arXiv:2301.11492v1 [econ.TH] 27 Jan 2023

恢复效用

CHRISTOPHER P. CHAMBERS、FEDERICO ECHENIQUE 和 NICOLAS S. LAMBERT

摘要。我们给出了从有限选择实验中恢复效用函数的充分条件。在决策理论中通常所理解的识别还不够。我们提出了一项具有广泛适用性的通用可恢复性结果，可用于现代不确定条件下的选择理论。关键在于允许存在货币环境，在这种环境中，客观的单调性概念是有意义的。我们表明，在这类环境中，主观期望效用、变分偏好，以及其他对不确定行为的效用进行参数化的方式，都是可恢复的。我们还考察了在存在噪声和偏离效用最大化的随机偏离的统计模型中如何恢复效用。

（Chambers）乔治城大学经济系 （Echenique）加州大学伯克利分校经济系 （Lambert）南加州大学经济系。Echenique 感谢美国国家科学基金会通过拨款 SES 1558757 提供支持。Lambert 谨此感谢微软研究院纽约分部和耶鲁大学 Cowles 基金会提供的资助与接待。

1. 引言

经济学家通常希望根据主体选择的数据恢复偏好和效用函数。如果我们能够恢复效用函数，那么显然可以推导出偏好关系，但反向过程则更为微妙。本文假设我们能够获取有关某个代理人选择的数据，并且这些数据能够描述该代理人的偏好（或者偏好已通过统计估计程序得出）。我们的结果给出了充分条件，在这些条件下，可以从主体的选择中恢复或学习效用函数。

从宏观层面看，问题在于偏好本质上就是选择，因为它们编码了在每个二元选择问题中会作出的选择。当我们写下 $x \succ y$ 时，实际上是指从集合 $\{x, y\}$中选择 x 。效用函数是丰富得多的对象，而同一种选择行为可能由许多不同的效用来描述。例如，可以用一个效用函数来讨论某个代理人的风险偏好：他们可能具有“恒定相对风险厌恶”效用，其中一个参数就能描述其对风险的态度。但同样的偏好也可以用一个不具备这种便利参数化形式的效用来表示。因此，恢复或学习效用会带来重要挑战，这些挑战超出了恢复偏好这一问题的范畴。本文通过一些简单示例来说明这些挑战。我们的主要结果阐明了在何种情况下，可以从选择数据中（非参数地）恢复效用表示。

我们首先考察不确定性下的选择。我们采用标准的（Anscombe–Aumann）不确定性下选择框架，并重点关注文献中得到广泛研究的一类效用表示。特殊情形包括主观期望效用、Gilboa 和 Schmeidler（1989）的最大—最小期望效用模型、Choquet期望效用（Schmeidler，1989）、Maccheroni、Marinacci 和 Rustichini（2006）的变分偏好，以及许多其他广受欢迎的模型。决策理论家通常十分重视效用表示的唯一性，认为唯一性提供了一种识别论证，使得效用能够从选择数据中恢复出来。与此相反，我们认为，效用表示的唯一性还不足以从有限选择数据中恢复效用。

反例并不难找。事实上，即使效用表示具有唯一性，我们仍可能找到一个收敛的效用序列，它与越来越大的有限数据集相一致，却不收敛于生成数据中这些选择的效用函数，也不收敛于任何与之等价的效用。因此

唯一性是效用表示具有经验可操作性的必要条件，但并非充分条件；这里的经验可操作性是指能够从规模较大但有限的选择实验中恢复出效用。

我们的主要结果是正面的，并给出了效用恢复的充分条件。我们的结果关键在于存在一个客观的效用改善方向：我们将重点放在单调偏好模型上。本文考察货币行为之间的选择，即状态依存的货币收益。对于这类行为，单调性有一个自然的定义：若两个行为中，一个在世界的每种状态下支付都更多，那么代理人就应当更偏好它。作为恢复过程的一项约束，这一基本的单调性概念足以确保：能够解释数据中选择的效用序列，会收敛到生成这些选择的效用函数。

我们首先讨论效用函数对潜在偏好关系的依赖所具有的连续性。如果 $U(\succeq, x)$ 是偏好 $\succeq$ 和选择对象 x的函数，那么当 $x \mapsto U(\succeq, x)$ 表示 $\succeq$时，我们称其为效用函数。我们借助现有文献（定理1）指出，在非常一般的情形下，这类连续效用函数是存在的。该映射关于偏好的连续性确保，如果选择数据允许恢复偏好，也允许恢复效用。然而，这类一般性效用表示结果的缺点是，它们并未涵盖经济学家通常感兴趣的特殊效用理论。没有理由认为，效用 $U(\succeq, x)$ 会与例如主观期望效用或变分偏好的标准参数化形式一致。

接下来，我们将讨论主要分析，将环境限定在 Anscombe-Aumann设定中，并考察不确定性下的选择理论中特别受到关注的效用表示。我们考虑的框架足够灵活，能够涵盖文献中研究过的大多数不确定条件下的选择理论。我们的主要结果（定理 2）指出，只要选择实验能够恢复主体的潜在偏好，它也能恢复我们所关注的效用类别中的效用。例如，如果某位代理人具有主观期望效用偏好，且这些偏好能够通过选择实验得到恢复，那么主观期望效用表示的参数也能得到恢复：该代理人的信念和伯努利效用指标。又如，如果能够根据选择数据推断出该代理人的变分偏好，那么也能推断出变分效用表示的各个组成部分。

实际选择数据可能受到抽样噪声的影响，主体也可能随机偏离自己的偏好。考虑到偏好估计中的随机性后，我们刚才提到的结果在这类情形下仍然有用。作为对主要发现的补充，我们进一步提出一个明确考虑带噪声选择和随机性的模型。具体而言，我们考虑随机抽取的选择问题，以及可能偏离自身偏好的代理人。他们会犯错。在这种情形下，我们给出效用函数估计具有一致性的充分条件（定理 3）。

在论文的最后一部分，我们退后一步，重新探讨偏好恢复问题，旨在说明有限选择实验的数据如何近似偏好关系，并进而近似效用函数。我们的模型考察大量但有限的二元选择。我们证明，当偏好是单调的，偏好恢复便是可能的（定理5）。在此类环境中，对于我们所关注的不确定性下的选择模型，效用恢复也随之成立（推论1）。

相关文献。经济学中关于显示偏好理论的文献主要致力于检验理性选择的一致性。该领域的主要成果——阿弗里亚特定理（Afriat，1967a；Diewert，1973；Varian，1982）——是在标准需求理论的背景下提出的（假设预算为线性，且数据集有限）。阿弗里亚特结果的不同版本已在无限数据模型（Reny，2015）、非线性预算集（例如，Matzkin，1991；Forges 和 Minelli，2009）、一般选择问题（例如，Chavas 和 Cox，1993；Nishimura、奥克和夸，2017）以及多人均衡模型（例如，Bro wn 和 Matzkin，1996；Carvajal、Deb、Fenske 和夸，2013）中得到。Echenique、G 讨论了与显示偏好相关的算法问题

olovin 和 Wierm

（2011）和 Camara（2022）。Chambers和Echenique（2016）的专著概述了相关研究成果。

显示偏好文献主要关注描述与理论相一致的数据集，而非恢复或学习偏好或效用。在需求理论和线性预算下的选择这一背景中，Mas-Colell（1978）提出了充分条件：在这些条件下，可以从一系列日益丰富的需求数据观测中，于极限意义上恢复偏好关系。近来，Forges 和 Minelli（2009）针对非线性预算集推导出了 Mas-Colell 结果的对应版本。文献中一个重要分支着眼于将非参数计量经济学估计方法应用于需求理论数据：Blundell、Browning 和 Crawford

（2003，2008）提出了针对显示偏好数据的统计检验，并考察了需求变化的反事实界限。

从统计学习理论的视角出发，研究者已经探讨了偏好与效用恢复问题。Beigman 和 Vohra（2006）研究了 PAC 范式下学习需求函数的问题，这与我们在第4节所做的工作密切相关。一个关键区别在于，我们使用的是成对选择数据，而这类数据在实验环境中很常见（包括许多近期的大规模在线实验）。Zadimoghaddam 和 Roth（2012）与 Beigman 和 Vohra（2006）一样，研究效用恢复问题，但他们并非要学习需求函数，而是希望了解何时能够高效地学习效用。Balcan、Daniely、Mehta、Urner 和 Vazirani（2014）在这项重要工作基础上进一步研究，给出了样本复杂度保证；Ugarte（2022）则像本文一样，探讨含噪选择数据下的偏好恢复问题，但采用的是需求理论框架。类似地，Balcan、Constantin、Iwata 和 Wang（2012）的早期研究探讨了一个 PAC 学习问题，重点关注经济学中的重要估值子类。Bei、Chen、Garg、Hoefer 和 Sun（2016）研究了这样一个问题：卖方提出预算，以学习代理人的效用（他们关注拟线性效用，以及能够获得总需求数据的卖方）。Zhang 和 Conitzer（2020）在主动学习范式下研究这一问题，并将其与 PAC 样本复杂度进行对比。

总的来说，这些研究是我们论文的重要先例，但都处于需求理论的框架之内。其结果无法推广到其他环境，例如风险或不确定性下的二元选择。与我们的研究最接近的是 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021），该文探讨了许多与我们论文相关的问题，但关注的是偏好的恢复，而非效用的恢复。Chambers、Echenique 和 Lambert 的研究考察了二元选择问题中的选择，但没有探讨如何恢复或学习效用函数。正如我们将在下文中解释的，效用问题比偏好问题更为微妙。在这一研究脉络中，Chase 和 Prasad（2019）在学习效用方面取得了重要成果，但研究范围仅限于跨期选择。Basu 和 Echenique（2020）考察了效用函数的可学习性（基于 PAC 学习范式），但聚焦于不确定性下选择的特定模型。我们的一些结果依赖于衡量理论或偏好族丰富度的测度；Basu 和 Echenique（2020）以及 Fudenberg、Gao 和 Liang（2021）都讨论了这类测度：前者通过估计不确定条件下的选择理论的 VC 维数，

后者则提出并分析了新的丰富度测度，这些测度特别适用于经济学，并将其应用于经济数据集。

最后值得一提的是，正如 Dong、Roth、Schutzman、Waggoner 和 吴（2018年）以及 Echenique 和 Prasad（2020）所强调的，偏好和效用恢复可能会受到策略性操纵。我们的研究忽略了这种可能性。

2. 问题

我们希望了解何时可以根据代理人的选择数据恢复效用。设某代理人的效用函数为 u。我们想知道，在获得足够多的该代理人的选择数据后，何时能够“估计”或“恢复”一个可以保证接近 u 的效用函数。

用统计学术语来说，恢复类似于估计量的一致性，而近似保证类似于可学习性。设想一个大小为k的数据集，它来自一项激励实验，其中包含 k 个不同的选择问题。[1] 数据中观察到的选择行为可以用偏好 $\succeq^k$来描述，而该偏好与效用函数 u^k相关联。偏好 $\succeq^k$ 可以是理性化偏好，也可以是偏好估计。因此，我们为 u^k选择一个效用表示。恢复（或一致性）性质是指，当 $k \to \infty$时， $u^k \to u$ 。

