用于信息处理、推断和优化的模拟光子计算

Nikita Stroev[1] 和 Natalia G. Berloff[2*1]魏茨曼科学研究所复杂系统物理系，雷霍沃特 *76100*，以色列，以及[2]剑桥大学应用数学与理论物理系，剑桥 *CB3 0WA*，英国

arXiv:2301.11760v2 [physics.optics] 5 Jun 2023

摘要

本文综述了光子计算的当前前沿进展。光子计算利用光子、与物质耦合的光子以及光学相关技术，实现有效且高效的计算。文章介绍了光子计算的发展历史，以及现代模拟计算平台和架构，重点关注优化任务和神经网络的实现。作者探讨了专用优化器、光子优化器的数学描述及其各种互连方式。文中还讨论了多种应用，包括直接编码、物流、金融、相位恢复、机器学习、神经网络、概率图模型和图像处理等。文章分析了光子计算的主要技术发展方向及相关挑战，并评估了其效率。最后，论文探讨了光量子计算的发展前景和领域现状，并阐述了这项技术的潜在应用。

* 通信地址：N.G.Berloff@damtp.cam.ac.uk

I. 引言

1965年，Intel联合创始人戈登·摩尔提出了一项经验观察：微处理器中的晶体管数量几乎每两年就会翻一番，这一论述后来被称为摩尔定律 [1, 2]。此后，有预测认为，到2015年将达到饱和点。传统计算机架构的发展与摩尔的预见十分接近，达到饱和点只是时间问题。近年来，硅晶体管的微型化成功突破了曾被认为是极限的7纳米壁垒。此外，摩尔定律通常还伴随着若干关键指标，例如处理器的线程性能和时钟频率；这些指标达到饱和点的速度远快于晶体管密度。所有这些因素都限制了现代计算机的扩展性能。然而，传统计算能力增长趋于饱和还有其他原因，这些原因也是摩尔定律带来的后果。例如，增加晶体管数量可以构建性能更强大的系统，但随着热量产生增加，处理速度必然会下降；与此同时，能耗也随性能提升而增加。另一个关键问题是由架构设计导致的所谓冯·诺依曼瓶颈 [3], 。它指的是由于输入和输出数据的带宽特性而造成的计算机系统吞吐量限制 [4, 5]。所有这些问题都给传统计算机的发展前景带来严峻挑战。因此，冯·诺依曼系统的替代方案开始涌现 [6, 7]。

为跟上扩展性能的提升，人们转向替代性硬件架构和专用设备。因此，通用量子计算有望利用纠缠态，降低解决高难度任务的算法复杂度。然而，与这种高风险、高回报的策略（下文也将在光学领域讨论）不同，另一种选择是以光子取代电子，同时仍将光计算限制在经典计算，或具有瞬态量子相干性的经典计算范畴内。推动这一转变的理由显而易见：光子以光速传播，热量产生少、密度高，而且能够高效地与物质耦合，从而利用非线性行为。此外，光学技术已日趋成熟并融入日常生活，例如承载全球信息流量的光纤通道，以及读取光盘的光学读取器。然而，光子转换为电子这一过程

是与 CMOS 架构兼容所必需的。这种转换会消耗大量能量，减慢整体信息处理过程，并成为此类混合技术中严重的技术瓶颈。

尽管存在这些困难，光学硬件仍被用于计算设备。例如，不同的专用光子硬件能够在数据中心以适当规模运行，用于处理计算量大的机器学习（ML）应用和大规模优化。此外，神经网络（NN）架构几乎天然适合光学硬件；得益于光子系统所需的物理特性，这类硬件有望实现高效率、快速计算和低能耗。尽管如此，现阶段光计算还不能算作主流技术。在可预见的未来，光学不太可能取代电子学，成为通用平台。另一个原因是，多年来对 CMOS 技术的大量投资形成了技术惯性。在一定程度上，早期传统计算机的快速发展使其与光子计算之间的差距不断扩大；光子计算将在专用硬件领域占有一席之地。

关于光计算这一主题，已有许多出色的综述。文献 [8]讨论了现代计算面临的挑战以及光学带来的新机遇。本文介绍模拟光学计算的最新研究进展，重点关注三个主要方向：向量／矩阵运算、储备池计算（RC）和光子伊辛机。此外，本文还探讨计算效率，例如性能与功耗之比，以及此类硬件中误差与精度之间的权衡。另一篇出色的综述从人工智能（AI）应用的角度考察模拟光学计算 [9]。该文概述了光计算的最新成果，涵盖不同 AI 模型和神经网络范式的实现。近期人们对深度学习方法的兴趣日益浓厚，且这些方法在许多领域取得了成功；其他综述 [10–16], 也提供了更多相关信息。

