4 节的结果可直接得到这一结论。从 ∞-Cat^m 上的预模型结构出发，其弱分解系统为（余纤维化，平凡纤维化）和（无害余纤维化，朴素纤维化），我们得到其“左饱和” $\mathbb{L}(\infty\text{-Cat}^m)$ 意义下的模型结构，其弱分解系统为（余纤维化，平凡纤维化）和（无圈余纤维化，纤维化）。命题中的所有断言均由 [15] 的定理 4.1 得出。 □

2.36 注。 注意，在 2.33 中将 $\hat{\sim}$ 替换为 $\hat{\ominus}$ 并不会改变定义。事实上，如果 $X = Y^\sharp$ 是一个 m-标记的 ∞-范畴，其维数为 > 0 的箭头全都已标记，那么对于任意一个 m-标记的 ∞-范畴 Z，都有$X \ominus Z = X \ominus Z$。由于这对 j_+ 的定义域和陪域都适用，$j_+ \hat{\ominus} i = j_+ \hat{\ominus} i$。

此外，读者不必担心定义 2.33 中使用了 j_+，而不是 j_- 或同时使用 j_- 和 j_+。虽然用 j_- 或同时用 j_- 和 j_+ 替代 j_+ 会改变朴素纤维化和无害余纤维化的定义，但这不会影响纤维对象之间（朴素）纤维化的定义，因此无圈余纤维化和纤维化不会改变。事实上，一旦确立了（幺半）模型结构，根据三取二性质可知 j_- 是无圈的，因而所有映射 $j_- \hat{\ominus} i = j_- \hat{\ominus} i$ 也都是无圈余纤维化。

2.37 引理。如果 f 是无害（分别为无圈）余纤维化，且 g 是余纤维化，那么 $f \hat{\ominus} g$ 和 $f \hat{\ominus} g$ 是无害（分别为无圈）的。

证明。要得到关于“无害余纤维化”的结果，只需证明它对生成无棱角余纤维化成立。设 i 是一个生成余纤维化，$f = j_+ \hat{\ominus} i'$ 是一个生成无棱角余纤维化。我们有 $f \hat{\ominus} i = j_+ \hat{\sim} (i \hat{\ominus} i')$。由于 $i' \hat{\ominus} i$ 是由命题 2.31 可知的生成余纤维化 $i_1, \ldots, i_k$ 的一个推出，因此 $j_+ \hat{\sim} (i \hat{\ominus} i')$是 $j_+ \hat{\ominus} i_k$ 的一个推出，故为无害余纤维化。

无圈余纤维化的结果由推出积的形式性质得出：若 i 是余纤维化且 p 是朴素纤维化，则（右）拉回指数 $\langle p/i \rangle$ 是朴素纤维化。若 p 是纤维对象之间的（朴素）纤维化，则 $\langle p/i \rangle$ 是纤维对象之间的朴素纤维化，因而是纤维化。由此可知，若 i 是无圈余纤维化且j 是余纤维化，则 $i \hat{\ominus} j$ 是无圈余纤维化，因为根据定义 2.27，它是余纤维化；并且若 p 是纤维对象之间的纤维化，则 $i \hat{\ominus} j$ 对 p 具有右提升性质，因为 j 对$\langle p/i \rangle$具有左提升性质。

$\ominus$ 的情形完全相同，只需考虑注记 2.36 的前半部分。

□

2.38 定理。 ∞-Cat^m （ m-标记的 ∞-范畴）范畴具有一种左半模型结构，称为归纳模型结构，其中余纤维化和平凡纤维化如定义 2.27 所述，而纤维化如定义 2.33 所述。

证明。此结论直接由 [15] 的定理 6.12 得出。由命题 2.31 和引理 2.37 可知，按构造 2.32 的区间对象 I 进行张量运算，在 [15] 第 6 节的意义下是一个“强 Quillen 函子”。注意，应用定理 6.12 时，需要指出 ∞-Cat^m 配备（余纤维化，平凡纤维化）和（无圈余纤维化，纤维化）这两个弱分解系统后，既是“右饱和”的，也是“左饱和”的；也就是说，若一个纤维化对余纤维对象之间的所有余纤维化都具有右提升性质，则它是平凡纤维化；若一个余纤维化对纤维对象之间的所有纤维化都具有左提升性质，则它是平凡余纤维化。第一条成立是因为生成余纤维化的两端都是余纤维对象；第二条成立是因为我们正是这样定义无圈纤维化的。 □

2.39 注。上文定理 2.38 的证明还表明，∞-Cat^m 也具有右半模型范畴结构，其中纤维化和平凡余纤维化分别是定义 2.33 中的纤维化和无圈余纤维化，而余纤维化则如定义 2.27 所定义。

然而，这并未明确表明 ∞-Cat^m 构成一个 Quillen 模型结构，而更像是构成了 [15] 第 5 节所说的“双侧模型范畴”。关于其确切含义，请参阅 [15] 第 5 节。简而言之，问题在于左、右半模型范畴具有不同的弱等价类。不过，对于纤维对象之间或余纤维对象之间的箭头，这两类等价是相同的。对此差异的另一种说法是：左、右半模型范畴是 Quillen 等价的，并且具有相同的同伦范畴，但它们定义了不同的函子 ∞-Cat$^m \to\to$Ho(∞-Cat^m)。这两个函子作用于纤维对象或余纤维对象时结果相同，但作用于一般对象时则不同：一个将对象 X 映到它的余纤维替换，另一个则将它映到它的纤维替换；而当 X 本身既不是纤维化的也不是余纤维的时，我们并不知道这两种替换是否总是同伦等价。

2.40 注。我们不知道 ∞-Cat^m 是否实际上是一个奎伦模型范畴。对于未标记的情形，这可由所有对象都是纤维化的这一事实推出。但在这种情形下，情况不再如此。就前一条注中提到的“双侧模型结构”而言，问题在于 ∞-Cat^m 是否满足 [15] 中命题 5.3 的某个等价条件。

我们以以下引理结束本节，该引理将在后文发挥作用：

2.41 引理。映射

$$i_n^+ \colon \mathbb{D}_n^\flat \to (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$$

其中 e_{n+1} 是 $\mathbb{D}_{n+1}$ 中唯一的非恒等箭头，是一个无害余纤维化。

证明。我们将证明它是映射 $j_+ \hat{\ominus} i_n$ 的一个收缩，其中 i_n 是映射$\partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n$。

为此，我们将利用 [4] 的附录 B.1 中给出的 $\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}_n$ 描述（见命题 B.1.4），更明确地计算 $j_+ \hat{\ominus} i_n$：作为一个多图，$\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}_n$ 的生成箭头如下：

$$a_0^- \otimes e_k^\epsilon \qquad a_0^+ \otimes e_k^\epsilon \qquad a \otimes e_k^\epsilon$$

其中，$\mathbb{D}_1$ 的箭头记作“a”而非“e”，以便加以区分；ϵ 则为 $+$ 或 $-$、$k \leqslant n$ 和 $e_n^+ = e_n^-$。它们的源和目标如下：

$$\pi^-(a_0^- \otimes e_k^\epsilon) = a_0^- \otimes e_{k-1}^- \qquad \pi^+(a_0^- \otimes e_k^\epsilon) = a_0^- \otimes e_{k-1}^+$$
$$\pi^-(a_0^+ \otimes e_k^\epsilon) = a_0^+ \otimes e_{k-1}^- \qquad \pi^+(a_0^+ \otimes e_k^\epsilon) = a_0^+ \otimes e_{k-1}^+$$
$$\pi^-(a \otimes e_k^\epsilon) = (a_0^- \otimes e_k^\epsilon)\#_0(a \otimes e_0^+)\#_1 \ldots \#_{k-1}(a \otimes e_{k-1}^+)$$
$$\pi^+(a \otimes e_k^\epsilon) = (a \otimes e_{k-1}^-)\#_{k-1} \ldots \#_1(a \otimes e_0^-)\#_0(a_0^+ \otimes e_k^\epsilon)$$

为使上面的表达式更简洁，我们省略了括号；默认约定是按$_i$ 递增的顺序进行复合。最后两个方程由 [4], 中的命题 B.1.4 给出，不过请注意，该参考文献关于复合顺序的约定与我们的不同。请注意，我们感兴趣的对象是 $I \ominus \mathbb{D}^\flat_n$ ，它是赋予了特殊标记的同一个多图，其中所有箭头 $a \otimes e^\epsilon_k$ 都已标记。

接下来，我们将 $(\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$ 实现为 $I \ominus \mathbb{D}^\flat_{n+1}$ 的一个收缩，具体如下：我们称 $i\colon (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$ 为将 e_{n+1} 送到 $a \otimes e_n$ 的唯一态射。这一定义良好，因为 $a \otimes e_n$ 是一个标记箭头。接下来，我们定义映射 $p\colon I \ominus \mathbb{D}^\flat_n \to (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$，如下所示：

$$p(a^\epsilon_0 \otimes e^\mu_k) = e^\mu_k \text{ if } k < n.$$
$$p(a^\epsilon_0 \otimes e_n) = e^\epsilon_n$$
$$p(a \otimes e^\epsilon_k) = \mathbb{I}_{e^\epsilon_k} \text{ if } k < n.$$
$$p(a \otimes e_n) = e_{n+1}$$

为了验证这一定义良好，我们首先需要检查它是否与上文给出的源和目标相容，这可通过直接计算得出。然后，我们需要证明它与标记相容；由于 $\mathbb{I}_{e^\epsilon_k}$ 和 e_{n+1} 都是标记的，因而确实如此。

最后，复合 $p \circ i$ 将箭头 e_{n+1} 送到 $p(a \otimes e_n) = e_{n+1}$，因此它是 $\mathbb{D}_{n+1}$ 的恒等态射。

作为证明的结尾，我们只需注意到，上面定义的映射 f 和 i 将 i^+_n 的定义域与 $j_+ \hat{\ominus} i_n$ 的定义域彼此映到对方。

$j_+ \hat{\ominus} i_n$ 的定义域是 $I \ominus \mathbb{D}^\flat_n$ 的子多重图，其中包含除 $a^-_0 \otimes e_n$ 和 $a \otimes e_n$ 之外的所有生成元；而 i^+_n 的定义域包含 $\mathbb{D}_{n+1}$ 的所有生成元，但不包含 e_{n+1} 和 e^-_n。

为了检验映射 i 与这些子多重图相容，只需检验 $i(e^+_n)$ 属于 $j_+ \hat{\ominus} i_n$ 的定义域。为此，我们计算：

$$i(e^+_n) = \pi^+ i(e_{n+1}) = \pi^+(a \otimes e_n) = (a \otimes e^-_{n-1}) \#_{n-1} \dots \#_1 (a \otimes e^-_0) \#_0 (a^+_0 \otimes e_n)$$

我们注意到，这个表达式既不包含 $a^-_0 \otimes e_n$，也不包含 $a \otimes e_n$，因此确实属于 $j_+ \hat{\ominus} i_n$ 的定义域。

为了检验映射 p 与这些子多重图相容，我们需要检验 p 对 $I \ominus \mathbb{D}^\flat_n$ 的所有生成元（$a^-_0 \otimes e_n$ 和 $a \otimes e_n$ 除外）所得的像。这些像由公式 $p(a^\epsilon_0 \otimes e^\mu_k) = e^\mu_k$（若 $k < n$）、$p(a^+_0 \otimes e_n) = e^+_n$ 以及 $p(a \otimes e^\epsilon_k) = \mathbb{I}_{e^\epsilon_k}$ 给出，并且它们确实都属于 i^+_n 的像。 □

3 an m-标记的 ∞-范畴中的方程与饱和。

本节的总体目标是更好地描述定理 2.38 中模型结构的纤维对象，以及纤维对象之间的纤维化。这是通过使用第二位作者在 [20] 中引入的 ∞-范畴中“方程”的概念来实现的。我们将用略有不同的语言回顾方程的基本理论，并引入一种处理标记的方程类比概念，称为饱和。

3.1 方程与饱和的定义

3.1 定义。左方程是一种特殊的 m-标记多图 $(P, \overline{M})$，带有两个箭头 $x, y \in P$，满足：

(1) y 是维数为 $n+1$ 的唯一箭头，且 P 不包含维数为 $> n+1$的箭头。

(2) y 是一个标记箭头。

(3) 如果 $n \leq m$, x 是 P的一个未标记箭。

(4) y 的源具有如下分解：

$$\pi_n^- y = l_n \#_{n-1} (l_{n-1} \#_{n-2} \ldots \#_1 (l_1 \#_0 x \#_0 r_1) \#_1 \ldots \#_{n-2} r_{n-1}) \#_{n-1} r_n$$

其中，对每个 i， l_i 和 r_i 都是 P中的标记 i-箭头，且 l_n 和 r_n 不包含 x。特别地， x 在 $\pi_n^- y$中只出现一次。

(5) x 不会出现在 y的目标中。

右方程的定义完全相同，只是在最后两个条件中交换 y 的源和目标。

我们称 $(P, \overline{M})$ 为一个方程，意即它是左方程或右方程。若 P及其箭头 x 和 y 如定义中所述构成一个方程，则用 ΛP 表示 P 的子多图，它包含除 x 和 y之外的所有箭头。