假设效用 u 表示偏好 $\succeq$，而偏好概括了代理人的完整选择行为。显然，除非 $\succeq^k \to \succeq$，否则这一恢复过程毫无希望。因此，我们首先要做的是理解何时 $\succeq^k \to \succeq$ 足以确保 $u^k \to u$。换言之，我们希望理解何时恢复偏好足以恢复效用。为此，我们的主要结果见第3.4节。在恢复效用时，我们尤其关注参数化表示。例如，在不确定性下的选择中，人们可能会关注风险态度或不确定性厌恶的测度。因此，效用恢复过程保留那些使此类测度具有意义的效用属性至关重要。比如，如果偏好具有“恒定相对风险厌恶”（CRRA）形式，那么我们希望恢复Arrow-Pratt风险厌恶度量。

[1]这类数据集在实验经济学中很常见，其中包括k非常大的情形。例如，参见 von Gaudecker、van Soest 和 Wengstrom（2011）、Chapman、Dean、Ortoleva、Snowberg 和 Camerer（2017）、Chapman、Dean、Ortoleva、Snowberg 和 Camerer（2022），以及 Falk、Becker、Dohmen、Enke、Huffman 和 Sunde（2018）。我们还可以将我们的研究结果应用于国会的唱名表决数据，例如 Poole 和 Rosenthal（1985）或 Clinton、Jackman 和 Rivers（2004）所使用的数据。科技公司开展的大规模 A/B测试也可能提供更多示例（尽管这些示例涉及专有数据集）。

我们的数据大概是在实验设定中获得的，在这种设定下，代理人的行为可能会被错误地记录；或者代理人可能会随机偏离其潜在偏好 $\succeq$。尽管存在这些错误，但以高概率，在“样本路径上”，我们应当得到 $\succeq^k \to \succeq$。在我们的论文中，我们揭示了这种收敛会导致效用恢复的情形。事实上，第3.4节和第3.5节的结果可以用于说明，在决策理论中的许多流行模型中，当$\succeq^k \to \succeq$（以高概率）时，由此得到的效用表示能够实现效用恢复（以高概率）。

下一步是讨论学习和样本复杂度。在这里，我们需要明确考虑随机性和误差。我们提出一个随机选择模型，其中选择问题是随机抽样的，主体的选择也会出现误差。只要随机选择朝偏好方向发展的可能性高于背离偏好方向的可能性（如果 $x \succ y$ 那么 x 是选择问题 $\{x, y\}$中的更可能选项），误差的形式可以非常一般；此外，这种似然比必须始终与1保持一定距离。相比之下，离散选择的标准理论通常将随机性视为加性的，并认为它与正在比较的特定备选项对无关。

在这里，我们考虑一个形式化的统计一致性问题，并展示效用恢复可行的情形。我们借鉴 PAC 学习文献中的思想，为每个所需的近似保证提供形式化的有限样本量界。参见第4节。

3. 模型

3.1. 基本定义和记号约定。 令 X 为一个集合。给定一个二元关系 $R \subseteq X \times X$，我们在 $(x, y) \in R$时记作 $x \, R \, y$。一个完备且传递的二元关系称为弱序。若 X 是一个拓扑空间，则称 R 为连续的，如果 R 作为 $X \times X$ 的子集是闭集（例如，参见 Bergstrom、Parks 和 Rader，1976年）。一个偏好关系 是同时具有连续性的弱序。

如果对于所有 $x, y \in X$, $x \succeq y$，都能推出：对 (x, y) 的每个邻域 U，都存在 $(x', y') \in U$，且满足 $x \succ y$，那么偏好关系 $\succeq$ 就是局部严格的。局部严格性的概念最早由 Border 和 Segal 于 1994年提出，是对消费者理论中局部非餍足这一性质的推广。

如果 $\succeq$ 是定义在 X 上的偏好，且 $u: X \to \mathbf{R}$ 是一个函数，并且 $x \succeq y$ 当且仅当 $u(x) \geq u(y)$，那么我们称 u 是 $\succeq$ 的一种表示，或者称 u 是 $\succeq$ 的效用函数。

如果 $A \subseteq \mathbf{R}^d$ 是一个博雷尔集，我们用 $\Delta(A)$ 表示 A 上所有博雷尔概率测度的集合。我们赋予 $\Delta(A)$ 弱*拓扑。如果 S 是一个有限集，那么我们在 $\Delta(A)^S$ 上赋予乘积拓扑。

对于 $p, q \in \Delta(A)$，如果对于 A 上的所有单调递增、连续且有界的函数 f，都有 $\int_A f dx \geq \int_A f dy$，我们就称 p 在一阶随机占优意义上大于 q。

3.2.偏好与效用的拓扑。 当 X 是一个拓扑空间时，X 上的偏好集合赋予闭收敛拓扑。相应效用表示的空间赋予紧开拓扑。这些是偏好与效用的标准拓扑，已用于数理经济学的先前研究。例如，参见 Hildenbrand（1970）、Kannai（1970）和 Mas-Colell（1974）。这里我们给出定义，并简要讨论所选择的拓扑。

设 X 是一个拓扑空间，$\mathcal{F} = \{F^n\}_n$ 是 $X \times X$ 中由闭集构成的序列（赋予乘积拓扑）。定义 $\mathrm{Li}(\mathcal{F})$ 和 $\mathrm{Ls}(\mathcal{F})$ 为 $X \times X$ 的闭子集，如下所示：

- $(x, y) \in \mathrm{Li}(\mathcal{F})$ 当且仅当，对于 (x, y) 的任意邻域 V，存在 $N \in \mathbf{N}$，使得对于所有 $n \geq N$，都有 $F^n \cap V \neq \varnothing$。
- $(x, y) \in \mathrm{Ls}(\mathcal{F})$ 当且仅当，对于 (x, y) 的任意邻域 V 以及任意 $N \in \mathbf{N}$，都存在 $n \geq N$，使得 $F^n \cap V \neq \varnothing$。

注意，$\mathrm{Li}(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Ls}(\mathcal{F})$。闭收敛的定义如下。

定义 1。 F^n 收敛到 F 在闭收敛拓扑中，当且仅当 $\mathrm{Li}(\mathcal{F}) = F = \mathrm{Ls}(\mathcal{F})$。

闭收敛体现了这样一种性质：偏好相似的主体应当具有相似的选择行为——要能够从有限数据中学习偏好，这一性质是必要的。具体而言，如果 $X \subseteq \mathbf{R}^n$，且 $\mathcal{P}$ 是定义在 X 上的所有局部严格且连续的偏好集合，那么闭收敛拓扑就是 $\mathcal{P}$ 上使下列集合成为开集的最小拓扑

$$\{(x, y, \succeq) : x \succ y\} \subseteq X \times X \times \mathcal{P}$$

。[2] 换言之：假设 $x \succ y$，那么对于接近 x的 x' 、接近 y的 y' ，以及接近 $\succeq$的 $\succeq'$，我们可以得到 $x' \succ' y'$。

对于效用函数，我们采用紧开拓扑，并认为这也是一种自然的拓扑选择。紧开拓扑由紧集上一致收敛这一收敛准则刻画。它之所以适用于效用函数，是因为效用通常有两个自变量：一个是被“消费”的对象（例如彩票），另一个是效用旨在表示的序数偏好。（偏好这一自变量通常是隐含的，但显然仍是这一问题的关键方面。）现在，分析者希望效用“联合连续”，也就是对两个自变量都连续。为此，当效用仅被视为消费的函数时，效用集合上的自然拓扑确实是紧开拓扑。更正式地说，考虑以下结果，该结果最初由 Mas-Colell（1977）提出。[3]

定理1。 设 X 为一个局部紧波兰空间， $\mathcal{P}$ 为赋予闭收敛拓扑的所有连续偏好构成的空间。则存在一个连续函数 $U\colon \mathcal{P} \times X \to [0,1]$ ，使得 $x \mapsto U(\succeq, x)$ 表示 $\succeq$。

我们可以将映射 U 视为从 $\succeq$ 到效用函数空间的映射。只要在效用函数空间上施加紧开拓扑，这个诱导映射的连续性就等价于定理1中讨论的联合连续性结果（参见 Fox（1945））。

3.3. **模型**。 如第2节所述，我们想要了解，已知 $\succeq^k \to \succeq$时，何时可以得出 $u^k \to u$ 。Mas-Colell定理（定理1）给出了一般条件，在这些条件下存在一个具有所需收敛性质的效用表示，但他明确指出了这一结果在实际应用中的局限性：“可能不存在一种简单的构造性（‘规范’）方法来找到一个 U 函数。”相比之下，经济学家通常关注效用的具体参数化。

例如，如果代理人具有主观期望效用偏好，经济学家希望估计其信念和冯·诺伊曼—摩根斯坦指数，而不是对代理人偏好的某种任意表示。又或者，如果数据涉及跨期选择，且代理人采用指数方式对效用进行折扣，那么经济学家会希望估计

[2]关于这一讨论，参见 Kannai（1970）和 Hildenbrand（1970）；如有需要，作者可提供这一论断的证明。[3]Levin（1983）将其推广到不完备偏好。

其折扣因子。在定理1的语境下，这种具体的效用参数化并无意义。

下面这个（显而易见的）例子说明，确实存在值得研究的问题。即使恢复得到的效用构成收敛序列，且恢复得到的偏好收敛到正确的极限，任意效用表示也不一定收敛到正确的极限。

例 1. 考虑定义在 $\Delta(K)^S$ 上的期望效用偏好，其中 K 是一个紧空间， S 是一个有限状态集，而 $\Delta^S(K)$ 是 Anscombe-Aumann 行为的集合。固定一个仿射函数 $v:\Delta(K)\to\mathbb{R}$、一个先验 $\mu\in\Delta(S)$，并考虑由表示式 $\int_S v(f(s))\,\mathrm{d}\mu(s)$ 表示的偏好 $\succeq$。

现在，如果我们设定 $\succeq^k=\succeq$，那么 $\succeq^k\to\succeq$ 显然成立。然而，我们可以选取一个期望效用表示 $\int_S v^k(f(s))\,\mathrm{d}\mu^k(s)$，使其不收敛到 $\succeq$ 的任何一种效用表示。事实上，可以选取一个 μ^k，并对 v^k 进行“规范化”，例如 $\|v^k\|=1$（具体而言，可以设 K 为有限集，并对 v^k 使用欧几里得范数）。具体来说，选取满足 $\|\beta^k+\frac{1}{k}v\|=1$ 的标量 β^k。于是，效用 $f\mapsto\int_S v^k(f(s))\,\mathrm{d}\mu(s)$ 表示 $\succeq^k$，并收敛到一个常函数。

关键在于，极限效用表示的是这样一种偏好：所有行为之间完全无差异。无论原始偏好 $\succeq$是什么，结论都成立。

在这个例子中，我们对表示施加了一些约束。鉴于效用收敛于一个常数，我们选择的约束是对效用表示进行特定的规范化（其范数为常数）。这种规范化只是让例子的构造稍微更具挑战性，也或许体现了分析者在恢复过程中能够施加的最基本的审慎要求。

