arXiv:2301.11615v1 [math.CO] 27 Jan 2023

分解为两个长度有界的线性森林

Rutger Campbell*rutger@ibs.re.kr 基础科学研究院（IBS）离散数学组，韩国大田

Florian Hörsch florian.hoersch@tu-ilmenau.de 伊尔梅瑙工业大学，魏玛大街25号，德国伊尔梅瑙，98693

Benjamin Moore†brmoore@iuuk.mff.cuni.cz 查理大学计算机科学研究所，捷克布拉格

2023年1月30日

摘要

对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \infty$，如果一个线性森林的每个连通分量至多有 k 条边，我们称其为 k-有界。我们称图 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解，是将 $E(G)$ 划分为两个线性森林的边集F_k，F_ℓ 其中 F_k 是 k-有界的，而 F_ℓ 是 ℓ-有界的。我们证明，判断给定图是否存在此类分解的问题，在 k 和 ℓ 均至少为 2 时是 NP 完全的，在 $k \geq 9$ 和 $\ell = 1$ 时也是 NP 完全的；而对于 $(k, \ell) = (2, 1)$，该问题属于 P。在此之前，已知的 NP 完全情形只有 $(2, 2)$ 和 $(3, 3)$。我们的困难性结果回答了 Bermond 等人在 1984年提出的一个问题。我们还证明，围长至少为九的平面图可以分解为一个线性森林和一个匹配；这尤其强于对这类图进行 3-边着色。

1 引言

本文中，所有图都是有限的，不含环，但可能有重边。我们关注图分解问题。给定一个图 G，如果 $(H_1, \ldots, H_t)$ 是 G 的一组生成子图，且 $(E(H_1) \ldots, E(H_t))$ 是 $E(G)$ 的一个划分，我们就称其为 G 的分解。只有在

*获基础科学研究院（IBS-R029-C1）资助。

†获捷克科学基金会项目 22-17398S（曲面图中的流与圈）资助。

施加了进一步的约束后，分解才有意义，因此我们将重点关注这样的分解：各部分必须属于某个图族，并且部分的数量可能受到限制。我们将关注此类问题的算法复杂度。

例如，一个自然的问题是：图 G 是否能分解为若干部分，且每一部分都同构于一个固定图 H。对于几乎所有图 H，这是 NP 完全问题，而且已有一个二分定理 [DT92]。另一方面，也可以考虑分解为一类自然的图，例如森林。当然，每个图都能分解为森林，因此只有在限制部分的数量时，这个问题才有意义。即使施加了这一限制，著名的 Nash-Williams定理 [NW64] 仍刻画了图何时能分解为 k 森林，而这一刻画也带来了多项式时间算法。

Nash-Williams 的这一结果引出了一个问题：当我们对分解中的树施加更多限制时，分解是否仍然存在。关于这些问题的研究文献已相当丰富。例如，许多作者研究了其中一棵树具有有界度的分解。Balogh 等人 [BKPY05] 证明，平面图可以分解为三个森林，其中一个森林的最大度为 8。Gonçalves [Gon 09] 随后改进了这一结果，证明最大度 4 也是可实现的。对于一般图，Jiang 和 Yang 证明了著名的九龙树定理 [JY17], ，给出了图分解为 $k+1$ 森林的精确界限，其中一个森林的最大度至多为d。当我们要求其中一个森林具有有界分支大小时，也开展了类似的研究；Montassier 等人于 [MORZ12] 提出的强九龙树猜想至今仍悬而未决。不过，也有一些部分结果，例如 Mies 和第三位作者 [MM22], 、Kim 等人 [KKW$^+$13]以及 Yang [Yan18] 的研究。

我们关注这样一个问题：将度和连通分支大小的限制结合起来，并施加于分解中的所有森林，而不是仅施加于其中一个森林。首先，我们考虑线性森林，它们被定义为路径的顶点不相交集合。注意，这些森林恰好是最大度至多为 2 的森林。Akiyama、Ekoo 和 Harary 首先研究了线性森林的分解 [AEH81]。为了进一步纳入连通分支大小限制，我们研究k-有界线性森林，即每个连通分支至多包含 k条边的线性森林。注意，1-有界线性森林就是匹配。

Alon、Teague 和 Wormald 研究了将正则图分解为长度有界的线性森林的结构性问题 [ATW01]。此外，Thomassen 证明了每个三次图都可以分解为两个 5-有界线性森林 [Tho99]。从算法角度来看，上述观察意味着：将图分解为某个正整数 t 对应的 t 长度有界线性森林的问题，是将图分解为 t 匹配的问题的推广。

稍加思考即可看出，这是 t-边着色问题；对于所有 $t \geq 3$，该问题都是 NP 完全的，参见 [Hol81]。这里，回顾一下，图G 的 t-边着色 是一个映射 f：$E(G)$ $\to \{1, \ldots, k\}$，满足对于所有关联边 e_1和 e_2，都有 $f(e_1) \neq f(e_2)$。因此，将图分解为线性森林与图的边着色密切相关。所以，判定一个图能否分解为 k-线性森林是 NP 完全问题，这对任意固定的 $k \geq 2$ [Jia18] 都成立。我们将关注

只有两个部分时该判定问题的算法复杂度。更准确地说，我们考虑以下问题类别：

（k，ℓ）-有界线性森林分解（（k，ℓ）-BLFD）：
输入： 一个图 G。
问题： G 是否可以分解为一个 k-有界线性森林和一个 ℓ-有界线性森林?

Péroche 证明了以下结果，从而解决了一个重要情形：

定理 1（[Pé84]）。（∞, ∞）-*BLFD* 是 *NP* 完全的。

如果 $k = 1$ 和 $\ell = 1$，那么这实际上是在询问一个图是否可以分解为两个匹配，或者等价地，是否可以对一个图进行 2-边着色；这很容易看出是多项式时间可解的。有趣的是，据作者所知，一个图是否可以分解为一个匹配和一个 2-有界线性森林仍是一个开放问题。我们的第一个结果是，这个问题可以在多项式时间内求解：

定理 2. $(2,1)$-*BLFD* 是多项式时间可解的。

在否定性结果方面，我们将已知的困难性结果加以推广，从而获得几乎完整的分类。具体而言，在 [JJJ21] 中，作者证明了 (2,2)-BLFD 是 NP 完全的；在 [BFHP84], 中，作者证明了 (3,3)-BLFD 是 NP 完全的。Bermond 等人 [BFHP 84] 猜想，对于所有 $k \geq 2$，(k, k)-BLFD 都是 NP 完全的。我们证明了该猜想，事实上还证明，对于几乎所有 k, ℓ，这一结论都成立。更准确地说：

定理 3. 对于任意 $k, \ell \in \{2, \ldots\} \cup \{\infty\}$，我们有 (k, ℓ)-*BLFD* 是 *NP* 完全的。此外，对于 $\ell = 1$ 以及所有 $k \in \{9, \ldots\} \cup \infty$，我们有 (k, ℓ)-*BLFD* 是 *NP* 完全的。

这就解决了复杂性问题，除了 $\ell = 1$、$k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 的情况。

注意，将一个图分解为线性森林和匹配，可以得到该图的 3-边着色，因为任何线性森林都可以分解为两个匹配；将这两个匹配用作颜色类，再将另一个匹配用作第三个颜色类，即可得到 3-边着色。此外，众所周知，平面三角剖分可进行 4-着色，当且仅当其对偶图可进行 3-边着色。由于存在并非三角剖分对偶图的次三度平面图，因此值得探究哪些次三度平面图可以进行 3-边着色。我们将图的围长 定义为该图中最短圈的长度。目前尚不清楚每个围长至少为六的次三度平面图是否都可以进行 3-边着色。Kronk、Radlowski 和 Franen [KRF74] 证明，围长至少为 8 的次三度平面图都可以进行 3-边着色。直到最近，Bonduelle 和 Kardoš [BK22]才将这一界限改进为 7。如前所述，分解为线性森林和匹配比 3-边着色要求更强，因此值得探究能否将 3-边着色的结果加强为分解成线性森林和匹配。我们证明，当围长足够大时，确实可以做到：

定理 4. 每个围长至少为9 的次三度平面图都可以分解为线性森林和匹配。

我们将围长界能否进一步提高留作一个开放问题。颇令人意外的是，Montassier 等人证明，存在围长恰为 7、甚至无法分解为一个森林和一个匹配的平面图 [MORZ12]。尽管如此，他们的构造需要度为 4 的顶点，而且似乎不容易对其进行修改，从而找到无法分解为一个线性森林和一个匹配的次三正则图。

本文结构如下。首先，在第 2 节中，我们利用所谓的小间隙一般因子问题已被 Cornuéjols 证明为多项式时间可解这一事实，证明定理 2 [Cor88]。接着，我们在第 3 节证明定理 3。最后，在第 4 节中，我们使用放电法证明定理 4。

我们定义一些贯穿全文都会用到的记号。对于一个图 G 和一个顶点$v \in V(G)$，我们用 $d_G(v)$ 表示 v 在 G中的度。如果 $S \subseteq E(G)$，我们用 $d_S(v)$ 表示 v 在由 S的边集诱导的图中的度。

2 正向算法结果

本节通过将问题多项式时间归约到小间隙一般因子问题，并依赖 Cornuéjols 的一个定理（该定理表明此问题可在多项式时间内求解），来证明定理 2。

为了解释我们所依赖的 Cornuéjols 结果，我们首先需要引入一些记号。若集合 $M \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对每个满足 $\{i, i+1\} \cap M = \emptyset$ 的 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有 $\{0, \ldots, i+1\} \cap M = \emptyset$ 或 $\{i, i+1, \ldots\} \cap M = \emptyset$，则称其为 小间隙集。小间隙一般因子问题表述如下：

小间隙一般因子问题（SGGFC）：
输入： 一个图 H，以及一组小间隙集 $\{M_v : v \in V(H)\}$。
问题： 是否存在一个集合 $S \subseteq E(G)$，使得对所有 $v \in V(H)$，都有 $d_S(v) \in M_v$？

我们依据 Cornuéjols [Cor88] 的以下结果：

定理 5. 存在一种多项式时间算法，可以求解 *SGGFC*。

2.1 构造

现在我们可以开始证明定理 2。首先给出一个简单但至关重要的观察：

观察 1. 如果 G 是 $(2,1)$-*BLFD* 的一个实例，且 G 中存在一个度至少为 4 的顶点，那么它就是 $(2,1)$-*BLFD* 的一个否实例。

证明。 在任何 (2,1)-BLFD 分解中，一个顶点至多关联一条属于匹配的边，且至多关联 2 条属于 2-有界线性森林的边。因此，若一个图有度至少为 4 的顶点，则不存在这样的 (2,1)-BLFD。 □

据此，在本节余下部分，我们假设有一个 (2,1)-BLFD 实例 G，并且对于每个顶点 $v \in V(G)$，都有 $d_G(v) \leq 3$。为了给出构造，我们需要一些定义。

令 $X_3 = \{v \in V(G) : d_G(v) = 3\}$。令 $\mathcal{P}$ 为一个集合，其中包含 G 中的唯一一族路径，这些路径的端点在 G 中的度为 1 或 3，且所有内部顶点在 G 中的度为 2；此外，该集合还包含 G 中至多含有一个 X_3顶点的环。对于 $\mathcal{P}$ 中包含 X_3的顶点的环 C，我们将唯一的顶点 $v \in V(C) \cap X_3$称为 C的端点 。对于所有满足 $C \cap X_3 = \emptyset$ 的环 $C \in \mathcal{P}$，我们任意选取一个顶点 $v \in V(C)$，并将其指定为 C的端点。我们将环 C 中除端点以外的所有顶点称为内部顶点。注意，$\{E(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是 $E(G)$的一个划分。示意见图 1。

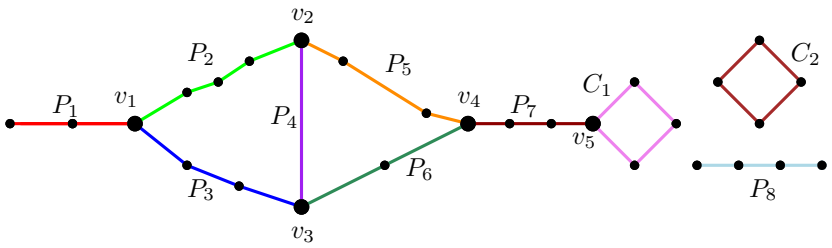


图 1：从一个次三正则图中得到的集合 $\mathcal{P}$ 示例。我们有 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_8, C_1, C_2\}$，边的颜色表示该边属于 $\mathcal{P}$中的哪个元素。 X_3中的顶点画得较大，并标记为 $v_1, \ldots, v_5$。

现在可以定义与 G相关联的 SGGFC 实例。

定义 1。 给定$(2, 1)$-*BLFD* 实例 G，我们按如下方式定义一个 *SGGFC* 实例$(H, \{M_v : v \in V(H)\})$ 。图 H 是一个二部图，其二部划分为(A, B)，满足 $A = X_3$ 和 $B = \{y_P \mid P \in \mathcal{P}\}$。我们定义 $E(H)$如下：

- 对于每个 $P \in \mathcal{P}$ 以及 P 中属于 X_3的每个端点 u，令 $E(H)$ 包含一条连接 u 和 y_P的边。

我们按如下方式定义 $\{M_v : v \in V(H)\}$：

- 对于每个 $v \in X_3$，令 $M_v = \{1\}$。
- 对于每个长度为 *1* 且其所有端点都属于 X_3的 $P \in \mathcal{P}$，令 $M_{y_P} = \{2\}$。
- 对于所有长度为 *2* 且端点都位于 X_3中的 $P \in \mathcal{P}$，我们设 $M_{y_P} = \{1\}$。
- 对于所有长度为 *3* 且端点都位于 X_3中的 $P \in \mathcal{P}$，我们设 $M_{y_P} = \{0, 2\}$。
- 对于所有长度为 *4* 且端点均属于 X_3 的 $P \in \mathcal{P}$，我们令 $M_{y_P} = \{1, 2\}$。

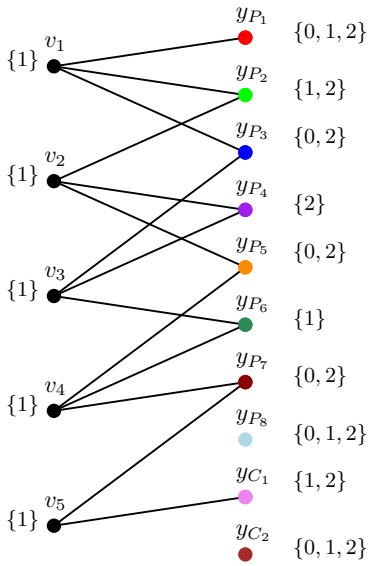


图 2：从图 1 所示的图 G 得到的图 H 的一个示例。集合 M_v 标示在相应顶点旁。

- *For all remaining* $P \in \mathcal{P}$*, we set* $M_{y_P} = \{0,1,2\}$.