3.2 注。注意，指定箭头 $x, y \in P$ 与指定子多图 $\Lambda P \subset P$完全相同。因此，我们也常将映射 $\Lambda P \to P$称为“方程”。

我们称一个方程 $\Lambda P \to P$ 在 $C \in \infty\text{-Cat}^m$ 中有解，如果 C 对 $\Lambda P \to P$ 具有右提升性质；若态射 $f\colon C \to D$对映射$\Lambda P \to P$具有右提升性质，我们就称它提升该方程的解。

3.3 注。名称“方程”源自这样一种想法：我们要寻找一个元素 x，使得 x 与其他箭头的某个复合与另一个给定箭头同构。从这个角度来看，映射 $\Lambda P \to X$ 对应于 X中的这样一个方程，而扩张 $P \to X$ 对应于该方程的一个解；更确切地说， x 的像就是解，而 y 则表示见证 x 是一个解的同构。

3.4 定义。左饱和是一种特殊的标记多重图 $(P, \overline{M})$，它带有箭头 x 和 y，并满足定义 3.1 的条件，但 x 是一个标记箭头，且 y 的目标是一个标记箭头。右饱和以同样的方式定义。若 P 是一个饱和，则用 ΩP 表示特殊的m-标记多重图 $(P, \overline{M - \{x\}})$。

3.5 定义。若 P 是一个方程，我们定义 m-标记的 ∞-范畴$Uni(P)$，它是以下图表的余极限：

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{D}_n & \longrightarrow & \mathbb{D}_n^\sharp \\ {\scriptstyle x \amalg x'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ P \coprod_{\Lambda P} P & \longrightarrow & Uni(P) \end{array}$$

映射 $Uni(P) \to X$对应于一个映射 $\Lambda P \to X$，它是X中的一个方程，并带有两个解 $P \to X$，分别由有序对 (x, y) 和 (x', y') 给出；还有一个标记箭头 $z\colon x \to x'$，表示这两个解同构。

3.6 定义。设 C 为一个 m-标记的 ∞-范畴，且 P 为一个左方程（分别地，右方程）。

若对于所有态射 $\Lambda P \to C$，都存在一个提升（x, y）：$P \to C$，使得当 y 的目标（分别地，y 的源）为标记的时，x 被映射为标记箭头，则称方程 P 在 C 中有解。

若 C 对 $P \coprod_{\Lambda P} P \to Uni$（$P$）具有右提升性质，则方程 P 的解 C 弱唯一。

若方程 P 在C 中有解，且这些解弱唯一，则称方程 P 在 C 中有唯一解。

我们还需要一个“相干”版本的 Uni（P），记作 Uni^{coh}（P）。若 P 是一个左方程，则 $P \coprod_{\Lambda P} P \to Uni^{coh}$（$P$）可由以下推出序列得到：

$$\begin{array}{ccccc}
\partial\mathbb{D}_n & \longrightarrow & \mathbb{D}_n & & \\
{\scriptstyle x \amalg x'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} & & \\
P \coprod_{\Lambda P} P & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & Uni^{coh}(P) \\
 & & {\scriptstyle s[x/z] \#_n y' \amalg y}\uparrow & & \uparrow \\
 & & \partial\mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{n+1}
\end{array}$$

其中 s 是 y 的源。反之，若 P 是一个右方程，则 $P \coprod_{\Lambda P} P \to Uni^{coh}$（$P$）可由以下推出序列得到：

$$\begin{array}{ccccc}
\partial\mathbb{D}_n & \longrightarrow & \mathbb{D}_n & & \\
{\scriptstyle x \amalg x'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} & & \\
P \coprod_{\Lambda P} P & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & Uni^{coh}(P) \\
 & & {\scriptstyle y \#_n t[x/z] \amalg y'}\uparrow & & \uparrow \\
 & & \partial\mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{n+1}
\end{array}$$

其中 t是 y的源。注：在这两种情况下，$P \coprod_{\Lambda P} P \to Uni^{coh}(P)$ 都是一个方程。根据定义，如果 C是一个 m-标记的 ∞-范畴，且 $Uni^{coh}(P)$ 在 C中有解，那么 C 对 $P \coprod_{\Lambda P} P \to Uni(P)$ 具有右提升性质。

3.7 例。设 n 为一个非负整数。态射

$$j_+ \mathbin{\hat{\wr}} i_n := I \wr \partial\mathbb{D}_n \coprod \{1\} \wr \mathbb{D}_n \to I \wr \mathbb{D}_n$$

是一个左方程。事实上，令 y 为 $I \wr \mathbb{D}_n$ 的最高维生成元。若用 x 表示 $\{0\} \wr \mathbb{D}_n$ 的最高维箭头，并且对于 $0 < k \leq n$，用 a_k 表示由态射作用于 $I \wr \mathbb{D}_{k-1}$ 的最高维 k-生成元所得的像

$$I \wr \delta^-_{k-1}\colon I \wr \mathbb{D}_{k-1} \to I \wr \mathbb{D}_n,$$

B.1 节 [4] 允许对$I \odot \mathbb{D}_n$作出明确描述，我们在引理 2.41 的证明中回顾过这一描述。利用这一描述，我们看到，如果将 $y = a \otimes e_n$ 和$x = a_0^- \otimes e_n$ 命名为 $I \odot \mathbb{D}_n$ 中不属于 $j_+ \hat{\odot} i_n$像的两个箭头，那么我们就有 y 的源的如下形式的分解：

$$(((x\#_0 a_0)\#_1 a_2)...)\#_{n-1} a_n$$

且所有 a_k 均为标记的。我们将其记为

$$\mathbf{eq}_n^{\vdots\vdots} : \Lambda\mathbf{Eq}_n^{\vdots\vdots} \to \mathbf{Eq}_n^{\vdots\vdots}.$$

3.8 例。类似地，态射

$$j_+ \hat{\odot} s_n : I \odot \mathbb{D}_n \coprod \{1\} \odot (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}}) \to I \odot (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}})$$

其中 s_n 是“恒等”映射 $\mathbb{D}_n \to (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}})$ 是一个左饱和。我们将其记为

$$\mathbf{sat}_n^{\vdots\vdots} : \Omega\mathbf{Sat}_n^{\vdots\vdots} \to \mathbf{Sat}_n^{\vdots\vdots}$$

3.9 定义。我们定义一些起重要作用的左方程。在每种情况下， k 和 n 都是满足 $k \leqslant n$ 的整数。

- 方程$\overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{k\ n}$，：$\Lambda$方程$\overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{k}$，$n \overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{\to}$方程$\overset{\cdot\cdot\cdot}{k\ n}$，，其目标由 x 和维数为 n 的 b 生成，a 一个维数为 k 的标记箭头，以及 y: $(a\#_{k-1}x) \Rightarrow b$。
- 方程$\overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{k\ n}$，：$\Lambda$方程$\overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{k}$，$n \overset{\hat{\cdot}\cdot\cdot}{\to}$方程$\overset{\cdot\cdot\cdot}{k\ n}$，，其目标由 x 和维数为 n 的 b 生成，a 一个维数为 k 的标记箭头，以及 y: $(x\#_{k-1}a) \Rightarrow b$。

在上述所有方程中，箭头的定义域由去掉 x和 y得到。此外，在每种情况下，我们都没有列出源和目标中使 y的定义有意义所需的全部约束。例如，在方程$\overset{\cdot\cdot\cdot}{k\ n}$，中，为了使复合 $a\#_{k-1}x$存在，我们有关系 $\pi_{k-1}^+(a) = \pi_{k-1}^-(x)$；又因为 b 需要与 $a\#_{k-1}x$ 平行，才能使 y 存在，所以还有关系 $\pi_{n-1}^\epsilon(b) = \pi_{n-1}^\epsilon(a\#_{k-1}x)$。

3.2 纤维对象的刻画

本节将给出定理 2.38 中引入的模型结构的纤维对象的一个简单刻画。我们暂时将满足此刻画的对象称为“预纤维化”对象（定义 3.12），然后将在命题 3.19 中证明，这些对象恰好就是纤维对象。

3.10 记号。假设给定一个方程 P 和如下形式的提升问题：

$$\begin{tikzcd} \Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "p"] \\ P \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & D \end{tikzcd}$$

给定 a，即 P 的一个生成元，我们也用 a 表示它在 D 中的像。若 $a \in \Lambda P$，我们用 $\overline{a}$ 表示它在 C 中的像。因此一般而言， $p(\overline{a}) = a$。如果虚线对角提升存在，或在构造此类提升的过程中， x、$y \in P$ 在 C 中的像也分别记作 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，因此我们还有 $p(\overline{x}) = x$ 和 $p(\overline{y}) = y$。

3.11 定义。设 a 是一个 $(n+1)$-箭头。 a 的逆元是一个箭头 a^{-1}，使得存在两个标记箭头：

$$\epsilon\colon a\#_n a^{-1} \to \mathbb{I} \qquad \nu\colon a^{-1}\#_n a \to \mathbb{I}.$$

如果一个箭头有逆元，那么它就是可逆的。

3.12 定义。一个 m-标记的 ∞-范畴 C 是预纤维化的，当且仅当

(1) 标记箭头是可逆的，且其逆元也是标记的；(2) 每当 a 和 $c\colon a \to b$ 是标记的， b 也如此。

由此可直接推出：每当 b 和 $c\colon a \to b$ 是标记的， b也如此。

这一概念只是暂时采用的：我们将在命题 3.19 中证明，对于定理 2.38 的模型结构，一个对象是纤维化的，当且仅当它是预纤维化的。

3.13 命题。 若 C 是预纤维化的，则方程$\widehat{Eq}_{k,\,n}$ 和 $\widehat{\mathrm{Eq}}_{k,\,n}$ 在 C 中有弱唯一解。

证明。我们通过对 $k \le n$ 作递减归纳来证明该结论。初始情形对应于 $k = n$。在此情形下，态射 $\Lambda\mathrm{Eq}_{n,\,n} \to C$的数据对应于两个 n-箭头 a ，它们具有相同的源，且 a 是标记的。令 $\nu\colon a^{-1}\#_n a \to \mathbb{I}$。若定义 $x\colon = a^{-1}\#_n b$ 和 $y\colon \psi\#_n b\colon a\#_n x \to b$，则有序对 (x, y) 是 $\mathrm{Eq}_{n\,n}$ 的一个解。若 b 是标记的，则 x 也是标记的。现在我们证明解的弱唯一性。设 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是另一个解。于是我们有一个标记箭头：

$$z\colon \bar{x} \xrightarrow{\nu^{-1}} a^{-1}\#_n a\#_n \bar{x} \xrightarrow{\bar{y}} a^{-1} * b.$$

关于 $\mathrm{Eq}_{n,\,n}$ 的断言类似。

现在假设该结论对所有 $k+1$ 都成立。我们首先证明 $\mathrm{Eq}_{k,\,n}$ 和 $\widehat{\mathrm{Eq}}_{k,\,n}$ 的解在 C 中弱唯一。态射的数据 Λ方程$_{k,\,n} \to C$ 对应一个 n-箭头 $x\colon s \to t$、一个 k-可逆箭头 a，以及一个箭头 $b\colon a\#_{k-1}s \to a\#_k t$。设 $(x, y\colon a\#_{k-1}x \to b)$ 是这个方程的一个解。设 $\nu\colon a^{-1}\#_n a \to \mathbb{I}$。于是，箭头 x 也是方程 $_{k+1,\,n}$ 的一个解：

$$(\nu\#_0 s)\#_k x = (a^{-1}\#_{k-1} a\#_{k-1} x)\#_k (\nu\#_{k-1} t) \xrightarrow{(a^{-1}\#_{k-1} y)\#_k (\nu\#_{k-1} t)} (a^{-1}\#_{k-1} b)\#_k (\nu\#_{k-1} t)$$

因此它在弱意义下也是唯一的。方程 方程$_{k,\,n}$ 的解的唯一性也可用类似方法证明。

现在我们证明，方程$_{k,\,n}$ 和方程$_{k,\,n}$ 在 C 中有解。设 (x, y) 是该方程的一个解

$$(\nu\#_0 s)\#_k x \xrightarrow{\quad y \quad} (a^{-1}\#_{k-1} b)\#_k (\nu\#_{k-1} t).$$

此外，只要 b 是标记的，我们就能找到这样的 x 标记的。于是我们有

$$(\nu\#_0 s)\#_k x = (a^{-1}\#_{k-1} a\#_{k-1} x)\#_k (\nu\#_{k-1} t).$$

根据 方程$_{k+1,\ n}$ 解的弱唯一性，我们于是得到一个标记箭头

$$z\colon a^{-1}\#_{k-1}a\#_{k-1}x \to a^{-1}\#_{k-1}b.$$

但是 $a\#_{k-1}x$ 和 b 是方程 $\mathsf{Eq}_{k,n}$的解，因此存在一个标记箭头

$$\tilde{y}\colon a\#_{k-1}x \to b.$$

如果 b 是标记的，那么我们构造的箭头 x 也将是标记的。存在性方程 $\mathsf{Eq}_{k,n}$ 的解的证明类似。 □

引理 3.14. 如果方程 $\mathsf{Eq}_{k,n}$ 和 $\mathsf{Eq}_{k,n}$ 在 C中有解，那么所有方程在 C中都有解。

证明。设 P 是一个左方程。存在 y 的源的一个分解，其形式为

$$\pi_n^- y = l_n\#_{n-1}(l_{n-1}\#_{n-2}\cdots\#_1(l_1\#_0 x\#_0 r_1)\#_1\cdots\#_{n-2}r_{n-1})\#_{n-1}r_n$$

其中，对每个 i， l_i和 r_i都是 P中的标记的 i-箭头。于是，我们可以利用方程 $_{k\ n}$，和方程$_{k\ n}$，有解这一事实，得到两个箭头序列 $(x_k)_{0<k<2n}$ 和 $(y_k)_{0<k<2n}$ ，使得：

(1) $y_{2n-1}\colon x_{2n-1}\#_{n-1}r_n \to \pi_n^+ y$;
(2) $y_{2k-1}\colon x_{2k-1}\#_{k-1}r_k \to x_{2k}$;
(3) $y_{2k-2}\colon l_k\#_{k-1}x_{2k-2} \to x_{2k-1}$.