3.4. **Anscombe-Aumann 行为**。我们首先在 Anscombe-Aumann 行为的背景下提出主要结果。这是现代不确定性决策理论中的核心模型。设 S 为一个有限的世界状态集合，并固定实数轴 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 上的一个闭区间。行为是一个函数 $f:S\to\Delta([a,b])$。我们将 $\Delta([a,b])$ 中的元素解释为货币彩票，因此行为是状态依存的货币彩票。所有行为的集合为 $\Delta([a,b])^S$。当 $p\in\Delta([a,b])$ 时，我们将恒等于 p 的常值行为记为 $(p,\dots,p)$；有时也简记为 p。

请注意，我们并未采用抽象、一般的 Anscombe-Aumann 行为，而是假定货币彩票，从而为安斯康姆-奥曼框架中的客观彩票施加了特定结构。原因在于，我们的理论需要

一种已知且客观的偏好方向。某些偏好比较必须先验地已知：偏好的单调性足以解决这一问题，但要使单调性具有客观性，我们就需要货币彩票的结构。

如果对所有 $s \in S$， $f(s)$ 都一阶随机支配 $g(s)$，则行为 f 支配 行为 g。如果对所有 $s \in S$， $f(s)$ 都严格一阶随机支配 $g(s)$，则行为 f 严格支配 g。如果在 f 一阶随机支配 g 时，偏好 $\succeq$ 对行为满足 $f \succeq g$，则称该偏好弱单调。

令 U 为所有连续且单调弱递增函数 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ 的集合，其中 $u(a) = 0$ 且 $u(b) = 1$。如果 $V : \Delta([a, b])^S \to \mathbb{R}$ 和 $u \in U$ 是连续函数，并且对于所有常值行为 $(p, \ldots, p)$，都有 $v(p, \ldots, p) = \int_{[a,b]} u \, \mathrm{d}p$，则称一对 (V, u) 为标准表示。此外，如果存在一个聚合函数 $H : [0, 1]^S \to \mathbb{R}$，使得对于 $f \in \Delta([a, b])^S$，有 $V(f) = H((\int u \, \mathrm{d}f(s))_{s \in S})$，则称标准表示 (V, u) 为聚合型表示。以聚合函数 H 表示的聚合型表示记为 (V, u, H)。注意，标准表示排除了完全无差异。

若偏好 $\succeq$ on $\Delta([a, b])^S$ 满足弱单调性，且存在一个标准表示 (V, u)，其中 V 表示 $\succeq$，则称其为标准 偏好。粗略而言，标准偏好是在常值行为之间满足期望效用公理，并且相对于（逐状态的）一阶随机占优关系单调的偏好。聚合偏好还满足类似于 Savage 的 P3 或 Anscombe-Aumann 单调性概念的条件。

例 2. 变分偏好（Maccheroni、Marinacci 和 Rustichini，2006）是标准且聚合的。[4] 设

$$V(f) = \inf\{\int v(f(s))d\pi(s) + c(\pi) : \pi \in \Delta(S)\}$$

其中

(1) $v : \Delta([a, b]) \to \mathbb{R}$ 连续且仿射。(2) $c : \Delta(S) \to [0, \infty]$ 下半连续、凸且基准化（即 $\inf\{c(\pi) : \pi \in \Delta(S)\} = 0$）。

注意到 $V(p, \ldots, p) = v(p) + \inf\{c(\pi) : \pi \in \Delta(S)\} = \int u \, \mathrm{d}p$，根据 c 是基准化的这一假设，并且存在 $u : [a, b] \to \mathbb{R}$，使得 $v(p) = \int u \, \mathrm{d}p$

[4]变分偏好广泛应用于宏观经济学和金融学，用以刻画决策者在使用设定错误的模型时的顾虑。在此，恢复表示中的不同组成部分 v 和 c 十分重要，因为它们量化了环境的关键特征。例见 Hansen and Sargent (2001)；Hansen、Sargent、Turmuhambetova 和 Williams (2006)；Hansen and Sargent (2022)。

是 Riesz 表示定理的一个实例。显然，我们可以选择$u \in U$。因此（V， u）是一个标准表示。

令 $H: [0,1]^S \to \mathrm{R}$ 由 $H(x) = \inf\{\sum_{s\in S} x(s)\pi(s) + c(\pi) : \pi \in \Delta(S)\}$ 定义，我们可以看到，(V, u, H) 确实也是这些偏好的聚合表示。

聚合偏好的其他一些例子包括变分模型的特殊情形 Gilboa 和 Schmeidler (1989)，以及该模型的推广形式：Cerreia-Vioglio、Maccheroni、(2011)；Chandrasekher、Frick、Iijima 和 Le Yaouanq (2021年)，以及其他一些与之不可比的模型：Schmeidler (1989)；Chateauneuf、Grabisch 和 Rico (2008)；Chateauneuf 和 Faro (2009)。[5]

定理 2。令 $\succeq$ 为一个具有标准表示 (V, u) 的标准偏好，并令$\{\succeq^k\}$ 为一个标准偏好序列，其中每个偏好都具有标准表示 (V^k, u^k)。

(1) 如果 $\succeq^k \to \succeq$，那么 $(V^k, u^k) \to (V, u)$。*(2)* 此外，如果这些偏好是聚合型的，且其表示分别为 (V^k, u^k, H^k)和 (V, u, H)，那么 $H^k \to H$。

从解释上看，定理 2 表明，随着偏好收敛，风险态度或冯·诺伊曼—摩根斯坦效用指标也会逐点收敛。聚合型的结论指出，我们可以分别研究风险态度的收敛，以及控制风险的聚合函数的收敛。例如，在多重先验的情形下，偏好相近的两位决策者会拥有相似的先验集合。

3.5. **彩票偏好与确定性等价物**。本节重点讨论彩票偏好的一种规范性表示：确定性等价物。彩票偏好有许多模型，但我们特别考虑 Cerreia-Vioglio、Dillenberger 和 Ortoleva（2015）提出的模型，其中彩票偏好表示为 $U(p) = \inf_{u\in\mathcal{U}} u^{-1}(\int u dp)$；即期望效用最大化者的一组确定性等价中的最小值。关键在于，对于这种表示以及任何退化彩票 δ_x, $U(\delta_x) = x$。

[5]计算机科学家特别感兴趣的一类变分偏好，是具有最大—最小表示的偏好（Gilboa 和 Schmeidler, 1989）。这类偏好通过以下方式评估行为

$$V(f) = \inf\{\int v(f(s))d\pi(s) : \pi \in \Pi\},$$

其中 $\Pi \subseteq \Delta(S)$ 是一个闭凸集。这里， c 是 Π 的示性函数（如凸分析中所定义）。

设 $[a,b] \subset \mathrm{R}$，其中 $a < b$ 是实数轴上的一个区间，并考虑 $\Delta([a,b])$。如果对于 $\Delta([a,b])$，$\succeq$ 是<стиle id='8'>确定性单调的，则称其为确定性单调；也就是说，每当 p 一阶随机占优 q 时，就有 $p \succeq q$；并且对于所有满足 $x > y$ 的 x、$y \in [a,b]$，都有 $\delta_x \succ \delta_y$。任何确定性单调的连续偏好 $\succeq$ 以及任何彩票 $p \in \Delta([a,b])$ 都具有唯一的<стиle id='20'>确定性等价 $x \in [0,1]$，满足 $\delta_x \sim p$。为此，我们定义 $\mathrm{ce}(\succeq, p)$ 为 $\succeq$ 的 p 的确定性等价物。显然，固定 $\succeq$ 后，$\mathrm{ce}(\cdot, \succeq)$ 是 $\succeq$ 的连续效用表示。

命题1。 设 $\succeq$ 为一种确定性单调偏好，且 $p \in \Delta([a,b])$。设$\{\succeq^k\}$ 为一列确定性单调偏好，且 p^k 为$\Delta([a,b])$中的一个序列。若$(\succeq^k, p^k) \to (\succeq, p)$，则 $ce(\succeq^k, p^k) \to ce(\succeq, p)$。

为此，将每种偏好映射为其确定性等价物表示的映射，在闭收敛拓扑下是连续映射。

4. 基于噪声选择数据的效用恢复

我们构建一个含噪选择数据模型，并探讨如何通过传统估计程序恢复效用。这里的恢复表现为一个明确的一致性结果，以及 PAC 学习框架下的样本复杂度界。

重点是*Wald*表示，它类似于我们在第3.5节中讨论的确定性等价物。在 $x \in \mathrm{R}^d$中的向量之间进行选择时，Wald表示为 $u(x) \in \mathrm{R}$，使得

$$x \sim (u(x), \ldots, u(x)).$$

如果选择空间具有良好的性质，那么对于任何单调且连续的偏好关系，都存在一个Wald表示。为此，我们超越了上文所考察的Anscombe-Aumann框架，但应当明确，本节假设的某些Anscombe-Aumann版本也可以纳入其中。

对于明确考虑含噪选择数据的模型，我们的主要结果假设Wald表示满足Lipschitz条件或具有齐次性（即偏好是齐次的）。

4.1. 含噪选择数据。我们的含噪选择模型的原始要素汇集于元组（$X, \mathcal{P}, \lambda, q$）中，其中：

- $X \subseteq \mathrm{R}^d$ 是环境选择空间（或消费空间）。集合 X 赋予从 R^d继承的（相对）拓扑。

- $\mathcal{P}$ 是 X上的连续且局部严格偏好类。该类配有一个效用函数集合 $\mathcal{U}$，使得 $\mathcal{P}$ 中的每个元素都在集合 $\mathcal{U}$中有一个效用表示。

- λ 是定义在 X 上的概率测度，并假设其关于勒贝格测度绝对连续。我们还假设 $\lambda \geq c\text{Leb}$，其中 $c > 0$ 是常数，Leb 表示勒贝格测度。

- q： $X \times X \times \mathcal{P} \to [0,1]$ 是一个随机选择函数，因此 $q(x, y; \succeq)$ 表示偏好为 $\succeq$ 的代理人选择 x 而非 y 的概率。假设若 $x \succ y$，则以概率 $q(x, y; \succeq) > 1/2$ 选择 x，并以概率 $q(y, x; \succeq^*) = 1 - q(x, y; \succeq)$ 选择 y。若 $x \sim y$，则 x 和 y 被选中的概率相等。

- 我们假设错误概率 q 满足

$$\Theta \equiv \inf\{q(\succeq, (x, y)) : x \succ y \text{ and } \succeq \in \mathcal{P}\} > \frac{1}{2}.$$

四元组 $(X, \mathcal{P}, \lambda, q)$ 描述了含噪选择数据的数据生成过程。固定样本量 n，并考虑一位偏好为 $\succeq^* \in \mathcal{P}$ 的代理人。通过根据分布律 λ 独立抽取 x_i 和 y_i，得到一系列选择问题 $\{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq n$。随后，根据 $q(\cdot, \cdot; \succeq^*)$，从每个问题 $\{x_i, y_i\}$ 中作出一个选择。

