arXiv:2301.11473v1 [math.CO] 27 Jan 2023

Krawchuk 和 Rampersad 猜想的证明

Jeffrey Shallit*滑铁卢
大学计算机科学学院，安
大略省滑铁卢市，N2L
3G1，加拿大
shallit@uwaterloo.ca

2023年1月30日

摘要

我们证明了 Krawchuk 和 Rampersad 于 2018 年提出的一个猜想，该猜想涉及 $c(n)$ 的极值行为，其中 $c(n)$ 统计 Thue-Morse词 $\mathbf{t}$ 中长度为 n 的因子数量（按循环旋转等价类计数）。

1 引言

设 $\mathbf{x}$ 是一个无限词。在最近的一篇论文中，Krawchuk 和 Rampersad [4] 研究了循环复杂度函数 $c_{\mathbf{x}}(n)$，其定义为长度为 n 的 $\mathbf{x}$ 的因子数量，其中相差循环移位的相同因子只计数一次。

他们指出，对于 $\mathbf{t} = 01101001\cdots$，Thue-Morse序列 [1], 函数$c_{\mathbf{t}}(n)$ 是 2-正则的，并由秩为 50 的线性表示指定。这意味着存在向量 v、w 和一个矩阵值态射 γ，使得对于所有作为 n 二进制表示（允许前导零）的字符串 z，都有 $c_{\mathbf{t}}(n) = v\gamma(z)w$。更多详情请见 [2]。 $c_{\mathbf{t}}(n)$的前几项列于表 1；它是在线整数数列百科全书（OEIS）中的数列 A360104 [8]。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$c_{\mathbf{t}}(n)$	1	2	3	2	4	4	6	8	12	8	12	16	14	18	18	18	28	20	20	28

表 1： $c_{\mathbf{t}}(n)$ 的前几个取值。

*研究经费由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）拨款提供，项目编号 2018-04118。

Krawchuk 和 Rampersad 猜想，lim sup $c_{\mathbf{t}}(n)/n = 2$ 以及 lim inf $c_{\mathbf{t}}(n)/n = 4/3$。本文证明这两个猜想。这些猜想可由以下两个不等式推出： $c_{\mathbf{t}}(n) \leq 2n - 4$，适用于 $n \geq 3$，以及 $c_{\mathbf{t}}(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$，适用于 $n \geq 0$；我们分别在第3节和第 4节证明这两个不等式。

线性表示方法（例如， [7]中讨论的方法）在证明关于自动序列的命题时极为强大，但也有一些局限。虽然通常可以用它来证明各种等式，但证明不等式通常更为棘手。本文结合基于归纳法的传统技巧与线性表示，来证明所需的不等式。

2 预备结果

全文中，我们将 $c_{\mathbf{t}}(n)$ 简记为 $c(n)$。

命题1. 有

$$c(2^k) = 2^{k+1} - 4, \qquad (k \geq 2) \tag{1}$$
$$c(2^k + 3) = \frac{5}{3} \cdot 2^k - \frac{2}{3}(-1)^k + 2, \qquad (k \geq 2) \tag{2}$$
$$c(2^k + 1) = \frac{4}{3} \cdot 2^k + \frac{2}{3}(-1)^k - 2, \qquad (k \geq 2) \tag{3}$$
$$c(2^k - 3) = \frac{5}{3} \cdot 2^k + \frac{1}{3}(-1)^k - 5, \qquad (k \geq 5) \tag{4}$$
$$c(2^k - 1) = \frac{4}{3} \cdot 2^k - \frac{1}{3}(-1)^k - 3, \qquad (k \geq 2) \tag{5}$$
$$c(2^k - 5) = \frac{3}{2} \cdot 2^k + (-1)^k - 7, \qquad (k \geq 5) \tag{6}$$
$$c(2^k - 7) = \frac{3}{2} \cdot 2^k - (-1)^k - 9, \qquad (k \geq 3) \tag{7}$$
$$c(12 \cdot 2^k - 3) = \frac{56}{3} \cdot 2^k - \frac{2}{3}(-1)^k - 10, \qquad (k \geq 0). \tag{8}$$

