arXiv:2301.11534v1 [math.GN] 27 Jan 2023

超空间上的星选择原理的变体*

JAVIER CASAS-DE LA ROSA

摘要

本文定义了一些组合原理，用于刻画具有如下性质的空间：其超空间满足某些经典星选择原理的某种变体。具体而言，所刻画的变体是门格尔情形和罗斯伯格情形下星选择原理的选择版本与绝对版本；此外，在这两种情形下，用于这些刻画的超空间分别是 $CL(X)$、 $\mathbb{K}(X)$、 $\mathbb{F}(X)$ 和 $\mathbb{CS}(X)$，并赋予 Fell 拓扑或 Vietoris 拓扑。

关键词。超空间、Fell 拓扑、Vietoris 拓扑、星选择原理、（绝对）强星门格尔、（选择性）强星门格尔、（绝对）强星罗斯伯格、（选择性）强星罗斯伯格。数学主题分类：主要分类 54B20、54D20；次要分类 54A05、54A25。

1 引言与预备知识

选择原理理论的许多分支，都是在[17] 由 Scheepers 开展系统研究之后发展起来的。如今，这一理论与数学的多个领域都有联系并得到应用，例如一般拓扑学、函数空间、超空间等。例如，在[9], [10],[15] 和 [16],中，作者研究了超空间上的一个基本问题：在不同的超空间拓扑下，确定某些拓扑性质之间，或如本例所示，某些经典选择原理之间是否存在对偶关系。换言之，给定两个选择原理 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，需要确定拓扑空间 X 满足原理 $\mathcal{P}$，当且仅当它的超空间满足原理 $\mathcal{Q}$是否成立。因此，这一对偶问题可以视为一种方法，用来刻画 X上的某些经典选择原理与 X的不同超空间上的选择原理之间的关系，这些超空间采用了若干众所周知的拓扑。

另一方面，自选择原理提出之初，便衍生出了若干版本。其中，研究迅速增多的一个重要版本，是经典选择原理的星版本

*作者的这项研究获得了墨西哥国立自治大学博士后奖学金项目的资助。

。这些星版本由 Ko$\check{\text{c}}$inac 于 [13] 提出，并由此开启了星选择原理理论（参见 [14] 和 [12]）。

关于超空间上一些星选择原理的对偶问题研究最近才在[4] 中发端，并在 [3], [6], [7] 和 [8] 中继续展开。这些研究仅涉及经典星选择原理。特别是，在这些工作中，人们定义了若干组合原理，以刻画不同拓扑下若干超空间上的（强）星梅格尔性质和（强）星罗斯伯格性质。本文将沿着这一研究方向，探讨若干经典星选择原理的变体。第2节刻画了维耶托里斯拓扑下若干超空间上的门格尔型和罗斯伯格型星选择原理的选择版本与绝对版本。第3节则给出了关于若干带有 Fell 拓扑的超空间的类似刻画。

1.1 超空间

假设所有空间都是豪斯多夫、非紧，甚至是非仿紧的。给定一个拓扑空间 X，X 的超空间记为 $CL(X)$，它是 X 的所有非空闭子集构成的集合。我们用 $\mathbb{K}(X)$（$\mathbb{F}(X)$）表示 X 的所有非空紧子集（所有非空有限子集）构成的族。此外，用$\mathbb{CS}(X)$表示 X 的所有收敛序列构成的族。

我们用 ω 表示第一个无限基数，对于集合 A，$[A]^{<\omega}$ 表示 A 的所有有限子集构成的集合。对于子集 $U \subseteq X$ 和 X 的子集族 $\mathcal{U}$，我们记作:

$$\begin{array}{lcl} U^- & = & \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset\}; \\ U^+ & = & \{A \in CL(X) : A \subseteq U\}; \\ U^c & = & X \backslash U; \\ \mathcal{U}^c & = & \{U^c : U \in \mathcal{U}\}; \\ \mathcal{U}^- & = & \{U^- : U \in \mathcal{U}\}; \\ \mathcal{U}^+ & = & \{U^+ : U \in \mathcal{U}\}. \end{array}$$

文献中有许多可以定义在 $CL(X)$ 或其某个子集族上的拓扑。本文将讨论两种众所周知的拓扑：Vietoris 拓扑，记作 V；以及 Fell 拓扑，记作 F。

Fell 拓扑的一个基本开子集具有如下形式:

$$(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^-) \cap (K^c)^+,$$

其中 V_1、.....、V_n 是 X 的开子集，且 K 是 X 的紧子集。

Vietoris 拓扑的一个基本开子集具有如下形式:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ for each } i \leq n\}$$

其中， U_1、.....、U_n 是 X、 $n \in \omega$ 的开子集。

1.2 经典星选择原理的变体

对于集合 $A \subseteq X$ 和 X 的子集族 $\mathcal{U}$， A 关于 $\mathcal{U}$ 的星记作 $St(A,\mathcal{U})$，它是集合 $\bigcup\{U \in \mathcal{U}: U \cap A \neq \emptyset\}$；对于满足 $x \in X$ 的 $A = \{x\}$，我们用 $St(x,\mathcal{U})$ 代替 $St(\{x\},\mathcal{U})$。

近年来，经典星选择原理的不同版本已在多篇文章中得到定义和研究（例如参见 [1], [5] 和[2]）。其中一些新的星选择原理涉及空间的稠密子集，被称为经典星选择原理的绝对版本和选择版本（有关绝对版本的更多信息，参见 [14]；有关选择版本的综述，参见 [2]）。选择版本强于绝对版本，而绝对版本强于经典星选择原理[1]。以下性质是门格尔情形和罗斯伯格情形下强星选择原理的绝对版本。

定义 1.1（[5]）。我们称空间 X 为:

1. 绝对强星门格尔性质（$aSSM$），如果对于 X 的每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ 以及 X 的每个稠密子集 D，都存在有限集序列 $\{F_n : n \in \omega\}$，使得 $F_n \subseteq D$、$n \in \omega$，且 $\{St(F_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。
2. 绝对强星罗斯伯格性质（$aSSR$），如果对于 X 的每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ 以及 X 的每个稠密子集 D，都存在 X 中的点序列 $\{x_n : n \in \omega\}$，使得 $x_n \in D$、$n \in \omega$，且 $\{St(x_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。

现在，我们回顾门格尔情形和罗斯伯格情形下强星选择原理的选择版本[2]。

定义 1.2（[2]）。我们称空间 X 为:

1. 选择性强星门格尔性质（$selSSM$），如果对于每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，以及 X 的每个稠密集序列 $\{D_n : n \in \omega\}$ X，都存在有限集序列 $\{F_n : n \in \omega\}$，使得 $F_n \subseteq D_n$、$n \in \omega$，并且 $\{St(F_n, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。

2. 选择性强星罗斯伯格性质（$selSSR$）：对于 X 的每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，以及 X 的每个稠密集序列 $\{D_n : n \in \omega\}$，都存在 X 的一个点序列 $\{x_n : n \in \omega\}$，使得 $x_n \in D_n$, $n \in \omega$，并且 $\{St(x_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。

[1]在 [5]，中，作者以一种不同于 [2]，所用符号的通用形式，引入了经典星选择原理的绝对版本；而在 [2]，中，星选择原理的绝对版本和选择版本也以通用形式给出。[2]Hurewicz 情形及其他一些有趣性质也在 [2] 中给出。

2 超空间上的绝对版本与选择版本（Vietoris 拓扑）

本节将介绍一些技术原理，它们有助于刻画具有 Vietoris 拓扑的若干超空间上的经典星选择原理（$selSSM$, $selSSR$,$aSSM$ 和 $aSSR$）的一些变体。为此，我们回顾一些符号约定和有用的定义，以建立这些刻画。

使用 [16] 的记号， ζ 表示以下族:

$$\zeta = \{(V_1, \ldots, V_n) : V_1, \ldots, V_n \text{ are open subsets of } X, \ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