请注意，我们对 q 的假设较为宽松。我们几乎允许误差以任意方式依赖于所考虑的配对 $\{x, y\}$。唯一的要求是，个体根据自身偏好进行选择的可能性高于违背偏好进行选择的可能性；此外还要求满足可测性这一更具技术性的假设，并限制偏离 $1/2$-$1/2$ 选择的幅度。

为了记录所选的备选项，我们对每个问题中的元素进行排序，使得 (x_i, y_i) 表示从选择问题 $\{x_i, y_i\}$ 中选择了 x_i。因此，大小为 n 的样本为 $\{(x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)\}$，由根据我们的随机选择模型从 $X \times X$ 中独立同分布抽取的 $2n$ 个样本组成：在第 i 次抽取中，选择问题为 $\{x_i, y_i\}$，且选择了 x_i。

选择一个效用函数 $u_n \in \mathcal{U}$，使其最大化数据中得到理性化的选择数量。因此，u_n 最大化 $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{u(x_i) \geq u(y_i)}$。效用函数空间配备了一个度量，$\rho$。在本节中，我们对 ρ 的唯一要求是：对于任意 u、$u' \in \mathcal{U}$，都存在 $x \in X$，使得 $|u(x) - u'(x)| \geq \rho(u, u')$。例如，本节中的任何结果都可以使用上确界范数。

4.1.1. *Lipschitz* 效用。一组充分条件要求相关效用表示族满足 Lipschitz 性质，且具有共同的 Lipschitz 界。这些表示属于 Wald 类型，如第3.5节所述。现在我们进一步要求其满足 Lipschitz 性质，由此可以将效用函数之间的差异与可量化的可观察选择行为（尽管带有噪声）联系起来。其核心思想见第6节的引理 4。

我们称 $(X,\ \mathcal{P},\ \lambda,\ q)$ 为一个 ***Lipschitz*** 环境，如果：

(1) $X \subseteq \mathbf{R}^d$ 是凸的、紧的，且内点非空。(2) 每个偏好 $\succeq \in \mathcal{P}$ 都有一个 Wald 效用表示 $u_{\succeq}:\ X \to \mathbf{R}$，使得$x \sim u_{\succeq}(x)\mathbf{1}$。(3) $\mathcal{U}$ 中的所有效用都是 Lipschitz 的，并且具有一个共同的利普希茨常数 κ。因此，对于任意 x、$x' \in X$ 以及 $u \in \mathcal{U}$、$|u(x) - u(x')| \leq \kappa \|x - x'\|$。

4.1.2. 齐次偏好。 第二组充分条件涉及齐次偏好。在这种情况下，Wald 表示具有齐次性，这使我们能够将效用差异与检测到此类差异的概率联系起来。关键见解包含在第 6 节的引理 5 中。

我们采用以下辅助记号。 $S_\alpha^M = \{x \in \mathbf{R}^d:\ \|x\| = M \text{ 且 } x \geq \alpha\mathbf{1}\}$ 且 $D_\alpha^M = \{\theta x:\ x \in S_\alpha^M \text{且 } \theta \in [0,1]\}$。

我们称 $(X,\ \mathcal{P},\ \lambda,\ q)$ 是一个 齐次环境，当且仅当：

(1) $X = D_\alpha^M$对于某个（较小的） $\alpha > 0$ 和（较大的） $M > 0$。(2) $\mathcal{P}$ 是定义在 $X \subseteq \mathbf{R}^d$上的连续、单调、齐次且完备偏好的一个类。(3) $\mathcal{U}$ 是Wald表示的一个类，因此对于每个 $\succeq \in \mathcal{P}$，都存在一个效用函数 $u \in \mathcal{U}$，使得 $x \sim u(x)\mathbf{1}$。

备注：如果 $u \in U$ 是 $\succeq$的Wald表示，那么 u 是一阶齐次的，因为 $x \sim u(x)\mathbf{1}$ 当且仅当 $\lambda x \sim \lambda u(x)\mathbf{1}$，所以 $u(\lambda x) = \lambda u(\{\mathrm{v11})$。

4.1.3. *VC* 维数。偏好集合 $\mathcal{P}$ 的 Vapnik-Chervonenkis（VC）维数，是指存在某个效用 $u \in \mathcal{U}$，能够完美地理性化数据中的所有选择（无论这些选择是什么）时，样本量 n 的最大值。也就是说，对于任意大小为 n 的数据集 $(x_i,\ y_i)_{i=1}^n$，均有 $n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{u(x_i) \geq u(y_i)}$。

VC 维数是标准 PAC 学习范式的基本要素。它衡量机器学习中所用理论的复杂度，也是大数一致律相关标准结果的基础（例如，参见 Boucheron、Bousquet 和 Lugosi

（2005））。Basu 和 Echenique（2020）以及 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021）将 VC 维数应用于决策理论。

值得注意的是，VC 维数用于分类任务。或许这并不显而易见，但对于偏好而言，我们的研究可以视为分类问题。对于每一对备选项 x 和 y，偏好 $\succeq$ 会将这对备选项“分类”为 $x \succeq y$ 或 $y \succ x$。因此，我们可以将偏好恢复视为在类别 $\mathcal{P}$中学习分类器的问题。

4.2. **一致性和样本复杂度**。

定理 3. 考虑一个噪声选择环境 $(X, \mathcal{P}, \lambda, q)$，它是齐次的或利普希茨环境。假设 $u^* \in \mathcal{U}$ 是 $\succeq^* \in \mathcal{P}$的 *Wald* 效用表示。

(1) 估计值 u_n 依概率收敛于 u^*。*(2)* 存在常数 K 和 C，使得对于任意 $\delta \in (0,1)$ 和 n，以至少 $1-\delta$的概率，

$$\rho(u_n, u^*) \leq \bar{C}\left(K\sqrt{V/n} + \sqrt{2\ln(1/\delta)/n}\right)^{1/D},$$

其中，当环境满足 *Lipschitz* 条件时，V 是 $\mathcal{P}$的 *VC* 维数；当环境是齐次的时，$D = d$ 是 $D = 2d$。

当然，定理中的第二个表述只有在 $\mathcal{P}$ 的 VC 维数有限时才有意义。常数 K 和 C 取决于环境中的原始要素，但不取决于偏好、效用或样本量。

5. 偏好和效用恢复

第3.4节的讨论以偏好的收敛为既定条件，重点关注效用恢复。这里我们退后一步，给出一些偏好恢复的条件，这些条件与第3.4节的设定尤其相关，然后在推论1中将这些条件与效用恢复联系起来。首先，我们描述一种可以 elicitation 偏好的实验设定：代理人或受试者面对一系列（有激励的）选择问题，而其所做的选择会产生关于其偏好的数据。下面的具体模型和描述借鉴了 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021），但这种设定在选择理论中完全是标准的。

令 $X = \Delta([a,b])^S$ 表示货币彩票上的行为集合，如第3.4节所述。选择函数是一个二元组 (Σ, c)，其中 $\Sigma \subseteq 2^X \setminus \{\varnothing\}$ 是一个由非空子集组成的集合

X，且 $c\colon \Sigma \to 2^X$ 满足 $\varnothing \neq c(A) \subseteq A$ 对所有 $A \in \Sigma$均成立。当 Σ（即 c 的定义域）已明确时，我们将 c 称为选择函数。

如果选择函数（Σ, c）由偏好关系 $\succeq$ 在 X 上生成，则

$$c(A) = \{x \in A : x \succeq y \text{ for all } y \in B\},$$

对于所有 $A \in \Sigma$。

记号（$\Sigma, c_{\succeq}$）表示选择函数（$\Sigma, c_{\succeq}$）由偏好关系 $\succeq$ 在 X上生成。

我们的模型包含一名实验者（女性）和一名受试者（男性）。受试者按照由偏好 $\succeq^*$ 在 X上的方式在备选项中进行选择，我们将这种偏好称为数据生成偏好。实验者试图从受试者在有限实验中的选择中推断出 $\succeq^*$ 。

在有限实验中，受试者会看到有限多个无序的备选项对 $B_k = \{x_k, y_k\}$ 在 X中。对于每一对 B_k，受试者需要从两个备选项中选择一个： x_k 或 y_k。

实验序列是呈现给受试者的一组可能选择对 $\Sigma_\infty = \{B_i\}_{i \in \mathbf{N}}$。令 $\Sigma_k = \{B_1, \ldots, B_k\}$ 表示实验序列的前 k 个元素， $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ 表示在该序列的所有实验中使用的全部备选项集合。这里， Σ_k 是一个规模为 k 的有限实验。

我们对 Σ_∞ 作出两个假设。第一个假设是， B 在 X 中稠密。第二个假设是，对于任意 x，存在 k，使得 $B_k = \{x, y\}$。第一个假设显然是获得任何一般性偏好恢复结果所必需的。第二个假设意味着，实验者能够引出受试者对其试验中所用所有备选项对的选择。[6]

对于每个 k，受试者的偏好 $\succeq^*$ 会生成一个选择函数（Σ_k， c）：对每个 $B_i \in \Sigma_k$， 令 $c(B)$ 成为根据 $\succeq^*$从 B_i 中选出的极大元素。因此，实验者观察到的选择行为始终与（Σ_k， $c_{\succeq^*}$）一致。

我们引入两种合理化概念：弱合理化和强合理化。若对所有 $B_i \in \Sigma_k$, $c(B_i) \subseteq c_{\succeq_k}(B_i)$，偏好 $\succeq_k$弱合理化(Σ_k, c)。若对所有 $k \geq 1$，偏好 $\succeq_k$弱合理化选择序列 (Σ_∞, c)，即它理性化阶数为 k 的选择函数 (Σ_k, c)。

如果对于所有 $B_i \in \Sigma_k$、 $c(B_i) = c_{\succeq_k}(B_i)$，偏好 $\succeq_k$ 强理性化(Σ_k, c)。若某一偏好 $\succeq_k$ 强理性化选择序列 (Σ_∞, c)，则它对所有 $k \geq 1$ 都能理性化阶数为 k (Σ_k, c) 的选择函数。

[6]如果存在一个可数稠密的 $A \subseteq X$，那么总能通过标准的对角化论证构造出这样一个实验序列。

在消费者理论中显示偏好理论的发展史上，强可理性化最早出现。它本质上就是 Samuelson（1938年）和 Richter（1966年）所提出的概念。当我们知道所有可能被选择的备选项实际上都已被选择，或者希望额外施加一项约束，要求观察到的选择在每个选择问题中都是唯一最优的，那么强可理性化就是恰当的概念。Samuelson 在研究需求函数时，这样做是有道理的。弱可理性化是 Afriat（1967b年）提出的创新之一；他关注的是需求对应。[7]

5.1. **一个一般性的"极限"结果**。我们的下一个结果旨在对比：利用"极限"（可数无穷）数据能够实现的结果，与从有限选择实验中恢复出的偏好的极限。

定理4。假设 $\succeq$ 和 $\succeq^*$ 是两个连续偏好关系（完备且传递）。如果 $\succeq|_{B\times B}=\succeq^*|_{B\times B}$，那么 $\succeq=\succeq^*$。

事实上，正如证明所表明的，定理4更一般地适用于任何作为连通拓扑空间的 X，但在缺乏连通性的情况下未必成立。从某种意义上说，数据量无限时的极限情形不会给偏好恢复带来问题。我们施加的结构条件，是有限数据所导出的合理化的极限所必需的。

5.2. **AA模型中的有限数据恢复**。 在此，我们采用与第3.4节相同的结构假设，即 $X=\Delta([a,b])^S$，并赋予其弱拓扑和一阶随机占优关系。不过，正如证明所表明的，这一结果很容易推广到更广泛的环境中。

定理5。 存在一个有限实验序列 Σ_∞ ，使得若受试者的偏好 $\succeq^*$ 连续且弱单调，并且对每个 $k\in\mathbf{N}$， $\succeq^k$ 都是连续且弱单调的偏好，能够强理性化由 $\succeq^*$生成的选择函数(Σ_k,c)，则 $\succeq_k\to\succeq^*$。

推论1。 设 $\succeq^*$ 和 $\succeq^k$ 如定理*5*的陈述所述。此外，若 $\succeq^*$ 和 $\succeq^k$ 具有标准表示 (V,u) 和 (V^k,u^k) ，则 (V,u) =极限$_{k\to\infty}(V^k,u^k)$。

[7]为说明这两种理性化概念之间的区别，请注意，在消费者理论的框架下，其中一种导出显示偏好的强公理，另一种则导出显示偏好的广义公理。当然，Afriat的方法也有所不同，因为它假设数据集有限。关于详细讨论，参见Chambers和Echenique（2016）。

注 t　帽定理5要求数据生成偏好 $\succeq$存在 *.

