具有容量限制地点和不完全检测的捉迷藏博弈

Basti´an Bahamondes, MathieuDahan佐治亚理工学院工业与系统工程学院，亚特兰大，佐治亚州 30332，{bbahamondes3@gatech.edu, mathieu.dahan@isye.gatech.edu}

arXiv:2301.11541v1 [cs.GT] 27 Jan 2023

我们研究一种捉迷藏博弈的变体：搜寻者检查多个藏匿地点，以寻找隐藏者藏匿的多件物品。每个藏匿地点都有最大藏匿容量，并且搜寻者进行检查时，该地点隐藏物品被检测到的概率也各不相同。搜寻者（隐藏者）的目标是使未检测到的物品期望数量最小化（最大化）。这一模型源于策略性检查问题：安全机构需要协调多项检查资源，以检测并查获犯罪组织藏匿的非法商品。为求解这一大规模零和博弈，我们利用其结构，证明其混合策略纳什均衡可通过一维边际分布来刻画，而这些边际分布是一个低维连续零和博弈的纳什均衡。由此，我们提出一种高效求解该捉迷藏博弈的两步法：首先，解析求解连续博弈并计算均衡边际分布；其次，设计一种组合算法，协调参与者的资源，并计算满足这些边际分布的均衡混合策略。我们证明，这种求解方法可在二次时间内计算出该捉迷藏博弈的纳什均衡，且其支撑集大小为线性。我们的分析揭示了博弈参数之间复杂的相互作用，并使我们能够评估这些参数对均衡状态下参与者行为以及各地点关键性的影响。

Key words：捉迷藏；资源协调；不完全检测；大规模博弈

1. 引言

本文研究一种捉迷藏博弈变体，其中两名参与者——隐藏者和搜寻者——在异质地点之间协调多种资源。具体而言，隐藏者决定在容量受限地点中如何分配多件物品。与此同时，搜寻者检查数量有限的地点，以检测隐藏物品。然而，检测并非完全：搜寻者检查某个地点时，能否发现其中的物品取决于该地点特有的概率，这一概率反映了削弱搜寻者检测能力的局部效应。搜寻者（隐藏者）旨在选择一种（可能是随机化的）策略，以最小化（最大化）未被检测到的物品预期数量。本研究旨在高效求解这一大规模同时零和博弈，即计算混合策略纳什均衡（NE），并深入了解参与者的均衡行为。

我们的模型受到安全应用的启发，例如，安全机构希望派遣多个单位检查犯罪组织用于储存

毒品或武器等非法商品（Hochbaum 和 Fishbain，2011）。在此类情形下，安全机构旨在安排其单位的巡逻行动，以发现并查获非法商品（Hess 等，2013）。我们模型的另一个启发性应用涉及公用事业公司协调多个不完美传感器，对其服务网络进行检查，以防范能够针对网络多个组件发起攻击的恶意网络物理攻击者（Pirani 等，2021）。另一个值得关注的应用是审计选举结果（Blocki 等，2015，Behnezhad 等，2018）。在此类问题中，审计员会将数量有限的选举官员分配到多个投票站，以便通过重新计票发现选举舞弊。舞弊者可能是一个恶意组织，其意图是协调成员篡改选票，从而操纵选举结果。

以往躲藏与搜寻博弈文献中的相关研究，尚未同时考量双方拥有多种资源、异质藏匿容量以及不完全检测（Gal 和 Casas 2014、Dziubi´nski 和 Roy 2018）。这可能会降低研究结果的适用性，尤其是在安全场景中。然而，同时考量这些特征也带来了新的挑战：一方面，由于资源种类繁多，双方的行动集合都具有组合性，因此无法使用线性规划技术或近似算法以计算方式求解该博弈（Freund 和 Schapire 1999，Lipton 等人 2003、Hellerstein 等人 2019）。另一方面，博弈各项特征之间复杂的相互作用，使得以往研究中的解析解不再适用。因此，我们聚焦于以下研究问题：(i) 如何协调多种不完全检测的检查资源，以最优地检测多个隐藏物品？(ii) 检测方式、地点和参与者特征如何共同影响最优检查策略与隐藏策略？

1.1. 贡献

本文将捉迷藏博弈建模为一个同时零和博弈 Γ ，并通过考虑双方如何在具有异质藏匿容量和检测概率的地点协调多种资源，扩展了文献中的既有模型。随后，我们利用该博弈的结构，推导出 Γ 的纳什均衡 Γ 的均衡性质。具体而言，我们证明，当且仅当相应的边际检查概率以及各地点隐藏物品的期望数量构成一个低维连续~博弈 Γ 的纳什均衡（命题1）时，策略组合才是 Γ 的纳什均衡。基于这一等价关系，我们推导出一种求解捉迷藏博弈 Γ的两步法。

~首先，我们对连续博弈进行解析求解 Γ （定理1）。我们发现，纳什均衡通常可分为三种主要的情形模式，这些模式由复杂的参数决定，反映了参与者的玩家资源与地点异质性之间的相互作用。据我们所

知，我们模型的特征带来了此前文献中未曾观察到的新纳什均衡情形。事实上，我们证明，我们的解析解几乎必然刻画了 $\tilde{\Gamma}$ 的所有纯策略纳什均衡 Γ （命题2）。

$\tilde{\Gamma}$ 通过求解 Γ，我们可以得到 Γ 在均衡状态下各地点的边际检查概率和隐藏物品的期望数量。因此，第二步是计算 Γ 的混合策略剖面，使其与这些一维边际分布一致。为此，我们扩展 Dziubi´nski 和 Roy (2018年) 的算法，以便协调多种资源的分配（算法 1）。我们证明，该算法的运行时间为二次时间，并能返回具有线性支撑集的均衡检查策略和隐藏策略（定理 2 和推论 1）。

因此，我们的方法能够高效求解捉迷藏博弈 Γ。通过提供具有线性支撑集的混合检查策略，我们的解可以轻松地通过随机化检查排程在实践中实施，并可按日常计划执行。此外，我们对连续博弈 Γ 的解析 $\tilde{\Gamma}$ 解揭示了博弈参数之间复杂的相互作用，并阐明这些参数对参与者均衡行为以及各地点关键性的影响。安全机构可以利用这些见解来指导检查决策。

1.2. 相关研究

捉迷藏博弈是一种双人零和博弈，由冯·诺依曼 （1953年）提出。在最初的版本中，隐藏者和搜寻者在一个由非负元素组成的方阵上进行博弈：隐藏者选择一个元素 a_{ij}，搜寻者则同时选择矩阵的一行或一列。如果搜寻者所选的行或列包含隐藏者选定的元素，那么隐藏者就向搜寻者支付 a_{ij}；否则，搜寻者向隐藏者支付 a_{ij}。这种博弈被用作策略错配的一般模型加以研究（Crawford and Iriberri 2007），其均衡策略也已广为人知（冯·诺依曼 1953、Flood 1972、Karlin and Peres 2016）。它也属于更广泛的搜索博弈范畴，在这类博弈中，搜索者关注的是如何在搜索空间中以最优方式寻找隐藏的对手；例如可参见Lidbetter（2013年）、Lidbetter andLin （2019年）、Clarkson等人 （2022年），以及Alpern and Gal （2006）和Hohzaki （2016）。

然而，在实际应用中，搜寻者可能能够同时检查多个地点，而隐藏者也可能能够在整个搜索空间中隐藏多个物品。此外，局部条件可能会影响搜寻者的检查资源，削弱其检测能力。因此，为了更有效地利用资源，双方玩家都可能需要在不同地点之间高效协调资源分配，而原始模型并未解决这一问题。

这类问题的一个实际应用出现在网络检测中的战略传感器布置问题中（Milo˘sevi´c 等人，2019年、Pirani 等，2021、Dahan 等，2022以及Bahamondes 和 Dahan

2022年），在这类问题中，网络防御者会在给定地点的一个子集中布置传感器，以检测策略性攻击者发起的攻击；该攻击者可以针对多个网络组件。此类模型通常会考虑传感器的检测范围：在某个地点布置传感器后，防御者便可监测一部分网络组件（称为监测集），并有可能检测到其中发生的攻击。因此，攻击可能从多个地点被检测到；这种重叠特性使得此类博弈难以求解。Dahan 等人（2022年）研究了该模型在完全检测假设下的双人零和博弈版本，并通过最小集合覆盖和最大集合打包推导出近似纳什均衡策略。Milo˘sevi´c 等人（2019年）和Bahamondes 和 Dahan（2022年）分别通过考虑网络组件的临界值和不完全检测，研究了该模型的变体。他们提出了启发式方法，用于在单一攻击资源的情况下计算高质量解。Pirani 等，（2021年）构建了一种博弈模型：传感器布置在网络化控制系统的节点上，用于检测针对这些节点的攻击；他们还通过线性滤波器处理传感器的测量值来检测攻击，从而考虑不完全检测。作者运用结构化系统和图论工具推导出均衡结果。最后，另一个不同但相关、具有特定地点不完全检测特性的模型，是 Washburn 和 Wood（1995年）提出的网络阻断问题：阻断者在有向图的一条弧上设置一个检查点，旨在阻止试图沿路径穿行于两个节点之间的逃避者。作者证明，可以利用网络流技术在多项式时间内计算纳什均衡策略。

事实上，我们的捉迷藏博弈可用于建模一类监测集彼此不相交的策略性传感器布置问题实例。对于这类实例，我们的结果可直接应用，并推广了（Washburn 和 Wood 1995年、Dahan 等人 2022年、Bahamondes 和 Dahan 2022年）中的均衡刻画。监测集不相交的实例常见于需要减少传感器干扰或网络能耗的情形（Cardei 和 Du 2005年、Wang 和 Shao 2014年）。在安全博弈等其他情境中，监测集天然满足互不相交这一条件（Powell 2009年、Behnezhad 等人 2018年、Musegaas 等人 2022年）。

在文献此前研究过的各种捉迷藏博弈变体中，我们的博弈与 Dziubi´nski 和 Roy (2018年) 以及 Gal 和 Casas (2014年) 提出的博弈最为接近。Dziubi´nski 和 Roy (2018年) 研究了一种双方都拥有多种资源的博弈版本，参与者在一组单位容量地点上互动，每个地点都对应一个非负值。隐藏者（分别地，搜寻者）同时选择一组地点来藏匿物品（分别地，进行检查）。选择完成后，搜寻者向隐藏者支付每个未检查地点

其中藏有物品。相比之下，我们的模型假设所有地点的价值相同，但纳入了异质藏匿容量和成功检查概率。

Gal 和 Casas (2014年) 提出了一种描述猎物与捕食者互动的追逃模型。猎物选择一个地点躲避捕食者，而捕食者能够检查多个地点。不过，即使捕食者前往猎物藏身的地点，捕获也并非必然发生，而是以一定概率发生。捕食者（相应地，猎物）力求最大化（相应地，最小化）捕获概率。我们的研究扩展了这一模型，允许多个猎物协同躲藏在容量各异的地点。尽管动物行为并非本研究的讨论范围，但我们的模型扩展涉及安全领域中类似的情形：安全机构可以派遣多个检查单位，检查犯罪组织用于存放多种非法商品的异质地点。

在这两种博弈中，与我们的博弈一样，玩家的混合策略是定义在满足容量约束和资源预算的资源分配集合上的概率分布。因此，当玩家能够使用多种资源时，其策略空间会呈指数级增长。处理这一维度问题的一种方法，是在低维空间中刻画玩家策略。在 Dziubi´nski 和 Roy (2018年) 和 Gal 和 Casas (2014年) 中，博弈的结构使得纳什均衡可以通过以下边际概率来刻画：对于搜寻者，检查每个地点的边际概率；对于隐藏者，将一件物品藏在每个地点的边际概率。随后，为了计算混合策略纳什均衡，需要构造与这些边际概率相容的、定义在可行资源分配上的概率分布。

这种两步法先用边际分布刻画均衡策略，再计算与之相容的混合策略。文献中已有相关研究，例如，Korzhyk 等人（2010）和 Letchford 与 Conitzer（2013）用它来计算安全博弈中的斯塔克尔伯格均衡；Chan 等人（2016）用它来计算多线性博弈中的近似纳什均衡；Ahmadinejad 等人（2019）则用它来计算零和双线性博弈中的纳什均衡，并将其应用于布洛托上校博弈（Borel 1921年）。在上述所有情形中，均衡边际分布均通过线性规划计算，而根据边际分布计算混合策略，则采用两种方法之一：高效实现 Birkhoff-von Neumann 定理及其推广（Budish 等人，2013年），或采用更通用的 Gr¨otschel、Lov´asz 和 Schrijver 算法（Gr¨otschel 等人（2012年），定理6.5.11），该算法使用线性规划技术实现 Carath´eodory 定理。在其他领域中，人们也研究了如何高效实现 Carath´eodory 定理，例如机制设计（Cai 等人，2012年；Hoeksma 和 Uetz，2013年）、调度（Hoeksma 等人，2016年）和排名系统（Kletti 等人，2022a,b）。

我们对两步法的实现与Dziubi´nski 和 Roy(2018) 的实现密切相关。不同于上述文献，我们推导出均衡边际分布的解析表达式，这使我们能够全面理解博弈参数之间的相互作用，并深入分析这些参数对玩家均衡行为的影响。Dziubi´nski 和 Roy (2018) 提出了一种组合算法，可在关于地点数量的二次时间内构造支撑集大小为线性的混合策略。该算法通过迭代，将一个表示在每个地点分配一份资源的边际概率的给定向量分解为若干整数资源分配的凸组合，且这些资源分配的数量为线性级别；可以将其视为对 Gr¨otschel、Lov´asz 和 Schrijver 算法的一种定制化且更高效的实现。我们的算法将这种分解推广到更一般的情形：边际分布表示在受容量限制的地点分配的资源期望数量，并且资源预算无需全部用尽，这与 Dziubi´nski 和 Roy 的设定不同。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们对捉迷藏博弈进行建模。随后，我们在第 3 节中利用一个低维连续博弈刻画并以参数化方式分析其纳什均衡，并对其进行解析求解。在第 4 节中，我们推导出一种组合算法，用于协调玩家资源并计算捉迷藏博弈的纳什均衡。随后，我们在第 5 节中给出一些总结性评论。最后，本文结果的证明列于电子补充材料中。

2. 问题描述

我们考虑一个捉迷藏博弈：一名搜寻者要在由一组 n 藏匿地点 $[\![1,n]\!] := \{1,\dots,n\}$ 组成的搜索空间中，寻找隐藏者藏匿的多个同质物品。这些地点具有容量限制；也就是说，隐藏者在每个地点 i 最多可藏匿 $c_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 个物品。我们令 $m := \sum_{i=1}^{n} c_i$ 表示总藏匿容量。此外，搜寻者在不同地点的检测能力并不完美。具体而言，搜寻者检查地点 i 时，以概率 $p_i \in (0,1]$ 有效地找到该地点的隐藏物品（如果有）；因此，检查失败、未能检测到隐藏物品的概率为 $1-p_i$）。我们假设不同地点的检查失败彼此独立。我们将 p_i 称为地点 i 的探测率。

我们假设隐藏者和搜寻者都是策略性的，因此采用博弈论框架来研究他们的行为。我们定义一个双人同时策略零和博弈$\Gamma := \langle \{\mathrm{S},\mathrm{H}\}, (\Delta_{\mathrm{S}},\Delta_{\mathrm{H}}), (-U,U)\rangle$，其中 S 为搜寻者，H 为隐藏者。S 最多可以选择检查 $r_{\mathrm{S}} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 个藏匿地点。与此同时，H 最多可以选择藏匿 $r_{\mathrm{H}} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 件物品。为对

参与者的行动集合进行建模，我们将给定容量向量 $b \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ 和资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 时的可行资源分配通用集合定义如下：

$$\mathcal{A}(b,r) := \{z \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq z_i \leq b_i,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \text{and}\ \sum_{i=1}^{n} z_i \leq r\}. \tag{1}$$

集合 $\mathcal{A}(b,r)$ 包含 $\mathbb{Z}^n$ 中所有向量，这些向量表示在地点 $i \in [\![1,n]\!]$ 分配至多 r 个资源的方案，并遵循由 b_i 给定的容量。于是，S 和 H 的纯策略集合分别为 $\mathcal{A}_{\mathrm{S}} := \mathcal{A}(\mathbf{1}_n, r_{\mathrm{S}})$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{H}} := \mathcal{A}(c, r_{\mathrm{H}})$，其中 $\mathbf{1}_n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的全 1 向量，$c = (c_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ 是藏匿容量向量。因此，对于每个 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$ 和 $i \in [\![1, n]\!]$，$x_i = 1$，若 S 检查地点 i，则取值为 $x_i = 0$，否则取值为 $x_i = 0$；对于每个 $y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 和 $i \in [\![1, n]\!]$，y_i，表示 H 在地点 i 藏匿的物品数量。

我们认为参与者关心的量是未被发现物品的平均数量。因此，我们将参与者的收益函数定义如下：

$$\forall (x,y) \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}} \times \mathcal{A}_{\mathrm{H}},\ u(x,y) := \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i x_i) y_i. \tag{2}$$

对于每个 $i \in [\![1,\ n]\!]$，$1 - p_i x_i$ 表示在纯检查行动 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$ 下，地点 i 中的物品未被发现的概率。

在此类组合安全场景中，参与者可通过随机化行动显著获益（Washburn 和 Wood 1995年，Pita 等人 2008年，Zhu 和 Basar 2015年，Gupta 等人 2016年，Hota 等人 2016年，Bertsimas 等人 2016年，Miao 等人 2018年）。因此，我们允许参与者使用混合策略，即在各自纯行动集合上的概率分布。泛型可行资源分配集合 $\mathcal{A}(b,r)$ 上的概率分布集合定义为 $\Delta(b,r) := \left\{\sigma \in [0,1]^{\mathcal{A}(b,r)} : \sum_{z \in \mathcal{A}(b,r)} \sigma_z = 1\right\}$。于是，S 和 H 的混合策略集合分别为 $\Delta_{\mathrm{S}} := \Delta(\mathbf{1}_n, r_{\mathrm{S}})$ 和 $\Delta_{\mathrm{H}} := \Delta(c, r_{\mathrm{H}})$。对于每个混合策略 $\sigma^{\mathrm{S}} \in \Delta_{\mathrm{S}}$（分别为 $\sigma^{\mathrm{H}} \in \Delta_{\mathrm{H}}$）和每个 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$（分别为 $y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$），$\sigma^{\mathrm{S}}_x$（分别为 σ^{H}_y）表示行动 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$（分别为 $y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$）由 S（分别由 H）执行的概率。

给定策略组合 $(\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$，期望收益定义为 $U(\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}}) := \mathbb{E}_{(x,y) \sim (\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}})}[u(x,y)] = \sum_{x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}} \sum_{y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}} \sigma^{\mathrm{S}}_x \sigma^{\mathrm{H}}_y u(x,y)$。我们假设 S（分别地，H）旨在最小化（分别地，最大化）U。为便于表述，我们用 $U(x, \sigma^{\mathrm{H}})$（分别用 $U(\sigma^{\mathrm{S}}, y)$）表示存在某个 $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$（分别存在某个 $y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$）使得 $\sigma^{\mathrm{S}}_x = 1$（分别使得 $\sigma^{\mathrm{H}}_y = 1$）的情形。

我们的博弈 Γ 适用于这样的情形：城市警察局需要检查犯罪组织用来存放非法商品（例如毒品、武器）的仓库。在这种情形下，$[\![1,n]\!]$ 表示仓库集合；对于每个 $i \in [\![1,n]\!]$，c_i 表示仓库 i 可存放的非法商品最大数量。警察部门可以协调多个警察单位，同时检查至多 r_{S}

个仓库，而犯罪组织有 r_{H} 单位的非法商品需要藏在仓库中。检测率 p_i 对于 $i \in [\![1,\ n]\!]$ 体现了可能削弱警察单位检测能力的局部效应，例如可能影响缉毒犬工作效能的仓库特征（Jezierski 等, 2014年）。警察部门（相应地，犯罪组织）的目标是尽可能减少（相应地，尽可能增加）未被警察部门发现的非法商品数量。因此，混合检查（相应地，藏匿）策略表示警察部门（相应地，犯罪组织）协调行动的随机化安排。

同时行动非合作博弈的标准解概念是纳什均衡（NE），即不存在任何玩家有动机通过单方面偏离来提高自身收益的策略组合。因此，若策略组合 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$ 是博弈 Γ 的纳什均衡，则它满足

$$\forall (\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}},\ U(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}}) \leq U(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \leq U(\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}^*}).$$