关于 $(H,\ \{M_v\colon\ v \in V(H)\})$ 的定义示意，请参见图 2。

2.2 归约证明

在本小节中，我们证明，$(H,\ \{M_v\colon\ v \in V(H)\})$ 是 SGGFC 的是实例，当且仅当 G 是 (2，1)-BLFD 的是实例。

断言 1。 如果（H，$\{M_v\colon\ v \in V(H)\}$）是 *SGGFC* 的是实例，那么 G 是（2，1）*-BLFD* 的是实例。

证明。 根据假设，存在一个集合 $S \subseteq E(H)$，使得对于所有 $v \in V(H)$，都有 $d_S(v) \in M_v$。现在，我们构造 G的一个 (2，1)-有界线性森林分解 $(F_2,\ F_1)$，其中 F_1 是匹配，F_2 是一个每个连通分支至多包含两条边的线性森林。由于 $\{E(P)\colon\ P \in \mathcal{P}\}$ 是 $E(G)$ 的一个划分，因此只需说明如何将 $E(P)$ 划分为 $E(F_1)$ 和 $E(F_2)$ 中的边，对所有 $P \in \mathcal{P}$均如此。下面进行具体说明。

设 $P \in \mathcal{P}$ 的端点为 u 和 v，并设 $u = z_0,\ z_1,\ \ldots\ldots,\ v = z_t$ 为 $V(P)$ 中的顶点，按它们在 P 中出现的顺序排列，其中若 P 是一个圈，则 $u = v$。我们根据 P 的端点进行分类讨论。

情况 1： P **的端点均不属于** X_3**：**
我们将集合 $\{z_iz_{i+1}\colon\ 0 \le i \le t-1,\ i$（奇数）$\}$ 加入 $E(F_1)$，并将 $E(P) - E(F_1)$ 加入 $E(F_2)$。示意见图3(*a*)。
情形 2： P **包含两个端点** u，v，**其中** $d_G(u) = 3$ **和** $d_G(v) = 1$如果 $uy_P \in S$，我们加入集合 $\{z_iz_{i+1}\colon\ 0 \le i \le t-1,\ i$ 偶$\}$ 到 $E(F_1)$ 并且我们 add

$E(P) - E(F_1)$ 到 $E(F_2)$。示意图见图3(b)。
如果 $uy_P \notin S$，我们令 $E(F_1)$ 包含 $\{z_iz_{i+1}: \ 0 \le i \le t-1, \ i$ 奇数$\}$ 并令 $E(F_2)$ 包含 $E(P) - E(F_1)$。示意图见图3(c)。
情形 3： P**的端点都在** X_3**中，且** $uv \in E(G)$。
在这种情况下，我们将 uv 添加到 $E(F_1)$ 中。示意图见图3(d)。
情形 4： P**的两个端点都在** X_3**中，且** $t = 2$。
在这种情况下，可以得出 uy_P 和 vy_P 中恰有一个包含在 S 中，不妨设 uy_P 是如此。我们将 uz_1 添加到 $E(F_1)$，再将 z_1v 添加到 $E(F_2)$。示意图见图3(e)。

情形 5： P**的两个端点都在** X_3 **和** $t = 3$ **中**
在这种情形下，$M_{y_P} = \{0, 2\}$，由此可得，uy_P 和 vy_P 要么都包含在 S 中，要么都不包含在其中。我们分别讨论这两种情形。

如果 uy_P 和 vy_P 都包含在 S 中，注意到 P 是一条路径，否则 $u = v$。我们将 uz_1 和 vz_2 添加到 E（F_1）中，并将 z_1z_2 添加到 E（F_2）中。示意图见图3（f）。

如果 uy_P 和 vy_P 都不包含在 S 中，我们将 z_1z_2 添加到 E（F_1）中，并将 uz_1 和 vz_2 添加到 E（F_2）中。示意图见图3（g）。
情形 6： P **的两个端点都在** X_3 **和** $t = 4$ **中**
在这种情形下，我们有 $M_{y_P} = \{1, 2\}$，由此可得，uy_P 和 vy_P 中至少有一个包含在 S 中。

如果 uy_P 和 vy_P 都包含在 S中，注意到 P是一条路径。我们将 uz_1 和z_3v 添加到 $E(F_1)$ 中，并将 z_1z_2 和 z_2z_3 添加到 $E(F_2)$ 中。示意见图3(h)。

如果 uy_P和 vy_P中恰有一个包含在 S中，设这个是 uy_P，我们将 uz_1和 z_2z_3添加到$E(F_1)$ 中，并将 z_1z_2 和 z_3v 添加到 $E(F_2)$ 中。示意见图3(i)。
情形7： P**的两个端点都在** X_3 **和** $t \ge 5$**中**。
根据边 uy_P和 vy_P是否属于 S，需要考虑三种子情形。

首先假设 $uy_P, \ vy_P \in S$，并且像之前一样，注意到 P是一条路径。如果 t是奇数，我们将集合 $\{z_iz_{i+1}: \ 0 \le i \le t-1, \ i$ 中的偶数 $\}$ 添加到 $E(F_1)$ 中，并将$E(P) - E(F_1)$ 添加到 $E(F_2)$ 中。示意见图3(j)。如果 t 是偶数，我们将$\{z_iz_{i+1}: 3 \le i \le t-1, \ i$中的奇数 $\} \cup uz_1$添加到 $E(F_1)$ 中，并将 $E(P) - E(F_2)$ 添加到 $E(F_2)$ 中。示意见图3(k)。

其次，假设 uy_P 和 vy_P 中恰有一个包含于 S，不失一般性，设它是 uy_P。若 t 为奇数，我们将 $\{z_iz_{i+1}: \ 3 \le i \le t-1, \ i$ 奇数 加入 $E(F_1)$，并将 $E(P) - E(F_1)$ 加入 $E(F_2)$。示意见图3(ℓ)。若 t 为偶数，我们将 $\{z_iz_{i+1}: \ 0 \le i \le t-1, \ i$ 偶数 加入集合 $E(F_1)$，并将$E(P) - E(F_1)$ 加入 $E(F_2)$。示意见图3(m)。

最后，假设 uy_P 和 vy_P 均不包含于 S。若 t 为奇数，我们将$\{z_iz_{i+1}: \ 0 \le i \le t-1, \ i$ 奇数$\}$ 加入 $E(F_1)$，并将 $E(P) - E(F_1)$ 加入 $E(F_2)$。示意见图3(n)。若 t 为偶数，我们将 $\{z_iz_{i+1}: \ 4 \le i \le t-1, \ i$ 偶数$\} \cup z_1z_2$加入 $E(F_1)$，并将 $E(P) - E(F_1)$ 加入 $E(F_2)$。示意见图3(o)。

由此，我们得到了对 $(F_2, \ F_1)$ 的描述。注意，对于每条路径 $P \in \mathcal{P}$ 以及 P 的每个端点 u，关联于 u 的 P 的边包含在$E(F_1)$ 中，当且仅当 $uy_P \in S$。此外，对于每个以 u 为端点的圈 $C \in \mathcal{P}$，关联于 u 的边 C 的数量恰好等于连接 u 和y_P 且属于 S 的边的数量。由于对所有 $u \in X_3$ 都有 $M_u = \{1\}$，因此每个 $u \in X_3$ 都关联

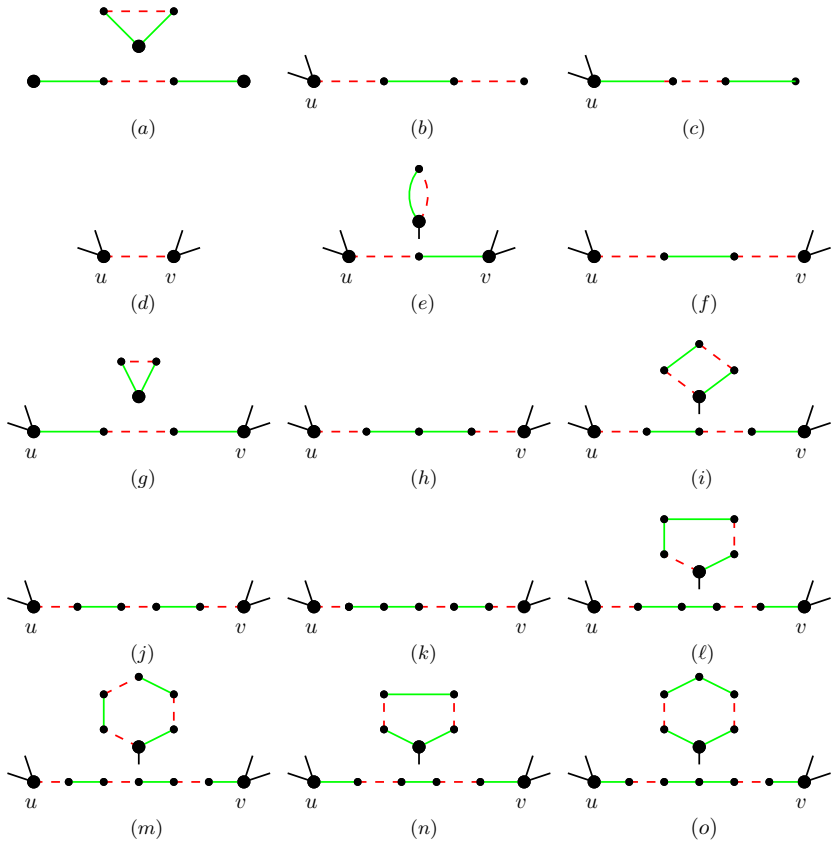


图3：展示在不同情况下如何构造森林 F_1 和 F_2。红色虚线边属于 $E(F_1)$，绿色实线边属于 $E(F_2)$。

于 F_1 中恰好一条边。根据构造还可知，对于所有 $P \in \mathcal{P}$，P 的每个内部顶点至多关联于 $E(F_1)$ 中的一条边。因此，F_1 是一个匹配。现在考虑 F_2 的一个连通分量 Q。根据构造，如果对于某个 $P \in \mathcal{P}$，$E(Q) \subseteq E(P)$，那么 Q 是一条长度至多为 2 的路径。否则，存在某个 $v \in X_3$ 以及 P_1、$P_2 \in \mathcal{P}$，使得关联于 v 的 $E(P_i)$ 的边属于 $E(Q)$。由于 $d_{F_1}(v) = 1$，我们有 $d_{F_2}(v) = 2$。此外，根据构造可知，P_i 的长度至少为 2，且 $E(P_i) \cap E(Q)$ 仅包含一条边。因此，F_2 是一个 2-有界线性森林，所以 (F_2, F_1) 是 G 的一个 (2, 1) 有界线性森林分解。因此，G 是 (2, 1)-BLFD 的一个是实例。

□

断言2。 如果 G 是 $(2, 1)$-*BLFD* 的是实例，那么 $(H, \{M_v : v \in V(H)\})$ 是 *SGGFC* 的是实例。

证明。设 (F_2, F_1) 是 G 的一个 (2,1)-有界线性森林分解。现在我们定义一个集合 $S \subseteq E(H)$。对于每条路径 $P \in \mathcal{P}$ 及其每个端点 u，如果 $E(P)$ 中与 u 关联的边属于 $E(F_1)$，我们就令 S 包含边 uy_P。

对于每个端点为 u 的圈 $C \in \mathcal{P}$，我们令 S 恰好包含连接 u 和 y_P 的边，其数量与 $E(F_1)$ 中属于 $E(C)$ 且与 u 关联的边数相同。

还需证明，对于所有 $u \in V(H)$，$d_S(u) \in M_u$。首先假设 $u \in X_3$。由于 (F_2, F_1) 是 G 的一个 (2,1)-有界线性森林分解，我们得到 u 恰与 $E(F_1)$ 的一条边关联。这得到 $d_S(u) = 1$。

现在令 $P \in \mathcal{P}$，并令 $\{u = z_0, z_1, \ldots, v = z_t\}$ 为 $V(P)$ 中的顶点，按照它们在 P 中出现的顺序排列；当 P 是一个圈时，$u = v$。我们分情况讨论。

情况 1：P 的长度为 1，且 P 的所有端点都包含于 X_3 中

由于 (F_2, F_1) 是 G 的一个 (2,1)-有界线性森林分解，我们得到 $d_{F_2}(u) = d_{F_2}(v) = 2$，因此 u 和 v 都与 $E(F_2) - E(P)$ 中的一条边关联。因此，若 $uv \in E(F_2)$，则 F_2 包含一条长度为 3 的路径或一个圈，这与矛盾。于是我们得到 $uv \in E(F_1)$，因此 uy_P 和 vy_P 都包含于 S 中。这得到 $d_S(y_P) = 2 \in M_{y_P}$。

情形 2：P 的长度为 2，且 P 的所有端点都包含在 X_3 中。由于 F_1 是一个匹配，因此 uz_1 和 z_1v 中至少有一个包含在 $E(F_2)$ 中。由于 $d_{F_2}(u) = 2$，我们有 u 与 $E(F_2) - E(P)$ 的一条边关联。因此，如果 uz_1，$z_1v \in E(F_2)$，那么 F_2 包含一条长度为 3 的路径或一个圈，这就产生了矛盾。因此，我们得到 uz_1 和 z_1v 中恰有一个包含在 $E(F_1)$ 中。由此可得 $d_S(y_P) = 1 \in M_{y_P}$。

情形 3：P 的长度为 3，且 P 的所有端点都包含在 X_3 中。假设恰好 uz_1 和 z_2v 中的一个（不妨设为 uz_1）包含在 $E(F_1)$ 中，从而导致矛盾。由于 F_1 是一个匹配，我们得到 z_1z_2 包含在 $E(F_2)$ 中。由于 $d_{F_2}(v) = 2$，我们有 v 与 $E(F_2) - E(P)$ 的一条边关联。因此，F_2 包含一条长度为 3 的路径，这就产生了矛盾。因此，我们得到 uz_1 和 z_2v 要么都包含在 $E(F_1)$ 中，要么都不包含在其中。由此可得 $d_S(y_P) \in \{0, 2\} = M_{y_P}$。

情形 4：P 的长度为 4，且 P 的所有端点都包含在 X_3 中。反设 uz_1 和 z_2v 都包含在 $E(F_2)$ 中。由于 $d_{F_2}(u) = 2$，我们有 u 与 $E(F_2) - E(P)$ 的一条边关联。因此，由于 F_2 不包含长度为 3 的路径，我们得到 $z_1z_2 \in E(F_1)$。类似地，我们得到 $z_2z_3 \in E(F_1)$。这与 F_1 是一个匹配相矛盾。因此，我们得到 uz_1 和 z_2v 中至少有一个包含在 $E(F_1)$ 中。这意味着 $d_S(y_P) \in \{1, 2\} = M_{y_P}$。

情形 5：所有其他情形

对于所有不属于上述任何一种形式的 $P \in \mathcal{P}$，显然有 $d_S(y_P) \in M_{y_P}$。

因此，对于所有 $v \in V(H)$，我们有 $d_S(v) \in M_v$，所以 $(H, \{M_v : v \in V(H)\})$ 是 SGGFC 的一个是实例。 □

现在，将定理 5 应用于 $(H, \{M_v : v \in V(H)\})$，即可得出定理 2；给定 G 后，该对象可在多项式时间内构造。

3 困难性结果

本节旨在证明定理 3。在第 3.1 节中，我们给出所要归约的问题。在第 3.2 节中，我们给出一些简单构件，这些构件将在稍后的主要归约中发挥作用。随后，在第 3.3、3.4 和 3.5 节中，我们证明

对于 k 和 ℓ 的若干组取值，(k, ℓ)-BLFD 是 NP 完全的。结合定理 1，这些结果可得定理 3。

3.1 预备知识

这里我们描述归约所需的可满足性问题的两种变体。

(3, $B2$)-**SAT:**

输入： 一个变量集合 X、一个子句集合 $\mathcal{C}$，使得对于所有 $C \in \mathcal{C}$，均有 $|C| = 3$，并且对于每个 $x \in X$，x 和 $\bar{x}$ 都恰好包含在两个子句中。
问题： 是否存在一个真值赋值 ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$，使得每个子句都至少包含一个真文字?

单调非全相等 3SAT（MNAE3SAT）：
输入： 变量集合 X，子句集合 $\mathcal{C}$，其中每个 $C \in \mathcal{C}$ 恰好包含 3 个正文字。

问题： 是否存在一个真值赋值 ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$，使得每个子句都至少包含一个真文字和一个假文字?