在 [16], 中，Li 定义了空间 X 中 π_V-网络的概念，如下所示:

若对 X 的每个开子集 U ，当 $U \neq X$ 时，都存在 $(V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$ 以及一个有限集 F，满足 $F \cap V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq n)$，使得 $\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c \subseteq U$ 且 $F \cap U = \emptyset$，则称族 ζ 为 X 的 π_V-网络。空间 X 的 π_V-网络全体记为 Π_V。

今后， Δ 表示 $CL(X)$ 的一个子集，该子集对有限并封闭且包含所有单点集。在 [8], 中，利用族 Δ，定义了 π_V-网络的一种修正，称为 X 的 $\pi_V(\Delta)$-网络。

定义 2.1（[8]）。如果对每个$U \in \Delta^c$，都存在一个（$V_1, \ldots, V_n$） $\in \zeta$以及 $F \in [X]^{<\omega}$，使得 $F \cap V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq n)$，且 $\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c \subset U$和 $F \cap U = \emptyset$，则称族 ζ 为 X的 π_V（Δ）-网络。 X的所有 π_V（Δ）-网络组成的集合记为 Π_V（Δ）。

正如[8], 中所指出的，如果我们将 Δ 视为 CL（X），那么集合Π_V（Δ）与 Π_V 重合。但这一事实一般未必成立。在 [8], 中，作者给出了一个 π_V（Δ）-网络的例子，它不是一个 π_V-网络（定义在可度量化空间 X 上的一个特定族 Δ）。这里我们在一个不可度量化空间[1]中给出另一个例子。

例 2.2. 存在某个空间 X 上的一个族 ζ，以及一个族 $\Delta \subseteq CL(X)$，使得 ζ 是 X 的一个 $\pi_V(\Delta)$-网络，但不是 X 的一个 π_V-网络。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是 ω 上满足 $\omega = \bigcup \mathcal{A}$的一个不可数几乎不交族。我们考虑 Mr´owka-Isbell 空间（见 [11]）、 $X = \Psi(\mathcal{A})$ 和 $\Delta = \mathbb{K}(X)$。令

$$\zeta = \{(V_1, \ldots, V_n) : V_i = \{A_i\} \cup (A_i \setminus D_i) \ (1 \leq i \leq n) \text{ where } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, \\ D_1 \ldots, D_n \in [\omega]^{<\omega}, \ n \in \mathbb{N}\}$$

[1]这个空间也曾用于 [4] 证明 $\pi_F(\Delta)$-网络和 π_F-网络是不同的概念；定义见第 3 节。

注意， ζ定义良好，即对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$， $\{A_i\} \cup (A_i \setminus D_i)$ 都是 X的一个开集。

断言 1： ζ 是 X的 $\pi_V(\mathbb{K}(X))$-网络。
设 $U \in [\mathbb{K}(X)]^c$。假设对于某个 $K_0 \in \mathbb{K}(X)$， $U = X \setminus K_0$ 成立。我们考虑以下两种情况：

情形 I： K_0 是无限的。
注意，在这种情况下， $K_0 \cap \mathcal{A}$ 是一个非空有限集。此外，集合$(K_0 \cap \omega) \setminus (\bigcup\{B : B \in K_0 \cap \mathcal{A}\})$是有限的。对于每个 $m \in (K_0 \cap \omega) \setminus (\bigcup\{B : B \in K_0 \cap \mathcal{A}\})$，取 $B_m \in \mathcal{A}$ 使得 $m \in B_m$。集族 $\mathcal{B} = (K_0 \cap \mathcal{A}) \cup \{B_m : m \in (K_0 \cap \omega) \setminus (\bigcup\{B : B \in K_0 \cap \mathcal{A}\})\}$ 是有限的。将这个集族枚举为 $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_n\}$。对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义 $V_i = \{A_i\} \cup A_i$。于是，每个 V_i都是 X的一个开集，因此 $(V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$。注意$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$。因此， $\bigcap_{i=1}^n V_i^c \subseteq U$。最后，我们令 $F = (K_0 \cap \mathcal{A}) \cup [(K_0 \cap \omega) \setminus (\bigcup\{B : B \in K_0 \cap \mathcal{A}\})]$。于是， F是 X的一个有限集。此外，注意$F \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$且 $F \cap U = \emptyset$。因此， ζ是X的 $\pi_V(\mathbb{K}(X))$-网络。

情形 II： K_0 是有限的。
对于每个 $m \in K_0 \cap \omega$（如果 $K_0 \cap \omega \neq \emptyset$），取 $B_m \in \mathcal{A}$使得 $m \in B_m$。那么，集族 $\mathcal{B} =$（$K_0 \cap \mathcal{A}$）$\cup \{B_m :$ $m \in K_0 \cap \omega\}$ 是有限的。我们将这个集族枚举为 $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_n\}$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义 $V_i = \{A_i\} \cup A_i$。那么，每个 V_i都是 X的一个开集，因此，（$V_1, \ldots, V_n$）$\in \zeta$。注意，$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$。因此，$\bigcap_{i=1}^n V_i^c \subseteq U$。设 $F = K_0$。那么， F是 X 的一个有限集，使得 $F \cap V_i \neq \emptyset$（$1 \leq i \leq n$）且 $F \cap U = \emptyset$。因此， ζ 是 X的一个π_V（$\mathbb{K}$（X））-网络。

断言 2： ζ 不是 X的 π_V-网络。
设 $U = \omega$。那么， U是 X的一个开集，且满足 $U \neq X$。令（$V_1, \ldots, V_n$）为 ζ的任意一个元素，其中 $V_i = \{A_i\} \cup (A_i \setminus D_i)$（$1 \leq i \leq n$），对某些 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$,$D_1 \ldots, D_n \in [\omega]^{<\omega}$, $n \in \mathbb{N}$成立。于是， $\bigcap_{i=1}^n [\{A_i\} \cup (A_i \setminus D_i)]^c \not\subseteq U$。由于这一事实对 ζ的任意元素都成立，我们得出 ζ 不是 X的 π_V-网络。 □

从现在起，如果 J_n 是 $\Pi_V(\Delta)$中的一个元素，我们记：

$$J_n = \{(V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}.$$

另一种概念，也在[8], 中定义，它涉及一个族 Δ ，如下所示：

定义 2.3（[8]）。设（X, τ）是一个拓扑空间。若对 X的任意开子集 $V_1, \ldots, V_m$，都存在 $U \in \mathcal{U}$和 $F \in [X]^{<\omega}$，使得对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$, $\bigcap_{i=1}^m V_i^c \subseteq U$和 $F \cap U = \emptyset$，则称族 $\mathcal{U} \subseteq \Delta^c$为 X的一个 $c_V(\Delta)$-覆盖。空间 X 的所有 $c_V(\Delta)$-覆盖构成的族记作 $\mathbb{C}_V(\Delta)$。

接下来的两个引理将在本节后续结果的证明中发挥作用；这些引理的证明很容易得到，详情请参见 [8] 。第一个引理说明，空间 X 上的 $c_V(\Delta)$-覆盖可以视为 X 的某些超空间中的稠密子空间。

引理 2.4 ([8])。设 X 是一个拓扑空间，且 $\mathcal{U} \subseteq \Delta^c$。那么 $\mathcal{U}$ 是$c_V(\Delta)$-覆盖 X 当且仅当 $\mathcal{U}^c$ 是 $(\Delta, \mathbf{V})$的稠密子集。

下一个引理说明，如何将空间 X 的 $\pi_V(\Delta)$-网络解释为 X 的某些超空间的开覆盖。

引理 2.5 ([8]) 。设 X 是一个拓扑空间，且 $\zeta = \{(V_1, \ldots, V_n) : V_1, \ldots, V_n$ 是 X 的开子集，$n \in \omega\}$. 则 ζ 是 X 的 $\pi_V(\Delta)$-网络，当且仅当集族 $\mathcal{U} = \{\langle V_1, \ldots, V_n\rangle : (V_1, \ldots, V_n) \in \zeta\}$ 是 $(\Delta, \mathbf{V})$ 的一个开覆盖。