我们将 $U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\ \sigma^{\mathrm{H}^*})$ 称为博弈价值 Γ。由于 Γ 是一个具有有限纯行动集的零和博弈，冯·诺依曼极小极大定理（冯·诺依曼 1928年）表明博弈价值唯一，且可以通过以下线性规划（LP）求解：

$$\underset{t \in \mathbb{R},\, \sigma^{\mathrm{S}} \in \Delta_{\mathrm{S}}}{\text{minimize}} \quad t \quad \text{subject to} \quad U(\sigma^{\mathrm{S}}, y) \leq t, \quad \forall y \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}}. \tag{LP}$$

具体而言，均衡检查策略、均衡藏匿策略和博弈价值 Γ 分别由（LP）的最优原问题解、最优对偶问题解和最优值给出。这一结果的一个重要推论是，任何玩家在做出决策前，都无法通过观察另一玩家的混合策略而获益。尽管如此，由于$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}$（相应地，$\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$）的基数随 r_{S}（相应地，r_{H}）呈组合式增长，（LP）即使对于规模较小的实例，求解起来也具有计算上的挑战性。同样，用于计算近似纳什均衡的算法也不适用于该博弈的现实规模实例 Γ（Freund 和 Schapire 1999年, Lipton 等人 2003年，Hellerstein 等人 2019年）。

因此，我们提出一种两步求解方法来求解该博弈。首先，在第3节中，我们通过用边际检查概率和各地点隐藏物品的期望数量刻画纳什均衡，降低问题的维度。然后，在第4节中，我们推导出一种算法，用于协调玩家资源，并求得与均衡中已刻画的边际概率和隐藏物品期望数量相一致的纳什均衡。

3. 均衡策略的解析刻画

在本节中，我们将证明，博弈 Γ 的纳什均衡可以用各地点对应的边际检查概率和藏匿物品的期望数量来刻画。我们证明

这些一维量构成一个规模较小的连续博弈的纳什均衡，而我们对该博弈进行了解析求解。这种解析刻画使我们能够考察问题参数对均衡中参与者行为的影响。

3.1. 连续等价

为了简化对博弈 Γ 的分析，我们首先推导一般随机资源分配的性质。给定容量向量 $b \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ 和资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们将 $\mathcal{A}(b,r) := \{\rho \in \mathbb{R}^n : 0 \le \rho_i \le b_i, \forall i \in [\![1,n]\!] \text{ and } \sum_{i=1}^n \rho_i \le r\}$ 记作一般可行资源分配集合 $\mathcal{A}(b,r)$ 的线性规划松弛。接下来，对于定义在 $\mathcal{A}(b,r)$ 上的每个概率分布 $\sigma \in \Delta(b,r)$，我们将向量 $\rho(\sigma) = (\rho_i(\sigma))_{i \in [\![1,\ n]\!]}$ 记为在每个地点分配的资源期望数量，其定义如下：

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \rho_i(\sigma) := \mathbb{E}_{z\sim\sigma}[z_i] = \sum_{z \in \mathcal{A}(b,r)} z_i \sigma_z. \tag{3}$$

我们给出 $\Delta(b,r)$ 与 $\mathcal{A}(b,r)$ 之间的如下关系：

LEMMA 1. 考虑一个容量向量 $b \in \mathbb{Z}_{>0}^n$、一个资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$以及一个向量$\rho' \in \mathbb{R}^n$。那么，$\rho' \in \mathcal{A}(b,r)$ 当且仅当存在一个概率分布 $\sigma \in \Delta(b,r)$，满足 $\rho_i(\sigma) = \rho'_i$ 对所有 $i \in [\![1,n]\!]$均成立。

引理 1 是多面体 $\mathcal{A}(b,r)$ 整性的推论。因此，$\mathcal{A}(b,r)$ 表示在 $\Delta(b,r)$ 中的概率分布所产生的、各地点分配资源的期望数量向量集合。具体而言，对于每个检查策略 $\sigma^{\mathrm{S}} \in \Delta_{\mathrm{S}}$ 和藏匿策略 $\sigma^{\mathrm{H}} \in \Delta_{\mathrm{H}}$，$\rho(\sigma^{\mathrm{S}}) = (\rho_i(\sigma^{\mathrm{S}}))_{i \in [\![1,\ n]\!]}$ 和 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}}) = (\rho_i(\sigma^{\mathrm{H}}))_{i \in [\![1,\ n]\!]}$ 分别表示各地点的边际检查概率向量和隐藏物品的期望数量向量。

引理 1 使我们能够将博弈 Γ 与连续零和博弈 Γ联系起来：$= \langle \{\mathrm{S}, \mathrm{H}\}, (\mathcal{A}_{\mathrm{S}}, \mathcal{A}_{\mathrm{H}}), (-\tilde{u}, \tilde{u}) \rangle$，其中 S 和 H 分别选择一个连续检查力度向量 $\rho^{\mathrm{S}} \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}} := \mathcal{A}(\mathbf{1}_n, r_{\mathrm{S}})$，以及一个连续隐藏物品数量向量 $\rho^{\mathrm{H}} \in \mathcal{A}_{\mathrm{H}} := \mathcal{A}(c, r_{\mathrm{H}})$，而参与者在 Γ 中的收益为

$$\forall (\rho^{\mathrm{S}}, \rho^{\mathrm{H}}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}},\ \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}}, \rho^{\mathrm{H}}) = \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i \rho_i^{\mathrm{S}}) \rho_i^{\mathrm{H}}, \tag{4}$$

如下命题所示：

PROPOSITION 1. 博弈 Γ 和 Γ 之间的关系如下：

– 对于每个策略组合 $(\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$属于 Γ, $U(\sigma^{\mathrm{S}}, \sigma^{\mathrm{H}}) = \tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}}))$。 – $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$是 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡，当且仅当存在 Γ的纳什均衡 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$，满足 $\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 且 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$。

~– 博弈 Γ 和 Γ 的值相同。

根据该命题，我们可以通过博弈 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡来刻画博弈 Γ 的纳什均衡。具体而言，在 $\widetilde{\Gamma}$ 的一个纳什均衡 (ρ^{S^*}, ρ^{H^*}) 中，ρ^{S^*}（分别为 ρ^{H^*}）表示 Γ 的纳什均衡中每个地点的边际检查概率（分别为隐藏物品的期望数量）。这带来了显著的计算优势，因为这些量可以用大小为 n 的向量表示，而 Γ 中的玩家策略则需要用规模呈指数级增长的向量表示。此外，边际检查概率和隐藏物品的期望数量也更便于量化各地点对每位玩家的关键性。

3.2. 初步分析

接下来，我们将阐释双方玩家在均衡中的策略背后的直觉。具体而言，我们会描述由模型特征所产生的玩家激励和约束。通过这番讨论，我们将引入并说明解析求解博弈 Γ 并刻画博弈 Γ 的纳什均衡所需的关键量。~

由命题1可知，参与者在 Γ 中的期望收益 $U(\sigma^S, \sigma^H)$，可以表示为对藏匿地点 $i \in [\![1, n]\!]$ 求和，即对仍未被检测到的隐藏物品的期望数量求和，也就是$(1 - p_i\rho_i(\sigma^S))\,\rho_i(\sigma^H)$。我们将 $1 - p_i\rho_i(\sigma^S)$称为地点 i的未检测概率，即当 S 采取 σ^S时，地点 i 的隐藏物品仍未被检测到的概率。我们还将 $p_i\rho_i(\sigma^H)$称为地点 $i \in [\![1, n]\!]$的检测性能，它表示当 H 采取 σ^H时，S 检查地点 i能够检测到的隐藏物品期望数量。这些量将为我们的均衡分析提供指引：H 的激励是在未检测概率最高的地点藏匿物品，而 S 的激励是检查检测性能最高的地点。

由于玩家激励，我们可以很容易地证明，当每位参与者拥有一个资源单位（即 $r_S = r_H = 1$）时，纳什均衡（$\sigma^{S^*}, \sigma^{H^*}$）满足 $\rho_i(\sigma^{S^*}) = \rho_i(\sigma^{H^*}) = (1/p_i)/\left(\sum_{j=1}^{n} 1/p_j\right)$ 对每个$i \in [\![1, n]\!]$都成立，正如 Gal 和 Casas (2014年所述。换言之，S 以与 i 成正比的边际概率检查每个地点 $1/p_i$，从而使每个地点的未检测概率相等。类似地，H 的均衡策略使每个地点的检测性能相等。

现在，如果考虑玩家资源 $r_S \geq 1$ 和 $r_H \geq 1$的一般情形，类似的直觉会表明，对于每个$i \in [\![1$、$n]\!]$，$\rho_i(\sigma^{S^*}) = (r_S/p_i)/\left(\sum_{j=1}^{n} 1/p_j\right)$ 以及 $\rho_i(\sigma^{H^*}) = (r_H/p_i)/\left(\sum_{j=1}^{n} 1/p_j\right)$。根据命题1，$\rho(\sigma^{S^*})$和 $\rho(\sigma^{H^*})$必须分别属于 $\widetilde{\mathcal{A}}_S$ 和 $\widetilde{\mathcal{A}}_H$。然而，如果 r_S 足够大，且检测率的异质性足够强，那么对于某些地点，$(r_S/p_i)/\left(\sum_{j=1}^{n} 1/p_j\right) \leq 1$可能不成立。在这种情况下，S 无法确保这些地点达到预期的检查水平，因此这些地点对 H 更具吸引力。类似地，如果 r_H 足够大、检测率的异质性足够强且藏匿容量足够小，那么

对于某些地点，$(r_{\mathrm{H}}/p_i)/\left(\sum_{j=1}^{n} 1/p_j\right) \le c_i$ 也可能不成立。H 无法确保这些地点达到预期的检测性能，因此这些地点对 S 的吸引力会降低。

因此，我们模型的特征（即多种玩家资源和异质地点）带来了我们需要应对的新挑战。在本节余下部分中，我们按照以下方式排列地点：$p_1c_1 \le \cdots \le p_nc_n$。我们将 p_ic_i 称为地点的检测潜力 $i \in [\![1,\ n]\!]$，也就是说，当 S 检查地点 i 时，检测到物品数量的最大期望值。此外，对于任意给定的 $i \in [\![0,\ n-1]\!]$，我们定义一个双射 $\pi^i\colon\ [\![1,\ n-i]\!] \to [\![i+1,\ n]\!]$ 满足 $p_{\pi^i(1)} \le$

$\cdots \le p_{\pi^i(n-i)}$，即按照检测率对地点集合 $[\![i+1,n]\!]$ 进行排序。为方便起见，我们定义 $p_0c_0 := 0$ 以及 $p_{\pi^i(0)} := 0$，对每个 $i \in [\![0,n-1]\!]$ 均成立。我们还记 $S_k^i := \sum_{j=k}^{n-i} 1/p_{\pi^i(j)}$，对每个 $i \in [\![0,n-1]\!]$ 和 $k \in [\![1,n-i+1]\!]$ 均成立。

我们注意到，当 $r_{\mathrm{S}} \ge n$ 时，S 的一个均衡检查策略是检查每个地点，而 H 的一个均衡隐藏策略是在检测率最低的地点 i 中藏匿 $\min\{r_{\mathrm{H}}, m\}$ 件物品 p_i。类似地，当 $r_{\mathrm{H}} \ge m$ 时，一个均衡隐藏策略是用尽所有藏匿容量，而一个均衡检查策略是检查检测潜力最高的 $\min\{r_{\mathrm{S}}, n\}$ 个地点 $\widetilde{i}\ p_ic_i$。此后，我们研究当 $0 < r_{\mathrm{S}} < n$ 且 $0 < r_{\mathrm{H}} < m$ 时的博弈 Γ 和 Γ。

根据以上讨论，我们发现，对于检测潜力最低的地点，H 可能无法确保达到预期的检测性能水平。若将这些地点记为 $[\![1、\ i]\!]$，则 S 不会检查这些地点，因为她有动机将资源分配到剩余检测性能较高的地点 $[\![i+1、\ n]\!]$。对于其余地点，S 有动机使未检测概率相等。然而，如果 $j \in [\![i+1、\ n]\!]$ 的检测率 p_j 存在差异，这可能无法实现。此时，S 可以检查最不可靠的地点 k_i（即检测率最低的地点）$\{\pi^i(1) \ldots, \pi^i(k_i)\}$，并使地点 $\{\pi^i(k_i+1) \ldots, \pi^i(n-i)\}$ 的未检测概率相等。对于每个 $i \in [\![0、\ n-1]\!]$，k_i 的值由下式给出：

$$k_i := \max\left\{k \in [\![0, n-i]\!] : k + p_{\pi^i(k)} S_{k+1}^i < r_{\mathrm{S}}\right\}.$$

如上所述，对于 S 无法达到预期检查水平的地点，H 会认为它们更具吸引力。因此，H 的激励是耗尽 ℓ_i 中最不可靠地点的容量，即 $[\![i+1,n]\!]$ 中的 $\{\pi^i(1) \ldots, \pi^i(\ell_i)\}$，并使地点 $\{\pi^i(\ell_i+1) \ldots, \pi^i(n-i)\}$ 的检测性能相等。此外，H 必须确保后一组地点的检测性能不低于 $[\![1,i]\!]$ 中的地点，以免 S 有激励将资源重新分配至 $[\![1,i]\!]$（这些地点最初未被 S 检查）。因此，对于每个 $i \in [\![0,n-1]\!]$，ℓ_i 的值由以下表达式给出：

$$\ell_i := \max\left\{\ell \in [\![0, n-i]\!] : \sum_{j=1}^{i} c_j + \sum_{j=1}^{\ell} c_{\pi^i(j)} + p_ic_iS_{\ell+1}^i < r_{\mathrm{H}}\right\}.$$

我们注意到，当要隐藏的物品数量满足 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{i} c_j + p_i c_i S_1^i$ 时， ℓ_i 存在。

~有趣的是， k_i 与 ℓ_i 之间的相互作用将在求解 Γ 以及刻画 Γ的纳什均衡方面发挥重要作用。此外，给定参与者在剩余地点集合中的均衡互动，确定最小检测潜力的地点中，有多少个 i 会被 H 耗尽而未被 S 检查，这一点至关重要。

3.3. 解析刻画

根据上述讨论，我们观察到，参与者的均衡行为取决于容量、探测率、检测潜力、资源数量以及参数 k_i 和 ℓ_i。为刻画这种复杂的相互作用并刻画纳什均衡，我们定义以下关键阈值:

$$\tau_{-1} \coloneqq 0, \qquad \tau_i \coloneqq \sum_{j=1}^{i} c_j + \sum_{j=1}^{k_i} c_{\pi^i(j)} + p_{i+1} c_{i+1} S_{k_i+1}^i, \qquad \forall\, i \in [\![0, n-1]\!],$$

$$\nu_i \coloneqq \sum_{j=1}^{i} c_j + \sum_{j=1}^{k_i} c_{\pi^i(j)} + p_i c_i S_{k_i+1}^i, \qquad \forall\, i \in [\![0, n-1]\!].$$

首先，我们说明这些阈值按以下方式划分区间 $[0, m]$ 。

LEMMA 2. 阈值 $\tau_{-1}, \ldots, \tau_{n-1}$ 和 $\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}$ 满足 $\tau_{-1} = 0$, $\tau_{n-1} = m$ 和 $\tau_{i-1} \leq \nu_i \leq \tau_i$ 对所有 $i \in [\![0, n-1]\!]$ 均成立。

因此，区间 $[0, m]$ 被阈值划分为 $0 = \tau_{-1} \leq \nu_0 \leq \tau_0 \leq \nu_1 \leq \cdots \leq \tau_{n-2} \leq \nu_{n-1} \leq \tau_{n-1} = m$。事实上，给定要隐藏的物品数量 $r_{\mathrm{H}} \in [\![1, m-1]\!]$， r_{H} 所在的子区间对应于参数的一种精确配置，并决定了一种特定的均衡状态，如下述定理所示:

THEOREM 1. 给定玩家资源 $r_{\mathrm{S}} \in [\![1, n-1]\!]$ 和 $r_{\mathrm{H}} \in [\![1, m-1]\!]$，令 $i^* \in [\![0, n-1]\!]$ 满足 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \leq \tau_{i^*}$。那么，任何满足以下条件的策略组合 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 都是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。此外，任何满足 $\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 和 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$ 的策略组合 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$ 都是 Γ 的纳什均衡。

制度模式1：如果 $\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \leq \tau_{i^*}$，那么 $k_{i^*} \leq \ell_{i^*}$，其均衡的充分条件为:

$$\rho_i^{\mathrm{S}^*} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in \mathcal{I}, \\ 1 & \text{if } i \in \mathcal{J}, \\ \dfrac{r_{\mathrm{S}} - k_{i^*}}{p_i S_{k_{i^*}+1}^{i^*}} & \text{if } i \in \mathcal{K}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\rho_i^{\mathrm{H}^*} = \begin{cases} c_i & \text{if } i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}, \\ \dfrac{r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}}{p_i S_{k_{i^*}+1}^{i^*}} & \text{if } i \in \mathcal{K}, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{I}:=\{1,\ldots,i^*\}$, $\mathcal{J}:=\{\pi^{i^*}(1)\ldots,\ \pi^{i^*}(k_{i^*})\}$, 且 $\mathcal{K}:=\{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)\ldots,\ \pi^{i^*}(n-i^*)\}$。博弈 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$ 的价值为

$$r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{k_{i^*}}p_{\pi^{i^*}(j)}c_{\pi^{i^*}(j)}-\frac{\left(r_{\mathrm{S}}-k_{i^*}\right)\left(r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}\right)}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}.$$

机制模式 2：如果 $i^*=0$ 且 $\tau_{-1}<r_{\mathrm{H}}\leq\nu_0$，那么 $\ell_{0^*}<k_{0^*}$，充分的均衡条件为：

$$\begin{cases}\rho_i^{\mathrm{S}^*}=1 & \text{if } i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^0(\ell_0+1)\},\\ \dfrac{p_{\pi^0(\ell_0+1)}}{p_i}\leq\rho_i^{\mathrm{S}^*}\leq 1 & \text{if } i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\},\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{S}^*}\leq r_{\mathrm{S}}, & \end{cases}\tag{7}$$

$$\rho_i^{\mathrm{H}^*}=\begin{cases}c_i & \text{if } i\in\mathcal{J},\\ r_{\mathrm{H}}-\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell_0}c_{\pi^0(j)} & \text{if } i=\pi^0(\ell_0+1),\\ 0 & \text{if } i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\},\end{cases}\tag{8}$$

其中 $\mathcal{J}:=\{\pi^0(1)\ldots,\pi^0(\ell_0)\}$ 且 $\mathcal{K}:=\{\pi^0(\ell_0+1)\ldots,\pi^0(n)\}$。博弈价值 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$ 为

$$r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{\ell_0}p_{\pi^0(j)}c_{\pi^0(j)}-p_{\pi^0(\ell_0+1)}\left(r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{\ell_0}c_{\pi^0(j)}\right).$$

制度模式 3：如果 $i^*\geq 1$ 且 $\tau_{i^*-1}<r_{\mathrm{H}}\leq\nu_{i^*}$，那么 $\ell_{i^*}<k_{i^*}$，充分的均衡条件为：

$$\rho_i^{\mathrm{S}^*}=\begin{cases}0 & \text{if } i\in\mathcal{I}\setminus\{i^*\},\\ r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} & \text{if } i=i^*,\\ 1 & \text{if } i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\},\\ \dfrac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_i} & \text{if } i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\},\end{cases}\tag{9}$$

$$\rho_i^{\mathrm{H}^*}=\begin{cases}c_i & \text{if } i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J},\\ r_{\mathrm{H}}-\displaystyle\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{\ell_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}-p_{i^*}c_{i^*}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} & \text{if } i=\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1),\\ \dfrac{p_{i^*}c_{i^*}}{p_i} & \text{if } i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\},\end{cases}\tag{10}$$

其中 $\mathcal{I}:=\{1,\ldots,i^*\}$, $\mathcal{J}:=\{\pi^{i^*}(1)\ldots,\pi^{i^*}(\ell_{i^*})\}$, 以及 $\mathcal{K}:=\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\ldots,\pi^{i^*}(n-i^*)\}$。博弈 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$ 的值为

$$r_{\mathrm{H}}-p_{i^*}\left(r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}\right)c_{i^*}-\sum_{j=1}^{\ell_{i^*}}p_{\pi^{i^*}(j)}c_{\pi^{i^*}(j)}-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}\left(r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{\ell_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}\right).$$