证明。方程（1）可见于 [4,命题 1]。
其余部分　　这些等式可以使用相同的技巧，完全按照那篇论文中的方法证明。　　. □

以下三个恒等式对我们的方法至关重要。

引理2. 存在2-自动序列 a_0、 a_1、 a_3 ， 使得

$$c(2i) = 2c(i) + a_0(i) \tag{9}$$
$$c(4i + 1) = 2c(i + 1) + c(2i + 1) + a_1(i) \tag{10}$$
$$c(4i + 3) = \frac{1}{2}c(2i) + c(2i + 3) + \frac{1}{2}c(2i + 4) + a_3(i) \tag{11}$$

并且

$$2 \le a_0(i) \le 6, \qquad (i \ge 3) \tag{12}$$
$$0 \le a_1(i) \le 10, \qquad (i \ge 2) \tag{13}$$
$$-1 \le a_3(i) \le 3, \qquad (i \ge 1). \tag{14}$$

证明。对于每个关系，我们使用 a_0 （分别使用a_1、a_3）为除 Walnut [5]之外的每一项计算线性表示；然后使用分块矩阵计算差的线性表示。接着，我们对线性表示进行最小化，并使用“半群技巧”（例如，参见 [7, §4。11]）来验证该序列是自动的，并为 a_0 （分别为 a_1、a_3）找出一个带输出的确定性有限自动机（确定性有限自动机输出）。

我们将更详细地介绍 a_0 的计算（部分原因是下文将用到这些内容）。我们从以下 Walnut 代码开始：

```
def tmfactoreq "At t<n => T[i+t]=T[j+t]":
def tmconj "Et t<=n & $tmfactoreq(j,i+t,n-t) & $tmfactoreq(i,(j+n)-t,t)":
def tmc "Aj j<i => ~$tmconj(i,j,n)":
```

这里， tmc(i,n) 断言$\mathbf{t}[i..i+n-1]$ 是与其循环等价的因子的首次出现。因此，通过统计使其取值为 TRUE 的 i 的数量，我们可以确定长度为 n 的循环因子的数量。下面使用 Walnut 计算各种长度的循环因子的数量：

```
eval tmcc n "$tmc(i,n)":
eval tmcc2 n "$tmc(i,2*n)":
```

前两个命令分别以 Maple 格式，为 $c(n)$ 和 $c(2n)$ 生成线性表示。它们的秩分别为 50 和 60。据此，我们可以轻松计算出 $a_0(n) := c(2n) - 2c(n)$ 的线性表示，其秩为 110。使用 Sch¨utzenberger 的算法 [2,Chap. 2]，，可以将该表示最小化为秩为 7 的线性表示 $(v,\ \gamma,\ w)$，如下所示：

$$v^T = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad \gamma(0) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \gamma(1) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1/2&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1/2&0&0 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} -1\\ -1\\ -2\\ 2\\ 4\\ 2\\ 6 \end{bmatrix}.$$

现在我们可以使用“半群技巧”来证明 $a_0(n)$ 是 2-自动序列，并找出它的确定性有限自动机输出。它有 8 个状态，显示在图1中。通过检查结果，我们可以看到$a_0(n)$ $\in \{-2, -1, 2, 4, 6\}$，并且 $a_0(n) \in \{2, 4, 6\}$ 对 $n \ge 3$成立。这就证明了方程（9）和（12）。