我们的综述与上述文献的不同之处在于，我们借助底层动力系统描述的普适性这一概念来探讨模拟光学计算。光计算的优势在于能够超高速仿真动力学过程 [17]。我们聚焦于利用分岔动力学和阈值运算的物理优化器，旨在解决非线性问题，因此超越了仅仅加速光学所擅长的线性运算。

本综述的结构安排如下。第二节简要回顾光计算的历史，并介绍现代模拟计算平台，重点讨论神经网络实现及其他神经形态系统。第三节探讨专用优化器及其若干实例。本节将此类机器的运行机制与复杂度类联系起来，并讨论这一方法的可扩展性。第四节聚焦于光学计算设备的物理学基础，包括基于激光网络、光纤中的光学参量振荡器（OPO）、光子网络或极化激元网络的设备，以及它们的数学模型。本综述的第二部分考察不同指派问题的数学结构及其由物理系统实现仿真的方式。第五节列举了跨多个应用领域的广泛潜在应用。最后，第六节提出我们对光计算领域未来技术发展的主观看法，第七节则简要讨论量子光学器件。最后，第八节总结研究结果。

II. 模拟光计算

现代技术需要处理海量数据流，这给半导体产业的发展带来了各种挑战，也将传统电路推向了物理极限。相关进展涵盖多个方面：较为主流的方向包括可集成到传统计算机中的光学元件，或用于处理计算密集型任务、补充此类计算的特定硬件；更具雄心的方向则包括全光数字计算机架构。

II.1. 光计算简史

尽管光计算是一项新兴技术，并随着时间推移愈发受到关注（尤其是考虑到最新数据驱动方法的普及及其效率），但在过去几十年间，人们已经取得了许多重大进展。因此，在介绍具体系统及其优势和应用之前，我们先简要探讨为未来发展奠定基础的相关进展。更多信息和详细内容见 [18]。

通用光处理器架构由三个平面部分组成：输入平面、

处理平面和输出平面。早期，输入平面是固定的图像幻灯片，后来改用空间光调制器（SLM），用于执行输入信号转换。处理平面可以由透镜、非线性元件或全息图组成，而最终的输出部分则由光电探测器或相机构成。

光学处理器最早展现出前景的应用是模式识别任务，这推动了光学相关器原型的研发。名为 4-f 的简单架构基于空间滤波方面的研究，见 [19]。透镜的傅里叶变换特性是许多光计算方案的标准功能，可利用光的速度和并行性。第二种相关器架构由 Weaver 和 Goodman 于 1966 年提出 [20], ，称为联合变换相关器（JTC），见图 1