根据定理1 ，借助精心选取的阈值和参数，我们可以~解析求解博弈 Γ 并刻画 Γ的纳什均衡。首先，给定 $i^* \in [\![0,\ n-1]\!]$ 满足$\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \leq \tau_{i^*}$，我们通常发现 $[\![1,\ i^*]\!]$表示这样一组地点：由于检测潜力较低，H 无法在这些地点实现检测性能均衡，正如第 3.1 节中的直觉所示。当这种情况发生时，S 会倾向于利用其资源检查$[\![i^*+1,\ n]\!]$这些检测性能较高的地点，从而使地点 $[\![1,\ i^*]\!]$ 未受检查，而 H 则在这些地点耗尽资源。然而，参与者在其余地点的行为会因 r_{H} 所属的子区间而异。事实上，我们发现阈值 ν_{i^*} 决定了 k_{i^*} 与 ℓ_{i^*}之间的关系，进而影响地点集合 $\mathcal{J}$：S 会确定性地检查这些地点，而 H 会在这些地点耗尽资源。它还决定了在均衡中，参与者应如何将剩余资源随机分配到各地点。

定理 1 表明，博弈参数之间复杂且非线性的相互作用（由所选阈值 τ 和ν刻画）会产生三种主要的均衡机制模式。事实上，这些情形模式推广了 Gal 和 Casas (2014年) 研究的博弈中的均衡结果。在该博弈中，猎物躲避捕食者，而捕食者可以检查多个检测能力各不相同的地点。通过对我们的模型设定 $c_i = 1$ 对所有$i \in [\![1$均成立、$n]\!]$ 以及 $r_{\mathrm{H}} = 1$，即可得到该博弈。在这种设定下，我们可以证明 $i^* = 0$ 且 $\ell_0 = 0$；作者观察到的纳什均衡状态，在 $k_0 = 0$ 时对应制度模式1，在 $k_0 \geq 1$时对应机制模式 2。我们还注意到，以完整一般性形式在定理 1 中描述的均衡行为，在先前研究的模型中从未出现过；这些模型考察的是检测率均一的情形（Dziubi´nski 和 Roy 2018年，Dahan 等，2022），或一名或两名参与者各拥有一个单位资源的情形（Washburn 和 Wood 1995年，Karlin and Peres 2016）。

事实上，如果允许博弈 Γ 中的容量向量和玩家资源连续取值，并考虑使 Γ 非平凡的参数集合 Ψ，即:

$$\Psi := \left\{ (n, p, c, r_{\mathrm{S}}, r_{\mathrm{H}}) : n \in \mathbb{Z}_{>0},\ p \in (0,1]^n,\ c \in \mathbb{R}^n_{>0},\ r_{\mathrm{S}} \in (0,n),\ r_{\mathrm{H}} \in (0, \sum_{i=1}^{n} c_i) \right\}, \tag{11}$$

那么我们可以得到以下更强的结果:

Proposition 2. 使定理 (5)-(10) 中的条件*1* 对于策略组合 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 成为 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡所必需且充分的参数集合，是 Ψ的稠密子集。

因此，命题 2 表明，定理 1 中的解析表达式几乎必然刻画了以下对象的所有纯纳什均衡：~连续博弈 Γ。类似地，对于原始离散博弈 Γ，条件（5）-（10）刻画了 Γ的所有纳什均衡，但电子补充材料（命题 EC.1）中描述的一些边界情况除外。接下来，我们将进一步探讨每种情形模式下的均衡行为，并通过示例加以说明。

制度模式1：$\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。在这种情形下，S 不检查地点集合$\mathcal{I} = \{1, \ldots, i^*\}$，而是将资源集中用于其余地点。由于 $\{i^* + 1, \ldots, n\}$中的探测率存在差异，S 会确定性地检查 k_{i^*}个最不可靠的地点 $\mathcal{J} = \{\pi^{i^*}(1) \ldots, \pi^{i^*}(k_{i^*})\}$，并将其$r_{\mathrm{S}} - k_{i^*}$资源随机分配到 $\mathcal{K} = \{\pi^{i^*}(k_{i^*} + 1) \ldots, \pi^{i^*}(n - i^*)\}$，从而使 $\mathcal{K}$中的未检测概率相等。根据k_{i^*}的定义，S 的策略保证满足可行性。

作为 S 的检查策略的结果，H 的藏匿策略会耗尽 $\mathcal{I}$ 中所有未被 S 检查的地点，以及 $\mathcal{J}$ 中所有 S 无法均衡未检测概率的地点。随后，H 会随机分配剩余的 $r_{\mathrm{H}} - \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} c_i$ 资源，使 $\mathcal{K}$ 中各地点的检测性能均衡。我们注意到，H 的策略是否可行并能保证均衡，取决于 r_{H} 所属的子区间。事实上，由于 $\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}}$，因此 $k_{i^*} \le \ell_{i^*}$，这意味着 H 可以耗尽 $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ 中的地点，同时仍能提供足够的检测性能，从而不致诱使 S 将部分资源重新分配到 $\mathcal{I}$ 中的地点。此外，由于 r_{H} 的上界为 τ_{i^*}，因此 H 可以在 $\mathcal{K}$ 中均衡检测性能。

我们通过以下示例说明这种情形模式：

Example 1. 考虑图中所示的躲藏与搜寻模型1 并假设 $r_{\mathrm{S}} = 3$和 $r_{\mathrm{H}} = 7$。

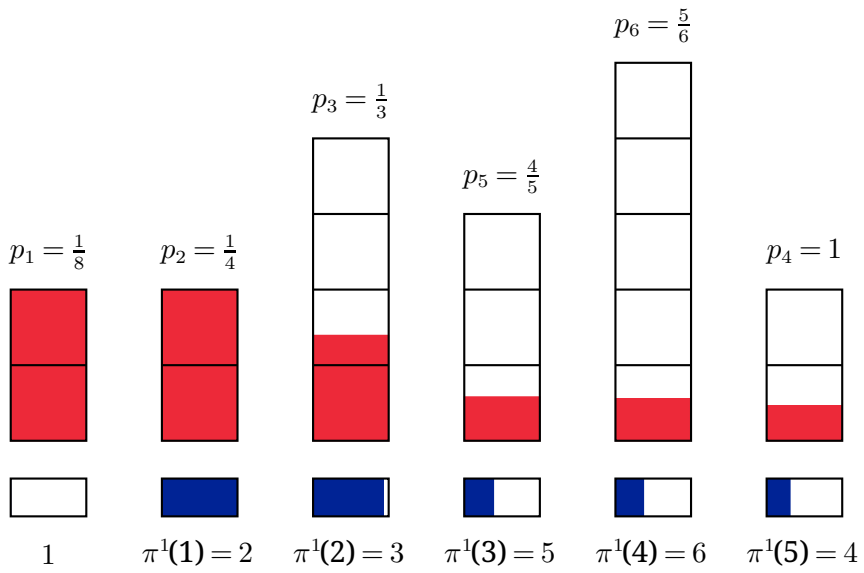

图1 当 $r_{\mathrm{S}} = 3$ 和 $r_{\mathrm{H}} = 6$ 时，制度模式1下纳什均衡的示意图。每个地点的藏匿容量由相应的方格数量表示。均衡中的边际检查概率（分别为隐藏物品的期望数量）用蓝色（分别为红色）表示。

在此情况下，$449/80 = \nu_0 < r_{\mathrm{H}} \le \tau_1 = 289/40$ 和 $i^* = 1$。此外，$k_1 = \ell_1 = 1$ 和 $\pi^1(1) = 2$，$\pi^1(2) = 3$，$\pi^1(3) = 5$，$\pi^1(4) = 6$，$\pi^1(5) = 4$。因此，在均衡中，S 选择检查策略$\sigma^{\mathrm{S}^*} \in \Delta_{\mathrm{S}}$，使得 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 0$，$\rho_2(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 1$，$\rho_3(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 40/43$，$\rho_4(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 40/129$，$\rho_5(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 50/129$，且 $\rho_6(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = 16/43$。另一方面，H 选择藏匿策略 $\sigma^{\mathrm{H}^*} \in \Delta_{\mathrm{H}}$，使得 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho_2(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = 2$，$\rho_3(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = 60/43$，$\rho_4(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = 20/43$，$\rho_5(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = 25/43$，且 $\rho_6(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = 24/43$。博弈价值为 $U(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) = 5 + 49/86$。△

机制模式 2：$i^* = 0$ 和 $\tau_{-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_0$。在这种情形下，$\mathcal{I} = \emptyset$，且每个地点都以正概率被 S 检查。事实上，相较于 S 检查藏匿地点的能力，H 的资源数量过少。因此，H 的均衡策略是贪心地将物品藏入检测率最低的地点。这会导致依次用尽 $\mathcal{J} = \{\pi^0(1) \ldots, \pi^0(\ell_0)\}$处的地点，并将剩余的 $r_{\mathrm{H}} - \sum_{i \in \mathcal{J}} c_i$ 资源分配到 $\pi^0(\ell_0 + 1)$处。根据 ℓ_0的定义，H 的策略具有可行性。

由于 S 有足够的资源（由 $k_0 \ge \ell_0 + 1 > \ell_0$保证），她的检查策略是确定性地检查 $\mathcal{J} \cup \{\pi^0(\ell_0 + 1)\}$处的地点，并随机分配足够的资源，以确保其余地点的未检测概率不高于 $\pi^0(\ell_0 + 1)$处地点的未检测概率，从而防止 H 将部分物品从 $\mathcal{J}$重新分配出去。有趣的是，S 无需动用全部资源即可实现这一点。

我们通过以下示例来说明这种情形模式：

EXAMPLE 2. 考虑图 2 中的躲藏与搜寻模型，并假设 $r_{\mathrm{S}} = 6$ 且 $r_{\mathrm{H}} = 6$。

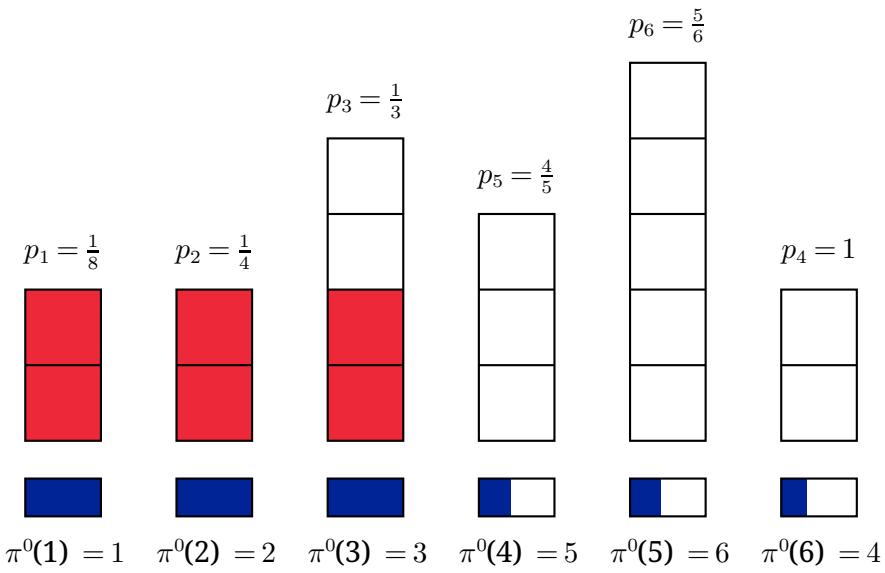

图2 当 $r_{\mathrm{S}} = 6$ 和 $r_{\mathrm{H}} = 6$ 时机制模式 2 下纳什均衡的示意图。每个地点的藏匿容量以相应的方格数量表示。均衡中的边际检查概率（及隐藏物品的期望数量）分别以蓝色（及红色）表示。

在此情况下，$0=\tau_{-1}<r_{\mathrm{H}}\le\nu_0=8$ 且 $i^*=0$。此外，$2=\ell_0<k_0=4$ 且 $\pi^0(1)=1$，$\pi^0(2)=2$，$\pi^0(3)=3$，$\pi^0(4)=5$，$\pi^0(5)=6$，$\pi^0(6)=4$。因此，S 的一种均衡检查策略为 $\sigma^{\mathrm{S}^*}\in\Delta_{\mathrm{S}}$，满足 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{S}^*})=\rho_2(\sigma^{\mathrm{S}^*})=\rho_3(\sigma^{\mathrm{S}^*})=1$，$\rho_4(\sigma^{\mathrm{S}^*})=1/3$，$\rho_5(\sigma^{\mathrm{S}^*})=5/12$，以及$\rho_6(\sigma^{\mathrm{S}^*})=2/5$。请注意，S 只需使用 $5<r_{\mathrm{S}}$ 单位资源即可实施此策略。另一方面，H 选择藏匿策略 $\sigma^{\mathrm{H}^*}\in\Delta_{\mathrm{H}}$，使得 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{H}^*})=\rho_2(\sigma^{\mathrm{H}^*})=\rho_3(\sigma^{\mathrm{H}^*})=2$，且 $\rho_4(\sigma^{\mathrm{H}^*})=\rho_5(\sigma^{\mathrm{H}^*})=\rho_6(\sigma^{\mathrm{H}^*})=0$。博弈价值为 $U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*})=4+7/12$。△

制度模式 3：$i^*\ge 1$ 和$\tau_{i^*-1}<r_{\mathrm{H}}\le\nu_{i^*}$。在这一最终情形中，我们观察到参与者的均衡策略呈现出有趣且更复杂的行为。由于容量约束，H 无法使 $\mathcal{I}=\{1,\dots,i^*\}$ 中各地点的检测性能达到一致。因此，H 会耗尽$\mathcal{I}$中的地点，而 S 最初不会检查这些地点。接着，由于$\ell_{i^*}+1\le k_{i^*}$，S 无法使 $\mathcal{J}\cup\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}=\{\pi^{i^*}(1)\dots,\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$中的地点达到期望的未检测概率。因此，H 的激励是耗尽 $\mathcal{J}$ 中的地点，并将其部分资源随机分配，以使 $\mathcal{K}=\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\dots,\pi^{i^*}(n-i^*)\}$ 中的检测性能与 i^*（即$p_{i^*}c_{i^*}$）一致。有趣的是，H 还剩下 $r_{\mathrm{H}}-\sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}}c_i-p_{i^*}c_{i^*}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}>0$资源，并将其额外分配给地点 $\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)$，S 会确定性地检查该地点。该策略的可行性和均衡保证可由ℓ_{i^*}的定义得出。

由于 H 的策略，S 会确定性地检查 $\mathcal{J}\cup\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$ 中的地点，并将她的部分资源随机分配，以使 $\mathcal{K}\setminus\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$中的未检测概率与 $\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)$相同。这是可行的，因为 $\ell_{i^*}+1\le k_{i^*}$。有趣的是，S 仍有 $r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-1-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}>0$ 资源，现在可以分配给 $\mathcal{I}$中先前未检查的 $i^*\ge 1$ 个地点。S 的激励是将剩余资源分配到 $\mathcal{I}$ 中检测性能最高的地点，即 i^*。请注意，该策略的可行性和均衡保证是 $r_{\mathrm{H}}>\tau_{i^*-1}$的结果。具体而言，$i^*$ 中的未检测概率不低于 $\mathcal{K}$中各地点的未检测概率，从而确保 H 不会将其部分物品从 i^* 重新分配到 $\mathcal{K}$中的地点。

我们通过以下示例说明这一最后的情形模式：

EXAMPLE 3. 考虑图3中的躲藏与搜寻模型，并假设 $r_{\mathrm{S}}=4$ 和 $r_{\mathrm{H}}=10$。在这种情况下，$389/40=\tau_1<r_{\mathrm{H}}\le\nu_2=33/2$ 和 $i^*=2$。此外，$k_2=3>1=\ell_2$ 和$\pi^2(1)=3$、$\pi^2(2)=5$、$\pi^2(3)=6$、$\pi^2(4)=4$。因此，在均衡中，S选择检查策略 $\sigma^{\mathrm{S}^*}\in\Delta_{\mathrm{S}}$，使得 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{S}^*})=0$、$\rho_2(\sigma^{\mathrm{S}^*})=6/25$、$\rho_3(\sigma^{\mathrm{S}^*})=1$、$\rho_4(\sigma^{\mathrm{S}^*})=4/5$、$\rho_5(\sigma^{\mathrm{S}^*})=1$ 以及$\rho_6(\sigma^{\mathrm{S}^*})=24/25$。另一方面，H选择藏匿策略 $\sigma^{\mathrm{H}^*}\in\Delta_{\mathrm{H}}$，使得 $\rho_1(\sigma^{\mathrm{H}^*})=\rho_2(\sigma^{\mathrm{H}^*})=2$、$\rho_3(\sigma^{\mathrm{H}^*})=4$、$\rho_4(\sigma^{\mathrm{H}^*})=1/2$、$\rho_5(\sigma^{\mathrm{H}^*})=9/10$ 以及 $\rho_6(\sigma^{\mathrm{H}^*})=3/5$。博弈价值为 $U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*})=6+71/75$。

△

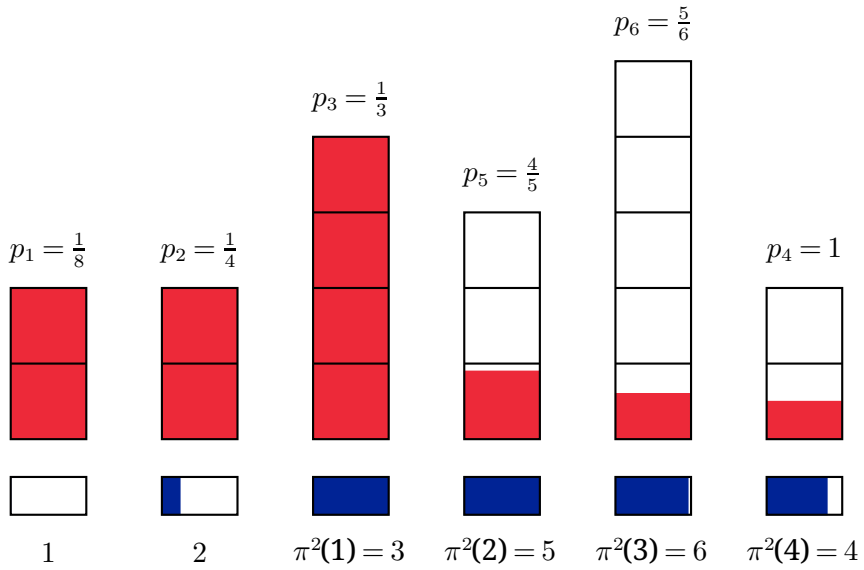

图3 当 $r_S = 4$ 和 $r_H = 10$ 时情形模式 3 的纳什均衡示意图。每个地点的藏匿容量由相应数量的方格表示。均衡中的边际检查概率（以及隐藏物品的期望数量）分别以蓝色（以及红色）表示。

3.4. 参数分析

我们通过说明玩家资源对博弈均衡~机制的影响 Γ （以及 Γ）继续分析。为此，我们考虑由6个地点、18个藏匿容量以及图中检测率定义的捉迷藏实例 1-3。接着，我们绘制由子区间 $[\tau_{i-1}, \nu_i]$ 和 $[\nu_i, \tau_i]$ 确定的区域，其中每个 $i \in [\![0,\ n-1]\!]$ 均以 r_S 和 r_H 为变量。所得图形如图4所示。

我们首先注意到，给定一个特定的情形，使该情形成立的 r_S 和 r_H 的取值构成一个复杂区域，甚至可能是不连通的。事实上，表示阈值 τ_i 和 ν_i 取值的边界由参数 k_i 下关于 r_S 的阶梯函数定义。此外，对于某些 r_S 取值，一些阈值会重合，因此无论 r_H 取何值，某些情形都无法实现。

有趣的是，当检查资源数量 r_S 较多时，可能出现的均衡状态很少。在这种情况下，S有足够的资源，不会遗漏任何地点，从而导致 $i^* = 0$。相反，当 r_S 较少时，S的策略对待藏物品数量 r_H 十分敏感。事实上，如果 r_H 较少，那么H就能使所有地点的检测性能相同，而S应以正概率检查所有地点。随着 r_H 增加，S必须仔细决定检查哪些地点，并倾向于让 i^* 个地点不受检查，以便在其余地点发现更多物品。此外，当 r_S 较少时，几乎所有可实现的制度都符合制度模式1（对应 i^* 的不同取值），因为 $k_{i^*} \leq \ell_{i^*}$ 在数量较少时最有可能成立