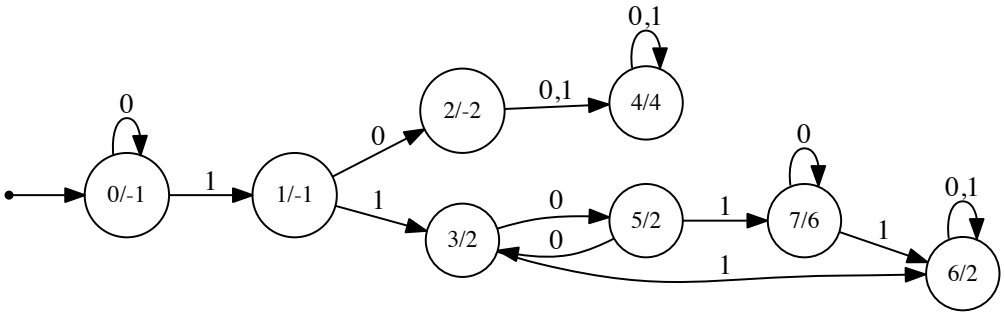

图1： $a_0(n)$的确定性有限自动机输出。

采用类似的步骤，并使用以下 `Walnut` 命令，我们可以找到 $a_1(n)$ 和 $a_3(n)$ 的确定性有限自动机输出，分别如图2 和3所示。

```
eval tmcc41 n "$tmc(i,4*n+1)":
eval tmcc1 n "$tmc(i,n+1)":
eval tmcc21 n "$tmc(i,2*n+1)":
eval tmcc43 n "$tmc(i,4*n+3)":
eval tmcc23 n "$tmc(i,2*n+3)":
eval tmcc24 n "$tmc(i,2*n+4)":
```