定理5的一个“对偶”结果由 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021）确立。该文关注通过 $\succeq^{k}$实现弱合理化，这比此处假设的强理性化是一种更弱的概念。为了得到弱合理化结果，我们转而假设偏好是严格单调的。

6. 证明

在本节中，除非另有说明，我们用 X 表示行为集 $\Delta([a,b])^{S}$，并用 X 中的元素 x、y、z 等表示其元素。注意，当 $\Delta([a,b])$ 配备概率测度弱收敛的拓扑时，X 是紧 Polish 空间。令 $\mathcal{P}$ 为 X 上的所有完备连续二元关系的集合。

6.1. L 引理。 此处陈述的引理将在我们结果的证明中使用 .

引理1. 设 $X \subseteq \mathbf{R}^{n}$。若 $\{x'_n\}$ 是 X中的递增序列，且 $\{x''_n\}$ 是递减序列，并且 上确界$\{x'_n : \ n \geq 1\} = x^{*} =$ 下确界$\{x''_n : \ n \geq 1\}$。则

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x^{*} = \lim_{n\to\infty} x''_n.$$

证明。 对于 $n = 1$，这显然成立。对于 $n > 1$，收敛、上确界和下确界均逐分量得到，因此结论成立。□

引理2. 设 $X = \Delta([a,b])$。设 $\{x_n\}$ 是 X中的收敛序列，且 $x_n \to x^{*}$。则存在递增序列 $\{x'_n\}$ 和递减序列 $\{x''_n\}$，使得 $x'_n \leq x_n \leq x''_n$，并且 极限$_{n\to\infty} x'_n = x^{*} =$ 极限$_{n\to\infty} x''_n$。

证明。按一阶随机占优排序的集合 X 是一个完备格（例如，参见 Kertz 和 Rösler (2000) 中的引理 3.1）。假设 $x_n \to x^{*}$。定义 x'_n 和 x''_n 如下：$x'_n = \inf\{x_m : \ n \leq m\}$，以及 $x''_n = \sup\{x_m : \ n \leq m\}$。显然，$\{x'_n\}$ 是递增序列，$\{x''_n\}$ 是递减序列，并且 $x'_n \leq x_n \leq x''_n$。

令 F_x 表示与 x 相关联的累积分布函数。注意，$F_{x''_n}(r) = \inf\{F_{x_m}(r) : \ n \leq m\}$，而 $F_{x'_n}(r)$ 是 $\sup\{F_{x_m}(r) : \ n \leq m\}$ 的右连续修正。对于 F 的任意连续点 r，$F_{x_m}(r) \to F_{x^{*}}(r)$，因此

$$F_x(r) = \sup\{\inf\{F_{x_m}(r) : n \leq m\} : n \geq 1\}$$

根据引理1。

此外，$F_{x^{*}}(r) = \inf\{\sup\{F_{x_m}(r) : \ n \leq m\} : \ n \geq 1\}$。设 $\varepsilon > 0$。那么

$$F_{x^{*}}(r-\varepsilon) \leftarrow \sup\{F_{x_m}(r-\varepsilon) : n \leq m\} \leq F_{x'_n}(r) \leq \sup\{F_{x_m}(r+\varepsilon) : n \leq m\} \to F_{x^{*}}(r+\varepsilon)$$

那么 $F_{x'_n}(r) \to F_{x^*}(r)$，因为 r 是 F_{x^*} 的连续点。 □

我们得到的结果引出了两个有用的定义。称集合 X 与有限实验族 Σ_∞ 具有 可数序性质，如果对每个 $x \in X$ 以及 X 中 x 的每个邻域 V，都存在 $x', x'' \in (\cup_i B_i) \cap V$，使得 $x' \leq x \leq x''$。如果对于 X 中的任意收敛序列 $\{x_n\}_n$，只要 $x_n \to x^*$，就存在递增序列$\{x'_n\}_n$和递减序列 $\{x''_n\}_n$，使得 $x'_n \leq x_n \leq x''_n$，且 $\lim_{n\to\infty} x'_n = x^* = \lim_{n\to\infty} x''_n$，则称 X 具有 夹逼性质 。

引理 3。 如果 $X = \Delta([a,b])^S$，那么 X 具有夹逼性质，并且存在 Σ_∞，使得 (X, Σ_∞) 具有可数序性质。

证明。 夹逼性质由引理2推出，可数序性质则由 Aliprantis 和 Border（2006）的定理 15.11 推出：事实上，设 B 是 $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ 上具有有限支撑的概率分布集合 p，其中对所有 $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$，$p(q) \in \mathbb{Q}$。于是我们可以选取一列数对 B_i，并令 Σ_∞ 为满足$B = \cup B_i$ 的 B_i，从而满足可数序性质。 □

6.2. 定理 2 的证明。 不失一般性，我们可以设定 $[a,b] = [0,1]$。首先，我们证明 $u^k \to u$ 在紧开拓扑下。为此，设 $x^k \to x$。我们要证明 $u^k(x^k) \to u(x)$。因此，假设情况并非如此，并通过选取一个子序列使得 $u^k(x^k) \to Y > u(x)$（不失一般性）。注意到 $\delta_{x^k} \sim^k p^k$，其中p^k 是这样的彩票：以概率 $u^k(x^k) \in [0,1]$支付 1，以概率 $1 - u^k(x^k)$支付 0。令 p 为这样的彩票：以概率 Y支付 1，以概率$1 - Y$支付 0（鉴于 u^k 的值域为 $[0,1],$，我们必须有 $Y \in [0,1]$）。现在我们有 $(\delta_{x^k}, p^k) \to (\delta_x, p)$，而 $\delta_{x^k} \sim^k p^k$ 意味着 $\delta_x \sim p$。这构成矛盾，因为δ_x 在 $\succeq$ 中与这样的彩票无差异：以概率 $u^k(x^k) \in [0,1]$支付 1，以概率 $1 - u^k(x^k)$支付 0。后者被彩票 p严格地一阶随机占优。

为完成证明，我们证明 $V^k \to V$。这等同于证明，当 $f^k \to f$ 时，$V^k(f^k) \to V(f)$。对于每个 k，根据连续性和弱单调性，存在 $x^k \in [0,1]$，使得

$$V^k(f^k) = V^k(\delta_{x^k}, \ldots, \delta_{x^k}) = u^k(x^k).$$

类似地，存在 x，使得 $V(f) = V(\delta_x, \ldots, \delta_x) = u(x)$。

现在我们证明 $x^k \to x$。事实上，$\{x^k\}$ 是 $[0,1]$ 中的一个序列。如果存在一个收敛到（例如） $x' > x$的子序列，那么我们可以选取 $x'' = \frac{x+x'}{2}$，并且

最终

$$f^k \succeq^k (\delta_{x''}, \ldots, \delta_{x''}) \succ (\delta_x, \ldots, \delta_x) \sim f,$$

利用弱单调性。这是不可能的，因为 $(f^k, (\delta_{x^k}, \ldots, \delta_{x^k}) \to (f, (\delta_{x'}, \ldots, \delta_{x'}))$ 且 $f^k \succeq^k ((\delta_{x^k}, \ldots, \delta_{x^k})$ 意味着 $f \succeq ((\delta_{x'}, \ldots, \delta_{x'}) \succeq (\delta_{x''}, \ldots, \delta_{x''})$。

最后，利用我们已知的关于 u^k 收敛到 u 的结论，$V^k(f^k) = u^k(x^k) \to u(x) = V(f)$。

现在我们转向定理中的第二个陈述。注意，H^k 是一个从 $[0,1]^S$ 到 $[0,1]$ 的连续函数。令 $z^k \in [0,1]^S$ 为任意一个收敛序列，并设 $z^k \to z^*$。我们声称 $H^k(z^k) \to H(z^*)$。不失一般性，我们可以假设 $H^k(z^k) \to Y$，必要时取一个子序列即可。对于每个 k 和 s，选取满足 $u^k(y^k(s)) = z^k(s)$ 的 $y^k(s) \in [0,1]$。同样，不失一般性，必要时取一个子序列即可，并利用 S 的有限性，我们可以假设 $y^k \to y^*$。另请注意，$u(y^*(s)) = z^*(s)$，因为我们已证明 $u^k \to u$ 在紧开拓扑下收敛。

现在，我们也可以选择 $\hat{z}^k \in [0,1]$，使得

$$u^k(\hat{z}^k) = H^k(z^k) = H^k((u^k(y^k(s)))_{s\in S}),$$

并且，进一步地，我们同样可以不失一般性地（通过取一个子序列）假设 $\hat{z}^k$ 收敛到 $\hat{z}^*$。因此，$u(\hat{z}^*) = \lim u^k(\hat{z}^k) = \lim H^k(z^k) = Y$，再次运用我们关于 $u^k \to u$ 所证明的结果。于是 $(\delta_{\hat{z}^k}, \ldots, \delta_{\hat{z}^k}) \sim^k (y^k(s))_{s\in S}$，因此通过取极限，$(\delta_{\hat{z}^*}, \ldots, \delta_{\hat{z}^*}) \sim^* (y^*(s))_s$。这意味着 $Y = u(\hat{z}^*) = H(u(y^*(s)) = H(z^*)$。