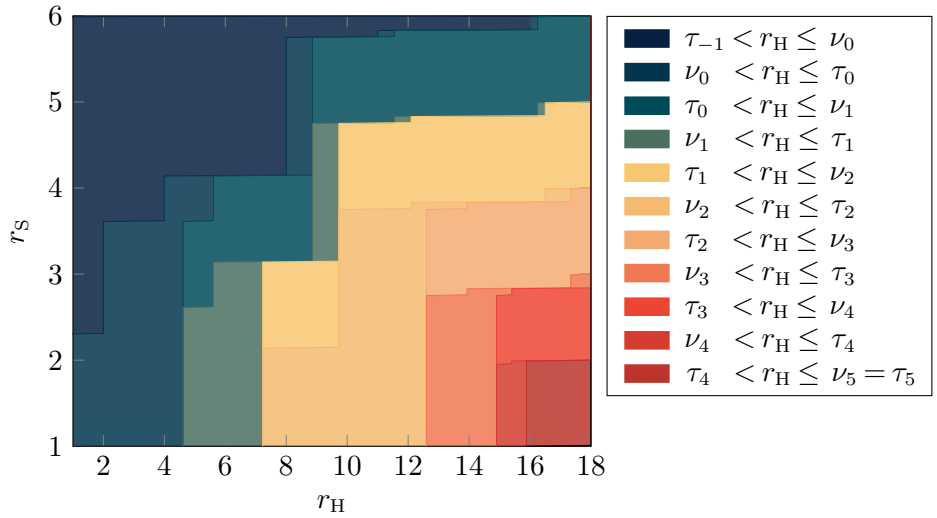

图4 展示资源数量变化时均衡区域的示意图 r_S 和 r_H 对应图 1-3中的躲藏实例。

的检查资源。类似地，当 r_H 较高时，单单位的检查资源会激励S将检查重点放在最后一个地点6上（即 $i^* = 5$）。随着 r_S 增加，S可以根据(9)将更多资源分配给 i^*（制度模式 3），直至 i^* 被确定性地检查。此时，会出现一种遵循模式3的新制度，其中未受检查的地点数量更少i^*。玩家资源对博弈价值的影响如图所示。

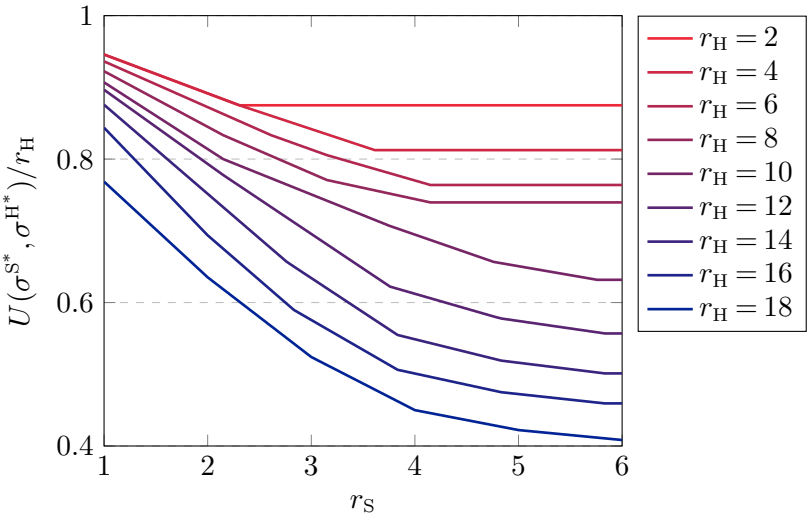

图5 均衡状态下未检测项目的比例随 r_S 的变化情况，针对 r_H 的不同取值。

具体而言，图 5 比较了玩家资源数量不同时，均衡下未检测项目的占比。该图首先展示了在以下地点集中使用检查资源的效果

当要隐藏的物品数量 r_{H} 较多时，地点 $[\![i^*+1, n]\!]$ 的情况，这是由于容量和检测率存在异质性。图中还显示，增加检查资源所带来的性能提升会因其他参数而异。这项分析可用于 S 必须确定适当检查资源数量的情形，以平衡成本与性能。

总体而言，我们的分析研究使我们深入了解问题特征（例如，检测率、藏匿容量、资源数量）对参与者行为的影响，以及地点在均衡中的重要性和关键性，安全决策者可据此制定决策。

4. 均衡计算

在上一节中，定理 1 求解了连续博弈 Γ，并给出了该博弈均衡时每个地点的边际检查概率和隐藏物品的期望数量 Γ。然而，要解决 Γ，我们必须确定如何协调分配 r_{S} 检查资源和待藏匿的 r_{H} 物品，以满足这些数量。具体而言，给定定理 1 中的边际检查概率向量 $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}$ 和隐藏物品期望数量向量 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$，接下来我们要高效地计算混合策略 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$，使得 $\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 且 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$。根据命题1，这将确保 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*})$ 是 Γ的纳什均衡。

因此，我们旨在求解以下一般问题：给定一个容量向量 $b \in \mathbb{Z}^n_{>0}$、一个资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$以及一个向量 $\rho \in \mathcal{A}(b,r)$，求可行性问题 $\{\sigma \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}(b,r)}_{\geq 0} : \sum_{z\in\mathcal{A}(b,r)} \sigma_z z = \rho,\ \sum_{z\in\mathcal{A}(b,r)} \sigma_z = 1\}$的一个解。根据引理 1，该解保证存在。尽管此问题涉及指数数量的变量，但 Carath´eodory 定理保证存在一个支撑集大小至多为 $n+1$的解。事实上，使用椭球法可以在多项式时间内求解此问题。然而，众所周知，该方法在实践中效率低下（Behnezhad等，2017）。因此，我们提出另一种算法，以高效求解该可行性问题。

具体而言，我们扩展 Dziubi´nski 和 Roy (2018年提出的算法。该算法可在 $O(n^2$时间内，针对集合 $\{z \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n z_i = r\}$计算一个具有线性支撑的概率分布，并使其符合指定的一维边际概率。然而，我们无法将他们的算法用于构造本博弈中的均衡检查策略和隐藏策略 Γ，因为我们的模型包含容量可能各不相同的地点，而且概率可以分配给未用尽资源预算的资源分配 z r (例如，定理 1 – 机制模式 2)。

因此，给定容量向量 $b \in \mathbb{Z}^n_{>0}$、资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$以及向量 $\rho \in \mathcal{A}(b,r)$，我们的算法会返回满足以下条件的概率分布 $\sigma \in \Delta(b,r)$: $\sum_{z\in\mathcal{A}(b,r)} \sigma_z z_i = \rho_i$ 对于

每个 $i \in [\![1,n]\!]$。算法每次迭代的总体思路是，将给定的向量 ρ 在 $\mathcal{A}(b,r)$ 中表示为一个凸组合，其中一个向量属于 $\mathcal{A}(b,r)$（即仅包含整数分量），另一个向量属于 $\mathcal{A}(b,r)$，且其整数分量比 ρ 多一个。为此，算法在每个地点 $i \in [\![1,n]\!]$ 分配 $\lfloor \rho_i \rfloor$ 个资源，然后根据 ρ 各分量的小数部分，确定剩余 $\bar{r} := r - \sum_{i=1}^{n} \lfloor \rho_i \rfloor$ 个资源的分配地点，其中小数部分定义为 $\bar{\rho}_i := \rho_i - \lfloor \rho_i \rfloor$。算法会确定分配剩余资源的地点数量上限 q。显然，q 不超过 $\bar{r}$ 和 $\bar{\rho}$ 中正分量的数量。接着，算法谨慎地为一种资源分配方案赋予正概率：先在每个地点分配 $\lfloor \rho_i \rfloor$ 个资源，再在小数部分最高的 q 个地点各额外分配一个资源 $\bar{\rho}_i$。随后，算法更新向量 $\bar{\rho}$，使新向量的整数分量至少比 $\bar{\rho}$ 多一个。算法不断迭代，直到 $\bar{\rho} \in \{0,1\}^n$，此时算法将剩余概率分配给 $\lfloor \rho \rfloor + \bar{\rho} \in \mathcal{A}(b,r)$。详细伪代码请参见算法1。

算法1：资源协调。

输入：容量向量 $b \in \mathbb{Z}_{>0}^n$、资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，以及一个向量 $\rho \in \widetilde{\mathcal{A}}(b,r)$。

输出：满足 $\mathbb{E}_{z\sim\sigma}[z] = \rho$ 的概率分布 $\sigma \in \Delta(b,r)$。

$\sigma \leftarrow \mathbf{0}_{\mathcal{A}(b,r)}$，　$\bar{\rho}^1 \leftarrow \rho - \lfloor \rho \rfloor$，　$\bar{r} \leftarrow r - \sum_{i=1}^{n} \lfloor \rho_i \rfloor$

$\gamma^1 \leftarrow 1$，　$k \leftarrow 1$

当 $\bar{\rho}^k \notin \{0,1\}^n$ 时执行

　$\theta^k \leftarrow$ 满足 $\bar{\rho}^k_{\theta^k}$ 的 $[\![1, n]\!]$ 排列　$_{(1)} \geq \cdots \geq \bar{\rho}^k_{\theta^k(n)}$

　$q^k \leftarrow$ 最小化 $\{\bar{r}, |\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}^k_i > 0\}|\}$

　如果 $q^k < n$，则

　　$\delta^k \leftarrow$ 最小 $\{\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k)} \; 1 - \bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)}\}$

　else

　　$\delta^k \leftarrow \bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k)}$

　$e^k \leftarrow \mathbf{0}_n$

　对每个 $j \in \{1, \ldots, q^k\}$ 执行

　　$e^k_{\theta^k(j)} \leftarrow 1$

　$\sigma_{\lfloor \rho \rfloor + e^k} \leftarrow \sigma_{\lfloor \rho \rfloor + e^k} + \gamma^k \delta^k$

　$\bar{\rho}^{k+1} \leftarrow \frac{1}{1-\delta^k} (\bar{\rho}^k - \delta^k e^k)$

　$\gamma^{k+1} \leftarrow \gamma^k (1 - \delta^k)$

　$k \leftarrow k + 1$

$\sigma_{\lfloor \rho \rfloor + \bar{\rho}^k} \leftarrow \sigma_{\lfloor \rho \rfloor + \bar{\rho}^k} + \gamma^k$

返回 σ

我们注意到，在 k while 循环（3-16）的每次迭代中，$\bar{\rho}^k = \delta^k e^k + (1-\delta^k)\bar{\rho}^{k+1}$。事实上，算法会选择 e^k 和 δ^k，使得 $\bar{\rho}^k$ 可以表示为 $e^k \in \{0,1\}^n$与一个新向量 $\bar{\rho}^{k+1}$ 的凸组合，而该新向量的整数分量至少比 $\bar{\rho}^k$ 多一个。这保证了算法会终止。终止时，算法将 ρ 表示为 $\mathcal{A}(b,r)$ 中资源分配的凸组合。这可以转化为以下定理：

THEOREM 2. 给定容量向量 $b \in \mathbb{Z}^n_{>0}$、资源预算 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$以及向量 $\rho \in \mathcal{A}(b,r)$，算法 *1* 返回一个概率分布 $\sigma \in \Delta(b,r)$，满足 $\mathbb{E}_{z\sim\sigma}[z] = \rho$。此外，$\sigma$ 的支撑集大小至多为 $n+1$，且计算时间为 $O(n^2)$。

因此，算法 1 达到 Carath´eodory 定理对多胞体所保证的支撑集大小 $\mathcal{A}(b,r)$。实际上，该算法最多执行 n 次迭代。此外，通过重复利用上一次迭代对 $\bar{\rho}^k$ 的排序，我们可以在 $O(n)$ 时间内完成每次迭代（第一次迭代除外），从而保证总运行时间为 $O(n^2$。

现在，我们可以总结计算博弈 Γ 的纳什均衡的整体求解方法。首先，根据定理 1 计算边际检查概率以及每个地点中隐藏物品的期望数量：将检测潜力 $(p_i c_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ 和探测率 $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ 按非递减顺序排序，需要 $O(n\log n)$ 步。然后，对于每个 $i \in [\![0,n-1]\!]$，可以在 $O(n)$ 时间内计算映射 π^i、参数 k_i 和 ℓ_i，以及阈值 τ_i 和 ν_i。确定 r_{H} 所属的子区间 $[\tau_{i^*-1}, \nu_{i^*}]$ 或 $[\nu_{i^*}, \tau_{i^*}]$，需要 $O(\log\ n)$ 步；计算定理 1 中的表达式还需要 $O(n)$ 步。因此，计算均衡边际检查概率和隐藏物品的期望数量，可在 $O(n^2)$ 时间内完成。最后，算法1在 $O(n^2)$ 时间内计算出与单维量相一致的混合策略。因此，我们得到最终结果：

COROLLARY 1. 该博弈 Γ 可在 $O(n^2)$时间内求解，且均衡策略的支撑集大小至多为 $n+1$。

因此，我们获得了一种高效的求解方法，可用于求解具有多种资源和异质地点的大规模捉迷藏博弈 Γ。最后，我们的方法能够提供支撑集较小的解，便于安全决策者实施。

5. 结论

在本文中，我们研究了一种捉迷藏博弈：搜寻者检查各个地点，以寻找隐藏者藏匿的物品。我们扩展了文献中的已有模型，考虑了双方在地点之间协调多种资源的情况；这些地点的藏匿容量各不相同，搜寻发生地点发现藏匿物品的概率也各不相同。搜寻者的目标是

（相应地，隐藏者的目标是）最小化（相应地，最大化）未检测到的物品的期望数量。为计算这一大规模零和博弈的混合策略纳什均衡，我们提出了一种求解方法：先推导出均衡的解析性质，再高效协调双方的资源。具体而言，我们证明，均衡时各地点的边际检查概率和隐藏物品的期望数量构成一个连续零和博弈的纳什均衡。通过审慎选取一组参数和阈值，我们以解析方式求解了这一连续博弈。我们的分析揭示了博弈参数之间复杂的相互作用，使我们得以评估这些参数对均衡时参与者行为以及各地点关键性的影响。随后，我们提出了一种二次时间算法，用于协调双方的资源，使其满足所刻画的均衡边际分布，并计算具有线性支撑集的捉迷藏博弈纳什均衡。我们的研究成果和求解方法可为安全机构提供参考，帮助其安排多支单位，侦查并查获犯罪组织藏匿的非法商品。

通过考虑更多特征，可以从多个方向拓展这项工作，从而扩大研究结果的适用范围。一种拓展方式是考虑隐藏者隐藏的、估值各不相同的不同商品，以及检测特征各异的不同检查资源。另一种方式是纳入对地点的异质估值，以拓展冯·诺依曼 (1953年)提出的原始设定。最后，一个有趣的研究方向是考虑捉迷藏博弈的重复版本，让参与者在互动过程中逐渐了解对手起初未知的特征。

致谢

本研究获得了佐治亚理工学院斯图尔特奖学金和新教员启动基金的资助。我们感谢 Mohit Singh 提供宝贵的反馈。

参考文献

Ahmadinejad A、Dehghani S、Hajiaghayi M、Lucier B、Mahini H、Seddighin S（2019年）《从决斗到战场：计算布洛托及其他博弈的均衡》。《运筹学数学》44(4)：1304–1325。

Alpern S，Gal S（2006）《搜索博弈与会合理论》，第55卷（施普林格科学与商业媒体）。

Bahamondes B，Dahan M（2022年）《具有不完美检测能力地点的网络检查》。2022年美国控制会议（ACC），613–620。

Behnezhad S, Blum A, Derakhshan M, HajiAghayi M, Mahdian M, PapadimitriouCH, Rivest RL, Seddighin S, Stark PB（2018年）从战场到选举：布洛托博弈与审计博弈的制胜策略。第二十九届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集，2291–2310（SIAM）。

Behnezhad S, Dehghani S, Derakhshan M, HajiAghayi M, Seddighin S（2017）求解布洛托博弈最优策略的更快、更简单算法。第三十一届AAAI 人工智能大会。Bertsimas D, Nasrabadi E, Orlin JB（2016）论随机化在网络阻断中的作用。《运筹学通讯》44(1):114–120。Blocki J, Christin N, Datta A, Procaccia A, Sinha A（2015）具有多种防御者资源的审计博弈。AAAI 人工智能大会论文集 29(1)。Borel E（1921年）La th´eorie du jeu et les ´equations int´egralesa noyau sym´etrique。《法国科学院会议报告》173(1304-1308):58。Budish E, Che YK, Kojima F, Milgrom P（2013）随机分配机制的设计：理论与应用。《美国经济评论》103(2):585–623。Cai Y, Daskalakis C, Weinberg SM（2012）最优多维机制设计：将收入转化为福利最大化。2012年IEEE第53届计算机科学基础年度研讨会，130–139（IEEE）。Cardei M, Du DZ（2005年）通过功率感知组织延长无线传感器网络的寿命。《无线网络》11(3):333–340。Chan H, Jiang AX, Leyton-Brown K, Mehta R（2016）多线性博弈。网络与互联网经济国际会议，44–58（施普林格）。Clarkson J, Lin KY, Glazebrook KD（2022年）离散地点中的经典搜索博弈。《运筹学数学》。Crawford VP, Iriberri N（2007）致命吸引：实验“躲猫猫”博弈中的显著性、天真与精明程度。《美国经济评论》97(5):1731–1750。Dahan M, Sela L, Amin S（2022年）用于检测策略性攻击的网络检测。《运筹学》70(2):1008–1024。Dziubi´nski M, Roy J（2018）具有多种资源的躲藏与寻找博弈。算法博弈论国际研讨会，82–86（施普林格）。Flood MM（1972）冯·诺依曼的躲藏与寻找博弈。《管理科学》18(5-part-2):107–109。Freund Y, Schapire RE（1999）使用乘法权重进行自适应博弈。《博弈与经济行为》29(1):79–103。Gal S, Casas J（2014）异质地点中的躲藏—寻找与追捕—逃避的轮替。《英国皇家学会界面》11(94):20140062。Gr¨otschel M, Lov´asz L, Schrijver A（2012）几何算法与组合优化，第2卷（施普林格科学与商业媒体）。Gupta A, Langbort C, Ba¸sar T（2016）具有非对称信息和资源受限参与者的动态博弈及其在信息物理系统安全中的应用。《IEEE网络系统控制汇刊》4(1):71–81。

Hellerstein L, Lidbetter T, Pirutinsky D（2019年）使用最佳响应预言机求解零和博弈及其在搜索博弈中的应用。《运筹学》67(3):731–743。Hess KM, Orthmann CH, Cho HL（2013年）《警务运作：理论与实践》（圣智学习）。Hochbaum DS, Fishbain B（2011年）利用移动分布式传感器网络探测核威胁。《运筹学年鉴》187(1):45–63。Hoeksma R, Manthey B, Uetz M（2016年）单机调度多面体中 Carath´eodory 定理的高效实现。《离散应用数学》215:136–145。Hoeksma R, Uetz M（2013年）排序问题的二维最优机制设计。整数规划与组合优化国际会议，242–253（施普林格）。Hohzaki R（2016年）搜索博弈：文献综述。《日本运筹学会杂志》59(1):1–34。Hota AR, Clements AA, Sundaram S, Bagchi S（2016年）相互依赖资产中安全投资的最优部署与博弈论部署。安全决策与博弈论国际会议，101–113（施普林格）。Jezierski T, Adamkiewicz E, Walczak M, Sobczy´nska M, G´orecka-Bruzda A, Ensminger J, Papet E（2014年）完全训练的警犬的毒品探测效能因品种、训练水平、毒品类型和搜索环境而异。《国际法医学》237:112–118。Karlin A, Peres Y（2016年）《博弈论：鲜活的理论》（美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州）。Kletti T, Renders JM, Loiseau P（2022a年）引入曝光多面体，实现重复排名中帕累托最优公平性—效用摊销。第十五届美国计算机协会网络搜索与数据挖掘国际会议论文集，498–507。Kletti T, Renders JM, Loiseau P（2022b年）基于 DBN 曝光模型的排名中帕累托最优公平性—效用摊销。arXiv 预印本 arXiv:2205.07647。Korzhyk D, Conitzer V, Parr R（2010年）计算安全资源分配博弈中最优斯塔克尔伯格策略的复杂性。第二十四届 AAAI 人工智能大会。Letchford J, Conitzer V（2013年）通过边际概率求解图上的安全博弈。第二十七届 AAAI 人工智能大会。Lidbetter T（2013年）含多个隐藏目标的搜索博弈。《SIAM 控制与优化杂志》51(4):3056–3074。Lidbetter T, Lin KY（2019年）在多个位置搜寻多个目标。《欧洲运筹学杂志》278(2):709–720。Lipton RJ, Markakis E, Mehta A（2003年）使用简单策略参与大型博弈。第四届美国计算机协会电子商务会议论文集，36–41。