下面的选择原理将帮助我们刻画带有 Vietoris 拓扑的超空间上的选择性强星门格尔性质。

定义 2.6。设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{SV}_M(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$：对于每个序列 $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_V(\Delta)$ 和每个序列 $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}_V(\Delta)$，存在有限子集 $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n$：存在 $U_n \in \mathcal{V}_n$，使得$\bigcap_{i=1}^{m_s}(V^n_{i,s})^c \subseteq U_n, V^n_{i,s} \nsubseteq U_n (1 \leq i \leq m_s)\}$ 是 $\Pi_V(\Delta)$ 的一个元素。

定理 2.7. 给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) $(\Delta, \mathbf{V})$ 具有选择性强星-Menger性质；

(2) X 满足 $\mathrm{SV}_M(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：设 $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是由 X 的 $\pi_V(\Delta)$-网络构成的序列，并设 $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是由 X 的 $c_V(\Delta)$- 开覆盖构成的序列。根据引理 2.4，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，族 $\mathcal{D}_n = \mathcal{C}_n^c$ 是 $(\Delta, \mathbf{V})$ 的稠密子集。此外，对于每个 $n \in \omega$，若置 $J_n = \{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$，则根据引理 2.5，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，族 $\mathcal{U}_n = \{\langle V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\rangle : s \in S_n\}$ 是 $(\Delta, \mathbf{V})$ 的开覆盖。

现在，将 (1) 应用于序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和序列 $\{\mathcal{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$，可得有限集序列 $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{D}_n$ 以及集族 $\{St(\mathcal{A}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 都是 $(\Delta,\mathbf{V})$ 的一个开覆盖。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\mathcal{V}_n = \{A^c : A \in \mathcal{A}_n\}$。于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{V}_n$ 都是 $\mathcal{C}_n$的有限子集。

我们来证明，集族 $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{ V^n_{1\,s} \cdots V^n_{m_s\,s} \in J_n \ \exists U_n \in (\mathcal{V}_n \ \bigcap_{i=1}^{m_s} V^n_{i\,s}{}^c \subseteq U_n \ V^n_{i\,s} \nsubseteq U_n \ 1 \leq i \leq m_s\}$ 满足 $\pi_V(\Delta, \Delta, \Delta)$ 的集族是 X 的一个 (Δ, Δ, Δ)- 网络。

令 $U \in \Delta^c$。则 $U^c \in \Delta$，因此，存在 $n_0 \in \omega$，使得$U^c \in St(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$。于是，存在$\langle V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\rangle \in \mathcal{U}_{n_0}$以及 $A_{n_0} \in \mathcal{A}_{n_0}$，使得 $\{U^c, A_{n_0}\} \subseteq \langle V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\rangle$。令 $U_{n_0} = A^c_{n_0}$。则 $U_{n_0} \in \mathcal{V}_{n_0}$。由于 A_{n_0} 属于$\langle V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\rangle$，可知 $\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V^{n_0}_{i,s_0})^c \subseteq U_{n_0}$，$V^{n_0}_{i,s_0} \nsubseteq U_{n_0} (1 \leq i \leq m_{s_0})$；因此 $(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}) \in \mathcal{J}$。另一方面，利用 U^c也属于$\langle V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\rangle$这一事实，我们可以对每个 $i \in$取 $\{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $x_i \in U^c \cap V^{n_0}_{i,s_0}$。令 $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}\}$。因此，

$F \in [X]^{<\omega}$满足 $F \cap V_i^{n_0}{}_{,s_0} \neq \emptyset$ 以及 $F \cap U = \emptyset$。此外，由于 $U^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_{s_0}} V_i^{n_0}{}_{,s_0}$，因此我们得到 $\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}} (V_i^{n_0}{}_{,s_0})^c \subseteq U$。由此可得 $\mathcal{J} \in \Pi_V(\Delta)$。

(2) $\Rightarrow$ (1)：令 $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 (Δ, V) 的开覆盖序列，并令$\{\mathcal{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 (Δ, V) 的稠密子集序列。我们可以假设每个开覆盖 $\mathcal{U}_n$ 都由 $CL(X)$ 中的基本开子集组成。因此，对每个$n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{U}_n = \{\langle V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n\rangle : s \in S_n\}$，其中$V_i^n{}_{,s}$是 X 的开子集，对每个 $n \in \mathbb{N}$, $s \in S_n$ 和 $i \in \{1, \ldots, m_s\}$ 均成立。令 $J_n = \{(V_1^n{}_{,s}, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。由引理 2.5，注意到每个 J_n 都是 X 的一个 π_V(Δ)-网络。另一方面，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}_n = \mathcal{D}_n^c$。因此，由引理 2.4，每个 $\mathcal{C}_n$都是 X 的一个 c_V(Δ)-开覆盖。

我们将 (2) 应用于 π_V(Δ)-网络序列 $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ 以及 c_V(Δ)-开覆盖序列 $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$，得到一个序列 $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{C}_n]^{<\omega}$ $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{ V_1^n{}_s \cdots V_{m_s}^n{}_s \in$，均有，并且 J_n $U_n \in \mathcal{V}_n$ $\bigcap_{i=1}^{m_s} V_i^n{}_s{}^c \subseteq U_n$ $V_i^n{}_s \not\subseteq U_n$ $1 \leq i \leq$ 对于集合 (, , ,): 存在使得 (,) , , $(m_s)\}$ 是 π_V(Δ)-网络 X。对于每个 $n \in \omega$，我们定义 $\mathcal{A}_n = \mathcal{V}_n^c$。由此可得，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{A}_n \in [\mathcal{D}_n]^{<\omega}$。

我们来证明集合族 $\{St(\mathcal{A}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Δ, V) 的一个开覆盖。设 $A \in \Delta$。由于 $\mathcal{J}$是 X 的一个 π_V(Δ)-网络，且 $A^c \in \Delta^c$，因此存在 $(V_1^{n_0}{}_{,s_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}) \in \mathcal{J}$（对于某个 $n_0 \in \mathbb{N}$和某个 $s_0 \in S_{n_0}$），以及一个有限集$F \subseteq X$，使得对于每个 $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$，$F \cap V_i^{n_0}{}_{,s_0} \neq \emptyset$，$\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}} (V_i^{n_0}{}_{,s_0})^c \subseteq A^c$且 $F \cap A^c = \emptyset$。由于 $(V_1^{n_0}{}_{,s_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}) \in \mathcal{J}$，存在 $U_{n_0} \in \mathcal{V}_{n_0}$，使得$\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}} (V_i^{n_0}{}_{,s_0})^c \subseteq U_{n_0}$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$，$V_i^{n_0}{}_{,s_0} \not\subseteq U_{n_0}$。这意味着 $\{A, A_{n_0}\} \subseteq \langle V_1^{n_0}{}_{,s_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\rangle \in \mathcal{U}_{n_0}$，其中 $A_{n_0} = U_{n_0}^c$。由于 A_{n_0}是 $\mathcal{A}_{n_0}$的一个元素，我们得到 $A \in St(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$。这表明集合族$\{St(\mathcal{A}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Δ, V) 的一个开覆盖。 □

通过对我们的族 Δ 作出不同选择，我们得到以下特例。

推论 2.8. 设 X 是一个拓扑空间。则：

1. ($X(X)$, V) 是选择性强星-Menger性质，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_M(\Pi_V, \Pi_V)$; 2. ($\mathbb{K}(X)$, V) 是选择性强星-Menger性质，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_M(\Pi_V(\mathbb{K}(X))\ \Pi_V(\mathbb{K}(X)))$; 3. ($\mathbb{CS}(X)$, V) 是选择性强星 -Menger 性质，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_M(\Pi_V(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_V(\mathbb{CS}(X)))$; 4. ($\mathbb{F}(X)$, V) 是选择性强星-Menger性质，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_M(\Pi_V(\mathbb{F}(X))\ \Pi_V(\mathbb{F}(X)))$。