此外，只要 $\pi_n^+ y$ 被标记，箭头 x_k 也会被标记。此时，$(x_0, \bar{y})$ 是 P 的一个解，其中 $\bar{y}$ 是复合：

$$\begin{array}{rl} \bar{y}\colon= & (l_n\#_{n-1}(l_{n-1}\#_{n-2}\cdots\#_1((y_0\#_0 r_1)\#_n y_1)\#_1\cdots\#_{n-2}r_{n-1})\#_{n-1}r_n) \\ \#_n & (l_n\#_{n-1}(l_{n-1}\#_{n-2}\cdots\#_2((y_2\#_1 r_2)\#_n y_3)\#_2\cdots\#_{n-2}r_{n-1})\#_{n-1}r_n) \\ \#_n & \cdots \\ \#_n & (y_{2n-2}\#_{n-1}r_n)\#_n y_{2n-1} \end{array}$$

如果 P 是一个右方程，我们将 P^{op} 定义为反转最高维数箭头方向后得到的左方程。 P 的一个解由 (x, y^{-1}) 给出，其中 (x, y) 是 P^{op} 的一个解。此外，可以找到一个箭头 x ，使得只要 y^{-1} 的源被标记，它也会被标记。 □

引理 3.15。设 C 是一个 m 标记的 ∞ 范畴，其中所有方程在 C 中都有解，并且只要 a 和 $c\colon a \to b$ 被标记， b 也被标记。那么 C 对所有方程和饱和都具有右提升性质。

证明。显然， C 对所有方程都具有右提升性质。现在假设我们有一个态射 $f\colon \Omega Q \to C$，其中 Q 是一个饱和。这对应于方程 $P\colon = (Q, M - \{x, t(y)\})$ 的一个解 (x, y)。于是我们知道，该方程还存在另一个解 $(\bar{x}, \bar{y})$，其中 $\bar{x}$是标记的。此外，由于 $P \coprod_{\Lambda P} Q \to Uni^{coh}(P)$ 在 C 中有解，因此存在一个标记箭头 $z'\colon \bar{x} \to x$ ，于是 x 也是标记的。这表明我们可以将态射 f 提升到 Q。 □

3.16 引理。纤维对象对方程 $eq_{n\,n}$ 具有右提升性质，以及对饱和 $\mathsf{sat}_{n\,n}$ 也具有右提升性质，

证明。考虑一个针对 C 的 $\mathsf{eq}_{n\,n}$，提升问题。这意味着在 C 中有一个 n-箭头 b 和一个标记的 n-箭头 a，它们具有相同的源。

由于 C 是纤维化的，按定义，它具有针对以下对象的右提升性质 $\Lambda\mathbf{eq}_n$，如例 3.7 所示。沿用例 3.7 中关于 $\Lambda\mathbf{Eq}_n$ 的生成元的记号，对于所有 $l < n$ 和 $a_n = a$，我们将 a_l 在 C 中的像选为一个恒等态射。这给出了一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \Lambda\mathbf{Eq}_n & \longrightarrow & C \\ {\scriptstyle \mathbf{eq}_n}\downarrow & & \\ \mathbf{Eq}_n & & \end{array}$$

它有一个虚线对角提升 (x, y)。但这一对满足 $y\colon\ x\#_{k-1}a \to b$，因此是上述提升问题的一个解。

$\mathsf{sat}_{n,\ n}$ 关于饱和的证明类似。 □

3.17 引理。在纤维化 m-标记的 ∞-范畴中，所有标记箭头都是可逆的。此外，它们的逆元也是标记的。

证明。首先，针对 $\mathsf{eq}_{n\,n}$ 的右提升性质表明，对于任意标记箭头 a，存在一对 (a^{-1}, ν)，其中 ν 是标记的，且 $\nu\colon\ a^{-1}\#_n a \to \mathbb{I}$。$a^{-1}$ 是标记的这一事实，来自针对 $\mathsf{sat}_{n\,n}$ 的右提升性质。

再次利用针对 $\mathsf{eq}_{n\,n}$ 的右提升性质，我们推得存在两个标记箭头 $(a^{-1})^{-1}$ 和 β，使得：

$$\beta\colon (a^{-1})^{-1}\#_n a^{-1} \to \mathbb{I}.$$

最后，以同样的方式，我们得到一个标记的箭头：

$$\beta^{-1}\colon \mathbb{I} \to (a^{-1})^{-1}\#_n a^{-1}.$$

于是，我们将 $\epsilon\colon a\#_n a^{-1} \to \mathbb{I}$ 定义为以下复合：

$$\begin{array}{ccc} a\#_n a^{-1} & & \mathbb{I} \\ {\scriptstyle \beta^{-1}\#_n a\#_n a^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \beta} \\ (a^{-1})^{-1}\#_n a^{-1}\#_n a\#_n a^{-1} & \xrightarrow[(a^{-1})^{-1}\#_n \nu\#_n a^{-1}]{} & (a^{-1})^{-1}\#_n a^{-1} \end{array}$$

由于它是标记箭头的复合，ϵ 也被标记。因此这表明 a^{-1} 是 a 的逆元。

□

3.18 引理。纤维对象是预纤维化的。

证明。引理 3.17 蕴含第一个条件。对于第二个条件，设 $y\colon x \to b$ 是一个标记箭头，其中 b 是标记的。相对于 $\mathbf{sat}_{n,n}$ 的右提升性质，取 a 为恒等态射，可推出 x 是标记的。现在设有一个标记箭头 $y\colon b \to x$，其中 x 是标记的。我们有一个标记箭头 $y^{-1}\colon x \to b$，并且 b 于是也是标记的。

□

3.19 命题。对于一个 m-标记的 ∞-范畴 C，以下断言等价：

(1) C 符合定义 3.12 中预纤维化的含义。(2) 所有方程在 C 中都有解，并且每当 a 和 $c\colon a \to b$ 被标记时， b也被标记。(3) C 对所有方程和饱和都具有右提升性质。(4) C 对于定理 2.38 的模型结构是纤维化的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 可由命题 3.13 和引理 3.14 推出。引理 3.15 说明 (2) $\Rightarrow$ (3)。由于生成无害扩张要么是方程，要么是饱和，因此 (3) $\Rightarrow$ (4)。最后，(4) $\Rightarrow$ (1) 是引理 3.18 的内容。 □

3.3 同构纤维化

在本节中，我们将通过命题 3.23 给出纤维对象之间纤维化的一种更简单的刻画，即以下意义上的“同构纤维化”：

3.20 定义。若一个态射在以下映射下具有提升性质，则称其为 m-标记的 ∞-范畴之间的同构纤维化：

$$i_n^+ \colon \mathbb{D}_n^\flat \to (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$$

其中 e_{n+1} 是 $\mathbb{D}_{n+1}$ 中唯一的非恒等箭头。

具体而言，若一个态射 $\pi\colon X \to Y$ 介于纤维化的 m-标记的 ∞-范畴之间，则它是同构纤维化，当且仅当对于 X 中每个 n 维箭头 $f\colon a \to b$，只要在 Y 中存在一个平行箭头 $g\colon \pi(a) \to \pi(b)$，且有一个标记箭头 $h\colon g \to \pi(f)$，那么g和 h就能提升为 X 中的箭头 $\overline{g}\colon a \to b$和 $\overline{h}\colon \overline{g} \to f$，其中 $\overline{h}$ 为标记的，并满足 $\pi(\overline{g}) = g$ 以及 $\pi(\overline{h}) = h$。

注意，由引理 2.41 可知，纤维化都是同构纤维化。我们强调，我们只考虑纤维化的 m-标记的 ∞-范畴之间的同构纤维化概念。我们认为，在此情境之外，上述定义并无多大意义。

3.21 引理。任意两个纤维化 m-标记的 ∞-范畴之间的同构纤维化也具有相对于...
...的提升性质

$$i_n^- \colon \mathbb{D}_n^\flat \to (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$$

证明。设 $\pi\colon X \to Y$ 是纤维化 m-标记的 ∞-范畴之间的同构纤维化，$f\colon a \to b$ 是 X 中的一个 n-箭头，其中 $g\colon \pi(a) \to \pi(b)$，且 $h\colon \pi(f) \to g$ 是 Y 中的两个箭头， h 为标记箭头。

由于 Y 是纤维化的，根据命题 3.17，箭头 h 存在逆元，即存在一个标记箭头 $h^{-1}\colon g \to \pi(f)$，以及另一个标记箭头 $t\colon h^{-1} \#_n h \to \mathbb{I}_g$，它们见证了逆关系。随后可以应用同构纤维化性质，将 g 和 h^{-1} 提升为两个箭头 $\overline{g}\colon a \to b$ 和 $\overline{h^{-1}}\colon \overline{g} \to f$。

由于 X 是同构纤维化的，随后可以在 X中考虑 $\overline{h^{-1}}$ 的一个逆元 $\overline{h'}$，其在 π 下的像将成为 Y中 h^{-1} 的第二个逆元；同样，由于 Y是纤维化的，因此可以构造一个标记箭头 $h \to \pi(\overline{h'})$，再次应用同构纤维化性质便可得到 h 的一个提升，从而完成证明。 □

3.22 引理。纤维化 m-标记 ∞-范畴之间的同构纤维化对所有方程和饱和具有右提升性质

证明。我们将证明，此类态射对所有左方程都具有提升性质；完全相同的论证也表明，它对所有右方程都具有提升性质。

我们考虑两个纤维化的 m-标记的 ∞-范畴之间的同构纤维化 $\pi\colon X \to Y$，以及一个相对于 $\Lambda P \to P$ 的 π 提升问题：

$$\begin{array}{ccc} \Lambda P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ P & \xrightarrow[(x,y)]{} & Y \end{array}$$

我们要证明 x 和 y 可以提升到 X。

首先要指出的是，由于 X 是纤维化的，根据命题 3.19，方程 P 在 X 中有解。这意味着可以在 X 中找到形状正确的箭头 x' 和 y'（尽管它们未必是 x 和 y 的提升）。

现在，在 Y 中，$(\pi(x')\ \pi(y'))$ 也是方程 ΛP 的一个解。由于 Y 是纤维化的，$Uni^{coh}(P)$ 在 Y 中有解，并且存在标记箭头：

$$z\colon x \to \pi(x')$$

$$t\colon s[x/z]\#_n \pi(y') \to y$$

其中 s 是 y 的源。

于是可以利用等纤维化性质，以及引理 3.21 中的对偶版本，逐步将所有这些箭头提升到 X：先提升 x 和 z，然后再提升 y 和 t。

现在，为了证明同构纤维化对饱和具有右提升性质，只需注意到，若相对于饱和存在提升，则该提升是唯一的（饱和是满态射）；因此，由于纤维对象对这些映射具有右提升性质，纤维对象之间的任意映射也对所有饱和具有提升性质。

□

3.23 命题。纤维化 m标记的 ∞范畴之间的态射是纤维化，当且仅当它是同构纤维化。

证明。根据引理 2.41，态射i_n^+ 是无害余纤维化，因此所有纤维化（纤维对象之间的）都是同构纤维化。

反过来，由于纤维对象之间的态射是纤维化，当且仅当它对生成的无圈余纤维化具有右提升性质，而这些余纤维化要么是方程，要么是饱和，因此由上一个引理可知，纤维对象之间的同构纤维化是纤维化。

□

由此我们得到：

3.24 推论。方程和饱和都是无圈余纤维化。

事实上，由于这些映射对纤维对象之间的所有同构纤维化都具有提升性质，因此它们对纤维对象之间的所有纤维化也都具有提升性质。

3.4 等价

现在我们转而刻画纤维对象之间的弱等价。

3.25 定义。态射 $p\colon X \to Y$between 纤维化 m-标记的 ∞-范畴∞-范畴是 m-标记的 ∞-范畴的等价，如果满足：

(1) 对任意箭头 $x \in X$，如果 $p(x)$ 是 Y中的标记态射，那么 x 在 X中是标记的。

(2) 对任意对象 $c \in Y$，存在一个对象 $\tilde{c} \in X$ 和一个标记箭头$e\colon p(\tilde{c}) \to c$。