对于这两个问题，我们将具有所需性质的赋值 ϕ 称为满足。这两个问题都是 NP 完全问题。

定理 6 ([BKS03])。 (3, $B2$)-*SAT* 是 *NP* 完全问题。

定理 7 ([Sch78])。 *MNAE3SAT* 是 *NP* 完全问题。

3.2 简单构件

本节将介绍一组简单构件，我们将在第 3.3、3.4 和 3.5 节的主要归约中用到它们。

长1-强制器由一条长度为 4 的路径构成，其首尾两条边均加倍；此外还有一个顶点，称为长1-强制器的尖端顶点，它通过一条边与初始路径的第三个顶点相连。图4给出了示意图。该

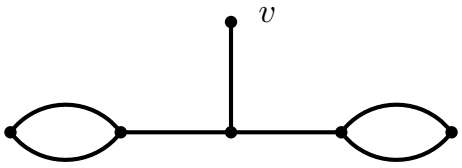


图4：一个长1-强制器。标记为 v 的顶点是短长1-强制器的尖端顶点。

长1-强制器的关键性质如下：

命题1。 设 G 是一个长的 1-强迫子，且 $k \in \{4, \ldots\} \cup \infty$。那么， G 存在唯一的(k, 1)有界线性森林分解(F_k, F_1)，其中 G 的尖端顶点 v 满足 $d_{F_k}(v) = 0$ 和 $d_{F_1}(v) = 1$。

证明。 设 (F_k, F_1) 是 G 的一个 $(k,1)$-有界线性森林分解。显然，对于每一对平行边，其中一条属于 $E(F_k)$，另一条属于 $E(F_1)$。因此，由于 F_1 是一个匹配，我们得到 G 的初始路径的两条中间边属于 $E(F_k)$。由于 F_k 是一个线性森林，我们得到 (F_k, F_1) 具有所需性质。此外，不难看出，(F_k, F_1) 确实是 G 的一个 $(k,1)$-有界线性森林分解。 □

图示请见图5。

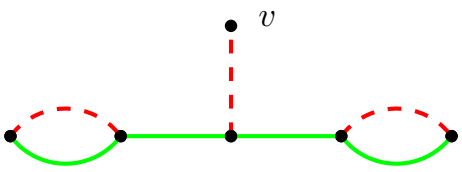


图5：长1-强制器的唯一（k，1）-有界线性森林分解（F_k，F_1）的示意图，适用于任意 $k \in \{4, \ldots\} \cup \infty$。红色虚线边属于$E(F_1)$，绿色实线边属于 $E(F_k)$。标记为 v 的顶点是长1-强制器的尖端顶点。

一个短1-强制器由一个顶点（称为短1-强制器的尖端顶点）构成，并将其连接到长1-强制器的尖端顶点。示意图见图6。利用

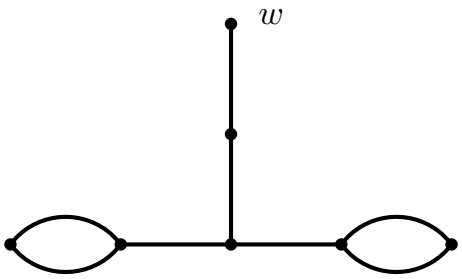


图6：短1-强制器。标记为 w 的顶点是短1-强制器的尖端顶点。

命题1，我们得到短1-强制器的关键性质：

命题2。设 G 是一个短1-强制器，且 $k \in \{4, \ldots\} \cup \infty$。那么 G 有唯一的（k，1）-有界线性森林分解（F_k, F_1），其中 G的尖端顶点 v满足 $d_{F_1}(v) = 0$，并且包含在 F_k 的一条唯一极大路径中，该路径长度为*1*。

示例请参见图7。

设 k，ℓ为满足 $k > \ell \geq 2$ 的正整数。一个短（k，ℓ）强制器由一条路径 $v_0 \ldots v_k$ 构造而成：对于所有不满足某个整数 $\mu \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{k-1}{\ell+1} \rfloor\}$ 的 $i = k-1-\mu(\ell+1)$ 的 $i = 0$，……，$k-1$，将边 $v_i v_{i+1}$ 加倍。我们称 v_k 为短（k，ℓ）-强制器的尖端顶点。示意见图8。短（k，ℓ）-强制器的决定性性质如下：

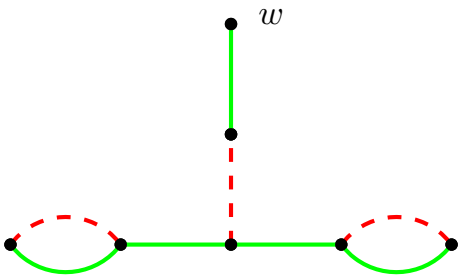


图7：短 1-强制器的唯一（k,1）-有界线性森林分解（F_k, F_1）的示意图，适用于任意 $k \in \{4, \ldots\} \cup \infty$。红色虚线边属于 $E(F_1)$，绿色实线边属于 $E(F_k)$。标记为 w 的顶点是短 1-强制器的尖端顶点。



图8：一个短（10,3）-强制器。标记为 v 的顶点是短（10, 3）-强制器的尖端顶点。

命题 3. 设 G 是一个短（k, ℓ）-强制器，其中 $k > \ell \geq 2$ 为某些正整数。则 G 具有唯一的（k, ℓ）-有界线性森林分解（F_k, F_ℓ），其中 G 的尖端顶点 v 满足 $d_{F_\ell}(v) = 0$，并且是 F_k 中一条长度为 k 的路径的端点。

证明。设（F_k, F_ℓ）是 G 的一个（k, ℓ）-有界线性森林分解。显然，对于每一对平行边，其中一条包含在 $E(F_k)$ 中，另一条包含在 $E(F_\ell)$ 中。因此，由于 F_ℓ 是一个 ℓ- 有界线性森林，我们可得，对于所有满足 $i = k - 1 - \mu(\ell + 1)$ 的整数 i，都有 $v_i v_{i+1} \in E(F_k)$，其中某个整数为 $\mu \in \{0, \ldots, \lceil \frac{k-1}{\ell+1} \rceil\}$。因此，（$F_k, F_\ell$）具有所需性质。此外，容易看出（$F_k, F_\ell$）确实是 G 的一个（k, ℓ）-有界线性森林分解。 □

示意图见图9。我们使用短的（k, ℓ）强制器来获得另一个具有类似作用的构件。设 G_1, G_2 是两个短的（k, ℓ）强制器，其尖端顶点分别为 v_1 和 v_2。现在，通过添加一个新顶点w 以及边 $v_1 w$ 和 $v_2 w$，我们得到一个长（k, ℓ）强制器。我们称 w 为长（k, ℓ）强制器的尖端顶点。示意图见图10。长（k, ℓ）强制器的关键性质如下:

命题 4. 设 G 是某些满足 $k > \ell \geq 2$ 的正整数对应的一个长 (k, ℓ)-强制子图。那么 G 有一个唯一的 (k, ℓ)-有界线性森林分解 (F_k, F_ℓ)，其中



图 9：一个短 (10,3)-强制器的唯一 (10,3)-有界线性森林分解示意图。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_{10})$。标记为 v 的顶点是该短 (10,3)-强制器的尖端顶点。

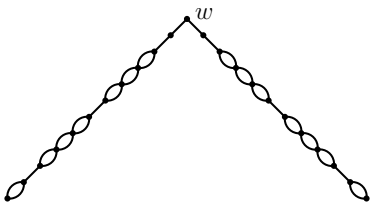


图10：一个长 (10,3)-强制器。标记为 w 的顶点是该长 (10, 3)-强制器的尖端顶点。

w 的尖端顶点 G 满足 $d_{F_k}(w) = 0$ 和 $d_{F_\ell}(w) = 2$。

证明。设 (F_k, F_ℓ) 是 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解。由命题 3，对于 $i = 1, 2$，(F_k, F_ℓ) 在 G_i 上的限制恰如命题 3 所述，因此 v_i 是 F_k 中一条长度为 k 且完全包含于 G_i 的路径的最后一个顶点。由于 F_k 是一个 k-有界线性森林，我们得到 $\{v_1w, v_2w\} \subseteq E(F_\ell)$。因此结论成立。此外，容易看出 (F_k, F_ℓ) 确实是 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解。 □

示意见图11。

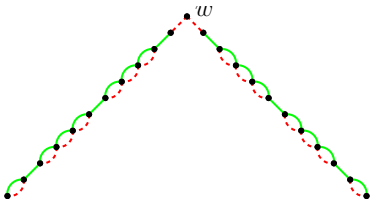


图11：一个长 (10,3)-强制器的唯一 (10,3)-有界线性森林分解示意图。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_{10})$。标记为 w 的顶点是该长 (10,3)-强制器的尖端顶点。

下一个简单构件将用于两个线性森林具有相同长度上界的情况。对于某些 $k \geq 2$，对称 k-强制器 是长度为 k 的一条路径，其中除最后一条边外，所有边都加倍。度为1的唯一顶点称为对称 k-强制器的尖端顶点。示意见图 12。决定性



图 12：一个对称 3 强制器。标记为 v 的顶点是该对称 3 强制器的尖端顶点。

对称 k-强制器的一个显而易见的性质如下：

命题 5. 设 G 是某个正整数 $k \geq 2$对应的对称 k-强制器。那么G 有一个(k, k)-有界线性森林分解(F, F')，该分解在交换 F和 F' 后唯一，并且其中 G 的尖端顶点 v满足 $d_F(v) = 0$，且是 F'中一条长度为 k 的路径的最后一个顶点。

图示见图 13。

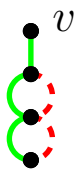


图 13：对称 3 强制器的一个 (3，3)-有界线性森林分解示意图。红色虚线边属于 E (F)，绿色实线边属于E(F')。标记为 v 的顶点是该对称 3 强制器的尖端顶点。

现在我们再构造两个构件，以用于其中一个线性森林不受限制的情形。对于某个整数 $k \geq 2$，设 G_1、……、G_4 是四个短的（$k+1$，k）-强制器，其尖端顶点分别为 v_1、……、v_4。我们先将 v_1 和 v_2 识别为一个新顶点 w_1，再将 v_3 和 v_4 识别为一个新顶点 w_2，随后添加一个新顶点 w 以及边 w_1w 和 w_2w，从而得到一个长 （∞，k）- 强制器。我们称 w 为这个长（∞，k）-强制器的尖端顶点。示意图见图 14。

长（∞，k）-强制器的决定性性质如下：

命题 6。设 G 是某个正整数 $k \geq 2$ 对应的长（∞，k）-强制器。则 G 有唯一的（∞，k）-有界线性森林分解（F_∞，F_k），其中 G 的尖端顶点 w 满足 $d_{F_\infty}(w) = 0$ 且 $d_{F_k}(w) = 2$。

证明。设 (F_∞, F_k) 是 G 的 (∞, k)-有界线性森林分解。按照命题 3 证明中的类似论证，当 $i = 1,2$ 时，限制

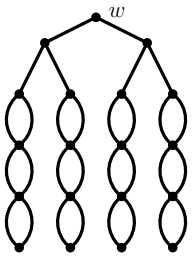


图 14：一个长的 $(\infty, 3)$-强制器。标记为 w 的顶点是这个长 $(\infty, 3)$-强制器的尖端顶点。

将 (F_∞, F_k) 限制到 G_i 上，恰如命题 3 中所述，因此 v_i 包含在 F_∞ 的一条路径中，且该路径完全包含于 G_i 中。这得出 $d_{F_\infty}(w_1) = d_{F_\infty}(w_2) = 2$。由于 F_∞ 是线性森林，我们得到 $\{w_1w, w_2w\} \subseteq E(F_k)$。因此结论成立。此外，容易看出 (F_∞, F_k) 确实是 G的 (∞, k)-有界线性森林分解。 □

示意图见图15。

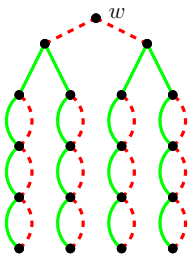


图15：一个长 $(\infty, 3)$-强制器的 $(\infty, 3)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_3) 的示意图。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_\infty)$。标记为 w 的顶点是这个长 $(\infty, 3)$-强制器的尖端顶点。

对于某个正整数 $k \geq 2$，(∞, k)-路径强制器 是长度为 $k-1$ 的路径 P，其除最后一个顶点外的所有顶点都与两个短 $(k+1, k)$-强制器的尖端顶点重合。(∞, k)-路径强制器中度为1的唯一顶点称为该 (∞, k)-路径强制器的尖端顶点。示意图见图16。

(∞, k)-路径强制器的决定性性质如下：

命题 7。设 G 是某个正整数 $k \geq 2$ 对应的 (∞, k)-路径强制器。那么，G 有唯一的 (∞, k)-有界线性森林分解 (F_∞, F_k)，其中，G 的尖端顶点 w 满足 $d_{F_\infty}(w) = 0$，是 F_k 中一条长度为 $k-1$ 的路径的最后一个顶点，并且属于 F_k 中一条长度为 $k-1$ 的路径。

证明。令 (F_∞, F_k) 为 G 的 (∞, k)-有界线性森林分解。通过与命题 3 的证明类似的论证，对于 $i = 1,2$，(F_∞, F_k) 在附着于 $V(P)$ 中顶点的短 $(k+1, k)$-强制器上的限制恰好是

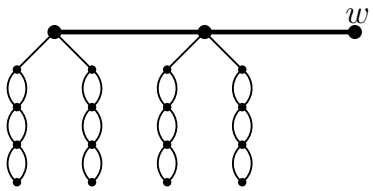


图 16：一个 (∞,3)-路径强制器。标记为 w 的顶点是该 $(\infty, 3)$-路径强制器的尖端顶点。

如命题 3 所述，因此 v 包含在 F_∞ 中的两条路径内，且它们与 P边不相交。这得到 $E(P) \subseteq E(F_k)$。因此结论成立。此外，容易看出 (F_∞, F_k) 确实是 G 的 (∞, k)-有界线性森林分解。 □

示例见图17。

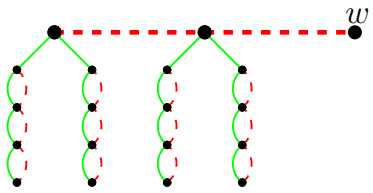


图17：一个 (∞,3)-路径强制器的 (F_∞, F_3)-有界线性森林分解。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_\infty)$。标记为 w 的顶点是该 (∞,3)-路径强制器的尖端顶点。

3.3 涉及匹配的情形

本节证明定理 3 中一个参数等于 1 的情形。更正式地说，我们证明以下结果：

引理1。 $(k, 1)$-*BLFD* 对所有 $k \in \{9, 10, \ldots\} \cup \infty$ 都是 *NP* 完全的。

证明。 我们通过从 $(3, B2)$-SAT 到 $(3, B2)$-SAT 的归约来证明引理1。设 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的一个实例。我们首先描述一个变量构件 G_x，其中 $x \in X$。首先，令 G_x 包含一个有 6 个顶点的圈 $u_x^1 u_x^2 w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2 u_x^1$。接下来，我们再添加 4 个顶点 $v_x^1, \ldots, v_x^4$，以及边 $u_x^i v_x^i$，其中 $i = 1, \ldots, 4$。最后，我们在 w_x^1 和 w_x^2 上添加悬挂长1-强制器，并在 v_x^i 上添加悬挂短1-强制器，其中 $i = 1, \ldots, 4$。图示见图18。对于某个 $C \in \mathcal{C}$，子句构件 G_C 是一个圈$a_C^1 b_C^1 a_C^2 b_C^2 a_C^3 b_C^3 a_C^1$。

现在我们构造 G。首先，令 G 包含所有 $x \in X$ 对应的变量构件 G_x，以及所有 $C \in \mathcal{C}$ 对应的子句构件 G_C。现在，对于每个满足 $x \in C$的 $x \in X$ 和 $C \in \mathcal{C}$，我们添加一条边，将 $\{v_x^1, v_x^2\}$和 $\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$连接到 G；对于每个满足$\bar{x} \in C$的 $x \in X$和 $C \in \mathcal{C}$，我们添加一条边，将 $\{v_x^3, v_x^4\}$ 和 $\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 连接到 G。我们以这样的方式进行，使 $\bigcup_{x \in X}\{v_x^1, \ldots, v_x^4\}$和 $\bigcup_{C \in \mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$之间存在一个完美匹配。