现在我们定义另一个选择原理，用以刻画带有 Vietoris 拓扑的超空间上的选择性强星罗斯伯格性质。

定义 2.9. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{SV}_R(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$: 对于每个序列 $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_V(\Delta)$ 和每个序列 $\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}_V(\Delta)$, 都存在一个序列 $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ with$C_n \in \mathcal{C}_n, n \in \mathbb{N}$, 使得 $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(V_1^n{}_{,s}, \ldots, V_{m_s,s}^n) \in J_n : \bigcap_{i=1}^{m_s} (V_i^n{}_{,s})^c \subseteq C_n, V_i^n{}_s \not\subseteq C_n \ \ 1 \leq i \leq m_s\}$ Π_V Δ ,( ) 是 ( ) 的一个元素。

定理 2.10。给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) (Δ, V) 是选择性强星 Rothberger；

(2) X 满足 $\mathrm{SV}_R(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：仿照定理 $\Rightarrow$ 2.7证明中 (1) 的第一部分，我们可以得到一个序列 $\{D_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，其中的点属于 $(\Delta,\ \mathbf{V})$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，$D_n\in\mathcal{D}_n$，集合族 $\{St(D_n,\ \mathcal{U}_n):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 $(\Delta,\ \mathbf{V})$ 的一个开覆盖。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$C_n=D_n^c$，我们令 $C_n\in\mathcal{C}_n$，对每个 $n\in\mathbb{N}$。

我们来证明，取序列 $\{C_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，集合族 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(V_1^{n,\ s},\ldots,V_{m_s}^{n,\ s})\in J_n:\bigcap_{i=1}^{m_s}(V_i^{n,\ s})^c\subseteq C_n,\ V_i^{n,\ s}\nsubseteq C_n(1\le i\le m_s)\}$ 是 X 的一个$\pi_V(\Delta)$-网络。

令 $U\in\Delta^c$。那么存在 $n_0\in\omega$，使得 $U^c\in St(D_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。因此，$U^c$，$D_{n_0}\in\langle V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0}\rangle$，其中某些$\langle V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0}\rangle\in\mathcal{U}_{n_0}$。由于 $C_{n_0}=D_{n_0}^c$ 且 $D_{n_0}\in\langle V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0}\rangle$，可得 $\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0,s_0})^c\subseteq C_{n_0}$ 且 $V_i^{n_0,s_0}\nsubseteq C_{n_0}(1\le i\le m_{s_0})$；因此 $(V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0})\in\mathcal{J}$。此外，利用 U^c 是$\langle V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0}\rangle$的一个元素，我们得到$\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0,s_0})^c\subseteq U$；并且，我们还可以定义 X 的一个有限子集 F，使得$F\cap V_i^{n_0,s_0}\neq\emptyset$ 且 $F\cap U=\emptyset$。由此可得 $\mathcal{J}\in\Pi_V(\Delta)$。

(2) $\Rightarrow$ (1)：与定理2.7证明中（2）$\Rightarrow$(1)的第一部分相同，我们得到一个序列 $\{C_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，$C_n\in\mathcal{C}_n$ $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{V_{1\,s}^n\ \cdots\ V_{m_s\,s}^n\in J_n\ \bigcap_{i=1}^{m_s}V_{i\,s}^{n\ c}\subseteq$，且集族（，$C_n\ V_{i\,s}^n\nsubseteq C_n\ \ 1\le i\le m_s\}$ $\pi_V\ \Delta$ X $D_n=C_n^c$ ，，）：（，），，（）是的一个（）-网络。对每个 $n\in\omega$，我们令。于是，我们有 $\{D_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 是（Δ，V）中的一个点序列，且对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $D_n\in\mathcal{D}_n$。

我们来证明集族 $\{St(D_n,\mathcal{U}_n):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是（Δ，V）的一个开覆盖。设 $A\in\Delta$。存在 $(V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0})\in\mathcal{J}$（其中 $n_0\in\mathbb{N}$ 和 $s_0\in S_{n_0}$ 分别为某个值），以及一个有限集 $F\subseteq X$，使得对每个 $i\in\{1,\ldots,m_{s_0}\}$,$F\cap V_i^{n_0,s_0}\neq\emptyset$，$\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0,s_0})^c\subseteq A^c$ 且 $F\cap A^c=\emptyset$。利用 $(V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0})$ 是 $\mathcal{J}$ 的一个元素这一事实，我们得到 $\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0,s_0})^c\subseteq C_{n_0}$，并且对每个 $i\in\{1,\ldots,m_{s_0}\}$，$V_i^{n_0,s_0}\nsubseteq C_{n_0}$。因此，$A,D_{n_0}$属于$\langle V_1^{n_0,s_0},\ldots,V_{m_{s_0}}^{n_0,s_0}\rangle$，后者是 $\mathcal{U}_{n_0}$ 的一个元素。换言之，$A\in St(D_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。这说明集族 $\{St(D_n,\mathcal{U}_n):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是（Δ，V）的一个开覆盖。

□

通过对族 Δ 作出不同选择，我们得到以下特例。

推论 2.11. 设 X 为一个拓扑空间。则：

1. $(CL(X),\mathrm{V})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_R(\Pi_V,\Pi_V)$; 2. $(\mathbb{K}(X),\mathrm{V})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_R(\Pi_V(\mathbb{K}(X))\ \Pi_V(\mathbb{K}(X)))$; 3. $(\mathbb{CS}(X),\mathrm{V})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_R(\Pi_V(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_V(\mathbb{CS}(X)))$;

4. ($\mathbb{F}(X)$,V) 是选择性强星 Rothberger 当且仅当 X 满足 $\mathrm{SV}_R(\Pi_V(\mathbb{F}(X))\ \Pi_V(\mathbb{F}(X)))$。

现在，我们来讨论门格尔和罗斯伯格情形下星选择原理的绝对版本。首先给出以下原理，它将使我们能够刻画具有 Vietoris 拓扑的不同超空间上的绝对强星 Menger 性质。

定义 2.12. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{AV}_M(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$：对于每个序列 $\{J_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\Pi_V(\Delta)$ 以及每个 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}_V(\Delta)$，都存在一个序列 $\{\mathcal{V}_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq[\mathcal{C}]^{<\omega}$，使得 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{V_{1\ s}^n\ldots V_{m_s\ s}^n\in J_n\quad V\in\mathcal{V}_n\quad\bigcap_{i=1}^{m_s}V_{i\ s}^{n\ c}\subseteq(,\ ,\ ,\ ):$ 存在使得 $(,),$ $V\ V_{i\ s}^n\nsubseteq V\ \ 1\le i\le m_s\}\quad\Pi_V\ \Delta$
$(\ )$ 是 $(\ )$ 的一个元素。

对定理 2.7 的证明稍作修改，就能轻易证明以下结果。

定理 2.13. 给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) (Δ,V) 是绝对强星 Menger；
(2) X 满足 $\mathrm{AV}_M(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$。

同样，取我们的族 Δ 的不同选择，可以得到前一定理的一些直接推论。

推论 2.14. 设 X 是一个拓扑空间。那么：

1. ($CL(X)$, V) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_M(\Pi_V,\Pi_V)$; 2. ($\mathbb{K}(X)$, V) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_M(\Pi_V(\mathbb{K}(X))\ \Pi_V(\mathbb{K}(X)))$; 3. ($\mathbb{CS}(X)$, V) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_M(\Pi_V(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_V(\mathbb{CS}(X)))$;
4. ($\mathbb{F}(X)$, V) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_M(\Pi_V(\mathbb{F}(X))\ \Pi_V(\mathbb{F}(X)))$.