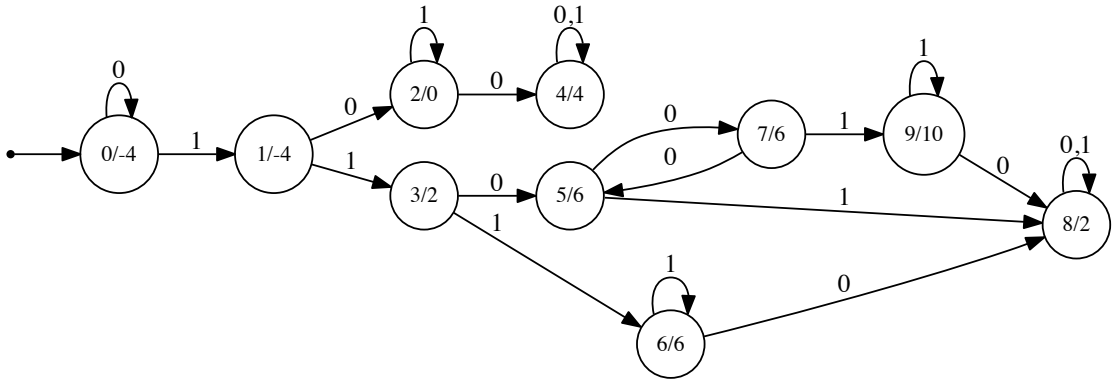

图2： $a_1(n)$的确定性有限自动机输出。

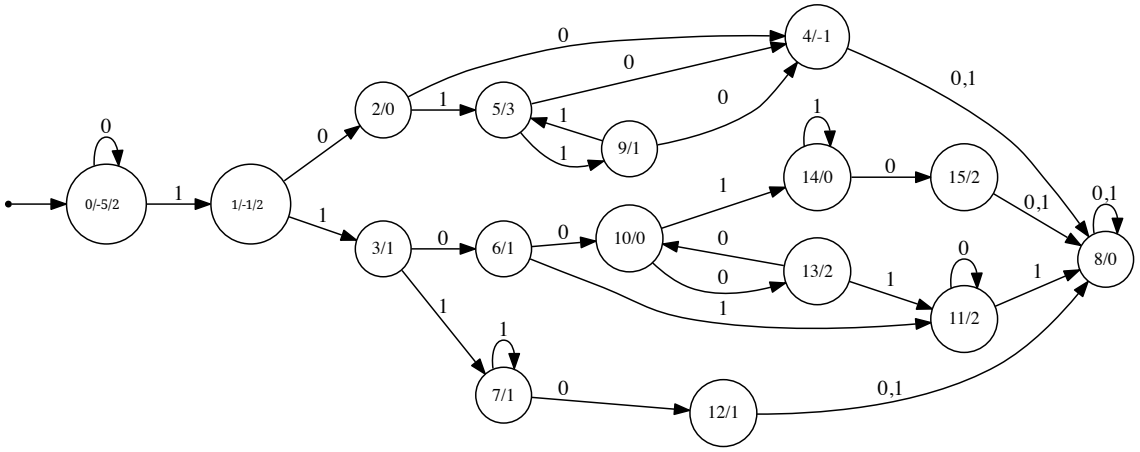

图 3: $a_3(n)$ 的确定性有限自动机输出。

检查这些结果可证明方程（10）、（11）、（13）、（14）。 □

3 上界

定理 3. $c(n) \le 2n-4$ 对所有 $n \ge 3$。

证明。 对 n使用方程 (9)–(11) 和 (13)–(14) 进行归纳。然而，定理中的结论似乎不足以完成归纳，因此我们实际上通过归纳法证明以下更强的结论：

$$c(n) \le 2n-7 \text{ if } n \ge 12 \text{ and } n \notin P_2, \tag{15}$$

其中 $P_2 = \{2^i : \quad i \ge 0\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$。基例为 $n \le 44$；我们很容易验证断言（15）对这些 n成立。

现在假设 $n \ge 45$。需要考虑三种情形。

情形*1*： $n \equiv 0$ （模 2）， $n = 2i$。

情形1a：假设 $n/2 \notin P_2$。那么

$$\begin{aligned} c(n) &= c(2i) = 2c(i) + a_0(i) \\ &= 2c(n/2) + a_0(n/2) \\ &\le 2c(n/2) + 6 \\ &\le 2(n-7) + 6 \qquad \text{(by induction, since } n/2 \ge 22) \\ &= 2n - 8 \le 2n - 7. \end{aligned}$$

情形1b：若 $n/2 \in P_2$，则 $n = 2^k$ 对于某个 $k \geq 1$。由于 $n \geq 45$ 我们有 $k \geq 6$。因此，所需的界 $c(n) \leq 2n - 4$ 可由方程（1）推出。

情形*2*：$n \equiv 1$（模 4），$n = 4i + 1$。

情形2a：假设 $(n + 3)/4 \notin P_2$ 且 $(n + 1)/2 \notin P_2$。那么我们有

$$\begin{aligned} c(n) = c(4i + 1) &= 2c(i + 1) + c(2i + 1) + a_1(i) \\ &\leq 2c((n + 3)/4) + c((n + 1)/2) + a_1((n - 1)/4) \\ &\leq 2((n + 3)/2 - 7) + (n + 1 - 7) + 10 \qquad \text{(by induction, since } (n + 1)/2 \geq (n + 3)/4 \geq 12) \\ &= 2n - 7. \end{aligned}$$

情形2b：如果（$n + 3$）$/4 \in P_2$，那么 $n = 2^k - 3$ 对于某个 $k \geq 2$。由于 $n \geq 45$ 我们必须有$k \geq 6$。那么方程（4）给出所需的上界。

情形2c：如果（$n + 1$）$/2 \in P_2$ 那么 $n = 2^k - 1$ 对于某个 $k \geq 1$。由于 $n \geq 45$ 我们有 $k \geq 6$。因此由方程（5）可得所需的上界。

情形*3*：$n \equiv 3$（模 4），$n = 4i + 3$。

情形3a：假设 $(n - 3)/2 \notin P_2$ 且 $(n + 3)/2 \notin P_2$ 且 $(n + 5)/2 \notin P_2$。于是我们有

$$\begin{aligned} c(n) = c(4i + 3) &= \frac{1}{2}c(2i) + c(2i + 3) + \frac{1}{2}c(2i + 4) + a_3(i) \\ &= \frac{1}{2}c((n - 3)/2) + c((n + 3)/2) + \frac{1}{2}c((n + 5)/2) + a_3((n - 3)/4) \\ &\leq \frac{1}{2}(n - 10) + (n + 3 - 7) + \frac{1}{2}(n + 5 - 7) + 3 \\ &\qquad \text{(by induction, since } (n + 5)/2 \geq (n + 3)/2 \geq (n - 3)/2 \geq 21) \\ &= 2n - 7. \end{aligned}$$

情形3b：若 $(n - 3)/2 \in P_2$ 则 $n = 2^k + 3$ 对于某个 $k \geq 1$。由于 $n \geq 45$ 我们有 $k \geq 6$。因此，所需的界可由方程 (2) 得出。