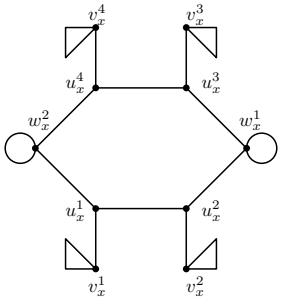


图18：变量 x 的变量构件 G_x 示意图。环表示悬挂长1-强制器，三角形表示悬挂短1-强制器。

注意，这是可行的，因为 $(X, \mathcal{C})$ 是一个 $(3, B2)$-SAT 实例。至此， G 的描述完成。

图示见图19。

断言3. 假设 G 是一个 $(\infty, 1)$-*BLFD* 是实例。那么 $(X, \mathcal{C})$ 是一个 $(3, B2)$-*SAT* 是实例。

证明。设 (F_∞, F_1) 是 G 的一个分解，分为线性森林和匹配。考虑某个 $x \in X$。根据命题2，我们得到，属于长1-强制器且与 w_x^1和 w_x^2 关联的边包含在 $E(F_1)$ 中。因此，$u_x^2 w_x^1$、 $w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2$ 和 $w_x^2 u_x^1$ 包含在 $E(F_\infty)$ 中。由于 $E(F_\infty)$ 不可能包含圈 $u_x^1 u_x^2 w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2 u_x^1$，因此 $u_x^1 u_x^2$ 和 $u_x^3 u_x^4$ 中至少有一个不包含在 $E(F_\infty)$ 中。现在我们按以下方式定义一个真值赋值 ϕ： $X \to \{TRUE, FALSE\}$：如果 $u_x^1 u_x^2 \in E(F_\infty)$，我们就将 $\phi(x)$ 设为 $TRUE$；如果 $u_x^3 u_x^4 \in E(F_\infty)$，我们就将 $\phi(x)$ 设为 $FALSE$。如果 $u_x^1 u_x^2$ 和 $u_x^3 u_x^4$ 都不包含在 $E(F_\infty)$ 中，我们就将 $\phi(x)$ 设为任意值。

现在证明， ϕ 是$(X, \mathcal{C})$的满足赋值。考虑某个 $C \in \mathcal{C}$。根据对称性，不妨设 C 包含3个正文字 x_1、 x_2、 x_3，且 G包含边 $v_{x_i}^1 a_C^i$，其中 $i = 1$为2、3。反设$\phi(x_1) = \phi(x_2) = \phi(x_3) = FALSE$。根据 $i = 1$、2、3的构造，我们得到 $u_{x_i}^1 u_{x_i}^2 \in E(F_1)$，从而 $u_{x_i}^1 v_{x_i}^1 \in E(F_\infty)$。此外，由命题2可知， $v_{x_i}^1$ 也关联于 $E(F_\infty)$中的一条边，而该边包含在一个悬挂的短 1-强制器中。因此，对于 $i = 1$、2、3，我们得到边 $v_{x_i}^1 a_C^i$ 包含在 $E(F_1)$中。由此可知，圈 $a_C^1 b_C^1 a_C^2 b_C^2 a_C^3 b_C^3 a_C^1$ 的所有边都包含在$E(F_\infty)$中，这与 F_∞ 是线性森林相矛盾。 □

命题 4。 假设（X、$\mathcal{C}$） 是（3、 $B2$）-*SAT* 的是实例。那么， G 是（9、1）-*BLFD* 的是实例。

证明。 我们描述一个 G 的 (9,1)-有界线性森林分解 (F_9, F_1)。对于所有长、短 1-强制器，我们分别按照命题 1 和命题 2 所述，将它们的边分配给 $E(F_9)$ 和 $E(F_1)$。接下来，对于所有 $x \in X$，我们令 $u_x^2 w_x^1, w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2$ 和$w_x^2 u_x^1$ 包含在 $E(F_\infty)$ 中。现在令 ϕ: $X \to \{TRUE, FALSE\}$ 为一个满足

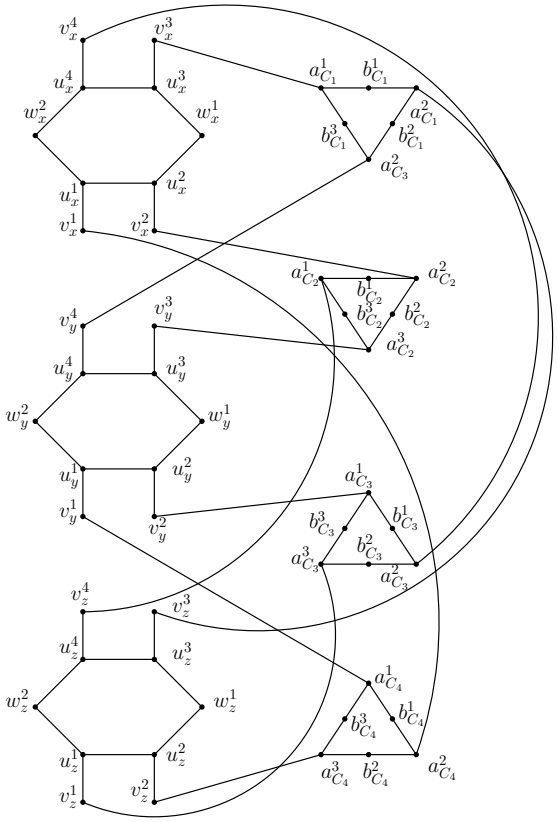


图19：从 $(3, B2)$-SAT 的实例 $(X, \mathcal{C})$ 得到的图 G 的示例，其中 $X = \{x, y, z\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1 = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}, C_2 = \{x, \bar{y}, \bar{z}\}, C_3 = \{\bar{x}, y, z\}, C_4 = \{x, y, z\}\}$。由于篇幅限制，省略了短1-强制器和长1强制器。

赋值，适用于 $(X, \mathcal{C})$。对于所有满足 $\phi(x) = TRUE$ 的 $x \in X$，我们令 $E(F_1)$ 包含 $u_x^3u_x^4$, $u_x^1v_x^1, u_x^2v_x^2$ 以及连接 $\{v_x^3, v_x^4\}$ 和 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 的两条边。对于所有满足 $\phi(x) = FALSE$ 的 $x \in X$，我们令 $E(F_1)$ 包含 $u_x^1u_x^2, u_x^3v_x^3, u_x^4v_x^4$ 以及连接 $\{v_x^1, v_x^2\}$ 和 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 的两条边。

现在我们说明如何将 F_1 扩展为子句构件。考虑某个 $C \in \mathcal{C}$。由于 C 由 ϕ 和构造满足，我们得到 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)| \leq 2$。如果 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)| = 0$，则令 $E(F_1)$ 包含 $a_C^1b_C^1$、$a_C^2b_C^2$ 和 $a_C^3b_C^3$。如果 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)| = 1$，例如 $\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)$ 包含与 a_C^1 关联的边，则令 $E(F_1)$ 包含 $b_C^1a_C^2$ 和 $a_C^3b_C^3$。如果 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)| = 2$，例如 $\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)$ 包含与 a_C^1 和 a_C^2 关联的边，则令 $E(F_1)$ 包含 $b_C^2a_C^3$。最后，我们定义 F_9 为 $E(F_9) = E(G) - E(F_1)$。示意图见图20。

容易看出，(F_9, F_1) 是 G 的一个分解，由一个 9-有界线性森林

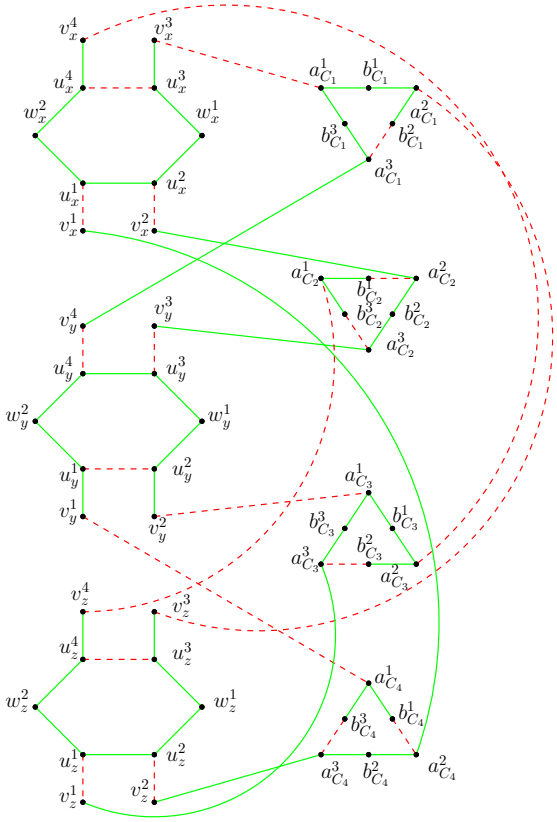


图 20：图19所示图 G 的线性森林分解 (F_9, F_1) 的一个例子。该分解由 (3, $B2$)-SAT 的实例 $(X, \mathcal{C})$ 得到，其中 $X = \{x, y, z\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1 = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}, C_2 = \{x, \bar{y}, \bar{z}\}, C_3 = \{\bar{x}, y, z\}, C_4 = \{x, y, z\}\}$，满足赋值 ϕ 定义为 $\phi(x) = TRUE$, $\phi(y) = FALSE$ 和 $\phi(z) = TRUE$。红色虚线边属于 $E(F_1)$，绿色实线边属于 $E(F_9)$。同样，短 1-强制器和长 1-强制器因篇幅限制而省略。

和一个匹配组成。 □

断言3和断言4蕴含引理1。 □

3.4 一个有界长度的线性森林与一个任意线性森林

这里我们给出一种归约，用于其中一个森林不受限制、另一个森林受一个至少为 2 的参数限制的情形。该归约与引理1的证明中所用的归约类似，但为便于阅读，我们单独给出。由于图示与第3.3节中的图示相似，故予以省略。具体而言，我们证明以下结果：

引理 2. (∞, k)-*BLFD* 对所有整数 $k \geq 2$ 都是 *NP* 完全问题。

证明。 我们通过从 $(3, B2)$-SAT 归约来证明引理 2。设 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的一个实例。我们首先描述一个变量构件 G_x，其中 $x \in X$。首先，令G_x 包含一个有 6 个顶点的圈 $u_x^1 u_x^2 w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2 u_x^1$。接着，添加 4 个顶点$v_x^1, \ldots, v_x^4$ 以及边 $u_x^i v_x^i$，其中 $i = 1, \ldots, 4$。最后，在 w_x^1 和 w_x^2 上添加悬挂的长 (∞, k)-强制构件，并对 v_x^i 添加一个悬挂的短 $(k+1, k)$-强制构件和一个悬挂的 (∞, k)-路径强制构件，其中 $i = 1, \ldots, 4$。一个子句构件 G_C，其中 $C \in \mathcal{C}$，是一个圈 $a_C^1 b_C^1 a_C^2 b_C^2 a_C^3 b_C^3 a_C^1$。

现在我们构造 G。首先，对于所有 $x \in X$，我们令 G 包含一个变量构件 G_x 和一个子句构件 G_C；对于所有 $C \in \mathcal{C}$亦如此。现在，对于每个 $x \in X$ 和满足$x \in C$的 $C \in \mathcal{C}$，我们添加一条边，将 $\{v_x^1, v_x^2\}$ 和 $\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 连接到 G；对于每个 $x \in X$和满足 $\bar{x} \in C$ 的 $C \in \mathcal{C}$，我们添加一条边，将 $\{v_x^3, v_x^4\}$ 和 $\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 连接到 G。我们以这样的方式进行操作，使得在 $\bigcup_{x \in X}\{v_x^1, \ldots, v_x^4\}$和$\bigcup_{C \in \mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$之间添加一个完美匹配。注意，这是可行的，因为 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的一个实例。至此，G 的描述完成。下面我们证明，(∞, k)-BLFD 的 G 是实例，当且仅当 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的一个是实例。

首先，假设 G 是 (∞, k)-BLFD 的一个是实例。令 (F_∞, F_k) 为 G的一个 (∞, k)-有界线性森林分解。考虑某个 $x \in X$。根据命题 6，我们得到，关联于 w_x^1和 w_x^2 且属于长 (∞, k)-forcer 的边包含在 $E(F_k)$ 中。因此，$u_x^2 w_x^1$、$w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2$ 和 $w_x^2 u_x^1$ 包含在$E(F_\infty)$ 中。由于 F_∞ 不能包含圈 $u_x^1 u_x^2 w_x^1 u_x^3 u_x^4 w_x^2 u_x^1$，我们得到，$u_x^1 u_x^2$ 和 $u_x^3 u_x^4$ 中至少有一个不包含在 $E(F_\infty)$ 中。现在我们按如下方式定义真值赋值ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$。若 $u_x^1 u_x^2 \in E(F_\infty)$，则令 $\phi(x)$ 取值为 $TRUE$；若 $u_x^3 u_x^4 \in E(F_\infty)$，则令 $\phi(x)$ 取值为 $FALSE$。若 $u_x^1 u_x^2$和 $u_x^3 u_x^4$均未包含在 $E(F_\infty)$ 中，则将 $\phi(x)$ 设为任意值。

现在证明 ϕ 是 $(X, \mathcal{C})$ 的满足赋值。考虑某个 $C \in \mathcal{C}$。由对称性，不妨设 C 包含 3 个正文字 x_1、x_2、x_3，且G 包含边 $v_{x_i}^1 a_C^i$，其中 $i = 1$、2、3。反设 $\phi(x_1) = \phi(x_2) = \phi(x_3) = FALSE$。根据 $i = 1$、2、3 的构造，我们得到 $u_{x_i}^1 u_{x_i}^2 \in E(F_k)$。由命题 7，存在一条长度为 $k-1$ 的路径，它完全包含在 F_k 中悬挂于 $v_{x_i}^1$ 的 (∞, k)- 路径强制构件内。这意味着，如果 $u_{x_i}^1 v_{x_i}^1 \in E(F_k)$，那么 F_k 包含一条长度为 $k+1$ 的路径，矛盾。因此我们得到$u_{x_i}^1 v_{x_i}^1 \in E(F_\infty)$。此外，类似于命题 3 中的论证，我们得到 $v_{x_i}^1$ 也关联于 $E(F_\infty)$ 中的一条边，该边包含在悬挂的短 $(k+1, k)$-强制构件中。由于 F_k 包含一条完全位于悬挂的 (∞, k)-路径强制构件内、长度为 $k-1$ 的路径，我们得到边 $v_{x_i}^1 a_C^i$ 是 F_k 中一条路径的末边，该路径与 $i = 1$ 的子句构件 G_C 不相交，其中 $i = 1$、2、3。因此我们得到，圈 $a_C^1 b_C^1 a_C^2 b_C^2 a_C^3 b_C^3 a_C^1$ 的所有边都包含在 $E(F_\infty)$ 中，这与 F_∞ 是线性森林矛盾。因此 ϕ 满足 $(X, \mathcal{C})$，所以 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的是实例。

现在假设 $(X, \mathcal{C})$ 是 $(3, B2)$-SAT 的是实例。令 ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$为 $(X, \mathcal{C})$ 的一个满足赋值。下面我们描述 G 的一个 (∞, k)-有界线性森林分解 (F_∞, F_k)。对于所有长 (∞, k)-强制器、(∞, k)-路径强制器和短 $(k+1, k)$-强制器，分别令 $E(F_k)$ 包含命题 6、7 和 3 中所述分解所对应的边。对于所有 $x \in X$ 其中