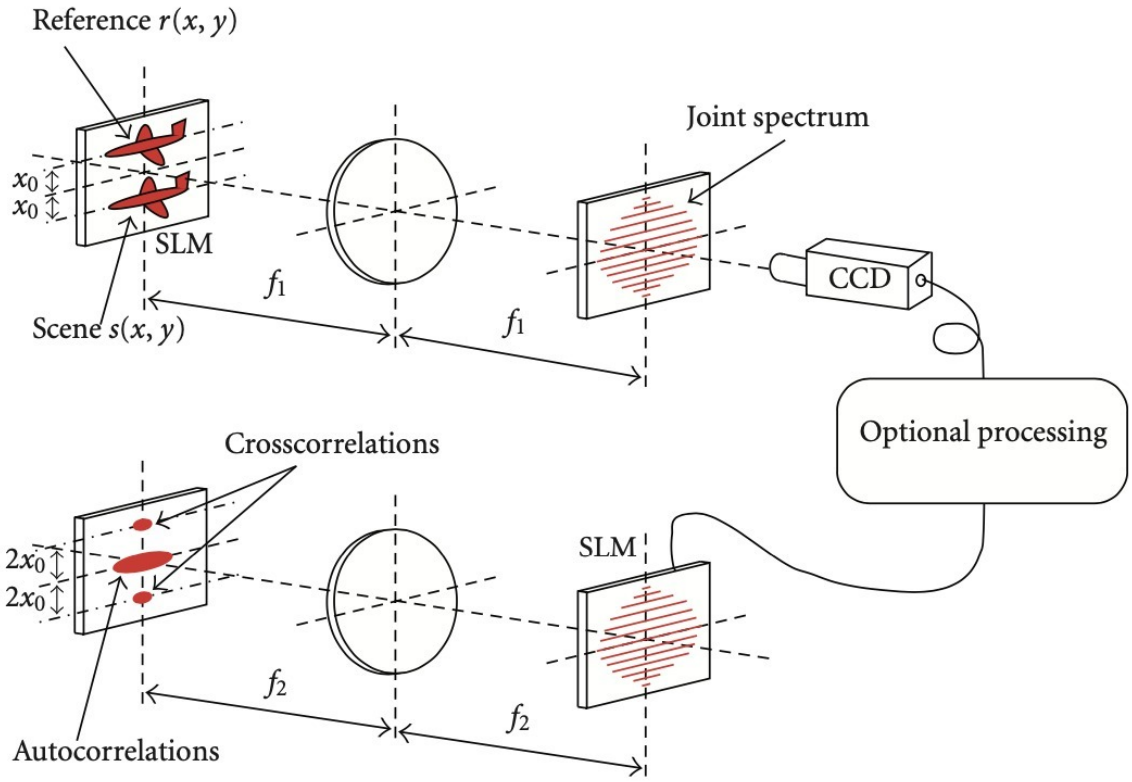

图 1. 联合变换相关器（JTC）的光学设置。该图取自[18]。

1950年之前，光学技术的发展取得了显著进展，例如阿贝提出的显微镜成像理论 [21], 、泽尼克发明的相衬滤光片 [22] ，以及信息光学在此后出现。

Elias Snitzer 于 1952 [23, 24]提出了信息光学。那一时期的其他重要发明包括全息术（Gabor，1948） [25] 以及 1960 [26, 27]激光的发明。随后，偏轴全息图的引入使重建中的不同项得以分离，从而解决三维重建问题；Leith 和 Upatnieks 于1962年完成了这项工作 [28, 29] ，这基本上促成了实用全息术的发展。此后，Lohmann 进一步改进了全息术，并于1966年制作出第一幅计算机生成全息图 [30, 31] 。早期的 SLMs 基于珀耳效应，也有少数具有发展前景的器件 [32–34]。如今，液晶技术是 SLMs 最常用的技术。另一项重要进展是第一种光学晶体管的发明 [35], ，它让人们看到了制造小型集成电路的希望。

1980年至2004年是一个充满活力、成果丰硕的时期。全息术领域取得了积极进展，尤其是人们开发了新的编码方法和点向方法，以实现高质量、高衍射效率的计算机生成全息图光学重构 [36]。在20世纪80年代和90年代，人们推出了50多种空间光调制器[37]。随着微机电系统（MEMS）技术的出现，光学晶体管成为另一个活跃的研究领域 [38]。垂直腔面发射激光器（VCSELs）和自电光效应（SEED）器件于20世纪90年代进入市场[39]。总体而言，这一时期人们引入并研究了现代光互连及其组件的许多方面。

光学技术的发展使人们积累了关于光学器件性能的必要经验，并推动实验元件基础日趋成熟。在所谓的深度神经网络取得成功后，光计算迎来了第二次机遇；这些深度神经网络与早期类似神经网络的光学架构有许多相似之处。

II.2. 现代光计算

如今，许多研究主题都受益于光计算的发展，因此这一领域的界定已不再那么明确。例如，一些最初为使用光学处理器进行模式识别而开发的算法，如今已成功应用于数字计算机。生物光子学等其他领域也在很大程度上受益于以往的光学处理研究。

晶体管是现代电子计算机的基本构件。因此，必须找到一种等效的光学晶体管，以替代电子组件

。再将这类晶体管组装成更高层级的组件，以构建全光计算机的中央处理器（CPU），还需设计光学处理器和光存储，并组织光数据传输。然而，这种方案面临诸多挑战，而光学在由更高层级组件构成的大型架构中的潜力，也可说仍有些推测性 [40]。尚未解决的问题包括：由于逻辑电平恢复、级联能力、扇出和输入输出隔离方面存在不足，光逻辑器件的可扩展性受限；此外，还存在能耗问题和器件占用面积无法做到微型化的问题。而且，将这些潜在器件与电气组件耦合，需要把由光子承载的信息转换为电子承载的信息，这一过程相对缓慢且能耗较高。