6.3. 命题1的证明。取 $(\succeq^k, p^k)$ 如命题陈述所示，并注意，对于每个 $p \in \Delta([a,b])$，$\mathrm{ce}(\succeq^k, p^k) \in [a,b]$。反设 $\mathrm{ce}(\succeq^k, p^k) \to \mathrm{ce}(\succeq, p)$ 不成立，则存在某个 $\epsilon > 0$ 以及一个子序列，使得 $|\mathrm{ce}(\succeq^{k_m}, p^{k_m}) - \mathrm{ce}(\succeq, p)| > \epsilon$。再取一个子序列后，我们不失一般性地假设 $\mathrm{ce}(\succeq^{k_m}, p^{k_m}) \to \alpha \neq \mathrm{ce}(\succeq, p)$。现在，$p^{k_m} \sim^{k_m} \delta_{\mathrm{ce}(\succeq^{k_m}, p^{k_m})}$，且 $p^{k_m} \to p$ 和 $\delta_{\mathrm{ce}(\succeq^{k_m}, p^{k_m})} \to \delta_\alpha$。因此，根据闭收敛的定义可知 $p \sim \delta_\alpha$；但这与确定性单调性矛盾，因为 $\alpha \neq \mathrm{ce}(\succeq, p)$。

7. 定理 3 的证明

首先介绍一些记号。令 $\mu_n(\succeq) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i \succeq y_i}$，并将 $\succeq_n \in \mathcal{P}$ 表示为 $u_n \in \mathcal{U}$。根据 u_n 的定义，对于所有 $\succeq \in \mathcal{P}$，我们有 $\mu_n(\succeq_n) \geq \mu_n(\succeq)$。此外，当集合 A 在 $\mathbb{R}^d$ 中的体积有定义时，我们用 $\mathrm{Vol}(A)$ 表示其体积（参见 Schneider（2014））。

考虑定义在 $X \times X$ 上的测度 μ：

$$\mu(A, \succeq) = \int_A q(\succeq; x, y)\, \mathrm{d}\lambda(x, y).$$

特别是

$$\mu(\succeq', \succeq) = \int_{X \times X} \mathbf{1}_{\succeq'}(x, y) q(\succeq; x, y)\, \mathrm{d}\lambda(x, y).$$

表示具有偏好 $\succeq$ 的代理人在随机抽取的选择问题中做出带有误差的选择与 $\succeq'$ 一致的概率。

Chambers、Echenique 和 Lambert（2021）给出的关键识别结果是，若 $\succeq' \neq \succeq$，则

$$\mu(\succeq', \succeq) < \mu(\succeq, \succeq).$$

引理 4. 考虑一个 *Lipschitz* 噪声选择环境 $(X, \mathcal{P}, \lambda, q)$。存在一个常数 C，具有如下性质。若 $\succeq$ 和 $\succeq'$ 是 $\mathcal{P}$ 中的两个偏好，其在 $\mathcal{U}$ 中的表示分别为 u 和 u'。则

$$C\rho(u, u')^d \leq \mu(\succeq, \succeq) - \mu(\succeq', \succeq)$$

证明。R^d 中以 x 为中心、半径为 ε 的球记为 $B_\varepsilon(x)$。首先我们证明映射

$$\varepsilon \mapsto \frac{\mathrm{Vol}(B_\epsilon(x) \cap X)}{\mathrm{Vol}(B_\epsilon(x))},$$

对于 $x \in X$ 定义的函数，关于 $\epsilon > 0$ 单调不增。

事实上，令 $\epsilon_1 < \epsilon_2$，并令 $y \in B_{\epsilon_2}(x) \cap X$。那么 $y \in X$ 且 $\|y - x\| \leq \epsilon_2$。由 X 的凸性可知，$y_1 \equiv x + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(y - x) = (1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})x + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} y \in X$，且 $y_1 \in B_{\epsilon_1}(x)$。进一步注意，根据 R^d 中勒贝格测度的性质，$\mathrm{Vol}(\{x + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(y - x) : y \in B_{\epsilon_2}(x) \cap X\}) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^d \mathrm{Vol}(B_{\epsilon_2}(x) \cap X)$。因此，$\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_1}(x) \cap X) \geq \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^d \mathrm{Vol}(B_{\epsilon_2}(x) \cap X)$。由于 $\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_1}(x)) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^d \mathrm{Vol}(B_{\epsilon_2}(x))$，可得

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_1}(x) \cap X)}{\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_1}(x))} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_2}(x) \cap X)}{\mathrm{Vol}(B_{\epsilon_2}(x))},$$

正如我们所要证明的。

现在注意到，存在足够大的 $\bar{\varepsilon} > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \geq \bar{\varepsilon}$ 和 $x \in X$，$X \subseteq B_\varepsilon(x)$。因此，对于任意 $x \in X$ 和 $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_\epsilon(x) \cap X)}{\mathrm{Vol}(B_\epsilon(x))} \geq \frac{\mathrm{Vol}(X)}{\mathrm{Vol}(B_{\bar{\varepsilon}}(x))} \equiv c' > 0,$$

因为 X 的内点非空，而且 $\mathbf{R}^d$ 中球的体积与其中心无关。

现在我们继续证明引理中的陈述。令 $\Delta = \rho(u, u')$，并固定 $x \in X$，使得（不失一般性） $u(x) - u'(x) = \Delta > 0$。令

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{4\kappa}.$$

我们可以假设 $\varepsilon \leq 2\bar{\varepsilon}$ 如上所定义；否则，我们可以对 $\mathcal{U}$ 中函数的利普希茨常数采用一个更大的上界。

考虑区间

$$I = [(u'(x) + \kappa\varepsilon)\mathbf{1}, (u(x) - \kappa\varepsilon)\mathbf{1}],$$

其体积为

$$(u(x) - \kappa\varepsilon - (u'(x) + \kappa\varepsilon))^d = (\Delta/2)^d.$$

考虑 $B_{\varepsilon/2}(x)$。如果 $y \in B_{\varepsilon/2}(x)$，那么对于任意 $\tilde{u} \in \mathcal{U}$， $|\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)| < \kappa\varepsilon$。

现在，如果 $z \in I$ 且 $y \in B_\varepsilon(x)$，那么

$$u(y) > u(x) - \kappa\varepsilon = u((x - \kappa\varepsilon)\mathbf{1}) \geq u(z)$$

根据单调性。类似地，

$$u'(z) \geq u'((x + \kappa\varepsilon)\mathbf{1}) = u'(x) + \kappa\varepsilon > u'(y)$$

因此，对于任意 $(y, z) \in B_\varepsilon(x) \times I$，都有 $(y, z) \in \succ \setminus \succeq'$，并且

$$\begin{aligned}
\mu(\succeq, \succeq) - \mu(\succeq', \succeq) &= \int 1_{\succ\setminus\succ'}(y, z)[q(\succeq; (y, z)) - q(\succeq; (z, y))] \, \mathrm{d}\lambda(y, z) \\
&\geq \int_{B_{\varepsilon/2}(x)\times I} 1_{\succ\setminus\succ'}(y, z)[q(\succeq; (y, z)) - q(\succeq; (z, y))] \, \mathrm{d}\lambda(y, z) \\
&\geq \lambda(B_{\varepsilon(x)/2} \times I) \inf\{q(\succeq; (y, z) - q(\succeq; (z, y)) : (y, z) \in B_{\varepsilon/2}(x) \times I\}.
\end{aligned}$$

其中，第一个等式见 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021）。第二个不等式成立，是因为 $q(\succeq; (x, y)) > 1/2 > q(\succeq; (y, x))$ 在 $(x, y) \in \succ$ 上成立。第三个不等式成立，是因为 $(y, z) \in \succ \setminus \succeq' \subseteq \succ \setminus \succ'$ 在 $B_\varepsilon(x) \times I$ 上成立。

根据我们对 λ 所作的假设以及上述计算，我们知道

$$\lambda(B_{\varepsilon(x)/2}) \geq \bar{c} \operatorname{Vol}(B_{\bar{\epsilon}}(x) \cap X) \geq \bar{c}c' \operatorname{Vol}(B_{\bar{\epsilon}}(x)) = \bar{c}c' \frac{(\varepsilon/2)^d \pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}.$$

因此，存在一个常数 C''（它只取决于 X 和 $\bar{c}$），使得 $\lambda(I \times B_{\varepsilon/2}(x))$ 的下界为

$$(\Delta/2)^d \frac{C''(\varepsilon/2)^d \pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} = (\Delta/2)^d \frac{C''\Delta^d \pi^{d/2}}{(8\kappa)^d \Gamma(1+d/2)} = C'\Delta^{2d}.$$

这里，C' 是一个仅取决于 C''、κ和 d的常数。

根据 $\Theta > 1/2$这一假设，我们得到

$$\mu(\succeq, \succeq) - \mu(\succeq', \succeq) \geq C\Delta^{2d}$$

对于某个取决于 C' 和 Θ的常数 C。 □

引理 5. 考虑一个齐次噪声选择环境$(X, \mathcal{P}, \lambda, q)$。存在一个常数 C，具有以下性质。设 $\succeq$ 和 $\succeq'$ 是 $\mathcal{P}$ 中的两个偏好，它们在 $\mathcal{U}$中的表示分别为 u 和 u'。那么

$$C\rho(u, u')^{2d} \leq \mu(\succeq, \succeq) - \mu(\succeq', \succeq)$$

证明。令 $x \in X$ 满足

$$\rho(u, u') \leq u(x) - u'(x) = \Delta > 0.$$

选择 $\eta \in (0, 1)$，使得 $u(\eta x) - u'(x) = \Delta/2$。令

$$I = (u'(x)\mathbf{1}, u(\eta x)\mathbf{1})$$

and

$$Z_\eta = [\eta x, x] \cap D_\alpha^M.$$

注意到 $I \subseteq X$，因为根据齐次性，$\|x\| = M$，因此 $x \geq \alpha\mathbf{1}$。那么我们必须有 $\alpha\mathbf{1} \leq u'(x)\mathbf{1}$，因为若 $\alpha\mathbf{1} \not\leq u'(x)\mathbf{1}$，则意味着 $u'(x)\mathbf{1} \ll \alpha\mathbf{1}$，这与单调性以及 $x \sim' u'(x)\mathbf{1}$ 矛盾。

注意，若 $y \in I$ 且 $z \in Z_\eta$，则有

$$u(y) < u(u(\eta x)\mathbf{1}) = u(\eta x) \leq u(z),$$

因为 $y < u(\eta x)\mathbf{1}$ 且 $\eta x \leq z$；而

$$u'(z) \leq u'(x) = u'(u'(x)\mathbf{1}) < u'(y).$$

因此 $(z, y) \in \succ \setminus \succeq'$。

首先估计体积(Z_η)。令 Z_0 表示 $[0, x] \cap D_\alpha^M$。定义函数 $f(z) = x + (1-\eta)(z - x)$，并注意，当 $z \in Z_0$时，$f(z) = \eta x + (1-\eta)z \in [\eta x, x]$，因为 $z \geq 0$。还要注意，$f(z)$是 x和 z的凸组合，因此 $f(z) \in D_\alpha^M$

因为后者是一个凸集。这表明

$$Z_\eta = \{x\} + (1-\eta)(Z_0 - \{x\}),$$

因此，$\mathrm{Vol}(Z_\eta) = (1-\eta)^d \mathrm{Vol}(Z_0)$。

现在，由于 Z_0 是星形的，我们有

$$\mathrm{Vol}(Z_0) = \frac{1}{d}\int_{y\in S_\alpha^M} \rho(y,[0,x])^d \,\mathrm{d}y \geq (\frac{\alpha}{M})^d A_\alpha^M,$$