$\phi(x) = TRUE$，我们将边 $u_x^3u_x^4$，$u_x^1v_x^1$，$u_x^2v_x^2$以及连接 $\{v_x^3, v_x^4\}$ 和 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$ 的两条边添加到 $E(F_k)$ 中。对于所有 $x \in X$ 其中 $\phi(x) = FALSE$，我们将边 $u_x^1u_x^2$，$u_x^3v_x^3$，$u_x^4v_x^4$以及连接 $\{v_x^1, v_x^2\}$ 和$\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\{a_C^1, a_C^2, a_C^3\}$的两条边添加到 $E(F_k)$ 中。

现在我们展示如何将 F_k 扩展到子句构件。考虑某个 $C \in \mathcal{C}$。由于根据 ϕ 和构造，C 已满足，因此我们得到 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_k)| \leq 2$。若 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_k)| = 0$，则令 $E(F_1)$ 包含 $a_C^1b_C^1$、$a_C^2b_C^2$ 和 $a_C^3b_C^3$。若$|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_k)| = 1$，例如 $\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_k)$ 包含与 a_C^1 关联的边，则令 $E(F_k)$ 包含 $b_C^1a_C^2$ 和 $a_C^3b_C^3$。若 $|\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_k)| = 2$，例如 $\delta_G(V(G_C)) \cap E(F_1)$ 包含与 a_C^1 和 a_C^2 关联的边，则令 $E(F_1)$ 包含 $b_C^2a_C^3$。最后，我们将 F_∞ 定义为 $E(F_\infty) = E(G) - E(F_k)$。容易看出，$(F_\infty, F_k)$ 是 G 的一个 (∞, k)-有界线性森林分解。

因此，G 是（∞，k）-BLFD 的是实例，故结论成立。

□

3.5 两个有界长度的线性森林

在本节中，我们证明当 k 和 ℓ 都是严格大于 1 的正整数时，该问题仍然是困难的。具体而言，我们证明以下结果。

引理 3。对于任意一对整数 k、$\ell \geq 2$，判定给定的图是否具有 (k, ℓ)-有界线性森林分解是 *NP* 完全的。

证明分为两部分。在第 3.5.1 节中，我们介绍主要归约所需的一个更复杂的构件。在第 3.5.2 节中，我们给出引理 3 的主要证明。

3.5.1 一个更复杂的构件

设 G 是一个图，且对所有 $a \in A$，$A \subseteq V(G)$ 满足 $d_G(a) = 1$。对于正整数 k 以及 G 的一个 k-有界线性森林 F，若每个 $a \in A$ 都是 F 中一条长度为 k 的路径的端点，则称 A 为 (k, F)-覆盖的。对于满足 $k \geq \ell \geq 2$ 的某些整数 α，k，ℓ，(α, k, ℓ)-构件 是一个图 G，连同一个集合 $A \subseteq V(G)$，并满足以下性质：

- $d_G(a) = 1$ 对所有 $a \in A$均成立，
- $|A| = \alpha$，
- 存在 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解 (F, F')，使得 A 为 (k, F)-覆盖的，
- 存在 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解 (F, F')，使得 A 为 (ℓ, F')-覆盖的，
- 对于 G 的每一种 (k, ℓ) 有界线性森林分解 (F, F')，要么 A 被 (k, F) 覆盖，要么 A 被 (ℓ, F') 覆盖。

引理 4。 对于所有满足 $k \geq \ell \geq 2$ 和 $\alpha \geq 2$ 的正整数 α、k、ℓ，存在一个$(\alpha$、k、$\ell)$-构件，其大小与 α 成线性关系。

证明。 我们需要区分两种不同的情况。

情况 1. $k > \ell$.

我们固定一些 $k > \ell \geq 2$和 $\alpha \geq 2$，并构造一个 (α, k, ℓ)-构件 G。首先，令 $V(G)$ 包含 4α 个顶点 $v_1, \ldots, v_\alpha, w_1, \ldots, w_\alpha, a_1, \ldots, a_\alpha, b_1, \ldots, b_\alpha$，其中指标 $1, \ldots, \alpha$ 视为含有 α个元素的循环加法群中的元素。接下来，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，我们添加边 $v_i a_i$ 和 $w_i b_i$。此外，对于 $i =1, \ldots, \alpha$，我们用一条长度为 $k-1$的路径 P_i连接 v_i和 w_i，并将这条路径的每个内部顶点与一个长 (k, ℓ)-强制构件的尖端顶点识别。最后，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，我们用一条长度为 $\ell-1$ 的路径 Q_i 连接 w_i 和 v_{i+1}，并将这条路径的每个内部顶点与一个短 (k, ℓ)-强制构件的尖端顶点识别。至此，G的描述完成。示意图见图 21。令 $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$，并注意其大小

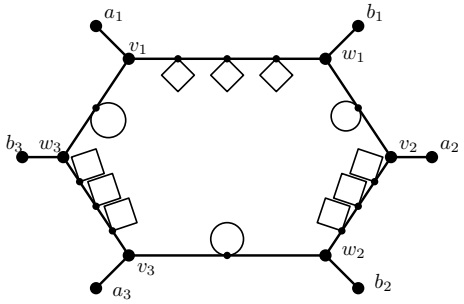


图 21：一个 (3,5,3)-构件。正方形表示附加的长 $(5, 3)$-强制器，环表示附加的短 (5,3)-强制器。

G 关于 α呈线性。以下断言表明，(G, A) 是一个 (α, k, ℓ)-构件。

断言 5. 存在一个(k, ℓ)-有界线性森林分解(F_k, F_ℓ)，使得 G 的分解中 A 被(k, F_k)-覆盖。

证明。 对于所有 $i = 1, \ldots, \alpha$，令 $E(F_k)$ 包含 $v_i a_i$和 $E(P_i)$，并令 $E(F_\ell)$ 包含 $w_i b_i$ 和 $E(Q_i)$。此外，我们根据命题 3 和 4 中描述的唯一分解，将此分解扩展到短和长 (k, ℓ)-强制器。由构造可立即得出，(F_k, F_ℓ) 是 G 的一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解，并且 A 被 (k, F_k)-覆盖。示意图见图 22。

□

断言6。 存在一个(k, ℓ)-有界线性森林分解(F_k, F_ℓ)，使得 G 满足(ℓ, F_ℓ)覆盖。

证明。 对于所有的 $i = 1, \ldots, \alpha$，令 $E(F_k)$ 包含 $w_i b_i$和 $E(P_i)$，并令 $E(F_\ell)$ 包含 $v_i a_i$ 和 $E(Q_i)$。此外，我们通过命题 3 和 4 中所述的唯一的分解，将该分解扩展到短和长的 (k, ℓ)-forcer。由此可得

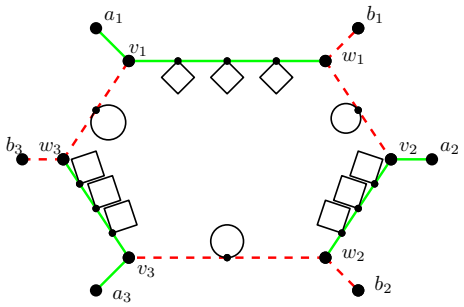


图 22：一个 (5,3)-有界线性森林分解（F_5, F_3），对应一个 $(3, 5, 3)$-构件，其中 A 被 $(5, F_5)$ 覆盖。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_5)$。短和长 (5,3)-强制构件内部的边已省略。它们分别对应图 9 和图 11 中的边。

根据构造可立即得出，$(F_k,\ F_\ell)$ 是 G 的一个 $(k,\ \ell)$-有界线性森林分解，且 A 被 $(\ell,\ F_\ell)$ 覆盖。示意图见图 23。

□

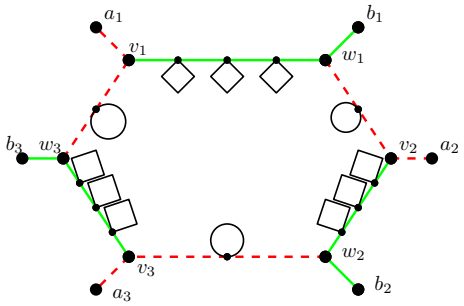


图 23：一个 (5,3)-有界线性森林分解（F_5, F_3），对应一个 $(3, 5, 3)$-构件，其中 A 被 $(3, F_3)$ 覆盖。红色虚线边属于 $E(F_3)$，绿色实线边属于 $E(F_5)$。短和长 (5,3)-强制构件内部的边已省略。它们分别对应图 9 和图 11 中的边。

命题 7。 对于 k、ℓ)-有界线性森林分解 $(F_k$、$F_\ell)$ 的 G，要么A 是 $(k$、$F_k)$-覆盖的，要么 A 是 $(\ell$、$F_\ell)$-覆盖的。

证明。设 $(F_k,\ F_\ell)$ 是 G 的 $(k,\ \ell)$-有界线性森林分解。对于 i =1，$\ldots$，α，由命题 4 可知，P_i 的每个内部顶点都与 $E(F_\ell)$ 中的两条边关联，而这两条边包含在一个长 $(k,\ \ell)$-forcer 中。这意味着，与该顶点关联的 P_i 的两条边都包含在 $E(F_k)$ 中。因此，对于 $i = 1,\ \ldots,\ \alpha$，有$E(P_i) \subseteq E(F_k)$。接下来，若 $\ell \geq 3$，则对于 $i = 1,\ \ldots,\ \alpha$，由命题 3 可知，Q_i 的每个内部顶点都是 F_k 中一条长度为 k 的路径的末顶点，且该路径包含在一个短 $(k,\ \ell)$-forcer 中。这意味着，与该顶点关联的 Q_i 的两条边

都包含在 $E(F_\ell)$ 中。因此，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，有 $E(Q_i) \subseteq E(F_\ell)$。若 $\ell = 2$，则对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，Q_i 的唯一一条边不可能包含在 $E(F_k)$ 中，否则就会迫使 F_k 包含一条长度为 $2k-1 > k$ 的 $v_i w_{i+1}$-路径。无论哪种情况，我们都得到：对于$i = 1, \ldots, \alpha$，$E(P_i) \subseteq E(F_k)$ 且 $E(Q_i) \subseteq E(F_\ell)$。

现在假设 $v_1 a_1 \in E(F_k)$。我们将证明，对所有 $i = 1, \ldots, \alpha$，都有 $v_i a_i \in E(F_k)$。假设对于某个固定的 i，该结论对不超过它的所有整数都成立。根据归纳法，只需证明该结论对 $i+1$成立。注意到 F_k 包含一条长度为 k的$a_i w_i$-路径。因此可得 $w_i b_i \in E(F_\ell)$。于是 F_ℓ 包含一条长度为 ℓ的 $b_i v_{i+1}$-路径。由此可知 $v_{i+1} a_{i+1} \in E(F_k)$。因此，对所有 $i = 1, \ldots, \alpha$，都有 $v_i a_i \in E(F_k)$。由于对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，有 $P_i \subseteq E(F_k)$，我们可得 a_i 是 F_k中一条长度为 k 的路径的末端顶点，因此 A 是(k, F_k)-覆盖的。类似的论证表明，若 $v_1 a_1 \in E(F_\ell)$，则 A 是(ℓ, F_ℓ)-覆盖的。 □

情况 1 到此结束。现在考虑剩下的情形。

情形 2. $k = \ell$.

情形 2 的构件与情形 1 的构件有些相似，但为了提高可读性，我们单独讨论这种情形。我们固定一些 $k \geq 2$ 和 $\alpha \geq 2$，并构造一个 (α, k, k)-构件 G。首先，我们令 $V(G)$包含 4α 个顶点 $v_1, \ldots, v_\alpha, w_1, \ldots, w_\alpha, a_1, \ldots, a_\alpha, b_1, \ldots, b_\alpha$，其中下标 $1, \ldots, \alpha$ 视为含有 α 个元素的循环加法群中的元素。接下来，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，我们添加边 $v_i a_i$和 $w_i b_i$。此外，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，我们用一条长度为 $k-1$的路径 P_i连接 v_i和 w_i，并将这条路径的每个内部顶点与一个对称的k-强制器的尖端顶点识别。最后，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，我们用一条长度为 $\ell - 1$的路径 Q_i连接 w_i和 v_{i+1}，并将这条路径的每个内部顶点与一个对称的k-强制器的尖端顶点识别。至此，G的描述完毕。示意图见图 24。

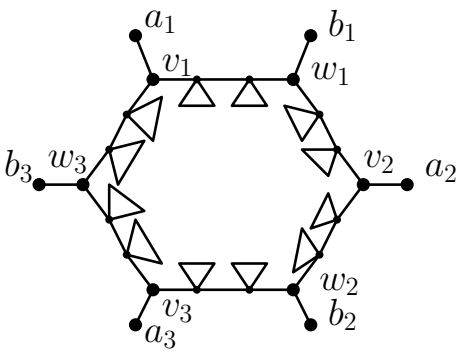


图 24：一个 (3,4,4)-构件。三角形表示附加的对称 4-强制器。

令 $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$，并注意到 G 的大小与 α呈线性关系。以下断言表明，(G, A) 确实是一个 (α, k, k)-构件。

断言 8. 存在 G 的一个(k, k)-有界线性森林分解(F, F')，使得A 被(k, F)-覆盖。

证明。对于所有 $i = 1, \ldots, \alpha$，令 $E(F)$ 包含 $v_i a_i$ 和 $E(P_i)$，并令 $E(F')$ 包含 $w_i b_i$ 和 $E(Q_i)$。此外，我们将此分解扩展到对称的 k-强制器，采用命题 5 中所述的唯一的分解，其中，对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，所附对称 k-强制器中的 P_i 的每个内部顶点都与 F' 的一条边关联，而 Q_i 的每个内部顶点都与 F 的一条边关联。由构造可立即得出，(F, F') 是 G 的一个 (k, k)-有界线性森林分解，且 A 被 (k, F)-覆盖。示意图见图 25。

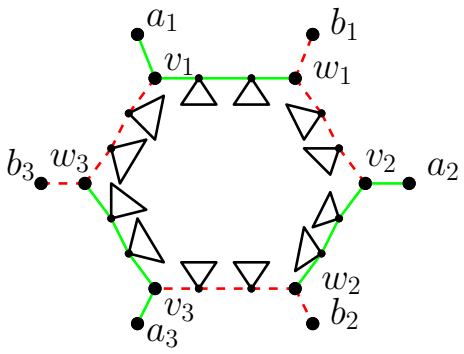


图 25：一个 (4，4)-有界线性森林分解 (F，F')，对应一个 (3，4，4)-构件，其中 A 被 (4，F)-覆盖。红色虚线边属于 $E(F')$，绿色实线边属于 $E(F)$。对称 4-强制器内部的边已省略，它们对应于图 13 中的边。

□

断言 9。对于 G 的每个 (k, k)-有界线性森林分解 (F, F')，要么 A 被 (k, F)-覆盖，要么 A 被 (k, F')-覆盖。

证明。设 (F, F') 是 G 的一个 (k, k)-有界线性森林分解。首先，令 v 是 P_i 中的一个内部顶点，其中 P_i 属于某个 $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$。由命题 5 可知，$v$ 是 F 或 F' 中一条长度为 k 的路径的末端顶点，且该路径完全包含在附着于 v 的对称 k-强制器中。由此可知，P_i 中关联于 v 的两条边要么都属于 $E(F)$，要么都属于 $E(F')$。因此，$E(P_i) \subseteq E(F)$ 或 $E(P_i) \subseteq E(F')$ 成立。类似地，对于 $i = 1$，....., α，$E(Q_i) \subseteq E(F)$ 和 $E(Q_i) \subseteq E(F')$ 中有一个成立。