下一个原理使我们能够刻画赋予 Vietoris 拓扑的超空间上的绝对强星罗斯伯格性质。

定义 2.15. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{AV}_R(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$：对于每个序列 $\{J_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\Pi_V(\Delta)$ 以及每个 $\mathcal{C}\in\mathbb{C}_V(\Delta)$，存在一个序列 $\{C_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(V_{1,\ s}^n,\ldots,V_{m_s,\ s}^n)\in J_n:\bigcap_{i=1}^{m_s}(V_{i,\ s}^n)^c\subseteq C_n,$ $V_{i,\ s}^n\nsubseteq C_n(1\le i\le m_s)\}$ 是 $\Pi_V(\Delta)$ 的一个元素。

沿用定理2.10证明中的相同思路，很容易证明以下结果。

定理 2.16. 给定一个拓扑空间 X，以下条件是等价的：

(1) $(\Delta,\mathbf{V})$ *is aSSR;*

(2) X 满足 $\mathrm{AV}_R(\Pi_V(\Delta)\ \Pi_V(\Delta))$ 。

通过对族 Δ 作出不同的选择，我们得到以下特殊情形。

推论 2.17. 设 X 是一个拓扑空间。那么：

1. $(CL(X), \mathrm{V})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_R(\Pi_V, \Pi_V)$; 2. $(\mathbb{K}(X), \mathrm{V})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_R(\Pi_V(\mathbb{K}(X))\ \Pi_V(\mathbb{K}(X)))$; 3. $(\mathbb{CS}(X), \mathrm{V})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_R(\Pi_V(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_V(\mathbb{CS}(X)))$; 4. $(\mathbb{F}(X), \mathrm{V})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AV}_R(\Pi_V(\mathbb{F}(X))\ \Pi_V(\mathbb{F}(X)))$.

3 超空间上 Fell 拓扑下的绝对版本和选择版本

本节将介绍一些其他技术原理，以帮助我们刻画上一节中讨论的某些变体在具有 Fell 拓扑的不同超空间上的情形。为此，我们将给出几个引理，它们将在本节定理的证明中经常用到；值得一提的是，这些引理与第2.4 和2.5 节中提到的引理2类似。

我们先回顾空间 X 的 $\pi_F(\Delta)$-网络的定义（见 [4]）。令 ξ 表示族

$$\xi = \{(K; V_1, \ldots, V_n) : K \text{ is a compact subset of } X,\ V_1, \ldots, V_n \text{ are}$$
$$\text{open subsets of } X \text{ with } V_i \cap K^c \neq \emptyset\ (1 \leq i \leq n)\ , n \in \mathbb{N}\}.$$

定义 3.1（[4]）。设 (X, τ) 是一个拓扑空间。若对每个 $U \in \Delta^c$，都存在一个 $(K; V_1, \ldots, V_n) \in \xi$ 和一个有限集 F，满足 $F \cap V_i \neq \emptyset\ (1 \leq i \leq n)$，且 $K \subset U$ 和 $F \cap U = \emptyset$，则称族 ξ 为 X 的 $\pi_F(\Delta)$-网络。X 的所有 $\pi_F(\Delta)$-网络构成的族记为 $\Pi_F(\Delta)$。

与定义 2.3类似，我们可以通过对 $k_F(\Delta)$-覆盖的概念作一些简单修改，来定义空间 X 的 k_F-覆盖概念，该概念在 [16] 中引入。

定义 3.2。设 (X, τ) 是一个拓扑空间。若对于 X 的任意紧子集 K 以及 X 的任意开子集 $V_1, \ldots, V_m$，都存在 $U \in \mathcal{U}$ 和 $F \in [X]^{<\omega}$，满足 $F \cap V_i \neq \emptyset\ (1 \leq i \leq m)$，且 $K \subseteq U$ 和 $F \cap U = \emptyset$，则称族 $\mathcal{U} \subseteq \Delta^c$ 为 X 的 $k_F(\Delta)$-覆盖。X 的所有 $k_F(\Delta)$-覆盖构成的族记为 $\mathbb{K}_F(\Delta)$。

下面的引理说明，空间 X 上的 $k_F(\Delta)$-覆盖可以视为具有 Fell 拓扑的 X 的某些超空间中的稠密子空间。

引理 3.3. 设 X 是一个拓扑空间，且 $\mathcal{U} \subseteq \Delta^c$。那么， $\mathcal{U}$ 是 X 的一个 $k_F(\Delta)$-覆盖，当且仅当 $\mathcal{U}^c$ 是 (Δ, F) 的稠密子集。

证明。 $[\rightarrow]$ 设 $(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+$ 是 (Δ, F) 中一个非空的基本开集。由于 V_1、……、V_n 是 X 的开子集， K 是 X 的紧子集，且 $\mathcal{U}$ 是一个$k_F(\Delta)$-覆盖，因此存在 $U \in \mathcal{U}$ 和 $F \in [X]^{<\omega}$，满足 $F \cap V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq m)$，使得 $K \subseteq U$ 且 $F \cap U = \emptyset$。令 $A = U^c \in \Delta$。于是，容易证明 A 属于 $\left[(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+\right] \cap \mathcal{U}^c$。因此， $\mathcal{U}^c$ 是 (Δ, F) 中的稠密集。

$[\leftarrow]$ 设 K 是 X 的一个紧子集，且 V_1、……、V_m 是 X 的开子集。利用这些集合定义 (Δ, F) 的基本开集 $(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+$，可得 $\left[(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+\right] \cap \mathcal{U}^c \neq \emptyset$。因此，我们取 $A \in \left[(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+\right] \cap \mathcal{U}^c$。利用这一事实，很容易定义 X 的一个有限子集，使得 $F \cap V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq m)$。此外，若定义 $U = A^c$，则可定义 $K \subseteq U$ 和 F，使得 $F \cap U = \emptyset$。因此， $\mathcal{U}$ 是 X 的一个 $k_F(\Delta)$-覆盖。

□

下一个引理说明，如何将空间 $\pi_F(\Delta)$-网络解释为考虑 Fell 拓扑时 X 的某些超空间的开覆盖。我们指出，以下引理中的两个方向都曾用于 X 中的一些定理证明；为便于读者查阅，我们明确陈述这一事实，并在此给出证明。

引理 3.4. 设 X是一个拓扑空间，且 $\xi = \{(K; V_1, \ldots, V_n) : K$是 X的一个紧子集， $V_1, \ldots, V_n$ 是 X 的开子集，满足 $V_i \cap K^c \neq \emptyset (1 \leq i \leq n), n \in \mathbb{N}\}$。那么，当且仅当集合族 $\mathcal{U} = \{(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+ : (K; V_1, \ldots, V_n) \in \xi\}$ 是 (Δ, F) 的开覆盖时， ξ 是 X 的一个 $\pi_F(\Delta)$-网络。

证明。 $[\rightarrow]$ 令 $B \in \Delta$。由于 ξ 是 X 的 π_F（Δ）网络，且 $B^c \in \Delta^c$，因此存在（K； V_1，…， V_n） $\in \xi$以及 X的一个有限子集 F，使得 $F \cap V_i \neq \emptyset$（$1 \leq i \leq n$），并且 $K \subseteq B^c$ 和 $F \cap B^c = \emptyset$。这些条件表明 $B \subseteq K^c$和 $F \subseteq B$。由于对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$都有 $F \cap V_i \neq \emptyset$，因此对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$都有$B \cap V_i \neq \emptyset$。由此可得 $B \in$ （$\bigcap_{i=1}^n V_i^-$） ∩ （K^c） $^+$，其中（$\bigcap_{i=1}^n V_i^-$） ∩ （K^c） $^+$是 $\mathcal{U}$的一个元素。因此，集族 $\mathcal{U}$是（Δ，F）的一个开覆盖。