然而，集成光子学的发展仍在继续 [41]。这促成了创建线性逻辑元件的尝试，例如全光逻辑门 [42, 43], 改进现有的光学晶体管，并在全光处理的背景下开发新的光学晶体管 [44, 45]。可以在自由空间中使用 SLM、微透镜阵列和全息元件来实现光学线性交联。这类线性元件是各种光学计算设备的重要组成部分。

非线性是光学方案中的另一个重要组成部分；然而，由于光束在纯真空中彼此穿过而不发生扰动，其实现面临着特定困难。为了迫使这些光束发生相互作用，必须进行高能量实验，而这在实践中很难实现。实现非线性还有另外两种方式：引入由电荷耦合器件（CCD）实现的数字读出机制，将其发送至计算机进行进一步的非线性处理，然后反馈至 SLM；或者开发完全光学的非线性激活材料，使光束具有足够高的强度（利用吸收、折射或散射过程）。非线性可分为局部非线性（神经网络架构所需）和全局系统中的非线性（例如储备池计算系统，见下文）。线性元件与非线性元件的结合促成了专用隔离器件的发展。因此，光计算研究重新活跃起来，重点围绕光子硬件加速器和神经形态计算的新发展展开。

神经形态计算通常指利用集成系统来模拟神经生物学架构。尽管它与人工智能领域非常接近，后者强调“人工”一词，涉及以智能方式设计的机器或智能体，但我们将使用

广义上的神经形态计算来描述任何神经系统，无论其灵感源自大脑或自然，还是由人工设计。现代研究的重点领域正试图模拟人脑的神经结构和功能，其中包括融合不确定性的概率计算。光学具备模拟神经网络所需的要素 [13, 46]。

II.3. 光神经网络

长期以来，光学一直被视为实现矩阵乘法和互连的一项前景广阔的技术。人工神经网络（ANN）已广泛应用于工业和基础研究领域，这一新的技术需求也使光子神经网络再次受到关注。尽管大多数人工神经网络硬件系统都以电子技术为基础，但光学实现具有内在的并行性和低能耗，因此前景广阔。不同的人工神经网络在组成元素类型、数学运算和所采用的架构方面各不相同。在光子人工神经网络中，数学运算映射为光传播的特性，并由可编程线性光学和非线性所决定。标量突触权重描述人工神经元之间的成对连接。同时，互连布局可表示为矩阵－向量运算，其中每个神经元的输入，是与其连接的神经元输出和相应权重的点积。

人工神经网络的光子实现可分为三类。首先，自由空间系统依赖衍射、傅里叶变换等 [47, 48]。它们具有很高的可扩展性，能够同时处理大量神经元，但连接性有限。其中一个例子是可重构、可扩展的两层神经网络，用于对统计伊辛模型的相位进行分类[49]。其次，SLMs用于编程线性运算，而傅里叶透镜通过收集编码信号的光功率来实现求和。然而，在自由空间光学的情况下，非线性光学激活函数的实现方式较为复杂，例如利用具有电磁诱导透明特性的激光冷却原子 [49]。最后，基于波长复用 [50] 或分束器网格 [51] 的片上设计能够实现可编程的全连接耦合，但仍需进一步提升可扩展性。文献 [52], 提出了一种片上设计，其中光学平台利用相位和幅度同时编码信息，从而能够通过光学干涉执行复数运算，这非常适合执行手写识别任务。马赫-曾德尔干涉仪（MZIs）可以执行