(3) 对于 X中的任意一对平行箭头 (a, b)，以及 Y中的任意箭头 $c\colon p(a) \to p(b)$，存在一个箭头 $\tilde{c}\colon a \to b$ 属于 X，以及一个标记箭头 $e\colon p(\tilde{c}) \to c$属于 X。

因此，非正式地说，函子是等价，当且仅当它是保守的、本质满的，并且“在每个 Hom ∞-范畴上本质满”。

3.26 命题。箭头 $f\colon X \to Y$between ∞-Cat^m 中的纤维对象之间是定理 2.38 的左半模型结构中的弱等价，当且仅当它是定义 3.25 意义下的等价。

证明。我们将使用纤维对象之间弱等价的一般刻画：它们是对生成余纤维化具有“弱左提升性质”的态射。也就是说，给定一个关于某个生成余纤维化的提升问题，就存在一个对角提升，使得上三角形交换，而下三角形在相对同伦意义下交换。对于弱模型范畴（特别是左半模型范畴），这一点已在 [14] 中作为定理 A.2.6 得到确立（另见注释 A.2.7）。我们回顾一下，在我们的模型结构中，生成余纤维化如下给出：

$$I^a = \{i_n\colon \partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n, |n \geqslant 0\} \qquad I^m = \{\mathbb{D}_n \to (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}}) \quad , n \geqslant 0\}$$

要表达对这些态射具有“弱左提升性质”意味着什么，我们需要为每个余纤维化构造一个相对柱对象。

对于形如 $\mathbb{D}_n \to (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}})$ 的映射，典范映射

$$(\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}}) \coprod_{\mathbb{D}_n} (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}}) \to (\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}})$$

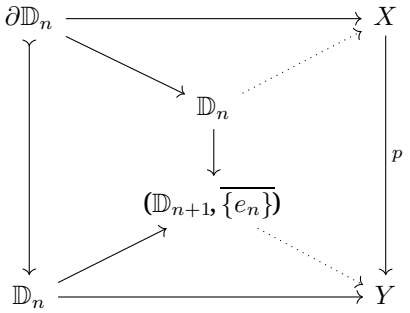
是一个同构，因此 $(\mathbb{D}_n, \overline{\{e_n\}})$ 已经是一个柱对象。特别地，相对于这些映射的弱左提升性质与通常的左提升性质完全相同，并且恰好对应于定义 3.25 的第一个条件。

对于映射 $i_n\colon \partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n$，通过考虑以下分解，可以得到一个相对柱对象：

$$\mathbb{D}_n \coprod_{\partial\mathbb{D}_n} \mathbb{D}_n \rightarrowtail (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}}) \to \mathbb{D}_n$$

第一个映射在定义域的两个非平凡箭头之间自由添加一个（标记的）$(n+1)$-箭头，因此它是一个余纤维化。两个映射 $\mathbb{D}_n \to$ 中的一个

$(\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_{n+1}\}})$ 已在引理 2.41 中证明是一个无害余纤维化，因此证明了它是此余纤维化的相对柱对象。利用此柱对象来表达相对于 i_n 的弱提升性质，可恰好得到定义 3.25 的第二个条件（针对 $n = 0$）和第三个条件（针对 $n > 0$）。确实，给定一个弱提升图表：



图表中的实线部分对应于 X 中一对平行的 $(n-1)$-箭头 (a, b)，以及 Y 中一个 n-箭头 $c\colon p(a) \to p(b)$；顶部的虚线态射给出一个箭头 $\tilde{c}\colon a \to b$，而底部的虚线态射对应于一个标记的 $(n+1)$-箭头 $e\colon p(\tilde{c}) \to c$，因此，这个提升条件恰好对应于定义 3.25 的第三点（第二点对应于 $n = 0$ 的情形）。

□

3.5 饱和局部化。

命题 3.19 给出了定理 2.38 中模型结构的纤维对象的刻画：一个标记的 ∞-范畴是纤维化的，当且仅当标记箭头具有逆元，并且与标记箭头同构的箭头也是标记的。

不过，细心的读者或许已经注意到，这不足以证明标记箭头恰好就是定义 3.11 意义下具有逆元的箭头。

3.27 例. 设 C 是一个范畴，将其视为一个 ∞-范畴，其中不存在维数为 > 1 的非恒等箭头。我们赋予 C 标记 $C^\flat$，其中只有恒等箭头被标记。

在此标记下， C 是纤维化的；事实上，它满足命题 3.19 的所有条件。但如果范畴 C 有非恒等可逆箭头，那么这些箭头按照定义 3.11 的意义具有逆元，却没有被标记。

本节通过引入一种 Bousfield 局部化来“修复”这个问题，使得纤维对象具有这些性质。

3.28 定义. 若给定三个可复合的 n-箭头 f、g 和 h，满足 $f \#_{n-1} g$ 和 $g \#_{n-1} h$ 均被标记，则 f、g 和 h 均被标记，就称标记的 ∞-范畴 C 满足 2-出-6 性质。

3.29 注。若 C 是一个纤维化的 m-标记的 ∞-范畴，则由 $\exists c\colon f \to g$ 是一个标记的 $(n+1)$-箭头定义的关系 $f \sim g$ 是一种等价关系

在 n-箭头上。事实上，该关系具有自反性和传递性，因为恒等态射是标记的，且标记箭头的复合仍是标记的；它也具有对称性，因为标记箭头有逆元。

此外，这个等价关系与所有复合运算相容，因此可以定义一个“同伦 n-范畴” h_nC，它是一个n-范畴，其中 k arrows for $k < n$ 是 C 的箭头，而其 n-箭头则是关于此关系的等价类。我们特别会用到：给定 C 中两个平行的 $n-2$ 箭头 u、v，我们有一个范畴 $h_nC(u,v)$，其对象是 $n-1$ 箭头 $u \to v$，态射则是它们之间 n 箭头的等价类。

3.30 引理。对于一个 m-标记的 ∞-范畴 C，以下条件等价：

(1) 当且仅当一个箭头在定义 3.11 的意义下有逆元时，它在 C 中是标记的。
(2) C 在定理 2.38 的模型结构下是纤维化的，并满足 2-out-of-6 性质。

证明。我们先考虑一个满足 (1) 的 C m-标记的 ∞-范畴，并利用命题 3.19 检查它是纤维化的。命题 3.19 的第一个条件显然成立，我们来检查第二个条件：若 $c\colon a \to b$ 是标记的且 b 是标记的，那么考虑 b 的一个逆元，即连接 $\epsilon\colon b^{-1} \#_n b \to \mathbb{I}$ 和 $\nu\colon b\#_n b^{-1} \to \mathbb{I}$ 的标记箭头，我们可以直接复合：

$$b^{-1}\#_n a \overset{b^{-1}\#_n c}{\to} b^{-1}\#_n b \overset{\epsilon}{\to} \mathbb{I}$$

$$a\#_n b^{-1} \overset{c\#_n b^{-1}}{\to} b\#_n b^{-1} \overset{\epsilon}{\to} \mathbb{I}$$

这表明 b^{-1} 也是 a的一个逆元，因此，如果所有具有逆元的箭头都被标记，那么 a 也被标记。注意，如果最初被标记的是 a，则可以考虑一个逆元 c^{-1}: $b \to a$，并应用同样的论证。

接下来，我们证明 C 满足 2-out-of-6 条件。为此，我们可以借助再标记 3.29。一个 n 箭头在定义 3.11 的意义下有逆元，当且仅当它是范畴 $h_nC(u,v)$ 中的同构，其中 u 和 v 分别是它的（$n-2$）维源和目标。于是，我们的假设是，一个 n-箭头被标记，当且仅当它在范畴$h_nC(u,v)$中的等价类可逆。标记箭头满足 2-out-of-6 条件，这一事实随即由范畴中的同构满足 2-out-of-6 条件这一事实得出。

反过来，假设 C 满足条件 (2)，由于 C 是纤维对象且由命题 3.19 可知，标记箭头都有逆元。若箭头 a 有逆元 a^{-1}，则 $a\#_{n-1}a^{-1}$ 和 $a^{-1}\#_{n-1}a$ 都是标记的，因为它们等价于恒等态射；由 2-out-of-6 条件可知，a（以及 a^{-1}）是标记的。

□

3.31 定理。定理 2.38 的模型结构存在一个 Bousfield 局部化（作为左半模型结构），其纤维对象是满足引理 3.30 中等价条件的标记 ∞-范畴。

我们称此模型结构为饱和归纳模型结构。

作为一种 Bousfield 局部化，此模型结构与定理 2.38 中的模型结构具有相同的余纤维化，以及纤维对象之间相同的纤维化。

证明。这里的关键在于，带标记的 ∞-范畴满足 2-out-of-6 条件，当且仅当它满足针对某些余纤维化的提升性质。

对于每个 n，我们考虑由三个可复合的 n箭头生成的多图 X_n

$$\mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_{n-1}} \mathbb{D}_n \coprod_{\mathbb{D}_{n-1}} \mathbb{D}_n$$

其中，每个推出在左侧使用目标映射，在右侧使用源映射。我们称 f、 g 和 h 为 X_n的三个 n-维生成元。我们考虑映射 s_n:

$$s_n\colon \left(X_n, \overline{\{f\#_{n-1}g, g\#_{n-1}h\}}\right) \to \left(X_n, \overline{\{f,g,h\}}\right)$$

它是 X_n 的恒等态射（带有两种不同的标记）。 s_n 是余纤维化，并且带标记的 m-范畴满足针对所有 s_n 的右提升性质，当且仅当它满足 2-出-6 性质。

因此，我们取定理 2.38 中模型结构在集合 s_n处的左 Bousfield 局部化。关于左半模型结构的左 Bousfield 局部化理论，可参见 [5] 或 [15]。

鉴于 s_n 中的映射已经是余纤维对象之间的余纤维化，左 Bousfield 局部化的纤维对象就是那些对映射 s_n 及其所有迭代柱映射 $\nabla^k s_n$都具有右提升性质的纤维对象；其中，若 $i\colon A \to B$ 是余纤维化，则对于某个相对柱对象， ∇i 是余纤维化 $B \coprod_A B \to I_A B$。然而，对于映射 s_n，由于它只改变标记，推出 $B \coprod_A B$ 就是 B，因此它本身已经是柱对象，且映射 ∇s_n 是同构。因此，对象在局部化中是纤维对象，当且仅当它是纤维对象且对所有 s_n都具有提升性质，也就是说，它满足 2-出-6 性质。证明完毕。

□

4 与其他模型结构的比较

4.1 截断函子

4.1 定义。令 $m < p \leq \infty$。存在一个函子:

$$\begin{array}{rccc} \pi_m\colon & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m+1} & \to & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m} \\ & (X, M) & \mapsto & (X, \overline{M}). \end{array}$$

它将每个维数为 $m+1$ 的箭头标记为一个显然的包含函子:

$$\begin{array}{rccc} \iota_{m+1}\colon & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m} & \to & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m+1} \\ & (X, M) & \mapsto & (X, M) \end{array}$$

最终得到一个函子:

$$\begin{array}{rccc} \tau_m\colon & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m+1} & \to & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^{m} \\ & (X, M) & \mapsto & (\tau(X), M) \end{array}$$

其中， $\tau(X)$ 是 X 的子 ∞-范畴，其维数严格高于 m 的箭头均属于 M。由于假设 M 对复合封闭且包含恒等态射， $\tau(X)$ 确实是一个 ∞-范畴。

这些函子构成以下伴随：

$$\pi_m \dashv \iota_{m+1} \dashv \tau_m.$$

4.2 记号。对于 $m < p$，我们也将 $\iota_p\colon \infty\text{-}\mathbf{Cat}^p \to \infty\text{-}\mathbf{Cat}^m$ （分别地，$\pi_p\colon \infty\text{-}\mathbf{Cat}^m \to \infty\text{-}\mathbf{Cat}^p$，分别地， $\tau_p \infty\text{-}\mathbf{Cat}^m \to \infty\text{-}\mathbf{Cat}^p$）记作 ι_k （分别地， π_k，分别地， τ_k）的迭代复合，其中 k 遍历 $[p, m]$。

此外，由于 ι_p 是全子范畴的包含，我们在记号中通常会将 X 和 $\iota_p X$ 视为相同。类似地，对于态射$f \in \mathrm{Hom}(X, \tau_m(Y))$， $\mathrm{Hom}(\iota_p X, Y)$中的对应态射也记作 f。

4.3 命题。对于 $m < p$，伴随对（$\pi_m \dashv \iota_p$）和（$\iota_p \dashv \tau_m$）是奎伦对。

证明。函子 π_m 和 ι_p 显然保余纤维化和无害余纤维化。

□

如引言中所述，我们可以考虑以下两个模型结构塔：

$$\infty\text{-}\mathbf{Cat}^0 \overset{\pi_0}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^1 \overset{\pi_1}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^2 \overset{\pi_2}{\leftarrow} \dots \overset{\pi_{n-1}}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^n \overset{\pi_n}{\leftarrow} \dots$$
$$\infty\text{-}\mathbf{Cat}^0 \overset{\tau_0}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^1 \overset{\tau_1}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^2 \overset{\tau_2}{\leftarrow} \dots \overset{\tau_{n-1}}{\leftarrow} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^n \overset{\tau_n}{\leftarrow} \dots$$