情形3c：若 $(n + 3)/2 \in P_2$ 则 $n = 2^k - 3$ 对于某个 $k \geq 1$。由于 $n \geq 45$ 我们有 $k \geq 6$。因此，所需的界可由方程 (4) 得出。

情形3d：若 $(n + 5)/2 \in P_2$ 则 $n = 2^k - 5$ 对于某个 $k \geq 1$。由于 $k \geq 45$ 我们有 $k \geq 6$。因此，所需的界可由方程 (6) 得出。

我们现在已经完成了断言（15）的证明。为了完成定理的证明，我们只需注意到，如果 $n \geq 8$ 是 2 的幂，那么 $c(n) = 2n - 4$，并验证$c(n) \leq 2n - 4$ 对于 $3 \leq n \leq 11$成立。□

我们现在得到了 Krawchuk 和 Rampersad 的第一个猜想是一个直接推论 y:

推论4. $\limsup_{n\to\infty} c(n)/n = 2$.

4 下界

本节证明 $c(n)$ 的相应下界，即

定理 5. $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$ 对于 $n \geq 0$。

其思路与上界证明类似，但稍微复杂一些，因为各种例外集合更为复杂。

我们需要一个引理。定义以下例外集合。

$$A = \{2^k - 1 : k \geq 1\} = \{1, 3, 7, 15, 31, \ldots\}$$
$$B = \{2^k + 1 : k \geq 2\} = \{5, 9, 17, 33, \ldots\}$$
$$D = \{12 \cdot 2^k - 3 : k \geq 0\} = \{9, 21, 45, 93, \ldots\}$$
$$J = \{(2^{2i+1} + 1)2^j : i \geq 1,\ j \geq 0\} = \{9, 18, 33, 36, 66, 72, 129, 132, 144, 258, \ldots\}.$$

引理 6.

(i) 如果 $n \in A$，那么 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 2$。*(ii)* 如果 $n \in B$，那么 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$。*(iii)* 如果 $n \in D$，那么 $c(n) = 2c((n+3)/4) + c((n+1)/2)$。*(iv)* 如果 $n \in J$，设 $n = (2^{2i+1}+1)2^j$，那么 $c(n) = \frac{8}{3}2^{2i+j} + \frac{4}{3}2^j - 4 = \frac{4}{3}n - 4$。对于 $i \geq 1, j \geq 0$。*(v)* 如果 $n \in 4J + 3$，设 $n = (2^{2i+1} + 1)2^{j+2} + 3$，且 $(i, j) \neq (1, 0)$（即 $n \neq 39$），那么 $c(n) = (104 \cdot 2^{2i+j} + 64 \cdot 2^j + 4 \cdot 2^{2i}(-1)^j - 10 \cdot (-1)^j + 18)/9 \geq (4n + 16)/3$。*(vi)* 如果 $n \in 2J + 3$，设 $n = (2^{2i+1} + 1)2^{j+1} + 3$，并且 $j \geq 1$，那么 $c(n) = (52 \cdot 2^{2i+j} + 32 \cdot 2^j - 4 \cdot 2^{2i}(-1)^j + 10 \cdot (-1)^j + 18)/9$。*(vii)* 如果 $n \in 2J - 5$，设 $n = (2^{2i+1} + 1)(2^{j+1} - 5)$，设 $c(n) = 6 \cdot 2^{2i+j} + 4 \cdot 2^j + \frac{8}{3} \cdot 2^{2i} - 1)(2^j - \frac{2}{3}(-1)^j - 14)$，设 $i \geq 1$，设 $j \geq 2$，那么对于 (i)，(ii)，(iii)，(iv)，(v)，(vi)，(vii)。

证明。（i）和（ii）可由方程（3）和（5）立即得出。

对于（iii），取 $i = (n-1)/4$，代入方程（10）。那么 $c(n) = 2c((n+3)/4) + c((n+1)/2)$ 当且仅当 $a_1((n-1)/4) = 0$。但从图2中的确定性有限自动机输出可知，$a_i(m) = 0$ 当且仅当 $m = 3 \cdot 2^k - 1$对于 $k \geq 0$。因此，$a_1((n-1)/4) = 0$ 当且仅当 $(n-1)/4 = 3 \cdot 2^k - 1$ 对于 $k \geq 0$，当且仅当 $n = 12 \cdot 2^k - 3$ 对于$k \geq 0$。