Miao F, Zhu Q, Pajic M, Pappas GJ（2018年）用于信息物理系统安全控制的混合随机博弈。Automatica 93:55–63。Milo˘sevi´c J, Dahan M, Amin S, Sandberg H（2019年）具有异质组件关键性等级的网络监控博弈。2019年 IEEE 第58届决策与控制会议（CDC），4379–4384（IEEE）。Musegaas M, Schlicher L, Blok H（2022年）斯塔克尔伯格生产防护博弈：防御蓄意攻击，保护作物生产。《欧洲运筹学杂志》297(1):102–119。Pirani M, Taylor JA, Sinopoli B（2021年）图上的战略传感器布置。《系统与控制快报》148:104855。Pita J, Jain M, Marecki J, Ord´o˜nez F, Portway C, Tambe M, Western C, Paruchuri P, Kraus S（2008年）已部署的 ARMOR 防护系统：博弈论模型在洛杉矶国际机场安全保障中的应用。第七届自主代理与多智能体系统国际联合会议论文集：工业专题，125–132。Powell R（2009年）序贯非零和“布洛托”：在攻击发生前分配防御资源。《博弈与经济行为》67(2):611–615。冯·诺伊曼 J（1928年）《关于博弈理论》。《数学年刊》100(1):295–320。冯·诺伊曼 J（1953年）一个等价于最优指派问题的特定双人零和博弈。《博弈论研究》2(0):5–12。Wang WQ, Shao H（2014年）分布式雷达传感器网络中的雷达间干扰抑制。《遥感》6(1):740–755。Washburn A, Wood K（1995年）用于网络阻断的双人零和博弈。《运筹学》43(2):243–251。Zhu Q, Basar T（2015年）信息物理控制系统鲁棒性、安全性与韧性的博弈论方法：用于最优跨层韧性控制系统的博弈中博弈原理。《IEEE控制系统杂志》35(1):46–65。

命题证明

EC.1. 第 3 节的证明3

引理 1 的证明。设 $b \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ 为容量向量， $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为资源预算。首先，我们注意到 $\widetilde{\mathcal{A}}(b,r)$ 是 $\mathcal{A}(b,r)$ 的凸包。事实上，由于行向量 $\mathbf{1}_n^\top$ 是~全幺模的，因此 (1) 是 $\mathcal{A}(b,r)$ 的理想表述，并且多胞体 $\mathcal{A}(b,r)$ 的极点均为整数点，我们将它们记为 $z^1,\dots,z^I$。考虑一个向量 $\rho' \in \mathbb{R}^n$。如果 $\rho' \in \mathcal{A}(b,r)$，那么存在 $\lambda_1,\dots,\lambda_I \in [0,1]$，使得 $\rho' = \sum_{i=1}^I \lambda_i z^i$ 且 $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$。于是，对于 $i \in [\![1,I]\!]$，由$\sigma_{z^i} = \lambda_i$定义的 $\sigma \in [0,1]^{\mathcal{A}(b,r)}$ 以及当 $z \notin \{z^1,\dots,z^I\}$ 时的 $\sigma_z = 0$，是在 $\Delta(b,r)$ 上的概率分布，并满足对所有 $i \in [\![1,n]\!]$， $\rho_i(\sigma) = \rho'_i$。反过来，如果存在 $\sigma \in \Delta(b,r)$ 满足对所有 $i \in [\![1,n]\!]$， $\rho'_i = \rho_i(\sigma) = \sum_{z \in \mathcal{A}(b,r)} z_i \sigma_z$，那么 ρ' 是 $\mathcal{A}(b,r)$ 中元素的凸组合，因而属于其凸包 $\mathcal{A}(b,r)$。□

命题的证明 *1*。

– 考虑策略组合 $(\sigma^{\mathrm{S}},\sigma^{\mathrm{H}}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$。那么，

$$U(\sigma^{\mathrm{S}},\sigma^{\mathrm{H}}) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^n (1 - p_i \mathbb{E}_{x\sim\sigma^{\mathrm{S}}}[x_i]) \mathbb{E}_{y\sim\sigma^{\mathrm{H}}}[y_i] \overset{(3),(4)}{=} \tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}}),\rho(\sigma^{\mathrm{H}})). \tag{EC.1}$$

– 设 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 是 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡。根据引理 1，设 $(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$ 满足$\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 且 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$。利用 $\widetilde{\Gamma}$中的均衡条件，可得：

$$\begin{aligned}
&\forall \sigma^{\mathrm{S}} \in \Delta_{\mathrm{S}},\ U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \overset{(EC.1)}{=} \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho^{\mathrm{H}^*}) \le \tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}}),\rho^{\mathrm{H}^*}) \overset{(EC.1)}{=} U(\sigma^{\mathrm{S}},\sigma^{\mathrm{H}^*}),\\
&\forall \sigma^{\mathrm{H}} \in \Delta_{\mathrm{H}},\ U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \overset{(EC.1)}{=} \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho^{\mathrm{H}^*}) \ge \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho(\sigma^{\mathrm{H}})) \overset{(EC.1)}{=} U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}}).
\end{aligned}$$

因此，$(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*})$ 是 Γ 的纳什均衡。

反过来，设 $(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$ 是 Γ 的纳什均衡，那么我们必须证明 $(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}))$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。首先，根据引理 1，我们知道 $(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}^*})) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。接着，给定 $(\rho^{\mathrm{S}},\rho^{\mathrm{H}}) \in$ ~ ~$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} \times \mathcal{A}_{\mathrm{H}}$，设 $(\sigma^{\mathrm{S}},\sigma^{\mathrm{H}}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$满足 $\rho(\sigma^{\mathrm{S}}) = \rho^{\mathrm{S}}$ 且 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}}) = \rho^{\mathrm{H}}$（引理 1）。利用 Γ 中的均衡条件，可得：

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}),\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*})) \overset{(EC.1)}{=} U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \le U(\sigma^{\mathrm{S}},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \overset{(EC.1)}{=} \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}},\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*})),\\
&\text{and } \tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}),\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*})) \overset{(EC.1)}{=} U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \ge U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}}) \overset{(EC.1)}{=} \tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}),\rho^{\mathrm{H}}).
\end{aligned}$$

因此，$(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}))$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。

– 给定一个纳什均衡 $(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$of Γ，我们知道 $(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}))$ 是 $\widetilde{\Gamma}$and$U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*})$ 的纳什均衡 $\overset{(EC.1)}{=}$ $\tilde{u}(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*})\ \rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}))$。因此，博弈 $\Gamma$and $\widetilde{\Gamma}$的值相同。□

我们注意到，当某些探测率相同时，按探测率对 $[\![i+1,n]\!]$ 进行排序的排列 π^i 可能不唯一。为简化证明，我们不失一般性地假设π^i 在探测率相同的情况下仍保持原有顺序，即当 $1\le j<k\le n-i$and $p_{\pi^i(j)}=p_{\pi^i(k)}$ 时， $\pi^i(j)<\pi^i(k)$，从而使每个 $i\in[\![0,n-1]\!]$ 对应的 π^i 唯一。

在证明引理 2 之前，我们需要以下辅助引理。

LEMMA EC.1. 设 $i\in[\![1,n-1]\!]$ 和 $j^*\in[\![1,n-i+1]\!]$ 满足 $\pi^{i-1}(j^*)=i$。则：

$$\pi^{i-1}(j)=\begin{cases}\pi^i(j) & \text{if } j\in[\![1,j^*-1]\!],\\ i & \text{if } j=j^*,\\ \pi^i(j-1) & \text{if } j\in[\![j^*+1,n-i+1]\!].\end{cases} \tag{EC.2}$$

此外，对每个 $k\in[\![0,n-i+1]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{k}c_{\pi^{i-1}(j)}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}c_{\pi^i(j)} & \text{if } k\in[\![0,j^*-1]\!],\\ \sum_{j=1}^{k-1}c_{\pi^i(j)}+c_i & \text{if } k\in[\![j^*,n-i+1]\!],\end{cases} \tag{EC.3}$$

and

$$S^{i-1}_{k+1}=\begin{cases}S^i_{k+1}+\frac{1}{p_i} & \text{if } k\in[\![0,j^*-1]\!],\\ S^i_k & \text{if } k\in[\![j^*,n-i+1]\!].\end{cases} \tag{EC.4}$$

引理 *EC.1* 的证明。 设 $i\in[\![1,n-1]\!]$ 和 $j^*\in[\![1,n-i+1]\!]$ 满足 $\pi^{i-1}(j^*)=i$。排列 π^{i-1} 按探测率非递减的顺序排列地点 $[\![i,n]\!]$。从不等式链中移除$p_i=p_{\pi^{i-1}(j^*)}$后，我们得到 $p_{\pi^{i-1}(1)}\le\cdots\le p_{\pi^{i-1}(j^*-1)}\le p_{\pi^{i-1}(j^*+1)}\le$

$\cdots\le p_{\pi^{i-1}(n-i+1)}$，它按 $[\![i+1,\ n]\!]$ 探测率排序，从而得到（EC.2）。

因此，对于每个 $k\in[\![0,j^*-1]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{k}c_{\pi^{i-1}(j)}=\sum_{j=1}^{k}c_{\pi^i(j)},$$

$$S^{i-1}_{k+1}=\sum_{j=k+1}^{j^*-1}\frac{1}{p_{\pi^{i-1}(j)}}+\frac{1}{p_i}+\sum_{j=j^*+1}^{n-i+1}\frac{1}{p_{\pi^{i-1}(j)}}=\frac{1}{p_i}+\sum_{j=k+1}^{j^*-1}\frac{1}{p_{\pi^i(j)}}+\sum_{j=j^*+1}^{n-i+1}\frac{1}{p_{\pi^i(j-1)}}=\frac{1}{p_i}+S^i_{k+1}.$$

同样，对于每个 $k\in[\![j^*,n-i+1]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{k}c_{\pi^{i-1}(j)}=\sum_{j=1}^{j^*-1}c_{\pi^i(j)}+c_i+\sum_{j=j^*+1}^{k}c_{\pi^i(j-1)}=\sum_{j=1}^{k-1}c_{\pi^i(j)}+c_i,$$

$$S^{i-1}_{k+1}=\sum_{j=k+1}^{n-i+1}\frac{1}{p_{\pi^{i-1}(j)}}=\sum_{j=k+1}^{n-i+1}\frac{1}{p_{\pi^i(j-1)}}=S^i_k.$$

□

LEMMA EC.2. 对于每个 $i \in [\![0, n-1]\!]$, k_i 都存在，且

$$K_i := \left\{k \in [\![0, n-i]\!] : k + p_{\pi^i(k)} S^i_{k+1} < r_{\mathrm{S}}\right\} = [\![0, k_i]\!].$$

此外，对于每个 $i \in [\![1, n-1]\!]$ 和 $j^* \in [\![1, n-i+1]\!]$，满足 $\pi^{i-1}(j^*) = i$,

$$k_{i-1} \leq \begin{cases} k_i & \text{if } k_{i-1} \in [\![0, j^*-1]\!], \\ k_i + 1 & \text{if } k_{i-1} \in [\![j^*, n-i+1]\!]. \end{cases} \tag{EC.5}$$

引理 *EC.2* 的证明。令 $i \in [\![0, n-1]\!]$。由于 $p_{\pi^i(0)} S^i_1 = 0 < r_{\mathrm{S}}$，因此存在 $0 \in K_i$ 和 k_i。接下来，我们考虑 $k \in [\![1, n-i]\!]$。如果 $k \in K_i$，那么 $k-1 \in K_i$，如下所示：

$$r_{\mathrm{S}} > k + p_{\pi^i(k)} S^i_{k+1} = k - 1 + p_{\pi^i(k)} \left(S^i_{k+1} + \frac{1}{p_{\pi^i(k)}} \right) \geq k - 1 + p_{\pi^i(k-1)} S^i_k,$$

这里我们用到了这样一个事实：$k \in K_i$ 和 π^i 按探测率对 $[\![i+1, n]\!]$ 中的地点进行排序。因此，$K_i = [\![0, k_i]\!]$。

接下来，我们分析 k_i 关于 i 的函数关系。令 $i \in [\![1, n-1]\!]$ 和 $j^* \in [\![1, n-i+1]\!]$ 满足$\pi^{i-1}(j^*) = i$。如果 $k_{i-1} \in [\![0, j^*-1]\!]$，则得到：

$$r_{\mathrm{S}} > k_{i-1} + p_{\pi^{i-1}(k_{i-1})} S^{i-1}_{k_{i-1}+1} \overset{\text{(EC.2),(EC.4)}}{\geq} k_{i-1} + p_{\pi^i(k_{i-1})} S^i_{k_{i-1}+1}.$$

由于 $k_{i-1} \leq j^* - 1 \leq n - i$，我们推得 $k_{i-1} \in K_i$，且 $k_{i-1} \leq k_i$。

若 $k_{i-1} \in [\![j^*+1,\ n-i+1]\!]$，则可得：

$$r_{\mathrm{S}} \overset{\text{(EC.2),(EC.4)}}{>} k_{i-1} + p_{\pi^i(k_{i-1}-1)} S^i_{k_{i-1}} > k_{i-1} - 1 + p_{\pi^i(k_{i-1}-1)} S^i_{k_{i-1}-1+1}.$$

由于 $k_{i-1} - 1 \leq n - i$，因此 $k_{i-1} - 1 \in K_i$ 且 $k_{i-1} - 1 \leq k_i$。

最后，若 $k_{i-1} = j^*$，则可得：

$$r_{\mathrm{S}} \overset{\text{(EC.4)}}{>} k_{i-1} + p_{\pi^{i-1}(k_{i-1}-1)} S^i_{k_{i-1}} \overset{\text{(EC.2)}}{>} k_{i-1} - 1 + p_{\pi^i(k_{i-1}-1)} S^i_{k_{i-1}-1+1}.$$

因此，$k_{i-1} - 1 \in K_i$ 且 $k_{i-1} - 1 \leq k_i$。注意，我们在全文中均用到了 $p_{\pi^i(0)} = 0$。 □

LEMMA EC.3. 对于每个 $i \in [\![0,$ 若 $n-1]\!]$，且 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{i} c_j + p_i c_i S^i_1$，则存在 ℓ_i，并且

$$L_i := \left\{ \ell \in [\![0, n-i]\!] : \sum_{j=1}^{i} c_j + \sum_{j=1}^{\ell} c_{\pi^i(j)} + p_i c_i S^i_{\ell+1} < r_{\mathrm{H}} \right\} = [\![0, \ell_i]\!].$$

引理 *EC.3* 的证明。设 $i \in [\![0,\ n-1]\!]$ 并假设 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{i} c_j + p_i c_i S^i_1$。那么，$0 \in L_i$且 ℓ_i 存在。接下来，考虑 $\ell \in [\![1,\ n-i]\!]$。若 $\ell \in L_i$，则 $\ell - 1 \in L_i$，如下所示：

$$r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i} c_j > \sum_{j=1}^{\ell-1} c_{\pi^i(j)} + \frac{p_{\pi^i(\ell)}}{p_{\pi^i(\ell)}} c_{\pi^i(\ell)} + p_i c_i S^i_{\ell+1} \geq \sum_{j=1}^{\ell-1} c_{\pi^i(j)} + p_i c_i S^i_{\ell},$$

这里我们用到了这样一个事实：$\ell \in L_i$ 以及 $[\![1$、$n]\!]$ 中的地点均按检测潜力排序。因此，$L_i = [\![0$、$\ell_i]\!]$。 □

现在我们可以证明引理2。

引理 *2*的证明。 首先， $\tau_{-1}=0$ 根据定义。此外，我们注意到 $k_{n-1}\in\{0,1\}$，这意味着 $\tau_{n-1}=m$：如果 $k_{n-1}=0$，那么 $\tau_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}c_j+p_nc_n/p_n=m$。如果 $k_{n-1}=1$，那么 $\tau_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}c_j+c_n=m$。接下来我们证明 $\tau_{i-1}\le\nu_i\le\tau_i$ 对所有 $i\in[\![0,\ n-1]\!]$。

我们注意到，不等式 $\nu_i\le\tau_i$ 直接由以下事实得出： $p_ic_i\le p_{i+1}c_{i+1}$。因此，只需证明 $\tau_{i-1}\le\nu_i$。对于 $i=0$，这是显然的，所以我们可以假设 $i\in[\![1,\ n-1]\!]$。我们注意到

$$\nu_i-\tau_{i-1}=c_i+\sum_{j=1}^{k_i}c_{\pi^i(j)}-\sum_{j=1}^{k_{i-1}}c_{\pi^{i-1}(j)}-p_ic_i\left(S^{i-1}_{k_{i-1}+1}-S^i_{k_i+1}\right). \tag{EC.6}$$

设 $j^*\in[\![1,\ n-i+1]\!]$ 满足 $\pi^{i-1}(j^*)=i$。若 $k_{i-1}\in[\![0,\ j^*-1]\!]$，则可得：

$$\begin{aligned}\nu_i-\tau_{i-1}&\overset{(EC.3),(EC.4)}{=}c_i+\sum_{j=1}^{k_i}c_{\pi^i(j)}-\sum_{j=1}^{k_{i-1}}c_{\pi^i(j)}-p_ic_i\left(S^i_{k_{i-1}+1}-S^i_{k_i+1}+\frac{1}{p_i}\right)\\&\overset{(EC.5)}{=}\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}\frac{p_{\pi^i(j)}c_{\pi^i(j)}-p_ic_i}{p_{\pi^i(j)}}\ge 0.\end{aligned}$$

若 $k_{i-1}\in[\![j^*,\ n-i+1]\!]$，则可得：

$$\nu_i-\tau_{i-1}\overset{(EC.3),(EC.4)}{=}\sum_{j=1}^{k_i}c_{\pi^i(j)}-\sum_{j=1}^{k_{i-1}-1}c_{\pi^i(j)}-p_ic_i\left(S^i_{k_{i-1}}-S^i_{k_i+1}\right)\overset{(EC.5)}{=}\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i}\frac{p_{\pi^i(j)}c_{\pi^i(j)}-p_ic_i}{p_{\pi^i(j)}}\ge 0.$$

□

以下引理推导出我们的辅助参数所满足的性质：

LEMMA EC.4. 设 $i\in[\![0,\ n-1]\!]$ 满足 $r_{\mathrm{H}}>\tau_{i-1}$。则以下命题成立 ：

– ℓ_i 存在。此外，当 $i\ge 1$ 时，设 $j^*\in[\![1,\ n-i+1]\!]$ 满足 $\pi^{i-1}(j^*)=i$。则，

$$k_{i-1}\le\begin{cases}\ell_i & \text{if } k_{i-1}\in[\![0,j^*-1]\!]\\ \ell_i+1 & \text{if } k_{i-1}\in[\![j^*,n-i+1]\!].\end{cases} \tag{EC.7}$$

– 若 $\nu_i<r_{\mathrm{H}}$，则 $k_i\le\ell_i$。若 $r_{\mathrm{H}}\le\nu_i$，则 $k_i>\ell_i$。

引理的证明 *EC.4*。

– 设 $i\in[\![0,n-1]\!]$。若 $i=0$ 且 $r_{\mathrm{H}}>\tau_{-1}=0$，则存在 $0\in L_0$ 和 ℓ_0。现在假设$i\in[\![1,n-1]\!]$ 和 $r_{\mathrm{H}}>\tau_{i-1}$。设 $j^*\in[\![1,n-i+1]\!]$ 满足 $\pi^{i-1}(j^*)=i$。若 $k_{i-1}\in[\![0,j^*-1]\!]$，则：

$$r_{\mathrm{H}}>\tau_{i-1}\overset{(EC.3),(EC.4)}{=}\sum_{j=1}^{i}c_j+\sum_{j=1}^{k_{i-1}}c_{\pi^i(j)}+p_ic_iS^i_{k_{i-1}+1}.$$

由于 $k_{i-1}\le j^*-1\le n-i$，因此 $k_{i-1}\in L_i$，ℓ_i 存在，且 $k_{i-1}\le\ell_i$。

如果 $k_{i-1} \in [\![j^*, n-i+1]\!]$，那么：

$$r_{\mathrm{H}} \overset{\text{(EC.3)},\text{(EC.4)}}{>} \sum_{j=1}^{i} c_j + \sum_{j=1}^{k_{i-1}-1} c_{\pi^i(j)} + p_i c_i S^i_{k_{i-1}-1+1}.$$