其中，A_α^M是 S_α^M的表面积，$\rho(y,[0,x]) = \max\{\theta > 0 : \theta y \in [0,x]$ 是集合 $[0,x]$ 的径向函数（参见 Schneider（2014），第 57 页）。该不等式由 $\rho(y,[0,x]) \geq \alpha/M$ as $x_i \geq \alpha$ and $y_i \leq M$ for any $y \in S_\alpha^M$ 得出。

Now,

$$1-\eta = 1 - \frac{\Delta/2 + u'(x)}{u(x)} = \frac{\Delta/2}{u(x)} \geq \frac{\Delta/2}{M},$$

因为 $u(x) \leq M$。因此我们有

$$\mathrm{Vol}(Z_\eta) \geq \Delta^d C',$$

其中 $C' = \mathrm{Vol}(Z_0)/(2M)^d > 0$ 是一个常数。

此外，我们有 $\mathrm{Vol}(I) = (\Delta/2)^d$ as $I \subseteq X$。然后，我们再次使用 Chambers、Echenique 和 Lambert（2021）中推导出的公式，并利用 $q(\succeq;(x,y)) > 1/2 > q(\succeq;(y,x))$ 在 (x,y) 上 $\in \succ$，得到：

$$\begin{aligned}
\mu(\succeq,\succeq) - \mu(\succeq',\succeq) &= \int 1_{\succ\setminus\succ'}(z,y)[q(\succeq;(z,y)) - q(\succeq;(y,z))]\,\mathrm{d}\lambda(z,y) \\
&\geq \int_{Z_\eta\times I} 1_{\succ\setminus\succ'}(z,y)[q(\succeq;(z,y)) - q(\succeq;(y,z))]\,\mathrm{d}\lambda(z,y) \\
&\geq \lambda(Z_\lambda \times I)\inf\{q(\succeq;(z,y) - q(\succeq;(y,z)) : (z,y) \in Z_\eta \times I\} \\
&\geq (\Delta/2)^d C' \Delta^d \Theta,
\end{aligned}$$

其中 $\Theta = \inf\{q(\succeq;(z,y) - q(\succeq;(y,z)) : (z,y) \in Z_\eta \times I\} > 0$。 □

7.1. 定理 3 的证明。 在本证明余下部分中，我们将 $\mu(\succeq,\succeq^*)$ 记为 $\mu(\succeq)$。

证明的其余部分采用统计学习理论中的常规思路。根据标准结果（例如，参见 Boucheron、Bousquet 和 Lugosi （2005）中的定理 3.1），存在一个事件 E，其概率至少为 $1-\delta$，在该事件上：

$$\sup\{|\mu_n(\succeq) - \mu(\succeq)| : \succeq \in P\} \leq \mathbf{E}\sup\{|\mu_n(\succeq) - \mu(\succeq)| : \succeq \in P\} + \sqrt{\frac{2\ln(1/\delta)}{n}}.$$

此外，同样根据标准论证（参见 Boucheron、Bousquet 和 Lugosi（2005）中的定理 3.2），我们还可以得到

$$\mathbf{E}\sup\{|\mu_n(\succeq)-\mu(\succeq)| :\succeq\in P\} \le 2\,\mathbf{E}\sup\{\frac{1}{n}\left|\sum_i \sigma_i \mathbf{1}_{\tilde{x}_i\succeq y_i}\right| :\succeq\in \mathcal{P}\},$$

其中

$$R_n(\mathcal{P}) = \mathbf{E}\sup\{\frac{1}{n}\left|\sum_i \sigma_i \mathbf{1}_{\tilde{x}_i\succeq y_i}\right| :\succeq\in \mathcal{P}\}$$

是 $\mathcal{P}$的 Rademacher平均。

现在，根据 Vapnik-Chervonenkis不等式（参见 Boucheron、Bousquet 和 Lugosi（2005）中的定理3.4），我们有

$$\mathbf{E}\sup\{|\mu_n(\succeq)-\mu(\succeq)| :\succeq\in P\} \le K\sqrt{\frac{V}{n}},$$

其中 V 是 $\mathcal{P}$的 VC 维数，而 K 是一个普适常数。

因此，在事件 E发生时，我们有我们有

$$\sup\{|\mu_n(\succeq)-\mu(\succeq)| :\succeq\in P\} \le K\sqrt{V/n}+\sqrt{\frac{2\ln(1/\delta)}{n}}.$$

现在我们将这些结论与引理4和引理5结合起来。具体而言，根据所使用的引理，我们令$D=d$ 或 $D=2d$。令 $u^*\in\mathcal{U}$ 表示$\succeq^*$，并令 $u_n\in\mathcal{U}$ 表示 $\succeq_n$。令 $\Delta=\rho(u^*,u_n)$，这是一个取决于样本的量。那么，在事件 E发生时，根据引理4或引理5，我们有

$$\begin{aligned} C\Delta^D &\le \mu(\succeq^*)-\mu(\succeq_n)\\ &= \mu(\succeq^*)-\mu_n(\succeq^*)+\mu_n(\succeq^*)-\mu_n(\succeq_n)+\mu_n(\succeq_n)-\mu(\succeq_n)\\ &\le 2K\sqrt{\frac{V}{n}}+2\sqrt{\frac{2\ln(1/\delta)}{n}}, \end{aligned}$$

其中我们利用了根据 $\succeq_n$的定义，$\mu_n(\succeq^*)-\mu_n(\succeq_n)<0$。这证明了定理中的第二个结论。

为证明定理中的第一个结论，再次利用引理4和5，并利用 $\mu_n(\succeq_n)\ge\mu_n(\succeq^*)$，我们得到，对于任意 $\eta>0$，

$$\begin{aligned} \Pr(\rho(u^*,u_n)>\eta) \le\ & \Pr(\mu(\succeq^*)-\mu(\succeq_n)>C\eta^D)\\ \le\ & \Pr(\mu(\succeq^*)-\mu_n(\succeq^*)>C\eta^D/2)+\Pr(\mu_n(\succeq_n)-\mu(\succeq_n)>C\eta^D/2)\\ \le\ & 2\Pr(\sup\{|\mu(\succeq')-\mu_n(\succeq')| :\succeq'\in\mathcal{P}\}>C\eta^D/2)\to 0 \end{aligned}$$

根据 Chambers、Echenique 和 Lambe 中给出的概率一致收敛结果， $n \to \infty$ （2021年）。

7.2. 定理5的证明。 根据标准结果（参见 Hildenbrand（1970）），由于 X是局部紧波兰空间，闭收敛的拓扑是紧度量拓扑。

我们将证明，对于 $\succeq^k$ 的任意子序列，都存在一个收敛到 $\succeq^*$ 的子子序列，从而证明 $\succeq^k \to \succeq^*$。

因此，从给定的子序列中选取一个收敛的子子序列。为简化记号，并稍微滥用记号，我们也将该子子序列记为 $\succeq^k$。将其极限记为 $\succeq$；由于完备关系的集合在闭收敛拓扑下是闭的， $\succeq$ 是完备的。因此，只需证明 $\succ^* \subseteq \succ$ 和$\succeq^* \subseteq \succeq$。

首先，我们证明 $x \succ^* y$ 蕴含 $x \succ y$。因此，令 $x \succ^* y$。令 U 和 V分别为 x 和 y的邻域，使得对于所有 $x' \in U$ 和$y' \in V$，都有 $x' \succ^* y'$ 。由 $\succeq^*$的连续性可知，这样的邻域存在。我们先证明，若 $(x', y') \in U \times V$，则存在 N，使得对所有 $n \geq N$，都有 $x' \succ_n y'$。回顾$B = \cup\{B' : \ B' \in \Sigma_\infty\}$。根据假设，存在 $x'' \in U \cap B$ 和 $y'' \in V \cap B$，使得 $x'' \leq x'$ 且 $y' \leq y''$。每个 $\succeq_n$ 都是阶数为 n的有限实验的强理性化，因此若 $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \in \Sigma_n$，则 $\tilde{x} \succ_n \tilde{y}$ 蕴含对所有 $m \geq n$都有 $\tilde{x} \succ_m \tilde{y}$。由于$x''$, $y'' \in B$，存在一个 N使得 $\{x'', y''\} \in \Sigma_N$。因此， $x'' \succ^* y''$蕴含对所有 $n \geq N$都有$x'' \succ_n y''$。于是，对于 $n \geq N$, $x' \succ_n y'$，这是因为 $\succeq_n$是弱单调的。

现在我们证明 $x \succ y$。令 $\{(x_n, y_n)\}$ 为任意一个满足 $(x_n, y_n) \to (x, y)$ 的序列。根据假设，存在递增序列 $\{x'_n\}$ 和递减序列 $\{y'_n\}$，使得 $x'_n \leq x_n$ 且 $y_n \leq y'_n$，而 $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x'_n, y'_n)$。

取足够大的 N，使得 $x'_N \in U$ 且 $y'_N \in V$。取满足$x'_N \succ_n y'_N$的 $N' \geq N$，使得对所有 $n \geq N'$ 都成立（我们已在上文证明这样的 N' 存在）。于是，对任意 $n \geq N'$，有

$$x_n \geq x'_n \geq x'_N \succ_n y'_N \geq y'_n \geq y_n.$$

因此，由 $\succeq_n$ 的弱单调性可知， $x_n \succ_n y_n$。序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 是任意的，因此 $(y, x) \notin \succeq = \lim_{n\to\infty} \succeq_n$。故 $\neg(y \succeq x)$。 $\succeq$ 的完备性意味着 $x \succ y$。

其次，我们证明若 $x \succeq^* y$，则 $x \succeq y$，从而完成证明。令 $x \succeq^* y$。我们递归地构造序列 x^{n_k}、 y^{n_k}，使得 $x^{n_k} \succeq^{n_k} y^{n_k}$且$x^{n_k} \to x$， $y^{n_k} \to y$。

因此，对于任意 $k \geq 1$，选择满足 $x' \geq x$ 的 $x' \in N_x(1/k) \cap B$，以及满足 $y' \leq y$ 的 $y' \in N_y(1/k) \cap B$；于是 $x' \succeq^* x \succeq^* y \succeq^* y'$，因为 $\succeq^*$ 是弱单调的。回想一下，对于 Σ_n，$\succeq_n$强理性化了 $c_{\succeq^*}$。因此，$x' \succeq^* y'$ 和 x'、$y' \in B$ 意味着对于所有足够大的n，$x' \succeq_n y'$。令 $n_k > n_{k-1}$（其中我们可以取 $n_0 = 0$），使得 $x' \succeq_{n_k} y'$；并令 $x^{n_k} = x'$ 和 $y^{n_k} = y'$。

于是我们有 $(x^{n_k}, y^{n_k}) \to (x, y)$ 和 $x_{n_k} \succeq_{n_k} y_{n_k}$。因此 $x \succeq y$。

7.3. 定理4的证明。 首先，容易证明 $x \succ y$ 蕴含$x \succeq' y$。否则，存在 x, y，使得 $x \succ y$ 且 $y \succ' x$。取一个以 (x, y) 为中心的开邻域 U，以及一对 $(z, w) \in U \cap (B \times B)$，使得 $z \succ w$ 且$w \succ' z$，这就产生了矛盾。对称地，我们也有 $x \succ' y$ 蕴含 $x \succeq y$。