根据对称性，不妨设 $E(P_1) \subseteq E(F)$ 成立。进一步，假设$v_1 a_1 \in E(F)$成立。我们将证明，对所有 $i = 1, \ldots, \alpha$，$v_i a_i \in E(F)$ 和 $E(P_i) \subseteq E(F)$ 均成立。假设对于某个固定的i之前的所有整数，结论都成立。由归纳法，只需证明该结论对 $i + 1$ 成立。注意到 F包含一条长度为 k的 $a_i w_i$-路径。这说明 $w_i b_i \in E(F')$ 且 $E(Q_i) \subseteq E(F')$。因此，F' 包含一条长度为 k的 $b_i v_{i+1}$-路径。由此可得 $v_{i+1} a_{i+1} \in E(F)$ 且$E(P_{i+1}) \subseteq E(F)$。因此，对于所有$i = 1, \ldots, \alpha$，我们有 $v_i a_i \in E(F)$ 和 $E(P_i) \subseteq E(F)$ 成立。由于对于 $i = 1, \ldots, \alpha$，$P_i \subseteq E(F)$，我们得到 a_i是 F中一条长度为 k的路径的最后一个顶点，因此 A是由(k, F)覆盖的。类似的论证表明，若$v_1 a_1 \in E(F')$，则 A是由(k, F')覆盖的。

□

□

3.5.2 主要归约

现在我们可以给出引理 3 的主要证明。

证明。（引理 3 的证明）我们通过从 MNAE3SAT 进行归约来证明这一点。设 $(X, \mathcal{C})$ 是 MNAE3SAT 的一个实例。现在，我们按如下方式构造一个 (k, ℓ)-BLFD 实例 G：对于每个 $x \in X$，令 G 包含一个 (α_x, k, ℓ)-构件 (G_x, A_x)，其中 α_x 是 $\mathcal{C}$ 中 x 出现的次数。注意，根据引理 4，这个构件总是存在的。接下来，对每个 $C \in \mathcal{C}$，令 G 包含一个顶点 v_C。每当 x 包含于 C 中时，我们就在 A_x 的一个顶点上添加一条边 v_C。我们以这样的方式选择这些边：对于所有 $x \in X$，A_x 中的每个顶点都恰好关联一条不包含于 $E(G_x)$ 中的边。至此，G 的构造完成。示意图见图 26。

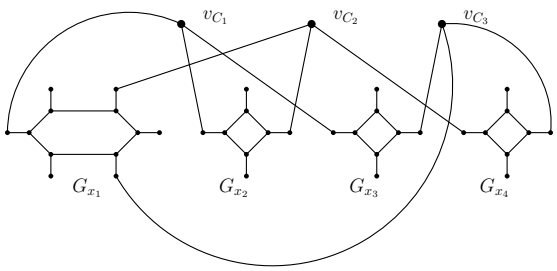


图 26：引理 3 中 G 的构造示例，其中 $k = \ell = 2$，$X = \{x_1, \ldots, x_4\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{x_1, x_2, x_4\}, C_3 = \{x_1, x_3, x_4\}\}$。

根据引理 4 的第二部分，G 的规模是 $(X, \mathcal{C})$ 的规模的多项式。现在我们证明，(k, ℓ)-BLFD 的实例 G 是实例，当且仅当 $(X, \mathcal{C})$ 是 MNAE3SAT 的是实例。

首先，假设 G 是 (k, ℓ)-BLFD 的是实例，因此存在 G 的 (k, ℓ)-有界线性森林分解 (F, F')。对于所有 $x \in X$，由于 G_x 是一个 (α_x, k, ℓ)-构件，我们可以得出，要么 A_x 被 (k, F) 覆盖，要么 A_x 被 (ℓ, F') 覆盖。现在我们按以下方式定义真值赋值 ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$：如果 A_x 被 (k, F) 覆盖，我们就令 $\phi(x) = TRUE$；如果 A_x 被 (ℓ, F') 覆盖，我们就令 $\phi(x) = FALSE$。为了证明 ϕ 确实满足条件，考虑任意一个 $C \in \mathcal{C}$。由于 v_C 在 G 中的度为 3，且 F 和 F' 是线性森林，我们可以得出存在变量 $x, y \in C$，使得 $E(F)$ 包含一条连接 A_x 和 v_C 的边，而 $E(F')$ 包含一条连接 A_y 和 v_C 的边。由于 F 是一个 k-有界线性森林，我们可以得出 A_x 不可能被 (k, F)-覆盖，其中 F 是 F 在 G_x 上的限制。因此 A_x 被 (ℓ, F') 覆盖，所以 $\phi(x) = FALSE$。类似地，我们可以得出 $\phi(y) = TRUE$，因此 C 得到满足。由于 $C \in \mathcal{C}$ 是任意选取的，我们可以得出 $(X, \mathcal{C})$ 被 ϕ 满足，因此 $(X, \mathcal{C})$ 是 MNAE3SAT 的是实例。

现在假设 $(X, \mathcal{C})$ 是 MNAE3SAT 的是实例，因此存在满足赋值 ϕ：$X \to \{TRUE, FALSE\}$ 对于 $(X, \mathcal{C})$。对于每个 $x \in X$，由于 G_x 是一个 (α_x, k, ℓ)-构件，我们现在可以选择一个 (k, ℓ)-有界线性森林分解

(F_x, F'_x)，使得当 A_x 为 (k, F_x)-覆盖时，G_x $\phi(x) = TRUE$；当 A_x 为 (ℓ, F'_x)-覆盖时，$\phi(x) = FALSE$。现在，对于一个满足 $\phi(x) = FALSE$ 至 $\bigcup_{x\in X} E(F_x)$ 的变量 $x \in X$，我们通过添加离开 G_x 的所有边来创建 F；对于一个满足 $\phi(x) = TRUE$ 至 $\bigcup_{x\in X} E(F'_x)$ 的变量 $x \in X$，我们通过添加离开 G_x 的所有边来创建 F'。

示例请见图27。

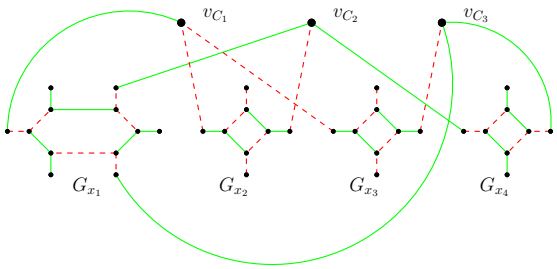


图27：对图26所述实例，结合满足赋值 ϕ，构造 (F, F') 的示例，其中 ϕ 由 $\phi(x_1) = \phi(x_4) = TRUE$ 以及 $\phi(x_2) = \phi(x_3) = FALSE$定义。

注意，F 或 F' 的每个连通分支，要么完全包含在某个 $x \in X$ 的 G_x 中，要么其边集与所有 $x \in X$对应的 $E(G_x)$均不相交。进一步注意，由于 ϕ 满足$(X, \mathcal{C})$，对于所有 $C \in \mathcal{C}$，v_C 都至少与 F 中的一条边以及 F' 中的一条边关联。因此，F或 F'的每个连通分支，要么是某个 $x \in X$ 对应的 F_x 或 F'_x 的连通分支，要么是长度至多为2的路径。由于对于所有 $x \in X$ 和$k, \ell \geq 2$，(F_x, F'_x)都是 G_x 的(k, ℓ)-有界线性森林分解，因此(F, F')是 G的(k, ℓ)-有界线性森林分解。因此，G 是(k, ℓ)-BLFD 的是实例。

至此，证明完成。 □

最后注意到，引理 1、2 和 3 与定理 1 一起推出定理 3。

4 围长为 9 的平面图

本节旨在使用放电法证明定理 4。在第4.1节中，我们给出一些预备结果。在第4.2节中，我们利用第4.1节的结果，给出最小反例的一些结构性质。最后，在第4.3节中，我们进行放电过程，从而证明最小反例不存在。

4.1 预备知识

对于图 G和 u，$v \in V(G)$，我们用 $dist_G(u, v)$ 表示 G 中最短 uv-路径所含边的数量。对于平面图 G 的嵌入中的非退化面 F（即由一个圈围成的面），我们用 $V(F)$ 表示与 F 关联的 G 的顶点，用 $E(F)$ 表示 F 边界上的边。对于一个嵌入

G 的平面图，我们用 $F(G)$ 表示该嵌入的面集合；对于$F \in F(G)$，我们用 $|F|$ 表示 F 的边界游走的长度。若 $V(F)$ 的一个排序遵循顶点在该面的边界上出现的顺序，我们就称其为典范的。注意，共有 $2|V(F)|$ 种典范序。

命题 8. 设 G为一个平面图， F 为 G 的一个嵌入的非退化面，并且 $v_1, \ldots, v_4 \in V(F)$ 以此顺序出现在 $V(F)$ 的一个规范排序中，使得 $\max\{dist_{G-E(F)}(v_1, v_3)\ dist_{G-E(F)}(v_2, v_4)\} \leq 6$。则$\min\{dist_{G-E(F)}(v_1, v_2)\ dist_{G-E(F)}(v_3, v_4)\} \leq 6$。

证明。设 P_1 是 $G - E(F)$ 中一条最短的 v_1v_3-路径，且 P_2 是$G - E(F)$ 中一条最短的 v_2v_4-路径。由于 G 是平面的，存在某个 $x \in V(P_1) \cap V(P_2)$。我们得到

$$\begin{aligned} 6 + 6 &\geq dist_{G-E(F)}(v_1, v_3) + dist_{G-E(F)}(v_2, v_4) \\ &= dist_{P_1}(v_1, x) + dist_{P_1}(v_3, x) + dist_{P_2}(v_2, x) + dist_{P_2}(v_4, x) \\ &= (dist_{P_1}(v_1, x) + dist_{P_2}(v_2, x)) + (dist_{P_1}(v_3, x) + dist_{P_2}(v_4, x)) \\ &\geq dist_{G-E(F)}(v_1, v_2) + dist_{G-E(F)}(v_3, v_4), \end{aligned}$$

因此该命题得证。 □

以下结论是线性森林定义的直接推论。

命题 9. 设 L 为一个线性森林， $v_1, v_2, v_3 \in V(L)$ 满足对 $i = 1,2,3$ 有 $d_L(v_i) = 1$，并设 P_i 为 L 中包含 v_i的连通分量。则 $P_1 \neq P_2$ 和 $P_2 \neq P_3$ 中至少有一个成立。

下面这个所谓的“面充电”不等式是众所周知的（见 [CW17]命题 3.1）：

命题 10. 对于平面图 G的任意嵌入 G_0， 下列等式成立

$$\sum_{f \in F(G_0)} (|f| - 6) + \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) = -12.$$

4.2 最小反例的结构性质

本节汇总关于定理 4 的最小反例的一些性质。

设 G 是定理 4 的一个反例，其中 $v(G) + e(G)$取最小值。我们固定 G 的一个嵌入，并称 F 是 G 或 $F \in F(G)$的一个面，当且仅当它是该嵌入的一个面。我们采用如下记号：若顶点 $v \in V(G)$在 G中的度为 k，则称其为 k-顶点 。

断言 10. 图 G 不含度为1的顶点。

证明。反设，因此存在某个 $v \in V(G)$，使得 $d_G(v) = 1$。令 u 为 v 在 G 中的邻点，并令 $G' = G - v$。由于 G' 小于 G，因此存在 G'的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)。若 $d_{F_\infty}(u) \leq 1$，令 F'_∞

由 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup uv$定义，并令 $F'_1 = F_1$。若 $d_{F_\infty}(u) = 2$，令 F'_1由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup uv$ 定义，并令 $F'_\infty = F_\infty$。无论哪种情况，都可推出 (F'_∞, F'_1) 是 G的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G是一个反例相矛盾。

□

引理 5. 图 G 不含两个相邻的2度顶点。

证明。反设存在一条边 $e = uv \in E(G)$，其中 $d_G(u) = d_G(v) =2$。令 $G' = G - uv$。由于 G' 小于 G，因此 G'存在一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)。若 $d_{F_\infty}(u) + d_{F_\infty}(v) \leq 1$，令 F'_∞ 由 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup uv$ 定义，并令 $F'_1 = F_1$。若 $d_{F_\infty}(u) + d_{F_\infty}(v) = 2$，令 F'_1由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup uv$定义，并令 $F'_\infty = F_\infty$。无论哪种情况，都可得 (F'_∞, F'_1) 是 G的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是反例矛盾。

□

引理 6. 设 F 是 G 的一个大小为 *10* 的非退化面，且 $v_1, \ldots, v_{10}$ 是 $V(F)$ 的一个规范排序，其中 v_i 是 $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的一个 *3*-度顶点，v_i 是 $i \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 的一个 *2*-度顶点。此外，对于 $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$，设 u_i 是 v_i 在 $V(G) - V(F)$ 中的唯一邻点。那么，对于 $G - E(F)$ 的任意一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解(F_∞, F_1)，有 $\{u_1v_1, u_3v_3, u_5v_5, u_7v_7, u_9, v_9\} \subseteq E(F_1)$

证明。反设。令 (F'_∞, F'_1) 由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_iv_{i+1} : i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$and $u_iv_i \in E(F_\infty)\}$ and $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup (E(F) - E(F'_1))$ 定义。由构造可立即得出，F'_1 是一个匹配。此外，F'_∞ 的每个连通分支都是通过延长一条 F_∞ 的路径得到的。因此，F'_∞ 是一个线性森林，所以 (F'_∞, F'_1) 是 G 的 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这就产生了矛盾。示意见图28。 □

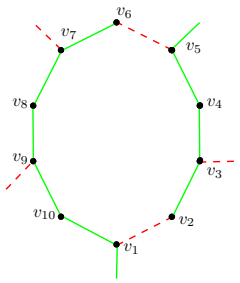


图28：引理 6 证明的示意图，其中 u_3v_3，u_7v_7 和 u_9v_9 被包含在 $E(F_1)$ 中。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

引理 7. 设 F 是 G 的一个大小为 *10* 的非退化面，且 v_1、……、v_{10} 是 $V(F)$ 的一个规范排序，使得 v_i 是 $i \in \{1,3,5,7,9\}$ 中的一个 *3*-度顶点，且 v_i 是 $i \in \{2,4,6,8,10\}$ 中的一个 *2*-度顶点。那么 $dist_{G-E(F)}(v_1, v_5) \leq 6$。

证明。反设，令 H 由 $G - E(F)$ 添加一个新顶点 z 和 3 条新边 v_1z, v_3z 和 v_5z 得到。

断言 11. H 的围长至少为 *9*。

证明. 反设不然，则 H 含有一个长度至多为 8 的圈 C。由于 $G-E(F)$ 的围长至少为 9，可知 $z \in V(C)$ 和 $E(C)$ 恰好包含 v_1z, v_3z 和 v_5z 这 3 条边中的 2 条。若 $v_3z \in E(C)$，不妨设为 $\{v_1z, v_3z\} \subseteq E(C)$，则由 $V(C') = V(C) - z \cup v_2$ 和 $E(C') = E(C) - \{v_1z, v_3z\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3\}$ 定义的图 C' 是一个圈，其长度与 G 中的 C 相同，这与 G 的围长至少为 9 矛盾。若 $\{v_1z, v_5z\} \subseteq V(C)$，则 $C - z$ 是 $G - E(F)$ 中的一条长度至多为 6 的 v_1v_5-路径，这与假设矛盾。 □

对于 $i \in \{1,3,5,7,9\}$，令 u_i 为 v_i 在 $V(G) - V(F)$ 中唯一的邻点。显然，H 是平面次三度图，且比 G 小，因此我们得到 H 有一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)。此外，若 $\{u_1v_1, u_3v_3, u_5v_5\} \subseteq E(F_1)$，由于 F_1 是一个匹配，我们得到 $\{v_1z, v_3z, v_5z\} \subseteq E(F_\infty)$，这与 $E(F_\infty)$ 是线性森林矛盾。因此，$(F_\infty - z, F_1 - z)$ 是 $G - E(F)$ 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森-林分解，且满足 $\{u_1v_1, u_3v_3, u_5v_5, u_7v_7, u_9, v_9\} - E(F_1) \neq \emptyset$，这与引理 6 矛盾。 □