对于第 (iv) 项，我们使用线性表示技巧的一种变体。令 $n = (2^{2i+1} + 1)2^j$。n 的二进制表示为 $10^{2i}10^j$，因此 $c(n) = v\gamma(10^{2i}10^j)w = v\gamma(1)\gamma(0)^{2i}\gamma(1)\gamma(0)^j w$。$\gamma(0)$ 的最小多项式为 $X^2(X-1)(X-2)(X+1)$，所以 $\gamma(0)^j$ 中的每个元素（$j \geq 2$）都是 2^j、$(-1)^j$ 和 1 的线性组合。因此，对于 $\gamma(1)\gamma(0)^j w$，结论也成立。类似地，$\gamma(0)^{2i}$ 中的每个元素（$i \geq 2$）都是 2^{2i} 和 1 的线性组合，对于 $v\gamma(1)\gamma(0)^{2i}$，结论也成立。因此，乘积 $v\gamma(1)\gamma(0)^{2i}\gamma(1)\gamma(0)^j w$ 的各个元素是线性

组合。2^{2i+j}、2^j、2^{2i}、1、$2^{2i}(-1)^j$ 和 $(-1)^j$。我们可以代入 i 和 j 的较小取值，并求解所得的线性方程组，从而确定具体常数。结论由此得证。

第（v）、（vi）和（vii）部分可通过相同的技巧得到。 □

现在我们准备证明定理5。

证明。 同样，该定理的表述似乎不够强，无法使归纳法顺利进行。

We 下面将通过对以下三个断言进行同时归纳法来证明它们 n.

(i) 对于所有的 n，我们有 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$。

(ii) 如果 n 是偶数且 $n \notin J$，那么 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 2$。

(iii) 若 n 为奇数， $n \geq 47$，且 $n \notin A \cup B$，则 $c(n) \geq (4n + 16)/3$。

基例为 $n < 191$，我们可以通过简单计算验证。现在假设$n \geq 191$。

情形*1*： $n \equiv 0$ （模 2）， $n = 2i$。

情形1a：设 $n \in J$。那么由引理 6(iv) 可得 $c(n) = \frac{4}{3}n - 4$。

情形1b：设 $n \notin J$。那么

$$\begin{aligned} c(n) = c(2i) &= c(i) + a_0(i) \\ &= 2c(n/2) + a_0(n/2) \\ &\geq 2c(n/2) + 2 \\ &\geq 2 \cdot (\frac{4}{3}(n/2) - 2) + 2 \qquad \text{(by induction, since } n/2 \geq 47) \\ &= \frac{4}{3}n - 2. \end{aligned}$$

情形*2*： $n \equiv 1$ （模 4）， $n = 4i + 1$。若 $n \in A \cup B$ 则不等式 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$ 可由方程 (3) 和 (5) 得出。因此假设 $n \notin A \cup B$。

情形2a：假设 $n \notin D$, $\frac{n+3}{4} \notin J \cup A \cup B$, $\frac{n+1}{2} \notin A \cup B$。

Then

$$\begin{aligned} c(n) = c(4i + 1) &= 2c(i + 1) + c(2i + 1) + a_1(i) \\ &= 2c((n + 3)/4) + c((n + 1)/2) + a_1((n - 1)/4) \\ &\geq 2c((n + 3)/4) + c((n + 1)/2) + 2 \qquad \text{(because } n \notin D) \\ &\geq 2 \cdot (\frac{4}{3} \cdot ((n + 3)/4) - 2) + (4\frac{n + 1}{2} + 16)/3 + 2 \\ &\qquad \text{(because } (n + 3)/4 \notin J \cup A \cup B \text{ and } (n + 1)/2 \notin A \cup B \\ &\qquad \text{and } (n + 1)/2 \geq (n + 3)/4 \geq 47 \text{ by induction)} \\ &\geq \frac{4}{3}n + 6 \geq (4n + 16)/3. \end{aligned}$$