许多功能，例如对光信号进行分光和调制、分离参考光束与主光束，以及实现复值权重矩阵。

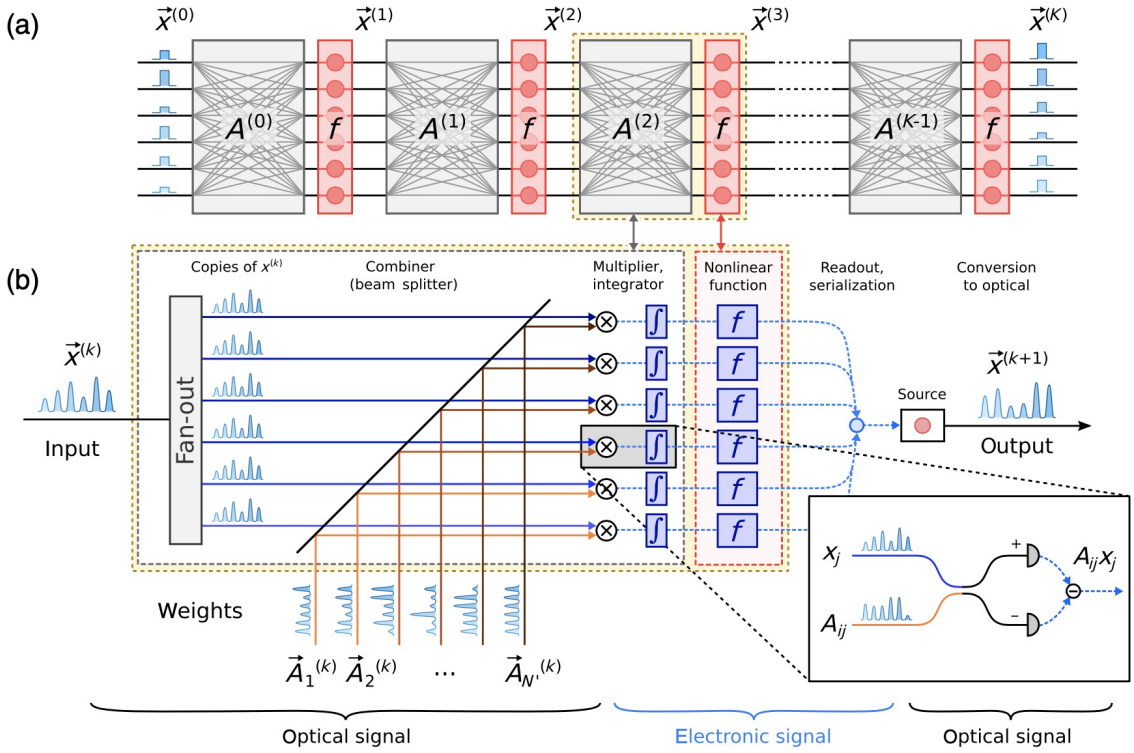

图 2。（a）一个含有 k 层的光学神经网络，其中每层由矩阵-向量乘法（灰色）和非线性函数（红色）组成。（b）单级实现。通过组合输入信号和权重信号并进行平衡零差探测来执行矩阵乘法。最终信号经过非线性函数（红色）处理后进行串行化，并发送至下一层的输入端。图引自 [53]

.

可调谐波导可以对光信号进行乘法运算，而波分复用可以将信号相加。波分复用可以通过半导体中载流子的积累 [54, 55]，电子电流 [56, 57]，或材料的光子诱导变化 [58]来实现。要充分发挥片上架构的潜力，必须实现神经元之间的长程连接，并借助光子波导；与传统电子学中的金属导线连接相比，光子波导性能更优，但不及自由空间光学方案。尤其是，硅光子平台已展示出高效的神经形态架构[50, 51, 56]。相干输入光可以通过一组分束器和移相器进行转换 [59]。具体做法是将输入分配到不同的波导，并调制其功率。另一种权重配置方法是调制信号传输波导的有效折射