并取任一塔的射影极限，以此定义严格的 (∞, ∞)-范畴。

本节的目标是证明， $\infty\text{-}\mathbf{Cat}^\infty$ 上的归纳模型结构等价于第二个塔的极限（其中包含 τ 函子）。这里的射影极限指这些塔的同伦论极限，也就是说，相应的 $(\infty, 1)$-范畴塔的同伦极限。 [6] 和 [12] 研究过这类模型结构的射影极限，我们将使用这两篇论文中的构造。

4.4 注。需要指出的是， [6] 和 [12] 中的结果只针对 Quillen 模型结构得到了证明，因此不能直接用于我们这里使用的左半模型结构。这两篇论文中的证明稍作修改即可适用于左半模型结构，因此可以放心地认为这些结果在这里同样适用。不过，为避免依赖这些结果，我们将独立证明用作该射影极限模型的模型结构确实存在，并将主定理表述为与这一模型结构的等价。唯一仍需依赖将 [6] 或 [12] 中的结果应用于半模型结构的地方，是为了将我们的结果解释为关于塔的同伦极限的结论。

4.5 定义。带弱等价的范畴是一个二元组 (C, W)，其中 C是一个范畴， W 是满足三取二性质的一类映射 C。我们将 (C, W) 的同伦范畴定义为 $ho(C, W) := C[W^{-1}]$。

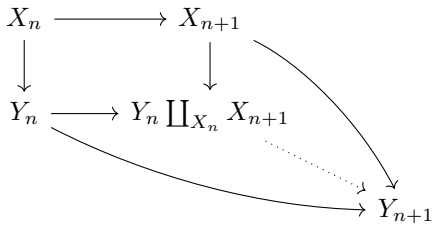
4.6 定义。我们定义带弱等价的范畴 $\mathrm{LimLax}_{n\in\mathbb{N}}\,\infty\text{-Cat}^n$，其对象是序列 $X_\bullet = \{(X_n, f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $X_n \in \infty\text{-Cat}^n$ 且 $f_n\colon X_n \to \tau_n X_{n+1}$，其弱等价为逐点等价。根据伴随关系，对象与以下序列一一对应

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

其中每个 $X_n \in \infty\text{-Cat}^n$。

带弱等价的范畴 $\lim_{n\in\mathbb{N}}\infty\text{-Cat}^n$ 是 $\mathrm{LimLax}_{n\in\mathbb{N}}\,\infty\text{-Cat}^n$ 的全子范畴，由满足以下条件的对象 $\{(X_n, f_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 组成：对于所有 n, $f_n\colon X_n \to \tau_i X_{n+1}$ 是 $\infty\text{-Cat}^n$ 上模型结构的弱等价。弱等价是逐点等价。

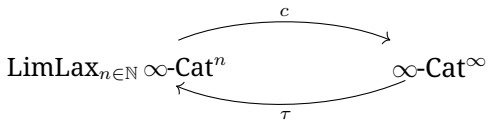
4.7 命题。$\mathrm{LimLax}_{n\in\mathbb{N}}\,\infty\text{-Cat}^n$ 上存在一种模型结构，称为松弛极限结构，其中纤维化和弱等价是逐点的，而余纤维化是满足以下条件的态射 $h\colon X_\bullet \to Y_\bullet$：$h_0\colon X_0 \to Y_0$ 是 $\infty\text{-Cat}^0$，中的余纤维化，并且对于所有 n，下列图表中的虚线态射是 $\infty\text{-Cat}^{i+1}$ 中的余纤维化：



证明。首先注意，$\mathrm{LimLax}_{n\in\mathbb{N}}\,\infty\text{-Cat}^n$ 可以识别为函子 $X\colon \mathbb{N} \to \infty\text{-Cat}^\infty$ 的全子范畴，其中这些函子满足 $X_n \in \infty\text{-Cat}^n$。

这类函子上存在一种模型结构，其中纤维化和弱等价都是逐点定义的：即投射（或 Reedy）模型结构。此模型结构的余纤维化如命题中所述，并且此模型结构限制在 $\mathrm{LimLax}_{n\in\mathbb{N}}\,\infty\text{-Cat}^n$ 上。 □

4.8 定义。我们有一个伴随



where 左伴随将一个序列 $X_\bullet$ 发送到其余极限：

$$c(X_\bullet) := \operatorname*{Colim}_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

而右伴随将一个 ∞标记的 ∞范畴 X 映射到该序列上

$$\tau_0(X) \to \dots \to \tau_n(X) \to \dots$$

4.9 命题。该伴随在宽松极限模型结构与归纳模型结构之间诱导出一个 Quillen 伴随，其中左伴随保持弱等价和纤维对象。

证明。左伴随 c 显然保持余纤维化。其次，由于 ∞-Cat$^\infty$ 上的模型结构是 ω-组合的，其纤维对象在 ω-滤过余极限下封闭；并且由于其分解系统可由 ω-可访问函子得到，其弱等价在 ω-滤过余极限下封闭（对于 Quillen 模型结构，这一点见 [11] 的命题 7.3；对于左半模型结构，见 [13]的命题 7.7）。这意味着函子 c 保持余纤维化和弱等价（因为它是一个滤过余极限），因此也保持无圈余纤维化。

□

4.10 命题。模型结构 LimLax$_{n\in\mathbb{N}}$ ∞-Cat^n 存在一个左 Bousfield 局部化，称为极限结构，其中 $X_\bullet$ 是纤维的，当且仅当它在宽松极限模型结构中是纤维的，并且对于所有整数 n，$f_n\colon X_n \to \tau_n X_{n+1}$ 是弱等价。此外，纤维对象之间的弱等价是逐点等价。

根据我们的主张（见注 4.4），[6] 或 [12] 的结果可应用于左半模型结构，由此得到的 ∞-范畴（即对此 Bousfield 局部化进行局部化所得的范畴）等价于对 ∞-Cat^n 进行局部化所得的 ∞-范畴的极限（其中以 τ_n 函子作为过渡函子）。

在证明定理之前，我们需要引入一些构造：

4.11 构造。设 k 为任意整数。我们将 LimLax$_{i\in k,k+1}$(∞-Cat^i, τ_i) 定义为这样一个范畴，其对象是三元组 $(X, X', f\colon X \to \tau_k(X'))$，其中 X 和 X' 分别是 k-标记的和 $(k+1)$-标记的 ∞-范畴。根据伴随，这些对象与以下序列一一对应：

$$X \xrightarrow{f} X'$$

其中，X 和 X' 分别是 k-标记的和 $(k+1)$-标记的 ∞-范畴。

存在一个伴随

$$\mathrm{LimLax}_{i\in k,k+1}(\infty\text{-}\mathbf{Cat}^i, \tau_i) \underset{r}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathrm{LimLax}_{i\in\mathbb{N}}(\infty\text{-}\mathbf{Cat}^i, \tau_i)$$

其中，左伴随 U 将 $X \to Y$ 映射到序列

$$\emptyset \to \ldots \to \emptyset \to X \xrightarrow{f} Y \to Y \to \cdots \to Y \to \ldots$$

而右伴随将 $X_\bullet$ 映射到

$$X_k \xrightarrow{f} X_{k+1}.$$

4.12 注。给定 $i\colon A \rightarrowtail B$ 一个（可能是左半）模型范畴中余纤维对象之间的余纤维化，我们称 i 的（或一个）同伦余对角为余纤维化 $B \coprod_A B \rightarrowtail I_A B$，其中 $I_A B$ 是此余纤维化的某个相对柱对象。若此同伦余对角本身是余纤维对象之间的余纤维化，则可以迭代这一构造。在对一组 S 余纤维对象之间的余纤维化进行左 Bousfield 局部化时，局部化的纤维对象恰好是对 S 中的所有箭头及其所有迭代同伦余对角都具有右提升性质的对象。这是关于 Bousfield 局部化的一个相当标准的结果；该结果针对弱模型结构（尤其是左半模型结构）的证明见 [15]（参见定理 7.3 的证明和注 7.6）。

4.13 构造。给定 $A \rightarrowtail B$ 一个 ∞-Cat^k 中余纤维对象之间的余纤维化，我们可以将其视为 LimLax$_{i\in k,\ k+1}$(∞-Cat^i, τ_i) 中的一个余纤维对象。给定 $A \to B$的一个相对柱对象 $I_A B$，由下图方块给出的 LimLax$_{i\in k,\ k+1}$(∞-Cat^i, τ_i) 中有一个余纤维化：

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & I_A B \end{array}$$

下面证明的一个关键观察是，可以为该映射选择一个同伦余对角，使其也具有这种形式。

事实上，要构造这样的余对角线映射，需要构造一个映射在（垂直方向上的）(余纤维化、弱等价)：

$$\begin{array}{ccc} B \coprod_A B & \longrightarrow & I_A B \coprod_B I_A B \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & I_A B \end{array}$$

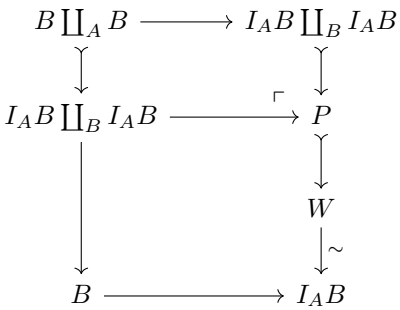
可以观察到，水平映射 $B \coprod_A B \rightarrowtail I_A B \coprod_B I_A B$ 已经是 $A \rightarrowtail B$的一个相对柱对象，因此可以先将最左侧的映射分解

$$\begin{array}{ccc} B \coprod_A B & \longrightarrow & I_A B \coprod_B I_A B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_A B \coprod_B I_A B & & \\ \downarrow \sim & & \\ B & \longrightarrow & I_A B \end{array}$$

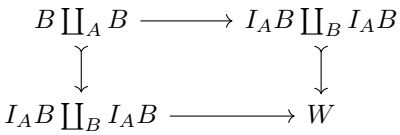
然后构造推出 P:

$$\begin{array}{ccc} B \coprod_A B & \longrightarrow & I_A B \coprod_B I_A B \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_A B \coprod_B I_A B & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & I_A B \end{array}$$

因此，映射 $P \to I_A B$ 可以分解为先一个余纤维化，再一个弱等价。



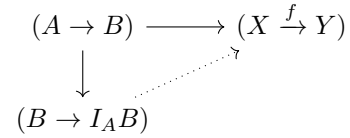
这给出了一个相对柱对象，从而为我们形如以下形式的映射提供了一个同伦余对角：



但可以看出，我们在上面构造的对象 W 本身就是映射 $B \coprod_A B \to I_A B \coprod_B I_A B$ 的相对柱对象，因此这个同伦余对角再次具有所需的形式。

命题 4.10 的证明。与构造 4.13 一样，给定 ∞-Cat^k 中的一个余纤维化 $A \rightarrowtail B$，我们考虑 LimLax$_{i\in\mathbb{N}}$(∞-Cat^i, τ_i) 中的余纤维化 $\{U(A \to B) \to U(B \to I_A B)\}$。对于 $A \rightarrowtail B$，我们将得到的余纤维化集合 I_k 称为 ∞-Cat^k 的生成余纤维化。我们断言，LimLax$_{i\in\mathbb{N}}$(∞-Cat^i, τ_i) 的纤维对象 (X_i, f_i) 对 I_k 中所有映射都具有右提升性质，当且仅当映射 $f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 是弱等价；并且这也意味着，当 $A \rightarrowtail B$ 是 ∞-Cat^k 中任意一个余纤维化时，(X_i, f_i) 对所有形如 $\{U(A \to B) \to U(B \to I_A B)\}$ 的映射都具有右提升性质。

为此，我们将使用以下判别准则：在任意模型范畴中，纤维对象之间的态射 $f\colon X \to Y$是弱等价，当且仅当对于每个生成余纤维化 $A \to B$，在箭头范畴中，所有形状如下的图表都存在提升：



其中 $I_A B$ 是余纤维化 $A \to B$的相对柱对象。 [14], 的附录 A.2 证明了这一结论对弱模型范畴成立；参见定理 A.2.6 和注释 A.2.7。

现在，松极限的对象 (X_i, f_i) 对 I_k 的态射具有右提升性质，当且仅当 $(X_k \to X_{k+1})$ 对 $(A \to B) \to (B \to I_A B)$ 具有右提升性质。根据伴随，这个最后的条件等价于要求 $f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 对 $(A \to B) \to (B \to I_A B)$ 具有右提升性质；根据判据，这又等价于要求$f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 是弱等价。反过来，如果 $f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 是

一个等价，那么对于任意余纤维化 $A \rightarrowtail B$ 和任意相对柱对象，它对 $(A \to B) \to (B \to I_A B)$ 具有右提升性质。

接着，我们将极限模型结构定义为对所有集合 I_k （对于 k的所有取值）进行左 Bousfield 局部化所得的宽松极限模型结构。 [15]的定理 7.3 断言了这一局部化的存在性。