$[\leftarrow]$令 $U \in \Delta^c$。由于 $U^c \in \Delta$，且集族 $\mathcal{U} = \{(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+ : (K; V_1, \ldots, V_n) \in \xi\}$ 是 (Δ, F) 的一个开覆盖，因此存在 $(\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+ \in \mathcal{U}$，使得 $U^c \in (\bigcap_{i=1}^n V_i^-) \cap (K^c)^+$。由此可得 $K \subseteq U$，并且对每个 $i \in \{1 \ldots, n\}$，都有 $U^c \cap V_i \neq \emptyset$。因此，对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们可以取 $x_i \in U^c \cap V_i$，并定义 $F = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$。于是， F是 X 的一个有限子集，且满足 $F \cap U = \emptyset$ 和 $F \cap V_i \neq \emptyset (1 \leq i \leq n)$。由于相应的元素 $(K; V_1, \ldots, V_n)$ 是 ξ 的一个元素，我们得出 ξ 是 X 的一个 $\pi_F(\Delta)$-网络。

□

以下选择原理将帮助我们刻画具有 Fell 拓扑的超空间上的选择性强星门格尔性质。

定义3.5. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{SF}_M(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$：对于每个序列 $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_F(\Delta)$ 和每个序列 $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}_F(\Delta)$，都存在有限子集 $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{K}_n, n \in \mathbb{N}$，使得

满足 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\ K_s^n\ V_{1\,s}^n\ \dots\ V_{m_s\,s}^n\ \in J_n \qquad W\in\mathcal{W}_n \qquad K_s^n($; , , $\subseteq W\ V_{i\,s}^n\not\subseteq W\ \ 1\le i\le m_s\ \}$ $\Pi_F\ \Delta$
,,) : 存在 , 使得 ,, ( ) 属于 ( )。

定理 3.6. 给定一个拓扑空间 X，以下条件等价:

(1) (Δ, F) 具有选择性强星-
Menger性质;
(2) X 满足 $\mathrm{SF}_M(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $\{J_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的一个 $\pi_F(\Delta)$-网络序列，且 $\{\mathcal{K}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 X的一个 $k_F(\Delta)$-开覆盖序列。对每个 $n\in\omega$，记 $J_n=\{(K_s^n; V_{1,s}^n,\dots,V_{m_s,s}^n):\ s\in S_n\}$。应用引理 3.4 可得，对每个 $n\in\omega$，集族 $\mathcal{U}_n=\{(\bigcap_{i=1}^{m_s}(V_i^n,_s)^-)\cap((K_s^n)^c)^+:\ s\in S_n\}$ 是 (Δ, F) 的一个开覆盖。此外，由引理 3.3 可知，对每个 $n\in\mathbb{N}$，集族 $\mathcal{D}_n=\mathcal{K}_n^c$ 是 (Δ, F) 的一个稠密子集。

因此，将 (1) 应用于序列 $\{\mathcal{U}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 和序列 $\{\mathcal{D}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，存在由有限集组成的序列 $\{\mathcal{F}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{D}_n$ 和集族 $\{St(\mathcal{F}_n,\mathcal{U}_n):\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 (Δ,F) 的一个开覆盖。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{W}_n=\{F^c:\ F\in\mathcal{F}_n\}$。于是，对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{K}_n$ 的有限子集。

我们来证明，集族 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(K_s^n;V_{1,s}^n,\dots,V_{m_s,s}^n)\in J_n:$ 存在 $W\in\mathcal{W}_n$，使得 $K_s^n\subseteq W,\ V_{i,s}^n\not\subseteq W(1\le i\le m_s)\}$ 是 X 的一个 $\pi_F(\Delta)$-网络。

设 $U\in\Delta^c$。则 $U^c\in\Delta$，因此存在 $n_0\in\omega$，使得$U^c\in St(\mathcal{F}_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。于是，存在 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-)\cap((K_{s_0}^{n_0})^c)^+\in\mathcal{U}_{n_0}$，使得$\big[(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-)\cap((K_{s_0}^{n_0})^c)^+\big]\bigcap\mathcal{F}_{n_0}\neq\emptyset$，且 $U^c\in(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-)\cap((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。我们固定 $F_0\in\big[(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-)\cap((K_{s_0}^{n_0})^c)^+\big]\bigcap\mathcal{F}_{n_0}$，并定义 $W_0=F_0^c$。于是$W_0\in\mathcal{W}_{n_0}$，并且注意到，$K_{s_0}^{n_0}\subseteq W_0$ 和 $V_i^{n_0},_{s_0}\not\subseteq W_0(1\le i\le m_{s_0})$ 是由 $F_0\in(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-)\cap((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$ 这一事实得到的。因此，相应的元素 $(K_{s_0}^{n_0};V_1^{n_0},_{s_0},\dots,V_{m_{s_0}}^{n_0},_{s_0})$ 属于 $\mathcal{J}$。此外，根据 $U^c\in\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-$ 这一事实，我们可以固定 $x_i\in U^c\cap V_i^{n_0},_{s_0}(i\in\{1,\dots,m_{s_0}\})$，并令 $M=\{x_i:\ i\in\{1,\dots,m_{s_0}\}\}$。因此，$M$ 是 X 的有限子集，满足$M\cap V_i^{n_0},_{s_0}\neq\emptyset(1\le i\le m_{s_0})$ 和 $M\cap U=\emptyset$。另一方面，$K_{s_0}^{n_0}\subseteq U$ 可由 $U^c\in((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$ 得出。由此可得 $\mathcal{J}\in\Pi_F(\Delta)$。

(2) $\Rightarrow$ (1): 令 $\{\mathcal{U}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 为 (Δ, F) 的开覆盖序列，并令 $\{\mathcal{D}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 为 (Δ, F) 的稠密子集序列。不失一般性，假设每个开覆盖 $\mathcal{U}_n$ 的元素都是 $CL(X)$ 中的基本开子集。因此，对每个 $n\in\mathbb{N}$，记 $\mathcal{U}_n=\{(\bigcap_{i=1}^{m_s}(V_i^n,_s)^-)\cap((K_s^n)^c)^+:\ s\in S_n\}$，其中每个 $V_i^n,_s$ 都是 X的开子集，而 K_s^n是 X的紧子集（对每个 $n\in\mathbb{N}$，$s\in S_n$和 $i\in\{1,\dots,m_s\}$均成立）。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $J_n=\{(K_s^n;V_1^n,_s,\dots,V_{m_s}^n,_s):\ s\in S_n\}$。于是，由引理 3.4 可知，每个 J_n 都是 X的 $\pi_F(\Delta)$-网络。此外，若对每个 $n\in\mathbb{N}$定义 $\mathcal{K}_n=\mathcal{D}_n^c$，则由引理 3.3 可知，每个 $\mathcal{K}_n$ 都是 X 的 $k_F(\Delta)$-开覆盖。

将 (2) 应用于 $\pi_F(\Delta)$-网络序列 $\{J_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 以及 $k_F(\Delta)$-覆盖序列 $\{\mathcal{K}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，我们得到一个序列 $\{\mathcal{W}_n:\ n\in\mathbb{N}\}$

其中 $\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{K}_n$ 的有限子集，对每个 $n \in \mathbb{N}$均如此，并且集合
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{ K_s^n\ V_{1\,s}^n\ \dots\ V_{m_s\,s}^n \in J_n \quad W \in \mathcal{W}_n \quad K_s^n \subseteq$ (; , ,„) : 存在这样的使得 , , ( ) $W\ V_{i\,s}^n \nsubseteq W\ \ 1 \le i \le m_s\ \}$ $\pi_F\ \Delta$ X
是 的 ( )-网络。对于每个$n \in \omega$，我们定义 $\mathcal{F}_n = \mathcal{W}_n^c$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $\mathcal{F}_n$ 都是 $\mathcal{D}_n$ 的有限子集。