情形2b：若 $n \in D$，则方程 (8) 推出 $c(n) \geq (4n/3) - 4$。若进一步 $n \geq 47$，则可推出 $c(n) \geq (4n+16)/3$。

情形2c：假设 $\frac{n+3}{4} \in J$。那么根据引理 6 (v)，我们可以得到 $c(n)$ 的闭式。利用常规计算以及 $n \neq 39$这一事实，可得 $c(n) \geq (4n+16)/3$。

情形2d：假设 $\frac{n+3}{4} \in A$。那么 $n = 2^k - 7$ 对于 $k \geq 3$，进而由方程 (7) 可得$c(n) \geq (4n+16)/3$ 对于 $k \geq 5$。

情形2e：假设 $\frac{n+3}{4} \in B$。那么 $n \in B$，矛盾。

情形2f：假设 $\frac{n+1}{2} \in A$。那么 $n = 2^k - 3$ 对于 $k \geq 2$，由方程 (4) 可得$c(n) \geq (4n+16)/3$ 对于 $k \geq 5$。

情形2g：假设 $\frac{n+1}{2} \in B$。那么 $n \in B$，矛盾。

情形*3*：$n \equiv 3$（模 4），$n = 4i + 3$。若 $n \in A \cup B$ 则$c(n) \geq \frac{4}{3}n - 4$ 由方程 (3) 和 (5) 可得。因此假设 $n \notin A \cup B$。

情形3a：假设 $(n-3)/2 \notin J \cup A \cup B$ 且 $(n+3)/2 \notin J \cup A \cup B$ 且 $(n+5)/2 \notin J \cup A \cup B$。那么

$$\begin{aligned} c(n) = c(4i+3) &= \frac{1}{2}c(2i) + c(2i+3) + \frac{1}{2}c(2i+4) + a_3(i) \\ &= \frac{1}{2}c((n-3)/2) + c((n+3)/2) + c((n+5)/2) + a_3((n-3)/4) \\ &\geq \frac{1}{2}(\frac{4}{3}(n-3)/2 - 2) + (4\frac{n+3}{2} + 16)/3 + \frac{1}{2}(\frac{4}{3}(n+5)/2 - 2) - 1 \\ &\quad \text{(by conditions on } (n-3)/2, (n+3)/2, (n+5)/2 \\ &\quad \text{and } (n+5)/2 \geq (n+3)/2 \geq (n-3)/2 \geq 47) \\ &= \frac{4}{3}n + 6 \geq (4n+16)/3. \end{aligned}$$

情形3b：假设 $(n-3)/2 \in J$。那么 $n \in 2J + 3$，因此 $n = (2^{2i+1}+1)2^{j+1} + 3$。由于$n \equiv 3$（模 4），我们必须有 $j \geq 1$。然后通过使用引理 6 (vi) 进行常规计算，可得 $c(n) \geq (4n+16)/3$，因为 $n > 39$。

情形 3c：假设 $(n-3)/2 \in A \cup B$。但是 $(n-3)/2 = 2n$ 是偶数，矛盾。

情形 3d：假设 $(n+3)/2 \in J$。那么 $n \in 2J - 3$。但是 $n \equiv 3$ (模 4)，因此很容易看出，这迫使 $k \geq 2$ 时 $n = 2^{2k} - 1 \in B$，矛盾。

情形 3e：假设 $(n+3)/2 \in A$。那么 $n = 2^k - 5$，由方程 (6) 可得 $c(n) \geq (4n+16)/3$，其中 $k \geq 6$。

情形 3f：假设 $(n+3)/2 \in B$。那么 $n \in A$，矛盾。

情形 3g：假设 $(n+5)/2 \in J$。那么 $n \in 2J - 5$。由引理 6 (vii)，经过常规计算可得 $c(n) \geq (4n+16)/3$。

情形 3h：假设 设 $(n+5)/2 \in A \cup B$。但是 $(n+5)/2 = 2n+4$ 是偶数，矛盾。

至此，(i)、(ii) 和 (iii) 的归纳证明完成。 □

推论 7. $\liminf_{n\to\infty} c(n)/n = 4/3$.