接下来需要证明，该局部化的纤维对象正是满足条件 $f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 为弱等价的纤维对象。如注 4.12 所述，该局部化的纤维对象是在宽松极限模型结构中为纤维对象，且对 I_k 中的所有映射及其所有迭代同伦余对角都具有左提升性质的对象；但根据构造 4.13，所有这些迭代同伦余对角都具有 $U(A \to B) \to U(B \to I_A B)$ 的形式。因此，结合上面的讨论可知，这些纤维对象恰好是映射 $f_k\colon X_k \to \tau_k X_{k+1}$ 为等价的对象，正如命题所述。

□

命题 4.14 定义 4.8 中的伴随，是命题 4.10 的极限模型结构与归纳模型结构之间的 Quillen 伴随。

证明。我们需要证明命题 4.14 中的伴随可传递到局部化，这意味着 I 的所有态射都会被映射为 ∞-$\mathbf{Cat}^\infty$ 中的平凡余纤维化。这是显然的，因为

$$U(A \to B) \to U(B \to I_A B) \quad \overset{c}{\longmapsto} \quad B \to I_A B.$$

□

定理 4.15 命题 4.10 的极限模型结构与归纳模型结构之间的 Quillen 伴随是一个 Quillen 等价。这诱导出范畴等价：

$$ho \lim_{n\in\mathbb{N}} \infty\text{-}\mathbf{Cat}^n \cong ho\ \infty\text{-}\mathbf{Cat}^\infty.$$

证明。由于左伴随保持所有弱等价和纤维化对象，我们需要证明：对于每个纤维化的 ∞-标记的 ∞-范畴 X，以及每个余纤维化且纤维化的序列 $X_\bullet$，存在两个弱等价：

$$c\tau X \to X \qquad \text{and} \qquad X_\bullet \to \tau c X_\bullet.$$

第一个显然，因为

$$X \cong \operatorname*{Colim}_{n\in\mathbb{N}} \tau_n X.$$

设 $X_\bullet$ 是极限模型结构中的一个可纤维化且纤维化的对象。由于 $X_\bullet$ 和 $\tau c X_\bullet$ 是纤维化的，当且仅当对于所有 k， $X_k \to \mathrm{Colim}_{n\in\mathbb{N}}\, \tau_k(X_n)$ 都是弱等价时，第二个比较态射才是弱等价。为证明这一点，考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{\sim} & X_k & \xrightarrow{\sim} & \dots & \xrightarrow{\sim} & X_k & \xrightarrow{\sim} & \dots \\
\downarrow\sim & & & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & & & \downarrow\sim & & \\
X_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_k & \xrightarrow{\sim} & \tau_k(X_{k+1}) & \xrightarrow{\sim} & \dots & \xrightarrow{\sim} & \tau_k(X_n) & \xrightarrow{\sim} & \dots
\end{array}$$

其中所有垂直态射都是弱等价。由于左伴随 c 保持弱等价，因此这会导出一个弱等价:

$$X_k \xrightarrow{\sim} \operatorname*{Colim}_{n\in\mathbb{N}} \tau_k(X_n) \cong \operatorname*{Colim}_{n\in\mathbb{N}} \tau_k(X_n).$$

□

4.2 与 ∞-Cat 上的 folk 模型结构的比较

按照 [19, 定义 6], ，我们也可以对 ∞-范畴中箭头的可逆性给出一个余归纳定义。在[19]中，这一概念称为“弱可逆”。具体而言，我们通过余归纳定义如下:

4.16 定义。若一个（标记的） ∞-范畴中的 n-箭头 $f\colon a \to b$ 满足存在 $g\colon b \to a$ ，以及两个余归纳可逆的（$n+1$）-箭头 $\alpha\colon f\#_{n-1}g \to 1_a$ 和 $\beta\colon g\#_{n-1}f \to 1_b$，则称该箭头余归纳可逆。

当然，这意味着还存在（n+1）-箭头 $\alpha'\colon 1_a \to f\#_{n-1}g$ 和 $\beta'\colon 1_b \to g\#_{n-1}f$，接着还有（$n+2$）-箭头 $\alpha\#_n\alpha' \to 1_{1_a}$、 $1_{f\#_{n-1}g} \to \alpha'\#_n\alpha$，.....随后是若干个（$n+3$）-箭头，如此延续至无穷。

4.17 引理。设 X 是一个 ∞-范畴，且 M 是余归纳可逆箭头的集合。集合 M 满足以下两个性质:

(1) $M = \overline{M}$。

(2) 对所有 c: 若 $a \to b$ 属于 M，则 $a \in M \Leftrightarrow b \in M$。

证明。第一点是 [20], 的例 1.1.9 中的第三点和第四点，第二点是该处命题 1.1.10 的推论。 □

4.18 命题。若 X 是一个纤维化的 m-标记的 ∞-范畴，则 X 中的所有标记箭头在其底层 ∞-范畴中都是余归纳可逆的。

证明。这是引理 3.17 的直接推论。 □

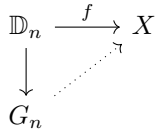
4.19 命题。设 X 是一个 ∞-范畴，且 M 是由余归纳定义的可逆箭头集合。则标记的 ∞-范畴（X， M）在归纳模型结构中是纤维化的。

证明。我们证明（X， M）满足命题 3.19 的条件。根据定义，（X， M）的标记箭头按照定义 3.11 的意义具有逆元，因此第一个条件得以满足。第二个条件由引理 4.17 推出。

□

4.20 定义。令 G_1 为 ∞-范畴，它是在 folk 模型结构的余纤维化 $k_1\colon \mathbb{D}_1 \to G_1$ 后接平凡纤维化 $t_1\colon G_1 \to \mathbb{D}_1$ 对 $\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_0$ 进行分解时得到的。于是我们定义 $G_n := \Sigma^{n-1}G_1$ 和 $k_n := \Sigma^{n-1}k_1\colon \mathbb{D}_n \to G_n$, $t_n := \Sigma^{n-1}t_1\colon G_n \to \mathbb{D}_{n-1}$。回顾一下，函子 Σ^{n-1} 的定义见定义 2.4。由于悬挂保持平凡纤维化和余纤维化不变，因此，(k_n, t_n) 是将 $\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_{n-1}$ 分解为先余纤维化、后平凡纤维化的分解。

4.21 命题。设 X 为一个 ∞-范畴，且 f 是 X 中的一个 n-箭头。下图中存在一个提升：



当且仅当 f 是弱可逆的。

证明。这是对 [19]的引理 18 的改述。 □

4.22 定义。余归纳模型结构是通过以下态射集合对 ∞-Cat$^\infty$ 上的模型结构进行的左 Bousfield 局部化：

$$\{(G_n, \overline{\emptyset}) \to \mathbb{D}_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

˜4.23 注。注意，若我们定义 $G_n := \pi_{n-1}(G_n, \overline{\emptyset})$，则序列

$$(G_n, \overline{\emptyset}) \xrightarrow{p_n} \tilde{G_n} \xrightarrow{\tilde{k_n}} \mathbb{D}_{n-1}$$

是在归纳模型结构中的一个分解，由余纤维化后接平凡纤维化组成。采用 [15], 的术语，我们称余纤维化p_n 表示态射 $(G_n, \overline{\emptyset}) \to \mathbb{D}_{n-1}$。正如我们在 op cit 的定理 7.3 的证明中所给出的左 Bousfield 局部化构造中所见，标记的 ∞-范畴 X 在余归纳模型结构中是纤维化的，当且仅当 X 在归纳模型结构中是纤维化的，并且对所有 $n > 0$，它对态射 k_n 及 k_n的迭代同伦余对角具有右提升性质。

4.24 命题。设 X 是归纳模型结构中的纤维化 ∞-标记 ∞-范畴。当且仅当标记箭头恰好是底层 ∞-范畴中的余归纳可逆箭头时， X 在余归纳模型结构中是纤维化的。

证明。先假设 X 在余归纳模型结构中是纤维化的，并设 f 是底层 ∞-范畴中的一个余归纳可逆箭头。根据命题 4.21，这对应于一个态射 $f: (G_n, \overline{\emptyset}) \to X$。正如 4.23 中所述， X 对 k_n 具有右提升性质，这意味着 f 可以通过 $\pi_{n-1}G_n$ 提升。这说明 f 是标记的。此外，命题 4.18 指出，所有标记箭头都是余归纳可逆的。这表明标记箭头恰好对应于余归纳可逆箭头。

反过来，假设 X 是一个标记的 ∞-范畴，在归纳模型结构中是纤维化的，其标记箭头均为余归纳可逆箭头。我们要证明 X 在余归纳模型结构中是纤维化的。根据命题 4.19， X 在未局部化的模型结构中是纤维化的。接下来需要证明，对于所有整数 $n > 0$， X 对 k_n 以及 k_n的迭代同伦余对角具有左提升性质。注意，˜ ˜ ˜作为 $G_n \coprod_{(G_n, \overline{\emptyset})} G_n = G_n$，所有迭代同伦余对角都是恒等态射。总之，只需证明 X 对 $n > 0$的态射 k_n 具有左提升性质；这由假设显然成立。 □

4.25 定理。 ∞-Cat$^\infty$ 上的余归纳模型结构的纤维对象子范畴同构于 ∞-Cat。此外，两个纤维化的 ∞-标记 ∞-范畴之间的态射是弱等价，当且仅当其在 ∞-Cat 中对应的态射是 folk 模型结构中的弱等价。

于是我们有

$$ho^{coind}(\infty\text{-}\mathbf{Cat}^\infty) \cong ho^{folk}(\infty\text{-}\mathbf{Cat}).$$

证明。令 Fib(∞-Cat$^\infty$) 为 ∞-Cat$^\infty$ 上余归纳模型结构的纤维对象子范畴。我们定义 ϕ: Fib(∞-Cat$^\infty$) $\to \infty$-Cat 为遗忘标记的函子。命题 4.24 意味着这个函子是范畴等价。

最终，纤维化 ∞-标记 ∞-范畴之间的态射 f: $X \to Y$ 是弱等价，当且仅当，箭头范畴中形状如下的每个图表:

$$\begin{array}{ccc} (\partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n) & \longrightarrow & (X \xrightarrow{f} Y) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\mathbb{D}_n \to \tilde{G}_{n+1}) & & \end{array}$$

都存在提升。这等价于要求 ∞-Cat 的箭头范畴中形状如下的每个图表

$$\begin{array}{ccc} (\partial\mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n) & \longrightarrow & (X \xrightarrow{\phi(f)} Y) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\mathbb{D}_n \to G_{n+1}) & & \end{array}$$

都存在提升，这等价于要求 ϕ(*f*) 是弱等价。

□

注意，若 $m < \infty$，则每个在饱和归纳模型结构下为纤维化的 m-标记 ∞-范畴，在余归纳模型结构下也为纤维化，因此，当我们将前述定理限制到满足 $m < \infty$ 的 m-标记对象时，就无需转而使用余归纳模型结构，并可直接得到以下结论:

4.26 推论。若 $m < \infty$，则 ∞-Cat^m 上饱和归纳模型结构的纤维对象全子范畴，与由满足以下条件的 ∞-Cat 子范畴同构：其中的 ∞-范畴中，维数严格高于 n 的箭头均为余归纳可逆。此外，两个纤维 m-标记的 ∞-范畴之间的态射是弱等价，当且仅当相应的 ∞-Cat 中的态射是 folk 模型结构中的弱等价。

4.3 folk 模型结构与 π-塔的极限

本节中，我们将比较 folk 模型结构与第4.1节所考察的 π 函子塔的极限。我们将通过构造一个在 folk 模型结构中不是等价、但在 π-塔的极限中变为可逆的态射，证明两者并不等价。似乎不太可能

π-塔的极限实际上等价于归纳模型结构的某种局部化，尽管我们尚未能给出足够一般的论证来证明这一点。

更准确地说，我们将证明：

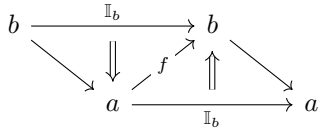
4.27 命题。存在一个态射 f，它连接两个余纤维化的 ∞-标记的 ∞-范畴，并且满足

(1) f 不是定义 4.16 中所定义的 ∞-标记的 ∞-范畴上的余归纳模型结构的弱等价；(2) 对所有整数 n，$\pi_n f$ 都是定理 3.31 中所定义的 n-标记的 ∞-范畴上的饱和归纳模型结构的弱等价。

由此立即得到：

4.28 推论。由 folk 模型结构所关联的 $(\infty, 1)$-范畴到定理 3.31 中所定义的、针对 n-标记的饱和归纳模型结构所关联的 $(\infty, 1)$-范畴极限的 $(\infty, 1)$-函子，是由左 Quillen 函子 $\pi_n \colon \infty\text{-Cat}^\infty \to \infty\text{-Cat}^n$ 对所有 n 所诱导的，但它不是等价。

4.29 构造。令 E_1 表示以下 2-多图：



以及 $E_n \coloneqq \Sigma^{n-1} E_1$。回顾一下，函子 Σ^{n-1} 的定义见定义 2.4。书写 $\mathbb{D}_n \to E_n$时，我们总是考虑表示 n-箭头 $\Sigma^{n-1} f$的态射。我们通过归纳定义一个多图序列 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$。令 $P_0 \coloneqq \mathbb{D}_1$，并令 P_n 为以下推出：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(P_n)_{n+1}} \mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & P_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} E_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} \end{array}$$