现在，不失一般性地，假设存在一对 x, y，使得 $x \succ y$ 且 $x \sim' y$。由连通性和连续性可知，$V = \{z : x \succ z \succ y\}$ 非空。事实上，反设 $V = \varnothing$，则 $\{z : x \succ z\}$ 和 $\{z : z \succ y\}$是非空开集。此外，对于任意 $z \in X$，要么 $x \succ z$，要么 $z \succ y$（因为若 $\neg(x \succ z)$，则由完备性可得 $z \succeq x$，这意味着 $z \succ y$）。由此可得，$\{z : x \succ z\} \cup \{z : z \succ y\} = X$，且每个集合都是非空开集（由偏好 $\succeq$ 的连续性可知）；这些集合互不相交，违反了 X的连通性。因此我们得出结论，V 非空。由偏好 $\succeq$的连续性可知，V 是开集。

我们断言，存在一对 $(w, z) \in (V \times V) \cap (B \times B)$，使得 $w \succ z$。否则，对于所有 $(w, z) \in V \times V \cap (B \times B)$，都有 $w \sim z$。于是，由连续性可得，对于所有 $(w, z) \in V \times V$, $w \sim z$。注意，这意味着对于任意 $w \in V$，集合 $\{z : w \succ z \succ y\} = \varnothing$；因为如果 $w \succ z \succ y$，我们也有 $x \succeq w \succ z$，由此可得 $x \succ z$，因此 $z \in V$，进而 $z \sim w$，矛盾。注意，$\{z : w \succ z \succ y\} = \varnothing$ 与 $\succeq$ 的连续性及 X 的连通性相矛盾（论证与 V非空的论证相同；参见上文讨论）。

我们已经证明，存在一个 $(w, z) \in (V \times V) \cap (B \times B)$，使得 $w \succ z$，因此 $x \succ w \succ z \succ y$。此外，我们假设 $x \sim' y$。根据第一段，我们知道 $x \succeq' w \succeq' z \succeq' y$。如果反设 $w \succ' z$，那么$x \succ' y$，这就产生矛盾。因此 $w \sim' z$ 且 $w \succ z$，这与 $\succeq_{B \times B} = \succeq'_{B \times B}$矛盾。

参考资料

Afriat, S. N. (1967a)：“从支出数据构造效用函数”，《国际经济评论》，8(1)，67–77。(1967b年)：“从支出数据构造效用函数”，《国际经济评论》，8(1)，67–~~77。Al~~iprantis, C. D., 和 K. Border (2006)：无穷维分析：搭便车者指南。施普林格，第3版。Balcan, M. F., F. Constantin, S. Iwata, 和 L. Wang (2012)：“学习估值函数”，载于学习理论会议，第4–1页。JMLR研讨会与会议论文集。Balcan, M.-F., A. Daniely, R. Mehta, R. Urner, 和 V. V. Vazirani (2014)：“从显示偏好中学习经济参数”，载于国际网络与互联网经济学会议，第338–353页。施普林格。Basu, P., 和 F. Echenique (2020)：“决策理论的可证伪性与可学习性”，《理论经济学》，15(4)，1279–1305。Bei, X., W. Chen, J. Garg, M. Hoefer, 和 X. Sun (2016)：“使用总需求查询学习市场参数”，载于$AAAI$。Beigman, E., 和 R. Vohra (2006)：“从显示偏好中学习”，载于第七届 *ACM* 电子商务会议论文集，第36–42页。Bergstrom, T. C., R. P. Parks, 和 T. Rader (1976年)：“具有开图的偏好”，《数学经济学杂志》，3(3)，265–268。Blundell, R., M. Browning, 和 I. Crawford (2008)：“需求响应的最佳非参数界限”，《计量经济学》，76(6)，1227–1262。Blundell, R. W., M. Browning, 和 I. A. Crawford (2003)：“非参数恩格尔曲线与显示偏好”，《计量经济学》，71(1)，205–240。Border, K. C., 和 U. Segal (1994年)：“动态一致性蕴含近似的期望效用偏好”，《经济理论杂志》，63(2)，170–188。Boucheron, S., O. Bousquet, 和 G. Lugosi (2005)：“分类理论：近期若干进展综述”，*ESAIM*：概率与统计，9，323–375。Brown, D. J., 和 R. L. Matzkin (1996)：“均衡流形上的可检验约束”，《计量经济学》，64(6)，1249–1262。Camara, M. K. (2022)：“计算上易处理的选择”，载于第*23*届 *ACM*经济学与计算会议论文集，EC ’22，第28页，美国纽约州纽约市。计算机协会。

Carvajal, A., R. Deb, J. Fenske，和 J. K.-H. Quah（2013）：“古诺模型的显示偏好检验”，《计量经济学》，81(6)，2351–2379。Cerreia-Vioglio, S., D. Dillenberger，和 P. Ortoleva（2015）：“谨慎期望效用与确定性效应”，《计量经济学》，83(2)，693–728。Cerreia-Vioglio, S., F. Maccheroni, M. Marinacci，和 L. Montrucchio（2011）：“厌恶不确定性的偏好”，《经济理论杂志》，146(4)，1275–1330。Chambers, C. P.，和 F. Echenique（2016）：显示偏好理论，第56卷。剑桥大学出版社。Chambers, C. P., F. Echenique，和 N. S. Lambert（2021）：“从有限数据中恢复偏好”，《计量经济学》，89(4)，1633–1664。Chandrasekher, M., M. Frick, R. Iijima，和 Y. Le Yaouanq（2021）：“模糊偏好的对偶自我表示”，《计量经济学》，即将出版。Chapman, J., M. Dean, P. Ortoleva, E. Snowberg，和 C. Camerer（2017）：“支付意愿与接受意愿的相关性可能比你想象的低”，美国国家经济研究局工作论文第23954号。（2022）：“经济图学”，即将出版，《政治经济学杂志：微观经济学》。Chase, Z.，和 S. Prasad（2019）：“学习时变选择”，载于第*10*届理论计算机科学创新会议（*ITCS*）。Chateauneuf, A.，和 J. H. Faro（2009）：“通过置信函数刻画模糊性”，《数学经济学杂志》，45(9-10)，535–558。Chateauneuf, A., M. Grabisch，和 A. Rico（2008）：“使用营野积分对不确定性态度进行建模”，《数学经济学杂志》，44(11)，1084–1099。Chavas, J.-P.，和 T. L. Cox（1993）：“广义显示偏好分析”，《经济学季刊》，108(2)，493–506。Clinton, J., S. Jackman，和 D. Rivers（2004）：“唱名表决数据的统计分析”，《美国政治学评论》，98(2)，355–370。Diewert, W. E.（1973）：“阿弗里亚特与显示偏好理论”，《经济研究评论》，40(3)，419–425。Dong, J., A. Roth, Z. Schutzman, B. Waggoner，和 Z. S. Wu（2018）：“基于显示偏好的策略性分类”，载于*2018*年*ACM*经济学与计算会议论文集，第55–70页。

Echenique, F., D. Golovin，和 A. Wierman（2011）：“经济学中计算复杂性的显示偏好方法”，载于第*12*届*ACM*电子商务会议论文集，第101–110页。Echenique, F.，和 S. Prasad（2020）：“激励相容主动学习”，载于第*11*届理论计算机科学创新会议（*ITCS*）。Falk, A., A. Becker, T. Dohmen, B. Enke, D. Huffman，和 U. Sunde（2018）：“经济偏好的全球证据”，《经济学季刊》，133(4)，1645–1692。Forges, F.，和 E. Minelli（2009）：“一般预算集的阿弗里亚特定理”，《经济理论杂志》，144(1)，135–145。Fox, R. H.（1945）：“函数空间的拓扑”，《美国数学会通报》，51，429–432。Fudenberg, D., W. Gao，和 A. Liang（2021）：“函数形式有多灵活？衡量理论的限制性”，载于第*22*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第497–498页。Gilboa, I.，和 D. Schmeidler（1989）：“具有非唯一先验的最大最小期望效用”，《数学经济学杂志》，18(2)，141–153。Hansen, L. P.，和 T. J. Sargent（2001）：“稳健控制与模型不确定性”，《美国经济评论》，91(2)，60–66。（2022）：“风险、模糊性与设定错误：决策理论、稳健控制与统计学”，纽约大学未发表手稿。Hansen, L. P., T. J. Sargent, G. Turmuhambetova，和 N. Williams（2006）：“稳健控制与模型设定错误”，《经济理论杂志》，128(1)，45–90。Hildenbrand, W.（1970）：“多主体经济”，《经济理论杂志》，2(2)，161–188。Kannai, Y.（1970）：“市场核心的连续性性质”，《计量经济学》，38(6)，791–815。Kertz, R. P.，和 U. Rösler（2000）：“概率测度完备格及其在鞅理论中的应用”，讲义—专著丛书，35，153–177。Levin, V. L.（1983）：“度量化紧空间上闭预序的连续效用定理”，《科学院通报》，273(4)，800–804。Maccheroni, F., M. Marinacci，和 A. Rustichini（2006）：“模糊厌恶、稳健性与偏好的变分表示”，《计量经济学》，

74(6), 1447–1498。Mas-Colell, A.（1974）：“连续且光滑的消费者：逼近定理”，《经济理论杂志》，8(3), 305–336。（1977）：“关于预序的连续表示”，18(2), 509–513。（1978）：“关于显示偏好分析”，45(1), 121–131。Matzkin, R. L.（1991）：“非线性选择集的显示偏好公理”，59(6), 1779–1786。Nishimura, H., E. A. 奥克和J. K.-H. 夸（2017）：“全面的显示偏好理论研究方法”，《美国经济评论》，107(4), 1239–1263。Poole, K. T.和H. Rosenthal（1985）：“立法机关唱名表决分析的空间模型”，29(2), 357–384。Reny, P. J.（2015）：“可理性化消费者行为的刻画”，83(1), 175–192。Richter, M. K.（1966）：“显示偏好理论”，《计量经济学》，34(3), 635–645。Samuelson, P. A.（1938年）：“消费者行为纯理论札记”，《经济学》，5(17), 61–71。Schmeidler, D.（1989）：“非可加性的主观概率与期望效用”，《计量经济学》，57(3), 571–587。Schneider, R.（2014）：凸体：布伦-闵可夫斯基理论。剑桥大学出版社，第2版。Ugarte, C.（2022）：“从不一致选择中恢复偏好”，未发表手稿，加州大学伯克利分校。Varian, H. R.（1982）：“需求分析的非参数方法”，《计量经济学》，50(4), 945–973。von Gaudecker, H.-M., A. van Soest和E. Wengstrom（2011）：“广泛人群中风险选择行为的异质性”，《美国经济评论》，101(2), 664–94。Zadimoghaddam, M.和A. Roth（2012）：“从显示偏好中高效学习”，载于《国际互联网与网络经济学研讨会》，第114–127页。施普林格。

Zhang, H.和V. Conitzer（2020）：“学习 k 需求代理人的估值”，载于《国际机器学习会议》。