我们也有足够的条件证明

定理 8. $c(n) = \frac{4}{3}n - 4$当且仅当 $n \in J$.

证明。 $\Longleftarrow$: 由引理 6(v) 得出。

$\Longrightarrow$: 若 n 为偶数且 $n \notin J$，则由上文可得 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 2 > \frac{4}{3}n - 4$。

若 $n \geq 47$ 为奇数且 $n \notin A \cup B$，则由上文可得 $c(n) \geq (4n+16)/3 > \frac{4}{3}n - 4$。还需验证 $n < 47$ 和 $n \in A \cup B$。

对于 $n \in A$，由引理 6(i) 可知 $c(n) \geq \frac{4}{3}n - 2 > \frac{4}{3}n - 4$。对于 $n \in B$，由方程 (3) 可知 $c(n) = \frac{4}{3}n - 4$当且仅当 $n = 2^{2k+1} + 1 \in J$。最后， $n < 47$可通过计算验证。

□

5 最后评述

对于普通子词复杂度 $\rho_{\mathbf{x}}(n)$，它统计的是$\mathbf{x}$中出现的不同长度为 n 的因子的数量。已知，如果$\mathbf{x}$ 是一个自动序列，那么存在一个自动机，它以 n 和 y 的表示作为并行输入，并且当且仅当 $y = \rho_{\mathbf{x}}(n)$ 时接受。换言之，对于自动序列， $\rho_{\mathbf{x}}(n)$ 是同步的；更多详情请参见 [3]。这意味着，对于自动序列，由于这些断言可以表示为一阶逻辑公式，因此一般而言，判定对所有 n 是否有 $\rho_{\mathbf{x}}(n) \leq An + B$，或 $\rho_{\mathbf{x}}(n) \geq An + B$，是可行的。

然而，对于循环复杂度，函数 $c_{\mathbf{x}}(n)$ 一般不是同步的。我们可以如下看出这一点：令 $\mathbf{p} = 11010001\cdots$为 2 的幂的特征序列。那么不难看出， $c_{\mathbf{p}}(n) = O(\log n)$，且当 $n \geq 0$ 时， $c_{\mathbf{p}}(2^n) = n + 2$。然而，根据关于同步序列的定理 [6], ，这种增长率是不可能的。

这种根本性差异或许有助于解释为什么证明关于循环复杂度的不等式要困难得多。

参考文献

[1] J.-P. Allouche 和 J. O. Shallit。《无处不在的普鲁埃-图埃-莫尔斯序列》。载于 C. Ding、T. Helleseth 和 H. Niederreiter 编，《序列及其应用》，SETA '98 会议论文集，1–16 页。Springer-Verlag，1999 年。

[2] J. Berstel 和 C. Reutenauer。《带应用的非交换有理级数》，《数学及其应用百科全书》第 137 卷。剑桥大学出版社，2011 年。[3] D. Go˘c、L. Schaeffer 和 J. Shallit。子词复杂度与 k同步。载于 M.-P. B´eal 和 O. Carton 编，*DLT 2013*，收入《计算机科学讲义》第 7907 卷，第 252–263 页。Springer-Verlag，2013 年。

[4] C. Krawchuk 和 N. Rampersad。若干无限字的循环复杂度及其推广。*INTEGERS—Elect. J. Comb. Numb. Theory*18A (2018), #A12 (电子版), math.colgate.edu/~integers/vol18a.html。[5] H. Mousavi。自动定理证明，载于 Walnut。Arxiv 预印本 arXiv:1603.06017[cs.FL],可在 http://arxiv.org/abs/1603.06017查阅，2016 年。[6] J. Shallit。同步序列。载于 T. Lecroq 和 S. Puzynina 编，*WORDS2021*，收入《计算机科学讲义》第 12847 卷，第 1–19 页。Springer-Verlag，2021 年。[7] J. Shallit。《自动序列的逻辑方法：借助 Walnut 探索字组合学》，第 482 卷，伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2022 年。[8] N. J. A. Sloane 等。在线整数数列百科全书，2023 年。可在此查阅https://oeis.org。