非正式地说，沿 $\mathbb{D}_{n+1} \to E_n$ 取推出意味着自由地为箭头 f 添加左逆元和右逆元（只是此时还没有标记），因此 P_{n+1}是通过为P_n的所有（$n+1$）-箭头自由添加左逆元和右逆元构造而成的。

在书写 $\mathbb{D}_1 \to P_n$ 时，我们将始终考虑表示 1-箭头 $P_0 \to P_n$ 的态射。最后，对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们将 C_n 和 D_n 定义为以下推出：

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{k<n} \mathbb{D}_1 & \longrightarrow & \mathbb{D}_1 & \longrightarrow & \mathbb{D}_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{k<n} P_k & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & D_n \end{array}$$

态射 $C_\infty \to D_\infty$ 将是命题 4.27 中的映射 f。非正式地说，在 C_∞ 中，与垂直映射 $\mathbb{D}_1 \to C_\infty$ 对应的 1-箭头对所有 n 都具有“高度至 n 的余归纳逆”，但并非余归纳可逆。因此，当把 C_∞ 看作民间（或余归纳）模型结构中的一个对象时，这个 1-箭头不可逆；但只要我们将所有 n-箭头（当其足够大时）局部化为可逆，这个 1-箭头就会变得可逆。相比之下，在 D_∞ 中，这个箭头变成了恒等态射，因此一开始就是可逆的。本节余下部分将对此作出严格论证。

我们首先证明命题 4.27 的第一点，即 $C_\infty \to D_\infty$ 不是余归纳模型结构中的弱等价。

4.30 引理. 设 P 是一个多图，f 是 P中的一个余归纳可逆的 k-箭头。对于出现在 f的分解中的每个 k-生成元 g，都存在一个生成箭头序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(1) 对于 $n > 0$，g_n 是一个 $(n + k)$-生成元，且 $g_0 = g$,

(2) 对于 $n > 0$，g_n 出现在 g_{n+1}的源的分解中。

证明. 我们通过对 k作余归纳来证明这一结果。假设对于所有 $(k + 1)$-箭头，结论都成立。设 $f\colon a \to b$是一个余归纳可逆的 k-箭头，并且 g 是出现在 f的分解中的一个 k-生成元。存在一个 k-箭头$f'\colon b \to a$，以及一个余归纳可逆的 $(n + 1)$-箭头 $\alpha\colon f\#_{k-1}f' \to \mathbb{I}_a$。由于 g是出现在分解 $f\#_{k-1}f'$ 中的一个 k-生成元（该分解是α的源），我们可以找到一个出现在 α 的分解中的 $(k + 1)$-生成元 β，使得 g 出现在 β的源的分解中。由于 α 余归纳可逆，可以从 β 出发继续余归纳地进行这一过程，构造出满足所需性质的生成元序列 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$。接着令$g_0 := g$，并令 $g_n := \beta_{n-1}$。这个序列也满足所需性质。 □

4.31 推论。 ∞-范畴 C_∞ 和 D_∞ 除了恒等态射外，没有余归纳可逆箭头。

证明。我们将对 C_∞证明这一断言，对 D_∞ 的证明基本相同。我们用反证法：设 f 是 C_∞的一个非恒等态射的余归纳可逆 k-箭头。由于 f 不是恒等态射，其分解中至少应出现一个k-生成元 g。由于 C_∞ 是一个多图，我们可以应用前一个引理，得到 C_∞的生成元序列 $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$。将该序列循环移位后，可以不失一般性地假设 g_0 的维数为> 1。 C_∞ 的生成元由所有n 对应的 P_n 生成元在 $\mathbb{D}_1$ 的唯一生成元处粘合而得，因此这个 g_0 必定属于某个 P_n；进而由归纳可知，所有 g_m 都属于同一个 P_n。但这会导致矛盾，因为 P_n 的生成元的维数有上界。 □

4.32 推论。标记的 ∞-范畴 $C_\infty^\flat$ 和 $D_\infty^\flat$ 在余归纳模型结构中是纤维化的。

证明。显然， $C_\infty^\flat$ 和 $D_\infty^\flat$ 是预纤维化的（如定义 3.12 所述），因此它们在归纳模型结构中是纤维化的。因此，根据命题 4.24，我们只需检查它们所有的余归纳可逆箭头是否都已标记；但由前一个推论可知，只有它们的恒等箭头是余归纳可逆的，证明完毕。 □

4.33 引理。态射 $C_\infty \to D_\infty$ 不是余归纳模型结构中的弱等价。

证明。由于 C_∞ 和 D_∞ 在余归纳模型结构中都是纤维化的，而该模型结构是归纳模型结构的 Bousfield 局部化，因此，当且仅当这个映射是归纳等价时，它才是余归纳等价。因此，可以使用定义 3.25 和命题 3.26 来检验它是否为等价，但这个映射不满足定义 3.25 的条件 (1)，因为 C_∞ 中与垂直映射 $\mathbb{D}_1 \to C_\infty$ 对应的 1-箭头未标记，却被映射到 D_∞ 中的一个恒等箭头（因此是标记的）。

□

现在我们来证明第二点，即对于任意整数 n， $\pi_n C_\infty \to \pi_n D_\infty$ 是一个弱等价。

4.34 引理。对于所有 $n > 0$，映射 $\pi_{n+1}E_{n+1} \to \pi_n E_{n+1}$ 是 n-标记的 ∞-范畴的饱和归纳模型结构中的一个弱等价（定理 3.31）。

证明。首先应注意，该映射是底层∞-范畴的一个同构，只对应于将所有 n-箭头标记。因此，它是一个余纤维化。此外， $\pi_{n+1}E_{n+1}$ 是余纤维对象，因为其底层 ∞-范畴是一个多图。利用饱和归纳模型结构中纤维对象的刻画（见引理 3.30 和定理 3.31），不难看出，纤维对象对 $\pi_{n+1}E_{n+1} \to \pi_n E_{n+1}$ 具有左提升性质。由于如果存在针对这些态射的提升，则该提升是唯一的，我们由此推得，纤维对象之间的任意纤维化都对它们具有左提升性质。因此，该映射是无圈余纤维化，进而是弱等价。

□

4.35 引理。对于所有 n， $\pi_n P_n \to \mathbb{D}_0$ 都是饱和归纳模型结构中的弱等价。

˜证明。我们将 P_{n+1} 定义为以下推出：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(P_n)_{n+1}} \mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & P_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} \pi_n E_{n+1} & \longrightarrow & \tilde{P}_{n+1} \end{array}$$

由于余纤维对象之间的弱等价在推出下保持稳定，前一个引理以及 $(\mathbb{D}_{n+1}, \{e_{n+1}\}) \to \pi_n E_{n+1}$ 是无圈余纤维化这一事实，意味着以下图表中标记为 $\sim$ 的所有箭头都是弱等价：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{(P_n)_{n+1}} \mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & P_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} \pi_{n+1}E_{n+1} & \longrightarrow & \pi_{n+1}P_{n+1} \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} \pi_n E_{n+1} & \longrightarrow & \tilde{P}_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \coprod_{(P_n)_{n+1}} \mathbb{D}_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} (\mathbb{D}_{n+1}, \overline{\{e_n\}}) & \longrightarrow & \pi_n P_n \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \coprod_{(P_n)_{n+1}} \pi_n E_{n+1} & \longrightarrow & \tilde{P}_n \end{array}$$

根据三取二， $\pi_{n+1}P_{n+1} \to \mathbb{D}_0$ 是弱等价当且仅当 $P_{n+1} \to \mathbb{D}_0$ 是弱等价，因此也当且仅当 $\pi_n P_n \to \mathbb{D}_0$ 是弱等价。剩下的情况是 $n=0$，这显然成立。□

4.36 引理. 对所有 n，诱导态射 $\pi_n C_\infty \to \pi_n D_\infty$ 是 n-标记的 ∞-范畴上的饱和归纳模型结构中的弱等价。

证明. 根据上一个引理，并且由于纤维化对象之间的弱等价在推出下稳定，我们有一个图表，其中所有标记为 $\sim$ 的箭头都是弱等价

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_{k\in\mathbb{N}} \pi_n \mathbb{D}_1 & \longrightarrow & \coprod_{k\in\mathbb{N}} \pi_n P_k & \xrightarrow{\sim} & (\coprod_{k<n} P_k) \coprod (\coprod_{k\geq n} \mathbb{D}_0) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_n \mathbb{D}_1 & \longrightarrow & \pi_n C_\infty & \xrightarrow{\sim} & D_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
\mathbb{D}_0 & \longrightarrow & \pi_n D_\infty & \xrightarrow{\sim} & D_n
\end{array}$$

由三取二性质可得结论。□

命题 4.27 的证明. 我们取 f 为态射 $C_\infty^\flat \to D_\infty^\flat$。第一点由引理 4.33 得出，第二点由引理 4.36 得出。□

4.4 复形集与分层 Street 神经

本节将说明，Street 神经可以构造成从 ∞-Cat$^\infty$ 上的饱和归纳模型结构到复形集的 Ozornova-Rovelli-Verity 模型结构的右 Quillen 函子。关于复形集的详细介绍，请参阅 [30] 和 [26]；下面我们只回顾重要的定义。

4.37 定义。 m-分层单纯集是一个单纯集 X，并附带一个由正维单纯形组成的集合 $M \subset \coprod_{k>0} X_n$，称为薄单纯形，其中包含所有退化单纯形。

m-分层单纯集之间的态射，是底层单纯集之间将薄单纯形映为薄单纯形的态射。 m-分层单纯集范畴记为 Strat。

连接是单纯集的一种重要运算，其在可表对象上的定义公式为

$$\Delta[n] \star \Delta[m] := \Delta[n+m+1]$$

and 通过余极限扩展到任意一对单纯集

$$X \star Y := \operatorname*{Colim}_{([n],[m])\in\Delta\times\Delta} \coprod_{X_n \times Y_m} \Delta[n] \star \Delta[m].$$

例如，参见 [22] 定义 1.2.8.1 及后文。现在，我们将其定义为分层单纯集上的如下形式：

4.38 定义。设 (X, M) 和 (Y, N) 是两个分层单纯集，我们将 $M \star N$ 定义为 $X \star Y$ 中形如 $x \star y$ 的单形所组成的集合，其中 x 或 y 是薄的。接着，我们定义

$$(X, M) \star (Y, N) := (X \star Y, M \star N).$$

4.39 定义。我们在 $\Delta[n]$ 上定义几种标记：

(1) $\Delta[n]_{t}$。顶 n-单形是薄的。(2) $\Delta^k[n]$。所有包含 $\{k-1, k, k+1\} \cap [n]$ 的单形都是薄的。(3) $(\Delta^k[n])'$。所有包含 $\{k-1, k, k+1\} \cap [n]$ 的单形，以及 $(k-1)$-面和 $(k+1)$ 面，都是薄的。(4) $(\Delta^k[n])''$。所有包含 $\{k-1, k, k+1\} \cap [n]$ 的单形，以及 $(k-1)$-面、 k-面和 $(k+1)$ 面，都是薄的。(5) $\Delta[3]^{eq}$。所有维数严格大于 2 的单形，以及$[0, 2]$ 和 $[1, 3]$ ，都是薄的。(6) $\Delta[n]^{\sharp}$。所有单形都是薄的。

4.40 定义（[24, 定义 1.19]）。初等无害扩张是以下之一：

(1) 复杂角包含是正则延拓

$$\Lambda^k[n] \to \Delta^k[n],\ n \geq 1,\ n \geq k \geq 0.$$

(2) 复形薄性延拓：

$$(\Delta^k[n])' \to (\Delta^k[n])'',\ n \geq 2,\ n \geq k \geq 0.$$

(3) 饱和延拓：

$$\Delta[n] \star \Delta[3]^{eq} \to \Delta[n] \star \Delta[3]^{\sharp},\ n \geq -1.$$

(4) m-平凡性延拓：

$$\Delta[n] \to \Delta[n]_{t},\ n > m$$

4.41 注。在 $m = \infty$ 的情况下，不存在 m-平凡性延拓。

4.42 定义。一个（饱和的） m-复杂单纯集是具有相对于所有初等无害扩张的右提升性质的标记单纯集。

如 [21] 所示， m-复形集是（∞， m）-范畴的一种模型。例如，0-复形集和 1-复形集本质上分别与 Kan复形和拟范畴相同。“饱和”一词指的是（如 [24] 中）我们已将 “ 饱和扩张 ” 纳入初等无害扩张之中。它们并不总是被纳入，并且作用类似于第 3.5 节所讨论的归纳模型结构的饱和局部化。另请参阅 [26] ，其中对复形集的饱和进行了更一般的讨论。

4.43 定理（Verity [30], Riehl [26], Ozornova-Rovelli [24]）。Strat 上存在一个模型结构，其余纤维化为所有单态射，而无圈余纤维化由初等无害扩张生成。该结构的纤维对象是（饱和的） m-复形集。我们将赋予这一模型结构的范畴 Strat 记作 Strat^m 。