下面证明集合 $\{St(\mathcal{F}_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Δ, F) 的一个开覆盖。令 $A \in \Delta$。利用 $\mathcal{J}$ 是 X 关于集合 $A^c \in \Delta^c$ 的 $\pi_F(\Delta)$-网络这一事实，可得 $\mathcal{J}$ 中的一个元素 ($K_{s_0}^{n_0}, V_1^{n_0},_{s_0}, \dots, V_{m_{s_0}}^{n_0},_{s_0}$)（其中某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 和某个 $s_0 \in S_{n_0}$），以及一个有限集 $F \subseteq X$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, m_{s_0}\}$， $F \cap V_i^{n_0}$、$_{s_0} \neq \emptyset$、 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq A^c$ 和 $F \cap A^c = \emptyset$ 都成立。由这些条件很容易推出， A 属于 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。另一方面，由于 $(K_{s_0}^{n_0}; V_1^{n_0},_{s_0}, \dots, V_{m_{s_0}}^{n_0},_{s_0}) \in \mathcal{J}$，存在 $W_0 \in \mathcal{W}_{n_0}$，使得 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq W_0$，且对每个 $i \in \{1, \dots, m_{s_0}\}$， $V_i^{n_0}$ 和 $_{s_0} \nsubseteq W_0$ 都成立。这些条件意味着元素 $F_0 = W_0^c$ 属于 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_i^{n_0},_{s_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。注意， $F_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$，且 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}($ $V_i^{n_0},_{s_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+ \in \mathcal{U}_{n_0}$。这意味着 $A \in St(\mathcal{F}_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。因此， $\{St(\mathcal{F}_n,\mathcal{U}_n) :$ $n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Δ, F) 的一个开覆盖。 □

作为前一定理的推论，我们可以刻画赋予 Fell 拓扑的不同超空间上的选择性强星-门格尔性质。

推论 3.7. 设 X 是一个拓扑空间。则：

1. $(CL(X)$, F) 是 selSSM，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_M(\Pi_F, \Pi_F)$；2. $(\mathbb{K}(X)$, F) 是 selSSM，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_M(\Pi_F(\mathbb{K}(X))\ \Pi_F(\mathbb{K}(X)))$；3. $(\mathbb{CS}(X)$, F) 是 selSSM，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_M(\Pi_F(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_F(\mathbb{CS}(X)))$；4. $(\mathbb{F}(X)$, F) 是 selSSM，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_M(\Pi_F(\mathbb{F}(X))\ \Pi_F(\mathbb{F}(X)))$。

对于罗斯伯格情形，我们定义以下选择原理，从而以相同方式得到 Fell 拓扑下超空间上选择性强星罗斯伯格性质的刻画。

定义 3.8。设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{SF}_R(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$：对于每个序列 $\{J_n : n \in \omega\} \subseteq \Pi_F(\Delta)$ 和每个序列 $\{\mathcal{K}_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{K}_F(\Delta)$，存在一个序列 $\{K_n : n \in \omega\}$，满足
$K_n \in \mathcal{K}_n\ \ n \in \omega$ $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{ K_s^n\ V_{1\,s}^n\ \dots\ V_{m_s\,s}^n \in J_n \quad K_s^n \subseteq$, 使得 (; , ,„) : „ ( ) 是 $K_n\ V_{i\,s}^n \nsubseteq K_n\ \ 1 \le i \le m_s\ \}$ $\Pi_F\ \Delta$
( ) 的一个元素。

定理 3.9。给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) (Δ, F) 是选择性强星
Rothberger；
(2) X 满足 $\mathrm{SF}_R(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：利用引理 3.3 和 3.4，以及定理 3.6 证明中 (1) $\Rightarrow$ (2) 第一部分的相同思路，我们可以得到 (Δ,F) 中点的一个序列 $\{D_n: n \in \mathbb{N}\}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$, $D_n \in \mathcal{D}_n$，集族$\{St(D_n,\mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$ 都是 (Δ,F) 的一个开覆盖。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义$K_n = D_n^c$。于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $K_n \in \mathcal{K}_n$。

考虑序列 $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$，我们来证明集合$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(K_s^n; V_{1,s}^n,\ldots,V_{m_s,s}^n) \in J_n: K_s^n \subseteq K_n, V_{i,s}^n \nsubseteq K_n (1 \le i \le m_s)\}$ 是 X的 π_F(Δ)-网络。

令 $U \in \Delta^c$。那么，对于元素 $U^c \in \Delta$，存在 $n_0 \in \omega$ 使得$U^c \in St(D_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。因此，存在 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+ \in \mathcal{U}_{n_0}$使得$U^c, D_{n_0} \in (\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。

由于 $K_{n_0} = D_{n_0}^c$和 $D_{n_0} \in (\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$，显然可得 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq K_{n_0}$和 $V_{i,s_0}^{n_0} \nsubseteq K_{n_0}(1 \le i \le m_{s_0})$。这意味着相应的 $(K_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0})$ 是 $\mathcal{J}$的一个元素。此外，由于 U^c属于 $(\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$，我们得到 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq U$，并且还可以定义 X的一个有限子集 F，使得 $F \cap V_{i,s_0}^{n_0} \neq \emptyset$和 $F \cap U = \emptyset$。由此可得 $\mathcal{J} \in \Pi_F(\Delta)$。

(2) $\Rightarrow$(1)：按照与定理 3.6证明中（2） $\Rightarrow$ (1)的第一部分相同的论证，并使用引理 3.3 和3.4，我们得到一个序列 $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$、$K_n \in \mathcal{K}_n$，以及集族$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(K_s^n; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) \in J_n: K_s^n \subseteq K_n、 V_{i,s}^n \nsubseteq K_n (1 \le i \le m_s)\}$ 是π_F(Δ)-网络 X。我们对每个 $n \in \mathbb{N}$定义 $D_n = K_n^c$。于是，$\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$是 (Δ, F) 中的点序列，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $D_n \in \mathcal{D}_n$。

我们断言，集族 $\{St(D_n,\mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$ 是 (Δ, F) 的一个开覆盖。事实上，设 $A \in \Delta$。由于 $\mathcal{J}$是 X 的一个 π_F(Δ)-网络，存在 $(K_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}) \in \mathcal{J}$（对于某个 $n_0 \in \mathbb{N}$和某个 $s_0 \in S_{n_0}$）以及一个有限集 $F \subseteq X$，使得 $F \cap V_{i,s_0}^{n_0} \neq \emptyset (1 \le i \le m_{s_0})$、 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq A^c$和 $F \cap A^c = \emptyset$。事实 $(K_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}) \in \mathcal{J}$意味着 $K_{s_0}^{n_0} \subseteq K_{n_0}$以及 $V_{i,s_0}^{n_0} \nsubseteq K_{n_0}(1 \le i \le m_{s_0})$，因此， $D_{n_0} \in (\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。此外，条件 $F \cap V_{i,s_0}^{n_0} \neq \emptyset (1 \le i \le m_{s_0})$、$K_{s_0}^{n_0} \subseteq A^c$和 $F \cap A^c = \emptyset$ 意味着 $A \in (\bigcap_{i=1}^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^{n_0})^-) \cap ((K_{s_0}^{n_0})^c)^+$。因此， $A \in St(D_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$。总之，$\{St(D_n,\mathcal{U}_n): n \in \mathbb{N}\}$是 (Δ, F) 的一个开覆盖。 □