由于 $k_{i-1}-1 \le n-i$，因此 $k_{i-1}-1 \in L_i$，ℓ_i 存在，且 $k_{i-1}-1 \le \ell_i$。

– 令 $i \in [\![0,\ n-1]\!]$ 满足 $r_{\mathrm{H}} > \tau_{i-1}$。若 $r_{\mathrm{H}} > \nu_i$，则根据 ν_i，$k_i \in L_i$ 和 $k_i \le \ell_i$ 的定义。另一方面，若 $r_{\mathrm{H}} \le \nu_i$，则 $k_i \notin L_i$。由于 ℓ_i 存在且 $L_i = [\![0,\ \ell_i]\!]$（引理 EC.3），则 $k_i > \ell_i$。□

现在我们可以证明本文的第一个定理。

定理 *1* 的证明。令 $r_{\mathrm{S}} \in [\![1,\ n-1]\!]$ 和 $r_{\mathrm{H}} \in [\![1,\ m-1]\!]$。令 $i^* \in [\![0,\ n-1]\!]$ 满足 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。

制度模式1：假设 $\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。根据引理EC.4，我们知道 $k_{i^*} \le \ell_{i^*}$。令 $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \mathbb{R}^n$ 分别满足（5）和（6）。我们将证明 $(\rho^{\mathrm{S}^*},\ \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 并且是 Γ 的一个纳什均衡。

首先，我们注意到 $k_{i^*} < n - i^*$。事实上，若 $k_{i^*} = n - i^*$，则 $r_{\mathrm{H}} > \nu_{i^*} = \sum_{j=1}^{n} c_j = m$，这就产生了矛盾。因此，$\mathcal{K} \neq \emptyset$ 和 $S^{i^*}_{k_{i^*}+1} > 0$。根据 k_{i^*} 的定义，我们得到

$$r_{\mathrm{S}} > k_{i^*} + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*})} S^{i^*}_{k_{i^*}+1} \ge k_{i^*}, \tag{EC.8}$$

这意味着对于每个 $i \in \mathcal{K}$，$\rho^{\mathrm{S}^*}_i \ge 0$。此外，由于 $k_{i^*}+1 \le n - i^*$ 和 $k_{i^*}+1 \notin K_{i^*}$，因此：

$$r_{\mathrm{S}} \le k_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} \left(S^{i^*}_{k_{i^*}+1} - \frac{1}{p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)}} \right) = k_{i^*} + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} S^{i^*}_{k_{i^*}+1}. \tag{EC.9}$$

因此，对每个 $i \in \mathcal{K}$，$\rho^{\mathrm{S}^*}_i \le 1$。最后，

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^{\mathrm{S}^*}_i = |\mathcal{J}| + \frac{r_{\mathrm{S}} - k_{i^*}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} S^{i^*}_{k_{i^*}+1} = r_{\mathrm{S}}.$$

因此，$\rho^{\mathrm{S}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}$。接下来，我们证明 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。由于 $k_{i^*} \le \ell_{i^*}$，因此 $k_{i^*} \in L_{i^*}$ 并且

$$r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{k_{i^*}+1} \ge \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}. \tag{EC.10}$$

因此，对于每个 $i \in \mathcal{K}$，$\rho^{\mathrm{H}^*}_i \ge 0$。此外，由于对于每个 $i \in \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$，$r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$ 且 $p_{i^*+1} c_{i^*+1} \le p_i c_i$，我们得到：

$$\forall\, i \in \mathcal{K},\ \rho^{\mathrm{H}^*}_i = \frac{r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}}{p_i S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} \le \frac{p_{i^*+1} c_{i^*+1}}{p_i} \le c_i. \tag{EC.11}$$

最后，

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{H}^*}=\sum_{i=1}^{i^*}c_i+\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}+\left(r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}\right)\frac{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}=r_{\mathrm{H}}.$$

因此， $\rho^{\mathrm{H}^*}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。

接下来，我们证明 $(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho^{\mathrm{H}^*})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。为此，我们先注意以下几点：

$$\begin{aligned}\forall\,\rho^{\mathrm{H}}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}},\ \min_{\rho^{\mathrm{S}}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}}\tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}},\rho^{\mathrm{H}})\overset{(4)}{=}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{H}}\ -\ \max_{\rho^{\mathrm{S}}}\ &\sum_{i=1}^{n}p_i\rho_i^{\mathrm{H}}\rho_i^{\mathrm{S}}\\ \text{s.t.}\ &\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{S}}\le r_{\mathrm{S}}\\ &0\le\rho_i^{\mathrm{S}}\le 1,\quad\forall\,i\in[\![1,n]\!].\end{aligned}\tag{EC.12}$$

因此，对 $\rho^{\mathrm{H}}\in\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 的最佳响应是一个连续背包问题的最优解，其中有n 个不同的（可分割）单位权重物品，背包容量等于 r_{S}。每个物品$i\in[\![1,n]\!]$ 的收益等于 $p_i\rho_i^{\mathrm{H}}$。最优解是用收益最高的物品填满背包容量。

那么，给定 ρ^{H^*} 满足（6）时，每个物品的“收益”为：

$$p_i\rho_i^{\mathrm{H}^*}=\begin{cases}p_ic_i & \text{if } i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J},\\ \dfrac{r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} & \text{if } i\in\mathcal{K}.\end{cases}\tag{EC.13}$$

我们知道，对于每个 $i\in\mathcal{I}$ 和每个 $l\in\mathcal{J}$：

$$p_ic_i\le p_{i^*}c_{i^*}\overset{(EC.10)}{<}\frac{r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*}c_j-\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}\overset{(EC.11)}{\le}p_{i^*+1}c_{i^*+1}\le p_lc_l.\tag{EC.14}$$

因此， $\mathcal{J}$ 中的物品收益最高，其次是 $\mathcal{K}$ 中的物品，它们的收益相同，再其次是 $\mathcal{I}$中的物品。现在我们必须确定 r_{S}的界限。我们在（EC.8）中证明了$r_{\mathrm{S}}>k_{i^*}=|\mathcal{J}|$。上界如下：

$$r_{\mathrm{S}}\overset{(EC.9)}{\le}k_{i^*}+1+\sum_{j=k_{i^*}+2}^{n-i^*}\frac{p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)}}{p_{\pi^{i^*}(j)}}\le n-i^*=|\mathcal{J}|+|\mathcal{K}|.$$

因此，对 ρ^{H^*} 的一种最佳响应是选取 $\mathcal{J}$ 中的所有物品，并选取 $\mathcal{K}$中任意比例的物品，直到背包装满。因此， ρ^{S^*} （在（5）中定义）是对 ρ^{H^*}的一种最佳响应。

为了证明 ρ^{H^*} 是对 ρ^{S^*}的最佳响应，我们同样注意到以下几点：

$$\begin{aligned}\forall\,\rho^{\mathrm{S}}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}},\ \max_{\rho^{\mathrm{H}}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}}\tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}},\rho^{\mathrm{H}})\overset{(4)}{=}\max_{\rho^{\mathrm{H}}}\ &\sum_{i=1}^{n}(1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}})\rho_i^{\mathrm{H}}\\ \text{s.t.}\ &\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{H}}\le r_{\mathrm{H}}\\ &0\le\rho_i^{\mathrm{H}}\le c_i,\qquad\forall\,i\in[\![1,n]\!].\end{aligned}\tag{EC.15}$$

~因此，对 $\rho^{\mathrm{S}} \in \mathcal{A}_{\mathrm{S}}$ 的最佳响应是另一个连续背包问题的最优解，该问题包含 n 种不同的（分数）物品，每种物品的权重均为单位权重，背包容量为 r_{H}。每种物品 $i \in [\![1,n]\!]$ 都有 c_i 个副本可供使用，其收益为 $(1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}})$。最优解是尽可能多地选择利润最高的物品副本，直至装满背包。

那么，给定 ρ^{S^*} 满足（5）时，每个物品的“收益”为：

$$1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}^*} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in \mathcal{I}, \\ 1-p_i & \text{if } i \in \mathcal{J}, \\ 1-\dfrac{r_{\mathrm{S}}-k_{i^*}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} & \text{if } i \in \mathcal{K}. \end{cases} \tag{EC.16}$$

我们有以下不等式：

$$\forall\, i \in \mathcal{J},\ 1-\frac{r_{\mathrm{S}}-k_{i^*}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} \overset{\text{(EC.8)}}{<} 1-p_{\pi^{i^*}(k_{i^*})} \le 1-p_i < 1. \tag{EC.17}$$

因此，$\mathcal{I}$ 中的物品收益最高，其次是 $\mathcal{J}$中的物品，再其次是 $\mathcal{K}$ 中的物品，它们的收益相同。为了确定给定 r_{H}时将选择哪些物品，我们回顾一下 $r_{\mathrm{H}} < m = \sum_{i=1}^{n} c_i$。此外，（EC.10）意味着 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}} c_i$。

因此，对 ρ^{S^*} 的一种最佳响应是：选取 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$中所有物品的副本，并从 $\mathcal{K}$ 中选取任意比例的物品，直至背包装满。因此，（ ρ^{H^*} 在（6）中定义的，是对 ρ^{S^*}的最佳响应。

因此，（ρ^{S^*}， ρ^{H^*}）是 $\tilde{\Gamma}$的一个纳什均衡。根据命题 1，我们可以推知，任何满足 $\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 和 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$ 的策略组合（σ^{S^*}， σ^{H^*}）$\in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$（根据引理1可知其存在）都是 Γ的纳什均衡。

~此外，博弈 Γ 和 Γ 的博弈价值为：

$$U(\sigma^{\mathrm{S}^*},\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho^{\mathrm{H}^*}) = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{k_{i^*}} p_{\pi^{i^*}(j)} c_{\pi^{i^*}(j)} - \frac{\left(r_{\mathrm{S}}-k_{i^*}\right)\left(r_{\mathrm{H}}-\sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}\right)}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}.$$

机制模式 2：现在考虑以下情形：$i^* = 0$ 且 $\tau_{-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_0$。根据引理EC.4，我们知道 $k_0 > \ell_0$。令 $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \mathbb{R}^n$ 分别满足（7）和（8）。我们将类似地证明（ρ^{S^*}， ρ^{H^*}）$\in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$，且是 $\tilde{\Gamma}$的一个纳什均衡。

首先，我们注意到 $\ell_0 < k_0 \le n$，这意味着 $\ell_0 + 1 \le n$。因此， $S^0_{\ell_0+2}$ 定义良好，且$\mathcal{K} \neq \emptyset$。对于每个 $i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^0(\ell_0+1)\}$, $p_{\pi^0(\ell_0+1)} \le p_i$。此外，由于 $\ell_0 + 1 \in K_0$，我们得到：

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathrm{S}^*} = \ell_0 + 1 + p_{\pi^0(\ell_0+1)} S^0_{\ell_0+2} < r_{\mathrm{S}}. \tag{EC.18}$$

因此， $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}$. 接下来，我们证明 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。由于 $\ell_0 \in L_0$、$\ell_0+1 \notin L_0$ 和 $\ell_0+1 \le n$，于是：

$$0 < r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{\ell_0} c_{\pi^0(j)} = \rho^{\mathrm{H}^*}_{\pi^0(\ell_0+1)} = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{\ell_0+1} c_{\pi^0(j)} + c_{\pi^0(\ell_0+1)} \le c_{\pi^0(\ell_0+1)}. \tag{EC.19}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathrm{H}^*} = r_{\mathrm{H}}$，因此我们可以得出结论： $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。

接下来，我们证明 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。给定 ρ^{H^*} 满足 (8) 时，背包问题 (EC.12) 中每件物品的收益为：

$$p_i \rho_i^{\mathrm{H}^*} = \begin{cases} p_i c_i & \text{if } i \in \mathcal{J}, \\ p_{\pi^0(\ell_0+1)} \left(r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{\ell_0} c_{\pi^0(j)} \right) & \text{if } i = \pi^0(\ell_0+1), \\ 0 & \text{if } i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^0(\ell_0+1)\}. \end{cases} \tag{EC.20}$$

由于 r_{S} (EC.18)$> \ell_0+1 = |\mathcal{J}|+1$，因此对 ρ^{H^*} 的最佳响应将选取 $\mathcal{J} \cup \{\pi^0(\ell_0+1)\}$ 中的所有物品（背包可能不会被完全装满）。因此， ρ^{S^*} 在 (7) 中定义的 ρ^{H^*} 是最佳响应。然后，给定 ρ^{S^*} 满足 (7) 时，背包问题 (EC.15) 中每件物品的收益为：

$$1 - p_i \rho_i^{\mathrm{S}^*} = \begin{cases} 1 - p_i & \text{if } i \in \mathcal{J} \cup \{\pi^0(\ell_0+1)\}, \\ 1 - p_{\pi^0(\ell_0+1)} & \text{if } i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^0(\ell_0+1)\}. \end{cases}$$

根据 π^0 的定义，我们有以下不等式： $1 - p_{\pi^0(1)} \ge \cdots \ge 1 - p_{\pi^0(\ell_0+1)}$。由于 (EC.19) 意味着 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{\ell_0} c_{\pi^0(j)}$，因此对 ρ^{S^*} 的一个最佳响应可以选取 $\mathcal{J}$ 中所有物品的副本，并可以选取 $\mathcal{K}$ 中任意比例的物品，直至背包装满。因此， ρ^{H^*} 在 (8) 中定义，是对 ρ^{S^*} 的一个最佳响应。

因此，$(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。由命题 1，我们可以推知，任何满足 $\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$ 的策略组合 ($\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$ 和 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$，都是 Γ 的纳什均衡。此外，~博弈 Γ 和 Γ 的值为：

$$U(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) = \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{\ell_0} p_{\pi^0(j)} c_{\pi^0(j)} - p_{\pi^0(\ell_0+1)} \left(r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{\ell_0} c_{\pi^0(j)} \right).$$

制度模式 3：最后，我们考虑以下情形： $i^* \ge 1$ 且 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_{i^*}$。根据引理EC.4，我们知道 $k_{i^*} > \ell_{i^*}$。令 $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \mathbb{R}^n$ 分别满足（9）和（10）。我们将以类似方式证明（ρ^{S^*}， ρ^{H^*}）$\in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 并且是 $\widetilde{\Gamma}$的一个纳什均衡。

同样地，我们注意到 $\ell_{i^*} < k_{i^*} \le n - i^*$，这意味着 $\ell_{i^*} + 1 \le n - i^*$。因此， $S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}$ 定义良好，并且 $\mathcal{K} \neq \emptyset$。由于 $\ell_{i^*}+1 \in K_{i^*}$，于是

$$r_{\mathrm{S}} > p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} + \ell_{i^*} + 1 = p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} + \ell_{i^*}. \tag{EC.21}$$

因此， $\rho^{\mathrm{S}^*}_{i^*} > 0$。接下来，我们将通过反证法证明以下上界：

$$r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} \le \min\left\{\frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}}, 1\right\}. \tag{EC.22}$$

假设（EC.22）不成立，并令 $j^* \in [\![1,\ n-i^*+1]\!]$ 满足 $\pi^{i^*-1}(j^*) = i^*$。若 $\ell_{i^*}+1 \le j^*-1$，则：

$$\begin{aligned}\frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}} = \min\left\{\frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}}, 1\right\} &< r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - 1 - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} \\ &\overset{\text{(EC.2),(EC.4)}}{=} r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - 1 - p_{\pi^{i^*-1}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*-1}_{\ell_{i^*}+2} + \frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}},\end{aligned}$$

这意味着 $\ell_{i^*}+1 \le k_{i^*-1}$。然而，根据引理 EC.4，只有在 $k_{i^*-1} \ge j^*$ 时才会出现这种情况， (EC.7) 由此我们得到如下矛盾： $j^* \le k_{i^*-1} \le \ell_{i^*}+1 \le j^*-1$。

另一方面，若 $\ell_{i^*}+1 \ge j^*$，则 $j^* < \ell_{i^*}+2 \le n-i^*+1$ 并且

$$1 = \min\left\{\frac{p_{\pi^{i^*-1}(\ell_{i^*}+2)}}{p_{i^*}}, 1\right\} = \min\left\{\frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}}, 1\right\} \overset{\text{(EC.2),(EC.4)}}{<} r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - 1 - p_{\pi^{i^*-1}(\ell_{i^*}+2)} S^{i^*-1}_{\ell_{i^*}+3},$$

这意味着 t 帽 $\ell_{i^*}+2 \le k_{i^*-1}$，从而与（EC.7）矛盾。因此，（EC.22）成立。最后 ，

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^{\mathrm{S}^*}_i = r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - p_{\pi^*(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} + |\mathcal{J}| + 1 + p_{\pi^*(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} = r_{\mathrm{S}},$$

这意味着 $\rho^{\mathrm{S}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}$。

接下来，我们证明 $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。由于 $[\![1$ 中的地点按其检测潜力排序，因此对每个 $i \in \mathcal{K}$，都有 $p_i c_i \ge p_{i^*} c_{i^*}$。由于 $\ell_{i^*} \in L_{i^*}$，因此：

$$\rho^{\mathrm{H}^*}_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} - p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} + \frac{p_{i^*} c_{i^*}}{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}} > \frac{p_{i^*} c_{i^*}}{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}} \ge 0. \tag{EC.23}$$

此外，由于 $\ell_{i^*}+1 \notin L_{i^*}$ 和 $\ell_{i^*}+1 \le n-i^*$，因此：

$$\rho^{\mathrm{H}^*}_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}+1} c_{\pi^{i^*}(j)} - p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} + c_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} \le c_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}. \tag{EC.24}$$

最后，

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^{\mathrm{H}^*}_i = \sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} c_i + r_{\mathrm{H}} - \sum_{i=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^*(j)} - p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} = r_{\mathrm{H}}.$$

因此， $\rho^{\mathrm{H}^*} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$。

接下来，我们证明 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。给定满足 (10) 的 ρ^{H^*} ，背包问题 (EC.12) 中每个对象的收益为：

$$p_i \rho^{\mathrm{H}^*}_i = \begin{cases} p_i c_i & \text{if } i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}, \\ p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} \left(r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} - p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} \right) & \text{if } i = \pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1), \\ p_{i^*} c_{i^*} & \text{if } i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}. \end{cases} \tag{EC.25}$$

由于 $[\![1, n]\!]$ 中的地点按检测潜力排序，因此我们知道 $p_1c_1 \leq \cdots \leq p_{i^*}c_{i^*} \leq p_jc_j$ 对每个 $j \in \mathcal{J}$ 均成立。此外，我们有以下不等式：

$$p_{i^*}c_{i^*} \overset{\text{(EC.23)}}{<} p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} \left(r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} - p_{i^*}c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} \right). \tag{EC.26}$$

因此， $\mathcal{J} \cup \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$ 中的物品收益最高，其次是收益相同的 $\{i^*\} \cup \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$ 中的物品，再其次是 $\mathcal{I} \setminus \{i^*\}$中的物品。

根据（EC.21），我们知道 $r_{\mathrm{S}} > \ell_{i^*}+1 = |\mathcal{J} \cup \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}|$。此外，上界如下：

$$r_{\mathrm{S}} \overset{\text{(EC.22)}}{\leq} \ell_{i^*}+1+\sum_{j=\ell_{i^*}+1}^{n-i^*} \frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{\pi^{i^*}(j)}} \leq n-i^*+1 = |\{i^*\} \cup \mathcal{J} \cup \mathcal{K}|.$$

因此，对 ρ^{H^*}的一个最佳响应会选择 $\mathcal{J} \cup \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$中的所有物品，并从 $\{i^*\} \cup \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$中的物品任意选择一部分，直到背包装满。因此， ρ^{S^*} 在（9）中定义，是对 ρ^{H^*}的一个最佳响应。

然后，给定 ρ^{S^*} 满足（9），背包问题中每个物品的收益（EC.15）为：

$$1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}^*} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in \mathcal{I} \setminus \{i^*\} \\ 1-p_{i^*}(r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-p_{\pi^*(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}) & \text{if } i = i^* \\ 1-p_i & \text{if } i \in \mathcal{J} \cup \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}, \\ 1-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} & \text{if } i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}. \end{cases} \tag{EC.27}$$

根据 π^{i^*} 的定义，我们有以下不等式：$1-p_{\pi^{i^*}(1)} \geq \cdots \geq 1-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}$。此外，(EC.22) 意味着 $1-p_{i^*}(r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-p_{\pi^*(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}) \geq 1-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}$。