我们将使用连接来定义分层单纯集与带标记的 ∞-范畴之间的伴随。

4.44 定义。设 C 和 D 是两个带标记的 ∞-范畴。 C与 D的连接记作 $C \star D$，它是下图的余极限：

$$\begin{array}{ccc} A \ominus \{0\} \ominus B \coprod A \ominus \{1\} \ominus B & \longrightarrow & A \ominus \mathbb{D}_1 \ominus B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \coprod B & \longrightarrow & A \star B \end{array}$$

正如 [2] 中命题 3.3.11 在 ∞-范畴层面所指出的，这就是通常的 ω-范畴连接，定义见 [4]第 6.30 段。因而此运算满足结合律。

4.45 命题。设 $X \to Y$是一个余纤维化， $K \to L$ 是一个无圈余纤维化。态射

$$K \star Y \coprod_{X \star K} L \star X \to L \star Y \qquad and \qquad Y \star K \coprod_{K \star X} X \star L \to Y \star L$$

是无圈余纤维化。

证明。考虑下图：

$$\begin{array}{ccccc} L \coprod Y & \longleftarrow & K \ominus \partial\mathbb{D}_1 \ominus Y \cup L \ominus \partial\mathbb{D}_1 \ominus X & \longrightarrow & K \ominus \mathbb{D}_1 \ominus Y \cup L \ominus \mathbb{D}_1 \ominus X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L \coprod Y & \longleftarrow & L \ominus \partial\mathbb{D}_1 \ominus Y & \longrightarrow & L \ominus \mathbb{D}_1 \ominus Y \end{array}$$

对这些直线取余极限，便诱导出一个比较态射：

$$K \star Y \coprod_{X \star K} L \star X \to L \star Y.$$

[3] 的命题 7.5 表明，这个态射是一个余纤维化。引理 2.37 表明，前一个图表中的竖直态射是弱等价。此外，这些余极限都是同伦余极限，因此比较态射是一个弱等价，进而是一个无圈余纤维化。对于第二个态射，我们以类似的方式继续。

□

4.46 定义。终端范畴 1 在此运算下具有幺半群结构。乘法 $1 \star 1 \to 1$ 是到终端 ∞-范畴的唯一态射。

根据范畴 Δ的泛性质，可诱导出余单纯对象 $|-| \colon \Delta \to \infty\text{-}\mathsf{Cat}^\infty$ ，其中

$$|\Delta[n]| := 1 \star 1 \star \ldots \star 1.$$

ω-范畴 $|\Delta[n]|$ 传统上称为 n^{th}定向体。我们将余单纯对象沿余极限的扩张记为 $|-|$: Sset $\to\infty$-Cat$^\infty$ 。对于所有 n， $|\Delta[n]|$ 都是一个仅包含一个 n- 生成元的 n- 多图。若 M 属于 K的一个标记，我们将通过复合得到的箭头集合记为 $|M|$ ：

$$\mathbb{D}_n \to \Delta[n] \xrightarrow{|v|} K$$

其中左态射对应于 n^{th} orientals 的顶胞腔，而右态射属于 M。现在我们可以将实现扩展到分层单纯集:

$$\begin{array}{rccc} |-|: & \mathbf{Strat} & \to & \infty\text{-}\mathbf{Cat}^m \\ & (K, M) & \mapsto & (|K|, \overline{|M|}) \end{array}$$

该函子保持余极限，并诱导出一个伴随:

$$\text{Strat} \underset{N}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} \infty\text{-范畴}^m$$

右伴随称为分层 Street 神经。根据构造，如果 K and$L$ 是两个分层单纯集，则有 $|K \star L| = |K| \star |L|$。

4.47 注。在 $m = \infty$ 的情形下，该伴随将从严格 ∞-范畴到弱 ∞-范畴的遗忘函子建模为（由分层 Street 神经 N 给出）。左伴随对应于“严格化函子”，它以一种泛性质的方式将弱 ∞-范畴映射为严格 ∞-范畴。

4.48 命题。分层神经保持纤维对象。

证明。首先假设 $m < \infty$，并令 (X, M) 为饱和归纳模型结构下的一个纤维 m-标记 ∞-范畴。根据推论 4.26， M 由 X 中的余归纳可逆箭头组成，而 $N((X, M))$ 等于与 X 的 Street 神经相关联的分层单纯集；该神经在 [20, D′义 5.2.1] 中定义。因此，前引文献中的定理 5.2.12 表明，分层 Street 神经将 ∞-Cat^m 上饱和归纳模型结构的纤维对象映至一个 m-复杂单纯集。

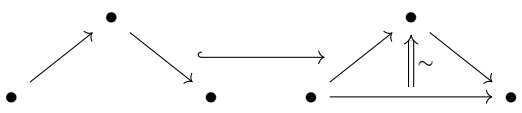
现在，令 C 为饱和归纳模型结构下的一个纤维 ∞-标记 ∞-范畴。由于分层神经保持有向余极限，存在一个同构

$$N(C) \cong \operatorname*{Colim}_{n \in \mathbb{N}} N(\tau_n C)$$

对于所有的 n, $\tau_n C$ ，在 n-标记的 ∞-范畴的饱和归纳模型结构中都是纤维的，而 $N(\tau_n C)$ 随即是 n-复杂单纯集模型结构中的纤维对象。由于 ∞-复杂单纯集的模型结构是 ω-组合的，纤维对象在有向余极限下保持稳定，因此 $N(C)$ 是纤维的。□

4.49 引理。实现函子将复杂角包含映为 m-标记的 ∞-范畴的饱和归纳模型结构中的无圈余纤维化。

证明。复杂角包含 $\Lambda^1[2] \to \Delta[2]^1$ 对应于以下标记的 ∞-范畴包含:



这显然是一个方程。两个复形角包含 $\Lambda^0[2] \to \Delta^0[2]$ 和 $\Lambda^2[2] \to \Delta^2[2]$ 分别等于$\mathbf{eq}_{1\,1}^{\cdots}$，以及 $\mathbf{eq}_{1\,1}^{\cdots}$。实现函子与连接可交换。此外，我们可以看到，对所有 $0 < k < n$，都有：

$$\Delta^k[n] = \Delta[k-2] \star \Delta^1[2] \star \Delta[n-k-2]$$

并且 $\Lambda^k[n]$ 是子对象：

$$\begin{array}{rl} & \partial\Delta[k-2] \star \Delta^1[2] \star \Delta[n-k-2] \\ \cup & \Delta[k-2] \star \Lambda^1[2] \star \Delta[n-k-2] \\ \cup & \Delta[k-2] \star \Delta^1[2] \star \partial\Delta[n-k-2]. \end{array}$$

命题 4.45 随即推出，$\Lambda^k[n] \to \Delta^k[n]$ 是一个方程。对于 $k = 0$ 和 $k = n$的情形，我们也以类似方式处理。 □

4.50 定理。严格化函子与分层 Street 神经构成一个 Quillen 伴随，连接 m-复杂单纯集的模型结构与 ∞-Cat^{m}上的归纳模型结构。

证明。由引理 4.49，只需证明复形薄性延拓、饱和延拓和 m-平凡性延拓都被映为无圈余纤维化。设 i 是这样一个态射。根据命题 4.48，饱和归纳模型结构中的任意纤维对象都具有相对于 $|i|$的右提升性质。由于 $|i|$ 在底层 ∞-范畴上是恒等态射，因此若存在提升，则提升唯一。这意味着纤维对象之间的任意态射都具有相对于 $|i|$的右提升性质，而该态射于是为无圈余纤维化。证明完毕。

□

最后，我们可以借此推广 [20] 中的结果：分层 Street 神经：

$$\mathcal{N}\colon \infty\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}^m$$

[20], 中引入的分层 Street 神经，恰好是本文的分层 Street 神经 N 与第 4.2 节中构造的全忠实嵌入 ∞-Cat $\subset \infty$-Cat^m 的组合，该嵌入将所有余归纳可逆箭头标记。因此：

4.51 命题。设 $f\colon X \to Y$ 是 ∞-Cat 上典范模型结构中的一个纤维化（分别为平凡纤维化、弱等价），则其分层 Street 神经 $\mathcal{N}(f)\colon \mathcal{N}(X) \to \mathcal{N}(Y)$ 是 s Set^m 上 Verity 模型结构中的一个纤维化（分别为平凡纤维化、弱等价）。

[20] 的主要结果对应于保持纤维对象这一特殊情形。

请注意，特别是，该命题表明，尽管 [20], 中的分层 Street 神经不是右 Quillen 函子，但它仍是纤维对象 Brown 范畴之间的态射，因此确实在相应的关联 ∞-范畴上定义了一个保极限函子。

证明。由于分层 Street 神经 $N\colon \infty\text{-Cat}^m \to \text{sSet}^m$ 是右 Quillen 函子，因此它保持纤维化、平凡纤维化，以及纤维化对象之间的弱等价。此外，我们已在第 4.2 节中证明，将严格 ∞-范畴映射到其标记版本（其中标记箭头为余归纳可逆箭头）的函子保持纤维化、平凡纤维化和弱等价。

□

参考文献

[1] Fahd Ali Al-Agl、Ronald Brown 和 Richard Steiner。《多重范畴：globular 方法与立方方法的等价性》。数学进展，170：71–118，2002。[2] Dimitri Ara。《habilitation à diriger des recherche：严格 ∞-范畴的同伦理论》。2022。[3] Dimitri Ara 和 Maxime Lucas。严格 ω-范畴上的 folk模型范畴结构是幺半的。《范畴论理论与应用》，35(21)：745–808，2020。[4] Dimitri Ara 和 Georges Maltsiniotis。严格 ∞-范畴的连接与切片。ArXiv:1607.00668，2016。[5] Michael Batanin 和 David White。无需左 properness 的左 Bousfield 局部化。ArXiv:2001.03764，2020。[6] Julia E Bergner。模型范畴及更一般同伦理论的同伦极限。《伦敦数学会通报》，44(2)：311–322，2012。[7]Ronald Brown 和 Philip J Higgins。 ∞-群胚与交叉复形的等价性。《拓扑与微分几何范畴笔记》，22(4)：371–386，1981。[8] Albert Burroni。高维字问题及其在等式逻辑中的应用。《理论计算机科学》，115(1)：43–62，1993。[9] Eugenia Cheng。具有所有对偶的 ω-范畴是 ω-群胚。《应用范畴结构》，15(4)：439–453，2007。[10] Sjoerd Erik Crans。关于高维同伦的组合模型。乌得勒支大学，数学与计算机科学学院，1995。[11] Daniel Dugger。组合模型范畴具有呈示。《数学进展》，164(1)：177–201，2001。[12] Yonatan Harpaz。模型范畴的松弛极限。《范畴论理论与应用》，35(25)：959–978，2020。[13] Simon Henry。极小模型结构。预印本 ArXiv:2011.13408，2020。[14] Simon Henry。经典与构造数学中的弱模型范畴。《范畴论理论与应用》，35(24)：875–958，2020。[15] Simon Henry。组合与可达弱模型范畴。《纯粹与应用代数杂志》，227(2)：107191，2023。[16]Chris Schommer-Pries (https://mathoverflow.net/users/184/chris- schommer pries)。《(∞,∞) 范畴是否有公认的定义？》MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/134099（版本：2017-12-15）。

[17] Simon Henry (https://mathoverflow.net/users/22131/simon henry). 在严格化上检验 ∞-范畴的等价？MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/313748（版本：2018-10-25）。[18] Andr´e Joyal 和 Myles Tierney。拟范畴与 Segal 空间。Contemporary Mathematics，431(277-326):10，2007。[19] Yves Lafont、Fran¸cois M´etayer 和 Krzysztof Worytkiewicz。ω-范畴上的 folk 模型结构。Advances in Mathematics，224(3):1183–1231，2010。[20]F´elix Loubaton。 ω-范畴神经上的 Kan 条件。ArXiv:2102.04281，2021。[21] F´elix Loubaton。作为 (∞, n)-范畴模型的 n-复杂单纯集。arXiv 预印本 arXiv:2207.08504，2022。[22] Jacob Lurie。高阶拓扑斯理论。Princeton University Press，2009。[23] Fran¸cois M´etayer。Homology, Homotopy and Applications，10(1):181–203，2008。[24] Viktoriya Ozornova 和 Martina Rovelli。预分层单纯集与预分层单纯空间上 (∞, n)-范畴的模型结构。Algebraic & Geometric Topology，20(3):1543–1600，2020。[25] A John Power。n-范畴粘贴定理。载于《范畴论》，第326–358页。Springer，1991。[26] Emily Riehl。复杂单纯集：序曲。载于《2016 MATRIX 年刊》，第49–76页。Springer，2018。[27] Richard Steiner。ω-范畴与链复形。Homology, Homotopy and Applications，6(1):175–200，2004。[28] Ross Street。以取值于范畴的 2-函子为指标的极限。Journal of Pure and Applied Algebra，8(2):149–181，1976。[29] Ross Street。定向单形的代数。Journal of Pure and Applied Algebra，49(3):283–335，1987。[30] Dominic RB Verity。弱拟复杂集 I：基本同伦论。Advances in Mathematics，219(4):1081–1149，2008。