现在，我们可以刻画若干赋予 Fell 拓扑的超空间上的选择性强星 Rothberger 性质。

推论 3.10. 设 X 是一个拓扑空间。则：

1. $(CL(X), \mathrm{F})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_R(\Pi_F, \Pi_F)$；2. $(\mathbb{K}(X), \mathrm{F})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_R(\Pi_F(\mathbb{K}(X)) \Pi_F(\mathbb{K}(X)))$；3. $(\mathbb{CS}(X), \mathrm{F})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_R(\Pi_F(\mathbb{CS}(X)) \Pi_F(\mathbb{CS}(X)))$；4. $(\mathbb{F}(X), \mathrm{F})$ 是选择性强星 Rothberger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{SF}_R(\Pi_F(\mathbb{F}(X)) \Pi_F(\mathbb{F}(X)))$。

现在，我们利用 Fell 拓扑刻画门格尔型和罗斯伯格式星选择原理的绝对版本。以下原理使我们能够刻画若干带有 Fell 拓扑的超空间上的绝对强星 Menger 性质。

定义 3.11. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{AF}_M(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$: 对每个序列 $\{J_n\colon n\in\omega\}\subseteq\Pi_F(\Delta)$ 以及每个$\mathcal{K}\in\mathbb{K}_F(\Delta)$，存在一个序列 $\{\mathcal{W}_n\colon n\in\omega\}\subseteq[\mathcal{K}]^{<\omega}$，使得 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(K_s^n;V_1^n,\ldots,V_{m_s}^n)\in\Pi_F(\Delta)$: 存在 $W\in\mathcal{W}_n$，使得 $K_s^n\subseteq W, V_i^n$, ( ) 是 ( ) 的一个元素。

对定理 3.6 的证明稍作调整，便可轻易得到以下结果。

定理 3.12. 给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) (Δ, F) 是绝对强星 Menger；

(2) X 满足 $\mathrm{AF}_M(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$。

通过对族 Δ 进行不同选择，我们得到以下特例。

推论 3.13. 设 X 是一个拓扑空间。那么：

1. $(CL(X)$, F) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_M(\Pi_F,\Pi_F)$；2. $(\mathbb{K}(X)$, F) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_M(\Pi_F(\mathbb{K}(X))\ \Pi_F(\mathbb{K}(X)))$；3. ($\mathbb{CS}(X)$, F) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_M(\Pi_F(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_F(\mathbb{CS}(X)))$；

4. $(\mathbb{F}(X)$, F) 是绝对强星 Menger，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_M(\Pi_F(\mathbb{F}(X))\ \Pi_F(\mathbb{F}(X)))$。

以下原理将给出考虑 Fell 拓扑的超空间上绝对强星罗斯伯格性质的刻画。

定义 3.14. 设 X 是一个拓扑空间。我们定义：

$\mathrm{AF}_R(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$: 对于每个序列 $\{J_n\colon n\in\mathbb{N}\}\subseteq\Pi_F(\Delta)$ 以及每个 $\mathcal{K}\in\mathbb{K}_F(\Delta)$，存在一个序列 $\{K_n\colon n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{K}$，使得 $\mathcal{J}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(K_s^n;V_1^n,\ldots,V_{m_s}^n)\in\Pi_F(\Delta)$,): , , ( ) 是 ( ) 的一个元素。

类似于定理 3.9的证明，可以证明以下结果。

定理 3.15. 给定一个拓扑空间 X，以下条件等价：

(1) (Δ, F) 是 aSSR；

(2) X 满足 $\mathrm{AF}_R(\Pi_F(\Delta)\ \Pi_F(\Delta))$。

通过选择不同的族 Δ，可得到以下特殊情形。

推论 3.16. 设 X 为一个拓扑空间。则:

1. $(CL(X), \mathrm{F})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_R(\Pi_F, \Pi_F)$；2. $(\mathbb{K}(X), \mathrm{F})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_R(\Pi_F(\mathbb{K}(X))\ \Pi_F(\mathbb{K}(X)))$；3. $(\mathbb{CS}(X), \mathrm{F})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_R(\Pi_F(\mathbb{CS}(X))\ \Pi_F(\mathbb{CS}(X)))$；4. $(\mathbb{F}(X), \mathrm{F})$ 是 aSSR，当且仅当 X 满足 $\mathrm{AF}_R(\Pi_F(\mathbb{F}(X))\ \Pi_F(\mathbb{F}(X)))$。

结语。 值得指出的是，只需对第 2 节和 3 节中的定义稍作修改，就可以轻松得到同时涉及 Vietoris 拓扑和 Fell 拓扑的命中与错失推广（类似于 [6] 和 [7]中的做法）。不过，为方便读者，作者决定根据所考虑的拓扑，采用更简单的记号来陈述结果。

参考文献

[1]M. Bonanzinga、F. Cammaroto、Lj.D.R. Koˇcinac、M.V. Matveev，《门格尔性质、罗斯伯格性质和 Hurewicz 性质的较弱形式》，Math. Vesnik 61 (2009) 13-23。[2] J. Casas-de la Rosa、S. A. Garcia-Balan，《小空间上的星选择原理的变体》，Filomat (2022)，36:14，4903-4917。[3] J. Casas-de la Rosa、I. Mart´ınez-Ruiz、A. Ram´ırez-P´aramo，《超空间上的门格尔性质的星版本》，Houston J. Math.，待发表。[4] J. Casas-de la Rosa、I. Mart´ınez-Ruiz、A. Ram´ırez-P´aramo，《超空间上的罗斯伯格性质的星版本》，Topol. Appl. 283 (2020)，文章编号 107396，12 页。[5] A. Caserta、G. Di Maio、Lj.D.R. Koˇcinac，《性质 (a) 和 (pp) 的版本》，Topology Appl. 158 (2011) 1360–1368。[6] R. Cruz-Castillo、A. Ram´ırez-P´aramo、J.F. Tenorio，《命中与错失拓扑中的门格尔型和门格尔型星选择原理》，Topol. Appl. 290 (2021)，文章编号 107574，12 页。[7] R. Cruz-Castillo、A. Ram´ırez-P´aramo、J.F. Tenorio，《命中与错失拓扑中的罗斯伯格原理和门格尔原理的星型及强星型版本》，Topol. Appl. 300 (2021)，文章编号 107758，11 页。[8]J. D´ıaz-Reyes、A. Ram´ırez-P´aramo、J.F. Tenorio，《超空间上的罗斯伯格原理和罗斯伯格型星选择原理》，Topol. Appl. 287 (2021)，文章编号 107448，9 页。[9] G. Di Maio、Lj.D.R. Koˇcinac、E. Meccariello，《选择原理与超空间拓扑》，Topol. Appl. 153 (2005) 912-923。

[10]G. Di Maio、Lj.D.R. Koˇcinac, 《超空间的某些覆盖性质》, Topol. Appl. 155 (2008) 1959-1969。[11] F. Hern´andez-Hern´andez、M. Hruˇs´ak, 《Mr´owka-Isbell 空间的拓扑》。载于《伪紧拓扑空间》, 编者: Hruˇs´ak、Tamariz、Tkachenko。施普林格国际出版股份公司, 2018。[12] Lj.D.R. Koˇcinac, 《星选择原理理论》, 《Axioms》, (2023) 12, 93。[13] Lj.D.R. Koˇcinac, 《星门格尔空间及相关空间》, 《Debrecen 数学出版物》55 (1999) 421-431。[14] Lj.D.R. Koˇcinac, 《星选择原理: 综述》, 《海亚姆数学杂志》1 (2015) 第 1 期, 82-106。[15] Lj.D.R. Koˇcinac, 《超空间中的 Reznichenko 性质和 Pytkeev 性质》, 《匈牙利数学学报》107, 3 (2005), 231–239。[16] Z. Li, 《Fell 拓扑和 Vietoris 拓扑的选择原理》, Topol. Appl. 212 (2016) 90-104。[17] M. Scheepers, 《开覆盖组合学 I: Ramsey 理论》, Topol. Appl. 69 (1996) 31-62。

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad deMéxico, México.

电子邮件地址: J. Casas-de la Rosa: olimpico.25@hotmail.com