由于（EC.23）意味着 $r_{\mathrm{H}} > \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}$，因此对 ρ^{S^*} 的一个最佳响应是选取 $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ 中的所有物品副本，并从 $\mathcal{K}$ 中选取任意比例的物品，直到背包装满。因此， ρ^{H^*} 在（10）中定义的内容是对 ρ^{S^*}的一个最佳响应。

因此，$(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*})$ 是 $\tilde{\Gamma}$的纳什均衡。由命题 1可推得，任何满足 $\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) \in \Delta_{\mathrm{S}} \times \Delta_{\mathrm{H}}$的策略组合 $(\rho(\sigma^{\mathrm{S}^*}) = \rho^{\mathrm{S}^*}$和 $\rho(\sigma^{\mathrm{H}^*}) = \rho^{\mathrm{H}^*}$都是 Γ的纳什均衡。此外，博弈 $\tilde{}$的博弈 Γ 和 Γ 的取值为：

$$\begin{aligned} U(\sigma^{\mathrm{S}^*}, \sigma^{\mathrm{H}^*}) = \tilde{u}(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) = & r_{\mathrm{H}} - p_{i^*}\left(r_{\mathrm{S}}-\ell_{i^*}-p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}\right)c_{i^*} - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} p_{\pi^{i^*}(j)}c_{\pi^{i^*}(j)} \\ & - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}\left(r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}\right). \end{aligned}$$

□

PROPOSITION EC.1. 令 $r_{\mathrm{S}} \in [\![1, n-1]\!]$ 和 $r_{\mathrm{H}} \in [\![1, m-1]\!]$。令 $i^* \in [\![0, n-1]\!]$ 满足 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。

制度模式1：$\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。此外，假设$r_{\mathrm{H}} < \tau_{i^*}$和$r_{\mathrm{S}} < k_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} S^{i^*}_{k_{i^*}+2}$。那么，(5)-(6) 是策略组合$(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 成为~.....的纳什均衡 Γ的必要且充分条件。

机制模式 2：$i^* = 0$ 和 $\tau_{-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_0$。此外，假设$p_{\pi^0(\ell_0)} < p_{\pi^0(\ell_0+1)} < 1$ 和$p_{\pi^0(\ell_0+1)} < p_{\pi^0(\ell_0+2)}$，若 $\ell_0 \le n-2$。那么，(7)-(8)是策略组合$(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 成为 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡的必要且充分条件。

制度模式 3：$i^* \ge 1$ 和 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_{i^*}$。另假设$p_{i^*-1} c_{i^*-1} < p_{i^*} c_{i^*} < p_{i^*+1} c_{i^*+1}$，$r_{\mathrm{H}} < \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}+1} c_{\pi^{i^*}(j)} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}$，$r_{\mathrm{S}} < k_{i^*-1} + 1 + p_{\pi^{i^*-1}(k_{i^*-1}+1)} S^{i^*-1}_{k_{i^*-1}+2}$，$p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*})} < p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} < 1$，且当$\ell_{i^*} \le n - i^* - 2$时，$p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} < p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+2)}$。那么，(9)-(10) 是策略组合 $(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}^*}) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 成为 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡的充要条件。

命题证明 *EC.1*。

制度模式1：$\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。我们还考虑以下非边界情形假设：$r_{\mathrm{H}} < \tau_{i^*}$ 和$r_{\mathrm{S}} < k_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} S^{i^*}_{k_{i^*}+2}$。

令（ρ^{S^*}，ρ^{H^*}）$\in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 满足（5）-（6），并令（$\rho^{\mathrm{S}'}$，$\rho^{\mathrm{H}'}$）$\in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} \times \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 为博弈$\widetilde{\Gamma}$的任意纳什均衡 $\widetilde{\Gamma}$。由于$\rho^{\mathrm{S}'}$，ρ^{H^*}是零和博弈 $\widetilde{\Gamma}$，因此（$\rho^{\mathrm{S}'}$，ρ^{H^*}）也是 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡。

由于$\rho^{\mathrm{S}'}$ 是对ρ^{H^*}的最佳响应，因此它是连续背包问题（EC.12）的最优解。每个对象的收益由（EC.13）给出，并满足不等式（EC.14）。此外，$r_{\mathrm{H}} < \tau_{i^*}$ 意味着：

$$\frac{r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{k_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}} < p_{i^*+1} c_{i^*+1}.$$

由于 $|\mathcal{J}| < r_{\mathrm{S}} \le |\mathcal{J}| + |\mathcal{K}|$，因此针对 ρ^{H^*} 的任何最佳响应都必须选取 $\mathcal{J}$中的所有物品，不得选取 $\mathcal{I}$中的任何物品，并且必须装满背包。因此，对于每个 $i \in \mathcal{I}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'} = 0$；对于每个 $i \in \mathcal{J}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'} = 1$；并且 $\sum_{i=1}^n \rho_i^{\mathrm{S}'} = r_{\mathrm{S}}$。

接下来，由于 ρ^{H^*} 是 $\rho^{\mathrm{S}'}$的最佳响应，因此它是连续背包问题（EC.15）的最优解。接下来，我们写出与 $\rho^{\mathrm{S}'}$相关的（EC.15）的对偶问题：

$$\begin{aligned} \min_{\alpha,\beta} \ & r_{\mathrm{H}} \alpha + \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i \\ \text{s.t.} \ & \alpha + \beta_i \ge 1 - p_i \rho_i^{\mathrm{S}'}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \\ & \alpha \ge 0 \\ & \beta_i \ge 0, \qquad\qquad \forall i \in [\![1, n]\!]. \end{aligned} \tag{EC.28}$$

令（α^*，β^*）为对偶问题（EC.28）的一个最优解。由于对每个 $i\in\mathcal{K}$都有 $0<\rho_i^{\mathrm{H}^*}<c_i$，因此根据互补松弛，$\beta_i^*=0$ 且 $\rho_i^{\mathrm{S}'}=(1-\alpha^*)/p_i$ 对每个 $i\in\mathcal{K}$都成立。由于 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 必须完全装满背包（EC.12），因此：

$$r_{\mathrm{S}}=\sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}\cup\mathcal{K}}\rho_i^{\mathrm{S}'}=k_{i^*}+(1-\alpha^*)S^{i^*}_{k_{i^*}+1}.$$

因此，对于每个 $i\in\mathcal{K}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'}=(r_{\mathrm{S}}-k_{i^*})/(p_iS^{i^*}_{k_{i^*}+1})$。综上，$\rho^{\mathrm{S}'}$ 满足 (5)。

同理，$(\rho^{\mathrm{S}^*},\ \rho^{\mathrm{H}'})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$的纳什均衡。于是，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 是 ρ^{S^*} 的最佳响应，也是连续背包问题的最优解 (EC.15)。每件物品的利润由 (EC.16) 给出，并满足不等式 (EC.17)。由于 $\sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}}c_i<r_{\mathrm{H}}<m$，因此对 ρ^{S^*} 的任何最佳响应都必须选取 $\mathcal{I}$中的所有物品副本，以及 $\mathcal{J}$。因此，对于每个 $\rho_i^{\mathrm{H}'}=c_i$，$i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}$。此外，$k_{i^*}+1\notin K_{i^*}$和非边界情形假设意味着：

$$1-\frac{r_{\mathrm{S}}-k_{i^*}}{S^{i^*}_{k_{i^*}+1}}\overset{(EC.9)}{>}1-p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)}\geq 0. \tag{EC.29}$$

因此，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 必须完全装满背包，且$\sum_{i=1}^n\rho_i^{\mathrm{H}'}=r_{\mathrm{H}}$。

接下来，由于 ρ^{S^*} 是对 $\rho^{\mathrm{H}'}$的最佳响应，因此它是（EC.12）中连续背包问题的最优解。（EC.12）关于 $\rho^{\mathrm{H}'}$ 的对偶问题为：

$$\begin{aligned}\min_{\eta,\xi}\ & r_{\mathrm{S}}\eta+\sum_{i=1}^n\xi_i\\ \text{s.t. }& \eta+\xi_i\geq p_i\rho_i^{\mathrm{H}'},\quad \forall i\in[\![1,n]\!]\\ & \eta\geq 0,\\ & \xi_i\geq 0,\qquad\qquad \forall i\in[\![1,n]\!].\end{aligned} \tag{EC.30}$$

设（η^*，ξ^*）是对偶问题（EC.30）的最优解。由于（EC.8）和（EC.29）意味着对每个 $0<\rho_i^{\mathrm{S}^*}<1$，$i\in\mathcal{K}$，因此根据互补松弛，$\xi_i^*=0$ 且 $\rho_i^{\mathrm{H}'}=\eta^*/p_i$ 对每个$i\in\mathcal{K}$都成立。由于 $\rho^{\mathrm{H}'}$ 必须完全装满背包（EC.15），因此：

$$r_{\mathrm{H}}=\sum_{i\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}\cup\mathcal{K}}\rho_i^{\mathrm{H}'}=\sum_{j=1}^{i^*}c_j+\sum_{j=1}^{k_{i^*}}c_{\pi^{i^*}(j)}+\eta S^{i^*}_{k_{i^*}+1}.$$

因此，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 满足（6）。

机制模式 2：$i^*=0$ 和 $\tau_{-1}<r_{\mathrm{H}}\leq\nu_0$。我们还考虑以下非边界情形假设：$p_{\pi^0(\ell_0)}<p_{\pi^0(\ell_0+1)}<1$ 和$p_{\pi^0(\ell_0+1)}<p_{\pi^0(\ell_0+2)}$ 若 $\ell_0\leq n-2$。

令 $\rho^{\mathrm{H}^*}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 满足（8），并令 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 为 $\widetilde{\Gamma}$中 S 的一个均衡策略。由于 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 是对 ρ^{H^*}的最佳响应，因此它是连续背包问题（EC.12）的最优解。每件物品的收益由（EC.20）给出。此外，（EC.19）和不等式 $r_{\mathrm{S}}>|\mathcal{J}|+1$ 意味着

对 ρ^{H^*} 的任何最佳响应都必须选取 $\mathcal{J}\cup\{\pi^0(\ell_0+1)\}$中的所有物品。因此，对于每个 $i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^0(\ell_0+1)\}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'}=1$。

由于 ρ^{H^*} 是对 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 的最佳响应，因此它是连续背包问题 (EC.15) 的最优解。由于 0 < $\rho_{\pi^0}^{\mathrm{H}^*}(\ell_0+1)$，因此在对偶问题 (EC.28) 的最优解处，$\alpha^*=1-p_{\pi^0(\ell_0+1)}\rho_{\pi^0}^{\mathrm{S}'}(\ell_0+1)-\beta_{\pi^0}^*(\ell_0+1)=1-p_{\pi^0(\ell_0+1)}-\beta_{\pi^0}^*(\ell_0+1)\le 1-p_{\pi^0(\ell_0+1)}$。最后，对于每个 $i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\}$，$\rho_{\pi^0}^{\mathrm{H}^*}(\ell_0+1)=0<c_{\pi^0(\ell_0+1)}$。因此，根据互补松弛，$\beta_i^*=0$ 且对于每个 $i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'}\ge(1-\alpha^*)/p_i\ge p_{\pi^0(\ell_0+1)}/p_i$。总之，$\rho^{\mathrm{S}'}$ 满足 (7)。

令 $\rho^{\mathrm{H}'}$ 为 $\widetilde{\Gamma}$ 中 H 的一个均衡策略，并考虑满足以下条件的 $\rho^{\mathrm{S}^*}\in\mathcal{A}_{\mathrm{S}}$

$$\begin{aligned}\rho_i^{\mathrm{S}^*}&=1 \qquad \text{if } i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^0(\ell_0+1)\},\\ \frac{p_{\pi^0(\ell_0+1)}}{p_i}<\rho_i^{\mathrm{S}^*}&<1 \qquad \text{if } i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\},\\ \sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{S}^*}&<r_{\mathrm{S}}.\end{aligned}$$

根据（EC.18）以及在$p_{\pi^0(\ell_0+1)}<p_i$对每个 $i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\}$均成立这一点，在非边界情形假设下，这样的向量确实存在。因此，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 是对 ρ^{S^*} 的最佳响应，也是连续背包问题（EC.15）的最优解。每个物品的收益如下：

$$\begin{aligned}&\forall i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^0(\ell_0+1)\},\ 1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}^*}=1-p_i\\ &\forall i\in\mathcal{K}\setminus\{\pi^0(\ell_0+1)\},\ 1-p_i\rho_i^{\mathrm{S}^*}<1-p_{\pi^0(\ell_0+1)}.\end{aligned}$$

在非边界情形假设下，$1-p_{\pi^0(1)}\ge\cdots\ge 1-p_{\pi^0(\ell_0)}>1-p_{\pi^0(\ell_0+1)}>0$。由于$\sum_{j=1}^{\ell_0}c_{\pi^0(j)}<r_{\mathrm{H}}<\sum_{j=1}^{\ell_0+1}c_{\pi^0(j)}$，因此，对 ρ^{S^*} 的任何最佳响应都会选取 $\mathcal{J}$中的所有物品副本，并用 $\pi^0(\ell_0+1)$ 中的物品填满背包剩余空间。因此，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 满足（8）。

制度模式 3：$i^*\ge 1$ 和 $\tau_{i^*-1}<r_{\mathrm{H}}\le\nu_{i^*}$。此外，我们还考虑以下非边界情形假设：$p_{i^*-1}c_{i^*-1}<p_{i^*}c_{i^*}<p_{i^*+1}c_{i^*+1}$, $r_{\mathrm{H}}<\sum_{j=1}^{i^*}c_j+\sum_{j=1}^{\ell_{i^*}+1}c_{\pi^{i^*}(j)}+p_{i^*}c_{i^*}S_{\ell_{i^*}+2}^{i^*}$, $r_{\mathrm{S}}<k_{i^*-1}+1+p_{\pi^{i^*-1}(k_{i^*-1}+1)}S_{k_{i^*-1}+2}^{i^*-1}$, $p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*})}<p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}<1$，以及 $p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}<p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+2)}$，当 $\ell_{i^*}\le n-i^*-2$ 时。

令 $(\rho^{\mathrm{S}^*},\rho^{\mathrm{H}^*})\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}\times\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 满足 (9)-(10)，并令 $(\rho^{\mathrm{S}'},\rho^{\mathrm{H}'})\in\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}\times\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{H}}$ 为博弈$\widetilde{\Gamma}$的任意一个纳什均衡。由于 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 是对 ρ^{H^*}的最佳响应，因此它是连续背包问题 (EC.12) 的最优解。每件物品的收益由 (EC.25) 给出。在非边界情形假设下，$p_1c_1\le\cdots\le p_{i^*-1}c_{i^*-1}<p_{i^*}c_{i^*}<p_{i^*+1}c_{i^*+1}\le\cdots\le p_nc_n$。根据 (EC.26) 以及 $|\mathcal{J}|+1<r_{\mathrm{S}}\le|\mathcal{J}|+|\mathcal{K}|+1$ 这一事实，我们推得，对 ρ^{H^*} 的任何最佳响应都会选取 $\mathcal{J}\cup\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$中的所有物品，不选取 $\mathcal{I}\setminus\{i^*\}$中的任何物品，并将背包 (EC.12) 完全装满。因此，对于每个 $i\in\mathcal{I}\setminus\{i^*\}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'}=0$；对于每个 $i\in\mathcal{J}\cup\{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$，$\rho_i^{\mathrm{S}'}=1$。并且 $\sum_{i=1}^{n}\rho_i^{\mathrm{S}'}=r_{\mathrm{S}}$。

由于 ρ^{H^*} 是对 $\rho^{\mathrm{S}'}$ 的最佳响应，因此它是连续背包问题的最优解（EC.15）。在非边界情形假设下，$0<\rho_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}^{\mathrm{H}^*}<c_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}$。因此，在最优状态下

对偶问题（EC.28）中，$\alpha^* = 1 - p_{\pi^{i*}(\ell_{i^*}+1)}\rho^{\mathrm{S}'}_{\pi^{i*}(\ell_{i^*}+1)} = 1 - p_{\pi^{i*}(\ell_{i^*}+1)}$。此外，由于 $0 < \rho_i^{\mathrm{H}^*} < c_i$对每个 $i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$ 在非边界情形假设下，因此 $\rho_i^{\mathrm{S}'} = (1-\alpha^*)/p_i = p_{\pi^{i*}(\ell_{i^*}+1)}/p_i$。由于 $\rho^{\mathrm{H}'}$ 必须将背包（EC.12）装满，因此：

$$\rho^{\mathrm{S}'}_{i^*} = r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - 1 - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2} = r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1}.$$

因此，$\rho^{\mathrm{S}'}$ 满足（9）。

类似地，$(\rho^{\mathrm{S}^*}, \rho^{\mathrm{H}'})$ 是 $\widetilde{\Gamma}$ 的纳什均衡。因此，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 是对 ρ^{S^*} 的最佳响应，也是连续背包问题的最优解（EC.15）。每个对象的利润由（EC.27）给出。在非边界情形假设下，$1 - p_{\pi^{i^*}(1)} \geq \cdots \geq 1 - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*})} > 1 - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} > 0$。接下来我们证明：

$$r_{\mathrm{S}} - \ell_{i^*} - p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} < \min\left\{\frac{p_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)}}{p_{i^*}}, 1\right\}. \tag{EC.31}$$

假设（EC.31）不成立，并令 $j^* \in [\![1,\ n - i^* + 1]\!]$ 满足 $\pi^{i^*-1}(j^*) = i^*$。若 $\ell_{i^*} + 1 \leq j^* - 1$，则（EC.22）意味着 $r_{\mathrm{S}} = \ell_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*-1}(\ell_{i^*}+1)} S^{i^*-1}_{\ell_{i^*}+2}$，这与非边界情形假设矛盾。另一方面，若 $\ell_{i^*} + 1 \geq j^*$，则 $j^* < \ell_{i^*} + 2 \leq n - i^* + 1$ 和$r_{\mathrm{S}} = \ell_{i^*} + 2 + p_{\pi^{i^*-1}(\ell_{i^*}+2)} S^{i^*-1}_{\ell_{i^*}+3}$，这也与非边界情形假设矛盾。因此，（EC.31）成立。

由于 $\sum_{i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} c_i < r_{\mathrm{H}}$，因此，对 ρ^{S^*} 的任何最佳响应都必须选择 $\mathcal{I}$ 中的物品的所有副本以及 $\mathcal{J}$，并且必须完全填满背包 (EC.15)。因此，对于每个 $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathrm{H}'} = r_{\mathrm{H}}$，都有 $\rho_i^{\mathrm{H}'} = c_i$。由于 ρ^{S^*} 是对 $\rho^{\mathrm{H}'}$的最佳响应，因此它是连续背包问题 (EC.12) 的最优解。在非边界情形假设下，对于每个 $i \in \{i^*\} \cup \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$，都有 $0 < \rho_i^{\mathrm{S}^*} < 1$。因此，在对偶问题 (EC.30) 达到最优时，$\eta^* = p_{i^*}\rho_{i^*}^{\mathrm{H}'} = p_{i^*}c_{i^*}$，并且对于每个 $i \in \mathcal{K} \setminus \{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)\}$，都有 $\rho_{i^*}^{\mathrm{H}'} = \eta^*/p_i = p_{i^*}c_{i^*}/p_i$。最后，由于 $\rho^{\mathrm{H}'}$完全填满了背包 (EC.15)，因此：

$$\rho^{\mathrm{H}'}_{\pi^{i^*}(\ell_{i^*}+1)} = r_{\mathrm{H}} - \sum_{j=1}^{i^*} c_j - \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} - p_{i^*}c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}.$$

综上，$\rho^{\mathrm{H}'}$ 满足（10）。 □

命题 *2* 的证明。 在此证明中，我们允许博弈 Γ 中的容量向量 c 以及参与者的~资源 r_{S} 和 r_{H} 连续变化。令 Ψ 为由（11）给出的参数集合~，使得 Γ 非平凡。首先，我们注意到

$$\Psi' := \{(n, p, c, r_{\mathrm{S}}, r_{\mathrm{H}}) \in \Psi : p_i < 1 \ \forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i \neq p_j \text{ and } p_i c_i \neq p_j c_j \ \forall i \neq j \in [\![1,n]\!]\}$$

是 Ψ 的一个稠密子集。接下来，我们考虑博弈参数（n、p、c、r_{S}、r_{H}）$\in \Psi'$ 的一种实例化。我们对索引排序，使得对于每个 $i \in [\![1,\ p_i c_i < p_{i+1} c_{i+1}\ n-1]\!]$。令 $i^* \in [\![0、\ n-1]\!]$ 满足 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \leq \tau_{i^*}$。