引理 8. G 的每个10-面都至少关联六个*3*-度顶点。

证明。设 F 是 G 的一个大小为 10 的面，并反设 $V(F)$ 至多包含五个3-度顶点，从而导出矛盾。注意，由于 G 的围长至少为 9，F 是非退化的。此外，由引理 5 可知，存在 $V(F)$ 的一个典范序 $v_1, \ldots, v_{10}$，使得对 $i \in \{1,3,5,7,9\}$，v_i 是一个3-度顶点，而对 $i \in \{2,4,6,8,10\}$，v_i 是一个2-度顶点。由引理 7 可得 $dist_{G-E(F)}(v_1, v_5) \leq 6$。将引理 7 应用于典范序 $v_3, \ldots, v_{10}, v_1, v_2$，可得 $dist_{G-E(F)}(v_3, v_7) \leq 6$。现在由命题 8 可知，存在某个 $i \in \{1,5\}$ 使得 $dist_{G-E(F)}(v_i, v_{i+2}) \leq 6$，因此在 $G - E(F)$ 中存在一条 v_iv_{i+2}-路径 P，其长度至多为 6。现在令 C 为 G 的子图，满足 $V(C) = V(P) \cup v_{i+1}$ 且 $E(C) = E(P) \cup \{v_iv_{i+1}, v_{i+1}v_{i+2}\}$。那么 C 是 G 中长度至多为 8 的一个圈，矛盾。 □

引理 9. 设 F 是 G 的一个非退化 *9*-面，且 $v_1, \ldots, v_9$ 是 $V(F)$ 的一个典范序，其中 v_i 是 $i \in \{1,2,4,6,8\}$ 的一个 *3*-度顶点，v_i 是 $i \in \{3,5,7,9\}$ 的一个 *2*-度顶点。此外，对于 $i \in \{1,2,4,6,8\}$，设 u_i 是 v_i 在 $V(G) - V(F)$ 中的唯一邻点。那么对于 $G - E(F)$ 的任意 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)，以下情形之一成立：

1. $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \subseteq E(F_1)$，2. $\{u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \subseteq E(F_1)$ 以及 $\{u_1v_1, u_2v_2\} \subseteq E(P)$ 属于 P 的某个连通分支 F_∞。

证明。 设 (F_∞, F_1) 是 $G - E(F)$ 的 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解。我们区分几种情况。

情况 1. $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \emptyset$.

证明。 对于 $i \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$，令 P_i 为 F_∞ 的包含边 u_iv_i的连通分量。由命题 9可知， $P_4 \neq P_6$ 和 $P_6 \neq P_8$ 中至少有一个成立。由对称性，不妨设 $P_4 \neq P_6$。令 (F'_∞, F_1) 由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_1v_2, v_3v_4, v_6v_7, v_8v_9\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_4v_5, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$定义。由构造可知， F'_1 是一个匹配；又由于 $P_4 \neq P_6$， F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，矛盾。图示见图 29。 □

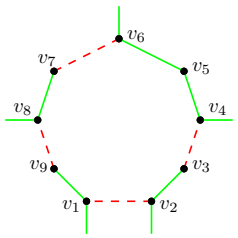


图 29：情况 1 的证明示意图。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

情形 2. $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| = 1$。

证明。 由对称性，不妨设 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)$ 中唯一的边是 u_2v_2， u_4v_4 和 u_6v_6 中的一条。

子情形 2.1. $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_2v_2\}$。

证明。 令 (F'_∞, F'_1) 定义为 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$ 和$E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7, v_8v_9\}$。由构造可知，$E(F'_1)$ 是一个匹配，而 $E(F'_\infty)$ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，矛盾。示意图见图 30。 □

子情形 2.2. $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_4v_4\}$.

证明。 对于 $i \in \{1, 2, 6, 8\}$，令 P_i 为 $E(F_\infty)$ 中包含边 u_iv_i 的连通分量。根据命题 9，我们得到 $P_1 \neq P_2$ 和 $P_2 \neq P_6$ 中至少有一个成立。

首先，假设 $P_1 \neq P_2$成立。令(F'_∞, F'_1)为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_2v_3, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup\{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_6v_7, v_8v_9\}$ 定义的 G的分解。根据构造可知， F'_1是一个匹配；又由于 $P_1 \neq P_2$， F'_∞是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1)是 G的$(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是反例相矛盾。示意见图 31。

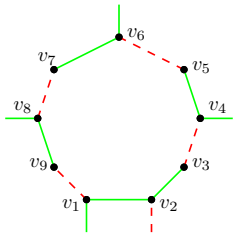


图 30：子情形 2.1 证明的示意图。红色虚线边属于$E(F_1')$，绿色实线边属于 $E(F_\infty')$。

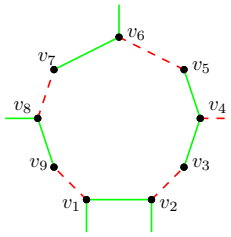


图32：子情形 2.2 证明第一部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F_1')$，绿色实线边属于 $E(F_\infty')$。

现在假设 $P_2 \neq P_6$成立。令$(F_\infty'$， $F_1')$为由 $E(F_1') = E(F_1) \cup \{v_1v_2, v_6v_7, v_8v_9\}$ 和 $E(F_\infty') = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$定义的 G 的分解。根据构造可知， F_1' 是一个匹配；又由于 $P_2 \neq P_6$， F_∞' 是一个线性森林。因此，$(F_\infty'$， $F_1')$是 G的$(\infty$， 1)-有界线性森林分解，这与 G是反例相矛盾。示意见图32。

□

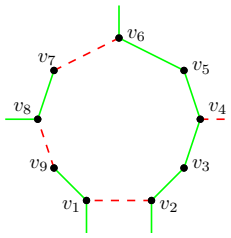


图32：子情形 2.2 证明第二部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F_1')$，绿色实线边属于 $E(F_\infty')$。

子情形2.3。 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E\ (F_1)\ = \{u_6v_6\}$。

证明。 对于 $i \in \{1, 2, 4, 8\}$， 令 P_i 为 F_∞ 中包含边 u_iv_i 的连通分量。根据命题 9， 可得 $P_1 \neq P_2$ 和 $P_2 \neq P_4$ 中至少有一个成立。

首先，假设 $P_1 \neq P_2$ 成立。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_2v_3, v_4v_5, v_7v_8, v_9v_1\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_7, v_8v_9\}$ 定义的 G 的分解。由构造可知，$E(F'_1)$ 是一个匹配；又由于 $P_1 \neq P_2$，F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是反例矛盾。图示见图33。

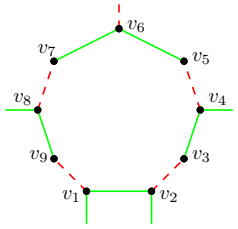


图33：子情形2.3证明第一部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

现在假设 $P_2 \neq P_4$ 成立。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_1v_2, v_4v_5, v_8v_9\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_3v_4, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_9v_1\}$ 定义的 G 的分解。由构造可知，F'_1 是一个匹配；又因为 $P_2 \neq P_4$，所以 F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是一个反例矛盾。示意见图34。 □

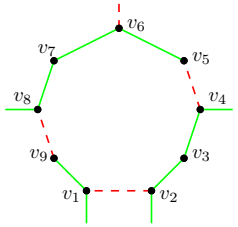


图34：子情形2.3证明第二部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

□

情形 3。 $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| = 2$。

证明。 由对称性，不妨设以下情形之一成立：

- $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_1v_1, u_2v_2\}$,
- $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_2v_2, u_4v_4\}$,
- $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_2v_2, u_6v_6\}$,

- $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_4v_4, u_6v_6\}$,
- $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_4v_4, u_8v_8\}$。

子情形 3.1。 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_1v_1, u_2v_2\}$。

证明。对于 $i \in \{4, 6, 8\}$，令 P_i 为 F_∞ 中包含边 u_iv_i的连通分量。由命题 9 可知，$P_4 \neq P_6$ 和 $P_6 \neq P_8$ 中有一个成立。由对称性，不妨设 $P_4 \neq P_6$。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_3v_4, v_6v_7, v_8v_9\}$和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$定义的 G的分解。由构造可知，F'_1是一个匹配，并且由于 $P_4 \neq P_6$，F'_∞是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是一个反例相矛盾。图示见图 35。 □

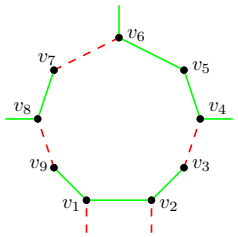


图 35：子情形 3.1 的证明示意图。红色虚线边属于$E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

子情形 3.2。 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_2v_2, u_4v_4\}$。

证明。令 (F'_∞, F'_1) 为 G 的分解，由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_5v_6, v_7v_8, v_9v_1\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_6v_7, v_8v_9\}$ 定义。根据构造可知，F'_1 是一个匹配，且 F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是反例相矛盾。图示见图 36。 □

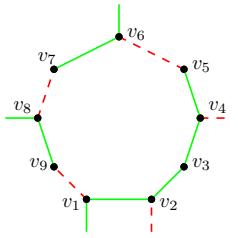


图 36：子情形 3.2 的证明示意图。红色虚线边属于$E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

子情形 3.3。 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_2v_2, u_6v_6\}$。

证明。 令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_3v_4, v_7v_8, v_9v_1\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_8v_9\}$ 定义的 G 的分解。根据构造可知， F'_1 是一个匹配，而 F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是反例矛盾。示意图见图 37。 □

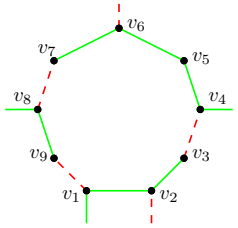


图 37：子情形 3.3 证明的示意图。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

子情形3.4。 $\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_4v_4, u_6v_6\}$.

证明。 对于 $i \in \{1, 2, 8\}$，令 P_i 为 F_∞ 中包含边 u_iv_i的连通分量。根据命题 9，我们得到 $P_1 \neq P_2$ 和 $P_2 \neq P_8$ 之一成立。

首先，假设 $P_1 \neq P_2$ 成立。令(F'_∞, F'_1)为 G 的分解，该分解由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_2v_3, v_7v_8, v_9v_1\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_8v_9\}$定义。由构造可知，$F'_1$ 是一个匹配；又由于 $P_1 \neq P_2$， F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1)是 G的$(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G是一个反例矛盾。示意图见图 38。

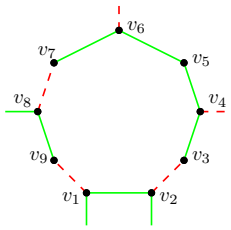


图 38：子情况3.4证明第一部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

现在假设 $P_2 \neq P_8$ 成立。令 (F'_∞, F'_1) 为 G 的分解，由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_1v_2, v_8v_9\}$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_9v_1\}$ 定义。根据构造可知 F'_1 是一个匹配，且由于$P_2 \neq P_8$， F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林

G 的分解，这与 G 是一个反例相矛盾。示意见图39。

□

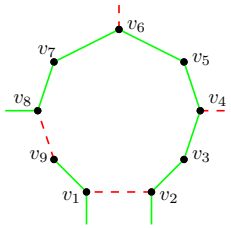


图39：子情况3.4证明第二部分的示意图。红色虚线边属于 $E(F_1')$，绿色实线边属于 $E(F_\infty')$。

子情形3.5。

$\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1) = \{u_4v_4, u_8v_8\}$。

证明。 *</style}*对于，令为中包含边的连通分量。由命题 *9*，可得和之一成立。由对称性，不妨设。令（，F_1'）为由 $E(F_1') = E(F_1) \cup \{v_1v_2, v_6v_7\}$ 和 $E(F_\infty') = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_1\}$定义的 G 的分解。根据构造可知，F_1' 是一个匹配；又由于 $P_2 \neq P_6$，F_∞' 是一个线性森林。因此（F_∞'，F_1'）是 G的（∞，1）-有界线性森林分解，这与 G 是反例矛盾。示意图见图40。

□

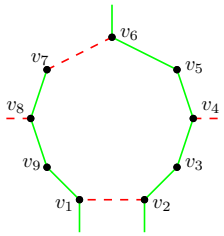


图40：子情形3.5证明的示意图。红色虚线边属于$E(F_1')$，绿色实线边属于 $E(F_\infty')$。

□

情形 4。 $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| = 3$。

证明。 我们需要区分两种子情形。

子情形4.1。

$\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_\infty) = \{u_1v_1, u_2v_2\}$。

证明。对于 $i \in \{1,2\}$，令 P_i 为 F_∞ 中包含边 u_iv_i 的连通分量。若 $P_1 = P_2$，则 (ii) 成立，因此无需证明。于是我们不妨假设 $P_1 \neq P_2$。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup v_1v_2$ 和 $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup \{v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_1\}$ 所定义的 G 的分解。由构造可知，F'_1 是一个匹配；又由于 $P_1 \neq P_2$，F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是一个反例矛盾。图41给出了示意图。 □

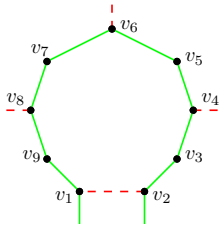


图41：子情形4.1证明示意图。红色虚线边属于$E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

子情形4.2。

$\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_\infty) \neq \{u_1v_1, u_2v_2\}$。

证明。由对称性，不妨设 $u_1v_1 \in E(F_1)$。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup \{v_iv_{i+1} : i \in \{2,4,6,8\}, u_iv_i \in E(F_\infty)\}$ and $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup (E(F) - E(F'_1))$ 定义的 G 的分解。由构造可知，F'_1 是一个匹配，而 F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，这与 G 是一个反例矛盾。图示见图42。 □

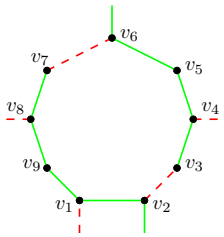


图42：子情形4.2的证明示意图，其中 u_2v_2 和 u_6v_6 包含在 $E(F_\infty)$中。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

□

情形 5。 $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| \geq 4$。

证明。若 $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| = 5$，则 (i) 成立，因此无需证明。故不妨设 $|\{u_1v_1, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \cap E(F_1)| = 4$。由对称性，不妨设 $u_1v_1 \in E(F_1)$。令 $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ 为满足 $u_iv_i \in E(F_\infty)$ 的唯一整数。令 (F'_∞, F'_1) 为由 $E(F'_1) = E(F_1) \cup v_iv_{i+1}$ and $E(F'_\infty) = E(F_\infty) \cup (E(F) - v_iv_{i+1})$ 定义的 G 的分解。由构造可知，F'_1 是一个匹配，而 F'_∞ 是一个线性森林。因此，(F'_∞, F'_1) 是 G 的一个 $(\infty,1)$-有界线性森林分解，这与 G 是一个反例矛盾。图示见图 43。 □

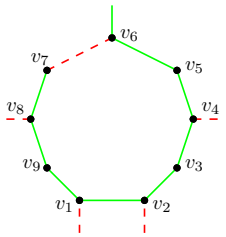


图 43：情形 5 的证明示意图，其中 u_6v_6 包含在 $E(F_\infty)$ 中。红色虚线边属于 $E(F'_1)$，绿色实线边属于 $E(F'_\infty)$。

现在，情形讨论已完成，因此引理 9 的证明也结束了。 □

引理 10。 设 F 是 G 和 v_1 的一个非退化 *9*-面，……，v_9 是 $V(F)$ 的一个规范序，使得 v_i 是 $i \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$ 的一个 *3*-度顶点，且 v_i 是 $i \in \{3, 5, 7, 9\}$ 的一个 *2*-度顶点。那么 $dist_{G-E(F)}(v_4, v_8) \leq 6$。