我们首先考虑制度模式1的情形，即 $\nu_{i^*} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*}$。接着，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，我们考虑新的玩家资源 $\hat{r}_{\mathrm{S}} = r_{\mathrm{S}} - \varepsilon$ 和 $\hat{r}_{\mathrm{H}} = r_{\mathrm{H}} - \varepsilon$。为避免混淆，我们将依赖于 $\hat{r}_{\mathrm{S}}$ 和 $\hat{r}_{\mathrm{H}}$ 的相应参数记为 k_i、ℓ_i、$\hat{\tau}_i$、$\hat{\nu}_i$ 和 i^*。

根据 k_{i^*} 的定义，对于任意小的 ε，我们得到：

$$k_{i^*} + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*})} S^{i^*}_{k_{i^*}+1} < \hat{r}_{\mathrm{S}} < r_{\mathrm{S}} \le k_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} S^{i^*}_{k_{i^*}+2}.$$

因此，$k_{i^*} = k_{i^*}$。这意味着 $\hat{\tau}_{i^*} = \tau_{i^*}$ 和 $\hat{\nu}_{i^*} = \nu_{i^*}$。于是，对于任意小的 ε，我们推导出以下不等式：$\hat{\nu}_{i^*} = \nu_{i^*} < \hat{r}_{\mathrm{H}} < r_{\mathrm{H}} \le \tau_{i^*} = \hat{\tau}_{i^*}$. 因此，$i^* = i^*$。

由于 $\nu_{i^*} < \hat{r}_{\mathrm{H}} < \tau_{i^*}$ 和 $\hat{r}_{\mathrm{S}} < k_{i^*} + 1 + p_{\pi^{i^*}(k_{i^*}+1)} S^{i^*}_{k_{i^*}+2}$，因此命题 EC.1 表明，$\tilde{}$博弈 Γ 中参数为（n，p，c，$\hat{r}_{\mathrm{S}}$，$\hat{r}_{\mathrm{H}}$）时，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，所有纯纳什均衡都满足相应的均衡条件 (5)–(6)。此外，（n，p，c，$\hat{r}_{\mathrm{S}}$，$\hat{r}_{\mathrm{H}}$）与（n，p，c，r_{S}，r_{H}）任意接近。

接下来考虑机制模式 2 的情形，即 $i^* = 0$ 且 $r_{\mathrm{H}} \le \nu_0$。命题 EC.1 意味着$\tilde{}$，博弈 Γ 在参数 $(n, p, c, \hat{r}_{\mathrm{S}}, \hat{r}_{\mathrm{H}}) \in \Psi'$ 下的所有纯纳什均衡都满足相应的均衡条件 (7)-(8)。

最后，我们考虑制度模式 3 的情形，即 $i^* \ge 1$ 和 $\tau_{i^*-1} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_{i^*}$。接着，考虑 $\varepsilon > 0$ 任意小时对应的新玩家资源 $\hat{r}_{\mathrm{S}} = r_{\mathrm{S}} - \varepsilon$ 和 $\hat{r}_{\mathrm{H}} = r_{\mathrm{H}} - \varepsilon$。类似地，我们将相应的辅助参数记为 k_i、ℓ_i、$\hat{\tau}_i$、$\hat{\nu}_i$ 和 i^*。

$\hat{}$ 使用与上述类似的推导，我们得出，对于任意小的 ε、$k_{i^*} = k_{i^*}$ 和 $\hat{\nu}_{i^*} = \nu_{i^*}$。然后，根据 k_{i^*-1} 的定义，我们得到：

$$k_{i^*-1} + p_{\pi^{i^*-1}(k_{i^*-1})} S^{i^*-1}_{k_{i^*-1}+1} < \hat{r}_{\mathrm{S}} < r_{\mathrm{S}} \le k_{i^*-1} + 1 + p_{\pi^{i^*-1}(k_{i^*-1}+1)} S^{i^*-1}_{k_{i^*-1}+2}.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 因此，$k_{i^*-1} = k_{i^*-1}$ 和 $\hat{\tau}_{i^*-1} = \tau_{i^*-1}$。于是，我们得到 $i^* = i^*$，因为 $\hat{\tau}_{i^*-1} = \tau_{i^*-1} < \hat{r}_{\mathrm{H}} < r_{\mathrm{H}} \le \nu_{i^*} = \hat{\nu}_{i^*}$。最后，根据 ℓ_{i^*} 的定义，我们得到：

$$\sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}} c_{\pi^{i^*}(j)} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+1} < \hat{r}_{\mathrm{H}} < r_{\mathrm{H}} \le \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}+1} c_{\pi^{i^*}(j)} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}.$$

因此，$\hat{\ell}_{i^*} = \ell_{i^*}$。由于 $r_{\mathrm{H}} < \sum_{j=1}^{i^*} c_j + \sum_{j=1}^{\ell_{i^*}+1} c_{\pi^{i^*}(j)} + p_{i^*} c_{i^*} S^{i^*}_{\ell_{i^*}+2}$ 且 $r_{\mathrm{S}} < k_{i^*-1} + 1 + p_{\pi^{i^*-1}(k_{i^*-1}+1)} S^{i^*-1}_{k_{i^*-1}+2}$，命题 EC.1 蕴含，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，博弈 $\tilde{\Gamma}$ 在参数（n、p、c、$\hat{r}_{\mathrm{S}}$、$\hat{r}_{\mathrm{H}}$）下的所有纯纳什均衡都满足相应的均衡条件（9）—（10）。此外，（n、p、c、$\hat{r}_{\mathrm{S}}$、$\hat{r}_{\mathrm{H}}$）与（n、p、c、r_{S}、r_{H}）任意接近。□

EC.2. 第4节的证明

在证明定理 2之前，我们先说明算法 1 定义良好且会终止。我们用 $\kappa^* \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{+\infty\}$ 表示算法 1 中 while 循环（3–16）的迭代次数。

PROPOSITION EC.2. 算法*1* 的每次迭代都有明确定义。特别是,

$$\forall k \in [\![1, \kappa^* + 1]\!],\ \bar{\rho}^k \in [0,1]^n \quad \textit{and} \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k \leq \bar{r}, \tag{EC.32}$$

$$\forall k \in [\![1, \kappa^*]\!],\ q^k \in [\![1, n]\!] \quad \textit{and} \quad \delta^k \in [0,1). \tag{EC.33}$$

命题的证明 *EC.2.* 我们通过归纳法证明（EC.32）和（EC.33）。我们首先考虑$k=1$。根据构造， $\bar{\rho}^1 = \rho - \lfloor \rho \rfloor \in [0,1]^n$。此外，根据 $\mathcal{A}(b,r)$ 的定义，我们得到:

$$\bar{r} = r - \sum_{i=1}^{n} \lfloor \rho_i \rfloor = r - \sum_{i=1}^{n} \rho_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^1 \geq \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^1. \tag{EC.34}$$

接下来，当算法启动 while 循环（ - ）时构造

q^1 3 16 $\bar{\rho}^1 \notin$ ，也 $\{0,1\}^n$ $\bar{\rho}^1 \geq \mathbf{0}_n$ $\bar{r} \in \mathbb{Z}$ $1 \leq |\{i \in [\![1,n]\!] \ \ \bar{\rho}_i^1 > 0\}| \leq n$ $1 \leq \lceil \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^1 \rceil$ $\overset{34}{\leq}$ $\bar{r}$ 就是说，在.....时。由于.....且.....，因此：.....以及(EC.)。因此， $1 \leq q^1 \leq n$。最后，由于 $q^1 \in [\![1$、 $n]\!]$ 和 $\delta^1 \in [0,1]$ 是 $\bar{\rho}^1 \in [0,1]^n$ 的结果，因此 δ^1 定义良好。接下来，我们通过反证法证明 $\delta^1 < 1$。事实上，如果 $\delta^1 = 1$，那么我们首先推断，对于每个 $j \in [\![1,$ $q^1]\!]$， $1 \geq \bar{\rho}^1_{\theta^1(j)} \geq \bar{\rho}^1_{\theta^1(q^1)} \geq \delta^1 = 1$。如果 $q^1 = n$，则与 $\bar{\rho}^1 \notin \{0,1\}^n$ 矛盾。如果$q^1 < n$，那么我们推导出以下不等式:

$$q^1 = \sum_{j=1}^{q^1} \bar{\rho}^1_{\theta^1(j)} \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^1 \overset{\text{(EC.34)}}{\leq} \bar{r}, \tag{EC.35}$$

$$q^1 \leq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^1 = 1\right\}\right| \leq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^1 > 0\right\}\right|. \tag{EC.36}$$

若 $q^1 = \bar{r}$（分别地，若 $q^1 = |\{i \in [\![1,n]\!] : \ \bar{\rho}_i^1 > 0\}|$），则 (EC.35)（分别地，(EC.36)）意味着 $\bar{\rho}^1_{\theta^1(j)} = 0$ 对任意 $j \in [\![q^1+1, n]\!]$ 均成立。这也与 $\bar{\rho}^1 \notin \{0,1\}^n$ 矛盾。因此， $\delta^1 < 1$。

接下来，我们假设 (EC.32) 和 (EC.33) 对 $k \in [\![1, \kappa^*]\!]$ 成立。由于 $\delta^k < 1$，因此我们得到 :

$$\forall j \in [\![1, q^k]\!],\ 0 \leq \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)} - \bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k)}}{1-\delta^k} \leq \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)} - \delta^k}{1-\delta^k} = \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k(j)} \leq \frac{1-\delta^k}{1-\delta^k} = 1,$$

$$\text{and if } q^k < n, \text{ then } \forall j \in [\![q^k+1, n]\!],\ 0 \leq \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)}}{1-\delta^k} = \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k(j)} \leq \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)}}{\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)}} \leq 1.$$

因此，对任意 $i \in [\![1,n]\!]$, $\bar{\rho}_i^{k+1} \in [0,1]$ 均成立。接下来，我们证明 $\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^{k+1} \leq \bar{r}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{q^k} \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)} - \delta^k}{1-\delta^k} + \sum_{j=q^k+1}^{n} \frac{\bar{\rho}^k_{\theta^k(j)}}{1-\delta^k} = \frac{1}{1-\delta^k} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k - q^k \delta^k \right).$$

如果 $q^k = \bar{r}$，那么:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^{k+1} \leq \frac{1}{1-\delta^k} \left(\bar{r} - \bar{r}\delta^k \right) = \bar{r}.$$

另一方面，如果 $q^k = \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right|$，那么 $\bar{\rho}^k \in [0,1]^n$ 意味着：

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^{k+1} = \frac{1}{1-\delta^k}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k - \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right| \delta^k\right) \leq \frac{1}{1-\delta^k}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k - \delta^k \sum_{\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\}} \bar{\rho}_i^k\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k \leq \bar{r}.$$

因此，$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^{k+1} \leq \bar{r}$。由于 $\bar{\rho}^{k+1} \in [0,1]^n$，因此可以应用针对 $k=1$所推导的相同论证，从而得出：如果 $k < \kappa^*$ 且 $\bar{\rho}^{k+1} \notin \{0,1\}^n$，那么 $q^{k+1} \in [\![1,\ n]\!]$ 以及 $\delta^{k+1} \in [0,1)$。总之，（EC.32）和（EC.33）通过归纳法成立。□

PROPOSITION EC.3. 算法 *1* 在 $\kappa^* \leq n$ 次 while 循环迭代后终止（*3-16*）。特别地，对于每个 $k \in [\![1,\ \kappa^*]\!]$，$\delta^k > 0$，以及

$$\left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^{k+1} \in \{0,1\}\right\}\right| > \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k \in \{0,1\}\right\}\right|.$$

命题 *EC.3* 的证明。令 $k \in [\![1,\kappa^*]\!]$。首先，我们证明 $\delta^k > 0$。由于 $q^k \leq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right|$，因此 $\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k)} > 0$。接下来，我们用反证法证明，如果 $q^k < n$，那么$\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)} < 1$：反之，若 $q^k < n$ 且 $\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)} = 1$，则首先可推出 $q^k < \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right|$。此外，

$$\bar{r} \overset{(EC.32)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k \geq \sum_{j=1}^{q^k+1} \bar{\rho}^k_{\theta^k(j)} = q^k + 1 > q^k.$$

这与 q^k 的定义矛盾。因此，如果 $q^k < n$，那么 $\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)} < 1$，进而可推出 $\delta^k > 0$。

现在我们证明 $\left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^{k+1} \in \{0,1\}\right\}\right| > \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k \in \{0,1\}\right\}\right|$。令 $j' \in [\![1,n]\!]$ 满足 $\bar{\rho}^k_{\theta^k(j')} = 0$。必然有 $j' > \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right| \geq q^k$，这意味着 $\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k\ (j')} = \bar{\rho}^k_{\theta^k(j')} / (1-\delta^k) = 0$.

接下来，我们考虑满足 $j' \in [\![1,n]\!]$ $\bar{\rho}^k_{\theta^k(j')} = 1$ 的情形。于是，$j' \leq q^k$，这可由以下不等式推出：

$$j' = \sum_{j=1}^{j'} \bar{\rho}^k_{\theta^k(j)} \leq \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^k \overset{(EC.32)}{\leq} \bar{r},$$
$$j' \leq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k = 1\right\}\right| \leq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k > 0\right\}\right|.$$

因此，$j' \leq q^k$ 和$\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k\ (j')} = (\bar{\rho}^k_{\theta^k(j')} - \delta^k)/(1-\delta^k) = 1$. 这表明$\left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^{k+1} \in \{0,1\}\right\}\right| \geq \left|\left\{i \in [\![1,n]\!] : \bar{\rho}_i^k \in \{0,1\}\right\}\right|$。为确保严格不等式，我们必须证明 $\bar{\rho}^k$ 的一个分数分量在 $\bar{\rho}^{k+1}$中变为 0 或 1。

我们知道 $0<\delta^k<1$。如果$\delta^k=\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k)}$，那么$\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k\ (q^k)}=0$。如果 $q^k<n$ 且$\delta^k=1-\bar{\rho}^k_{\theta^k(q^k+1)}$，那么$\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k\ (q^k+1)}=1$。在这两种情况下， $\bar{\rho}^k$ 的一个分数分量都会在 $\bar{\rho}^{k+1}$中变为 0 或 1。总之 $\left|\left\{i\in[\![1,n]\!]:\ \bar{\rho}^{k+1}_i\in\{0,1\}\right\}\right|>\left|\left\{i\in[\![1,n]\!]:\ \bar{\rho}^k_i\in\{0,1\}\right\}\right|$。

由于对于每个 $k\in[\![1,\ \kappa^*+1]\!]$， $\left|\left\{i\in[\![1,n]\!]:\ \ \bar{\rho}^k_i\in\{0,1\}\right\}\right|\le n$，因此算法至多经过 n 次 while 循环迭代后终止（3-16）。因此 $\kappa^*\le n$。 □

现在我们已经证明了算法 1 定义良好且会终止后，我们可以证明定理 2 .

定理 2的证明。 考虑一个容量向量 $b\in\mathbb{Z}^n_{>0}$、资源预算 $r\in\mathbb{Z}_{>0}$以及一个向量 $\rho\in\widetilde{\mathcal{A}}(b,\ r)$。为方便起见，记 $e^{\kappa^*+1}:=\bar{\rho}^{\kappa^*+1}\in\{0,1\}^n$。我们首先证明，对于每个 $k\in[\![1,\ \kappa^*+1]\!]$， $\lfloor\rho\rfloor+e^k\in\mathcal{A}(b,\ r)$。

在命题 EC.3中，我们证明了，对于每个 $k\in[\![1,\ \kappa^*]\!]$，如果某个分量 $i\in[\![1,\ n]\!]$满足$\bar{\rho}^k_i=0$，那么 $\bar{\rho}^{k+1}_i=0$。因此，对于每个 $k\in[\![1,\ \kappa^*+1]\!]$， $\bar{\rho}^k_i>0$当且仅当 $\bar{\rho}^1_i>0$。根据 $\widetilde{\mathcal{A}}(b,\ r)$的定义，并且由于 $b_i\in\mathbb{Z}$，我们推得，如果$\bar{\rho}^1_i>0$，那么$b_i\ge\lceil\rho_i\rceil=\lfloor\rho_i\rfloor+\lceil\bar{\rho}^1_i\rceil=\lfloor\rho_i\rfloor+1$。此外，

$$\forall k\in[\![1,\kappa^*]\!],\ \sum_{i=1}^n(\lfloor\rho_i\rfloor+e^k_i)=q^k+\sum_{i=1}^n\lfloor\rho_i\rfloor\le\bar{r}+\sum_{i=1}^n\lfloor\rho_i\rfloor=r,$$
$$\text{and }\sum_{i=1}^n(\lfloor\rho_i\rfloor+e^{\kappa^*+1}_i)=\sum_{i=1}^n\bar{\rho}^{\kappa^*+1}_i+\sum_{i=1}^n\lfloor\rho_i\rfloor\overset{\text{(EC.32)}}{\le}\bar{r}+\sum_{i=1}^n\lfloor\rho_i\rfloor=r.$$

因此，对于每个 $k\in[\![1、\ \kappa^*+1]\!]$、 $\lfloor\rho\rfloor+e^k\in\mathcal{A}\ (b,\ r)$。

接下来，我们证明算法返回的 σ 是一个概率分布。首先注意，对于每个 $k\in[\![1、\ \kappa^*+1]\!]$、 $\gamma^k\ge0$。此外，

$$\sum_{z\in\mathcal{A}(b,r)}\sigma_z=\gamma^{\kappa^*+1}+\sum_{k=1}^{\kappa^*}\gamma^k\delta^k=\gamma^{\kappa^*+1}+\sum_{k=1}^{\kappa^*}(\gamma^k-\gamma^{k+1})=\gamma^{\kappa^*+1}+\gamma^1-\gamma^{\kappa^*+1}=1.$$

因此， $\sigma\in\Delta\ (b、\ r)$。现在我们证明算法返回的 σ 与向量ρ一致。为此，我们注意到以下等式：

$$\forall k\in[\![1,\kappa^*]\!],\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \gamma^k\bar{\rho}^k_i-\gamma^{k+1}\bar{\rho}^{k+1}_i=\gamma^k(\bar{\rho}^k_i-(1-\delta^k)\bar{\rho}^{k+1}_i)=\gamma^k\delta^ke^k_i.$$

于是，我们得到：

$$\begin{aligned}\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{E}_{z\sim\sigma}[z_i]&=\gamma^{\kappa^*+1}(\lfloor\rho_i\rfloor+\bar{\rho}^{\kappa^*+1}_i)+\sum_{k=1}^{\kappa^*}\gamma^k\delta^k(\lfloor\rho_i\rfloor+e^k_i)\\&=\lfloor\rho_i\rfloor\sum_{z\in\mathcal{A}(b,r)}\sigma_z+\gamma^{\kappa^*+1}\bar{\rho}^{\kappa^*+1}_i+\gamma^1\bar{\rho}^1_i-\gamma^{\kappa^*+1}\bar{\rho}^{\kappa^*+1}_i\\&=\lfloor\rho_i\rfloor+\bar{\rho}^1_i=\rho_i.\end{aligned}$$

因此， σ 由算法1 返回的结果与向量 ρ一致。

由于 $\kappa^*\le n$，因此， σ的支撑集大小至多为 $n+1$。最后，我们论证算法1 的运行时间为 $O(n^2)$。事实上，while 循环（3-16）的第一次迭代可以在

时间 $O(n \log n)$ 内完成：使用高效的排序算法（例如归并排序）对 $\bar{\rho}^1$ 排序，并创建排列 θ^1。幸运的是，后续迭代可以在时间 $O(n)$ 内完成。事实上，我们注意到，对于每个 $k \in [\![1, \kappa^* - 1]\!]$, $\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k 1}(\,) \geq \cdots \geq \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k}(q^k)$ 和 $\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k}(q^k{+}1) \geq \cdots \geq \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k n}(\,)$。因此，我们可以通过合并并排序已经排好序的列表 $(\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k 1}(\,) \cdots, \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k}(q^k))$ 和 $(\bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k}(q^k{+}1) \cdots, \bar{\rho}^{k+1}_{\theta^k n}(\,))$，对 $\bar{\rho}^{k+1}$ 排序并创建排列 θ^{k+1}。此操作可以在时间 $O(n)$ 内完成。由于 while 循环（3-16）的迭代次数至多为 n，因此算法1的总体运行时间为 $O(n^2)$。□