证明。反设结论不成立，令 H 由 $G - E(F)$ 添加一个新顶点 z 和 3 条新边 v_4z, v_6z 以及 v_8z得到。

断言 12。 H 的围长至少为 *9*。

证明。反设结论不成立，则 G 包含一个长度至多为 8 的圈 C。由于 $G-E(F)$ 的围长至少为 9，可知 $z \in V(C)$ 和 $E(C)$ 恰好包含 3 条边 v_4z，v_6z 以及 v_8z中的 2 条。若 $v_6z \in E(C)$，不妨设为 $\{v_4z, v_6z\} \subseteq E(C)$，那么由 $V(C') = V(C) - z \cup v_5$ 和 $E(C') = E(C) - \{v_4z, v_6z\} \cup \{v_4v_5, v_5v_6\}$定义的图 C' 是一个圈，其长度与 G中的 C 相同，这与 G 的围长至少为 9 矛盾。若 $\{v_4z, v_8z\} \subseteq V(C)$，则 $C - z$ 是 $G - E(F)$ 中一条长度至多为 6 的 v_4v_8-路径，这与假设矛盾。 □

对于 $i \in \{1, 2, 4, 6, 8\}$，令 u_i 为 v_i 在 $V(G) - V(F)$ 中的唯一邻点。由于 H 显然是平面、次三度且比 G 小，我们得到 H 有一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)。此外，若 $\{u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8\} \subseteq E(F_1)$，由于 F_1 是一个匹配，我们得到 $\{v_4z, v_6z, v_8z\} \subseteq E(F_\infty)$，这与 F_∞ 是线性森林相矛盾。因此，$(F_\infty - z, F_1 - z)$ 是 $G - E(F)$ 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解，它不满足 (i) 和 (ii) 中的任何一个，这与引理 6 矛盾。 □

引理 11。令 F 为 G 的一个非退化 *9*-面，且 $v_1, \ldots, v_9$ 是 $V(F)$ 的一个规范序，使得对于 $i \in \{1,2,4,6,8\}$， v_i 是一个 *3*-度顶点，而对于 $i \in \{3,5,7,9\}$， v_i 是一个 *2*-度顶点。则 $\min\{dist_{G-E(F)}(v_1, v_6)\ dist_{G-E(F)}(v_2, v_6)\} \leq 6$。

证明。反设结论不成立，并令 H 由 $G-(E(F)-v_1v_2)$ 添加一个新顶点 z 以及 3 条新边 v_2z、v_4z 和 v_6z得到。

断言 13。 H 的围长至少为 *9*。

证明。反设结论不成立，则 G 包含一个长度至多为 8 的圈 C。由于 $G-(E(F)-v_1v_2)$ 的围长至少为 9，可知 $z \in V(C)$和 $E(C)$恰好包含 3 条边 v_2z、v_4z和 v_6z中的 2 条。若 $\{v_2z, v_4z\} \subseteq E(C)$，则由 $V(C') = V(C) - z \cup v_3$和 $E(C') = E(C) - \{v_2z, v_4z\} \cup \{v_2v_3, v_3v_4\}$定义的图 C'是一个圈，其长度与 G中的 C 相同，这与 G 的围长至少为 9 矛盾。若 $\{v_4z, v_6z\} \subseteq E(C)$，同理可得矛盾。若 $\{v_2z, v_6z\} \subseteq V(C)$，则 $C-z$是 $G-(E(F)-v_1v_2)$中的一条长度至多为 6 的 v_2v_6-路径。若 $v_1v_2 \notin E(C)$，则 $C-z$是 $G-(E(F))$中的一条长度至多为 6 的 v_2v_6-路径，这与假设矛盾。若 $v_1v_2 \in E(C)$，则 $C-\{z, v_2\}$是$G-(E(F))$中的一条长度至多为 5 的 v_1v_6-路径，这与假设矛盾。 □

对于 $i \in \{1,2,4,6,8\}$，令 u_i 为 v_i 在 $V(G)-V(F)$ 中的唯一邻点。由于 H 显然是平面次三度图，且比 G 小，我们得出 H 有一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解 (F_∞, F_1)。注意，$(F'_\infty = F_\infty - z, F'_1 = F_1 - z)$ 是 $G-E(F)$ 的一个 $(\infty, 1)$-有界线性森林分解。如果 (F'_∞, F'_1) 满足 (i)，那么特别有 $\{u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6\} \subseteq E(F'_1)$。由于 F_1 是一个匹配，这就推出 $\{v_2z, v_4z, v_6z\} \subseteq E(F_\infty)$，这与 F_∞ 是线性森林矛盾。如果 (F'_∞, F'_1) 满足 (ii)，那么我们得到 $\{u_4v_4, u_6v_6\} \subseteq E(F'_1)$。此外，由于 F_∞ 是线性森林，我们有 $v_1v_2 \in E(F_1)$。由于 F_1 是一个匹配，我们再次得到 $\{v_2z, v_4z, v_6z\} \subseteq E(F_\infty)$，这与 F_∞ 是线性森林矛盾。因此，(F'_∞, F'_1) 既不满足 (i)，也不满足 (ii)，这与引理 9 矛盾。 □

引理 12。 *G*的每个*9*-面至少关联六个*3*-度顶点。

证明。设 F 是 G 中一个大小为 9 的面，并反设 $V(F)$ 至多包含 5 个 6-度顶点。注意，由于 G 的围长至少为 9， F 是非退化的。此外，由引理 5 可知， $V(F)$ 存在一个典范序 $v_1, \ldots, v_9$，使得对于 $i \in \{1,2,4,6,8\}$， v_i 是一个 3-度顶点；对于 $i \in \{3,5,7,9\}$， v_i 是一个 2-度顶点。由引理 10 可知， $dist_{G-E(F)}(v_4, v_8) \leq 6$。由引理 11 可知， $\min\{dist_{G-E(F)}(v_1, v_6)\ dist_{G-E(F)}(v_2, v_6)\} \leq 6$。根据对称性，不妨设 $dist_{G-E(F)}(v_2, v_6) \leq 6$。现在由命题 8 可知，存在某个 $i \in \{2,6\}$，使得 $dist_{G-E(F)}(v_i, v_{i+2}) \leq 6$，因此在 $G-E(F)$ 中存在一条长度至多为 6 的 v_iv_{i+2}-路 P。现在令 C 为 G 的子图，其中 $V(C) = V(P) \cup v_{i+1}$，且 $E(C) = E(P) \cup \{v_iv_{i+1}, v_{i+1}v_{i+2}\}$。于是， C 是 G 中一个长度至多为 8 的圈，矛盾。 □

4.3 放电法

现在我们准备好证明定理 4。

证明。（定理 4）给每个 $F \in F(G)$ 分配初始电荷 $|F|-6$，并给每个 $v \in V(G)$ 分配初始电荷 $2d_G(v)-6$。考虑以下放电规则：每个面向边界游走上恰好出现一次的每个 2-度顶点发送 1 单位电荷，向边界游走上出现两次的每个 2-度顶点发送 2 单位电荷。令 ch_f 表示顶点和面的最终电荷。我们将证明最终电荷非负。

断言14。 每个面 $x \in F(G)$ 以及每个顶点 $x \in V(G)$ 的最终电荷至少为 *0*。

证明。首先，考虑 G 的一个非退化面 F。若 $|F| \geq 11$，则由断言 10 和引理 5 可知，F 的边界游走上至少一半的顶点是 3- 度顶点，特别地，至少有六个 3-度顶点。若 $|F| = 10$，由引理 8 可知，$V(F)$ 包含至少六个 3-度顶点。若 $|F| = 9$，由引理 12 可知，$V(F)$ 包含至少六个 3- 度顶点。因此，F 至多向 $|F|-6$ 个顶点各发送 1 单位电荷，故 $\mathrm{ch}_f(F) \geq 0$ 成立。

现在考虑 G 的一个退化面 F。令 v_0、v_1、.....、$v_{|F|-1}$ 为 F 的一条边界游走。由断言 10 和引理 5 可知，若 v_i 是一个 2- 度顶点，则对所有 $i \in \{0,\ldots,|F|\}$，边界游走中的 v_{i+1} 都是一个 3- 度顶点，其中下标模 $|F|$ 取值。进一步注意到，由于 G 的围长为 9，$|F| \geq 11$。由此可知，存在某个 $I \subseteq \{0,\ldots,|F|-1\}$，使得 $|I| \geq 6$，并且对所有 $i \in I$，v_i 都是一个 3- 度顶点。因此 $\mathrm{ch}_f(F) \geq (|F|-6)-(|F|-|I|) \geq 0$，如所需。

现在考虑一个顶点 $v \in V(G)$。由断言 10，且由于 G 是次三度的，我们有 $d_G(v) \in \{2,3\}$。若 $d_G(v)=3$，则 v 既不发送也不接收任何电荷，因此其最终电荷为 $2d_G(v)-6=0$。若 $d_G(v)=2$，且 v 与两个不同的面关联，则 v 不发送任何电荷，并从与其关联的两个面各接收 1 单位电荷。因此其最终电荷为 $c(v)=2d_G(v)-6+1+1=0$。若 $d_G(v)=2$，且 v 与一个面关联，则 v 不发送任何电荷，并从与其关联的面接收 2 单位电荷。因此 v 的最终电荷为 $\mathrm{ch}_f(v)=2d_G(v)-6+2=0$。 □

由于总电荷在整个放电过程中保持不变，我们得到

$$\sum_{F\in F(G)}(|F|-6)+\sum_{v\in V(G)}(2d_G(v)-6)=\sum_{F\in F(G)}\mathrm{ch}_f(F)+\sum_{v\in V(G)}\mathrm{ch}_f(v)\geq 0>-12,$$

这与命题 10 矛盾。证明至此完成。 □

5 结论

在本文中，我们研究了将一个图分解为两个连通分支长度有界的线性森林这一问题，同时考察了算法和结构方面的问题。

这项工作留下了许多尚未解决的问题。对于算法部分，最明显的问题是解决定理 2 和定理 3 留下的二分情形。

问题 1. 确定对于 $k \in \{3, \ldots, 8\}$，$(k, 1)$-*BLFD* 的复杂度。

此外，对于困难情形，可以研究该问题在受限图类中的情况，例如平面图。

接下来，可以考虑分解为不同类型的森林，例如星森林。若某个星森林的每个连通分支都是由一个中心顶点和至多 k 个叶子组成的星，则称其为 k-有界，其中 k 为某个正整数。注意，对于 $k \in \{1, 2\}$，k-有界星森林与 k-有界线性森林相同。因此，我们的结果表明，可以在多项式时间内判定给定图是否能分解为一个 2-有界星森林和一个匹配；而判定给定图是否能分解为两个 2-有界线性森林则是 NP 完全的。据我们所知，以下问题仍未解决。

问题 2。 确定判断给定图能否分解为一个匹配和一个星森林的复杂度。

此外，对于有向图也可以提出类似的问题，其中有向线性森林是由两两不相交的有向路径组成的集合。例如，以下问题尚未解决：

问题 3。 确定判断给定有向图能否分解为一个匹配和一个有向线性森林的复杂度。

对于第 4 节中的结果，研究定理 4 中的常数是否可以改进将会很有意思。

问题 4。 使得每个围长至少为 α 的平面次三度图都能分解为一个线性森林和一个匹配的最小整数 α 是多少？

注意，将这个常数改进为 8 将推出 Kronk、Radlowski 和 Franen [KRF74] 的结果，而将这个常数改进为 7 将推出 Bobuelle 和 Kardoš 在 [BK22] 中的结果。另一方面，很容易看出$\alpha \geq 6$。事实上，众所周知，围长为 5 的三次平面图确实存在，而一个简单的边计数论证表明，它们甚至不能分解为一个匹配和一个任意森林。有趣的是，我们并不知道能够说明 $\alpha \geq 7$的例子，也就是说，一个不能分解为线性森林和匹配的围长为 6 的平面次三度图。

致谢

我们感谢 Dániel Marx 让我们了解到 [Cor88] 中的结果。

参考文献

[AEH81] Jin Akiyama、Geoffrey Exoo 和 Frank Harary。图的覆盖与装填 IV：线性森林度。*Networks*，11：69–72，1981。

[ATW01] Noga Alon、V. Teague 和 N. Wormald。正则图的线性森林度与线性 k-森林度。《图与组合》，17：11–16，2001年1月。[BFHP84] J.C. Bermond、J.L. Fouquet、M. Habib 和 B. Peroche。关于线性 k-森林度。《离散数学》，52(2)：123–132，1984年。[BK22] Sebastien Bonduelle 和 František Kardoš。围长为 7 的次三度平面图属于 I类。《离散数学》，345(10)：113002，2022年。[BKPY05] József Balogh、Martin Kochol、András Pluhár 和 Xingxing Yu。用森林覆盖平面图。《组合理论杂志B辑》，94(1)：147–158，2005年。[BKS03] Piotr Berman、Marek Karpinski 和 Alex D. Scott。MAX-3SAT 短对称实例的近似困难性。电子计算复杂性讨论会，TR03，2003年。[Cor88] Gérard Cornuéjols。图的一般因子。《组合理论杂志B辑》，45(2)：185–198，1988年。[CW17] Daniel W. Cranston 和 Douglas B. West。通过图着色介绍放电法。《离散数学》，340(4)：766–793，2017年。[DT92] Dorit Dor 和 Michael Tarsi。图分解是 NPC——Holyer猜想的完整证明。载于第二十四届 ACM计算理论研讨会论文集，STOC ’92，第252–263页，美国纽约州纽约，1992年。计算机协会。[Gon09] D. Gonçalves。用森林覆盖平面图，其中一个森林具有有界最大度。《组合理论杂志B辑》，99(2)：314–322，2009年。[Hol81] Ian Holyer。边着色的 NP 完全性。《SIAM计算杂志》，10(4)：718–720，1981年。[Jia18] Minghui Jiang。树、路径、星图、毛毛虫树和蜘蛛树。《Algorithmica》，80：1968–1982，2018年。[JJJ21] Rain Jiang、Kai Jiang 和 Minghui Jiang。将图分解为具有小连通分量的子图，2021年。[JY17] Hongbi Jiang 和 Daqing Yang。将图分解为森林：九龙树猜想为真。《组合数学》，37(6)：1125–1137，2017年12月。[KKW+13] Seog-Jin Kim、Alexandr V. Kostochka、Douglas B. West、Hehui Wu 和 Xuding Zhu。将稀疏图分解为森林和一个有界度图。《图论杂志》，74(4)：369–391，2013年。

[KRF74] H. Kronk、M. Radlowski 和 B. Franen。关于无三角形图的线色数。《抽象图论通讯》，3:3，1974年。[MM22] Sebastian Mies 和 Benjamin Moore。强九树猜想对 $d \leq k+1$ 成立，2022年。[MORZ12] Mickael Montassier、Patrice Ossona de Mendez、André Raspaud 和 Xuding Zhu。将图分解为森林。《组合理论杂志*B*辑》，102(1):38–52，2012年。[NW64] Crispin St. J. A. Nash-Williams。有限图分解为森林。《伦敦数学会杂志 *39.1*》，第12页，1964年。[Pé84] B. Péroche。图中若干划分与覆盖问题的 NP 完全性。《离散应用数学》，8(2):195–208，1984年。[Sch78] Thomas J. Schaefer。可满足性问题的复杂性。载于第十届*ACM*年度计算理论研讨会论文集，STOC '78，第216–226页，纽约，NY，美国，1978年。计算机协会。[Tho99] Carsten Thomassen。对三次图的边进行双色着色，使得每个单色连通分量都是长度至多为5的路径。《组合理论杂志*B*辑》，75(1):100–109，1999年。[Yan18] Daqing Yang。将图分解为森林和一个匹配。《组合理论杂志*B*辑》，131:40–54，2018年。