率。非易失性突触实现也称为全光实现，无需电输入即可进行调优。相反，它们利用硫属化物材料中的光诱导变化来控制波导中的光传播 [60]。这有助于改善散热。

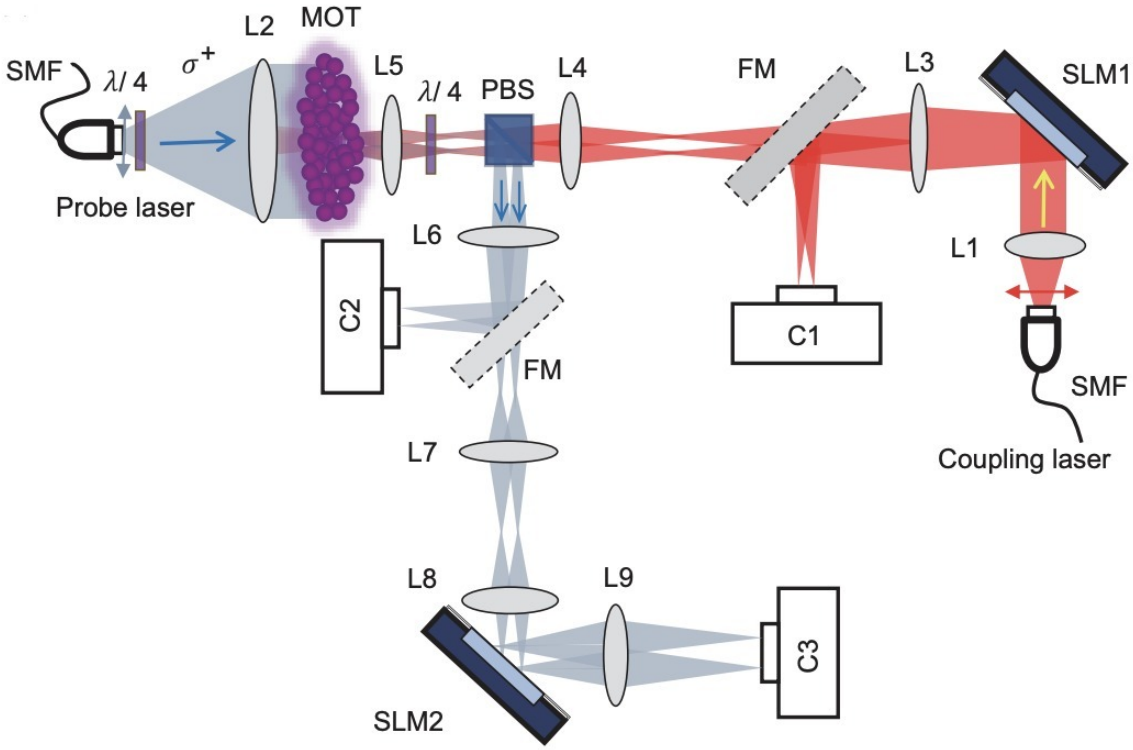

图 3. 在功能完整的双层全光神经网络中，第一层由第一空间光调制器（SLM1）执行线性运算，该调制器编码特定图案；并由磁光阱（MOT）中基于电磁诱导透明的非线性激活函数构成。第二层包含第二个空间光调制器（SLM2），将四束光转换为两束输出光束，投射到相机 C3 上。准直的耦合激光束经过透镜 L1 后入射到 SLM1，后者在 L3 的焦平面上产生四束光；该平面由翻转镜（FM）和相机 C1 监测。四束光通过由 L4 和 L5 组成的 4-f 系统成像到磁光阱上。探测激光与耦合光束反向传播，并经 L5 和 L6 成像到相机 C2 上。L7 和 L8 进一步实现放大。四束光入射到 SLM2，产生两束光，随后聚焦到相机 C3 上。图及说明引自[49]。

基于零差探测的方案相较于片上方法具有多项扩展优势。它的芯片面积随规模线性增长，电路深度则保持恒定 [53]。输入向量被编码到脉冲序列中，并分配到一组零差探测器。每个探测器都会计算输入与矩阵一行之间的乘积，该矩阵行编码在光学

脉冲序列中。零差探测器上的累积电荷执行矩阵-向量乘法。输出经过电非线性处理后，再通过调制器转换回光信号。零差探测方案的优势在于，矩阵元素（权重）以光学方式编码，并且可以动态重新配置。该过程所需的光子器件更少：调制器、探测器和分束器的数量随神经元数量线性增长。通过将光路由到平面外，零差探测架构可以并行化，以实现通用矩阵-矩阵乘法 [53]。这对于会重复使用权重的实用神经网络很有用（无论是通过卷积层原生实现，还是通过批处理实现）。

人工神经网络中的非线性是实现神经元阈值效应所必需的。一些光子器件表现出类似神经元（类似门）的非线性传递函数。然而，挑战在于实现级联能力。光子神经元需要能够响应多个光学输入，施加非线性，并产生能够驱动其他光子神经元的光学输出。集成光子解决方案采用光学/电学/光学（光电光）或全光设计来实现这种级联能力。在光电光方案中，可以通过采用激光器、饱和调制器或光电探测器-调制器，在电光转换阶段引入非线性 [61] ，也可以仅在电子域中引入非线性（例如，脉冲式光子神经元的非线性行为可以通过超导电子信号通路实现 [62]）。

神经网络架构可以采取不同形式：前馈和反向馈送、分层和循环、脉冲式或连续时间等。不同的神经模型具有独特的信号表示、训练方法和网络拓扑。权重配置可能因训练类型而异：监督训练、无监督训练或程序化“编译”。拓扑描述神经元连接的图结构，通常将人工神经网络的拓扑加以约束，以引导权重配置，有利于其运行。因此，不同人工神经网络的硬件实现细节可能有所不同，而实际实现所需的关键技术包括有源片上电子器件和光源。许多光子架构已经得到展示：循环人工神经网络，连续时间运行并由编译器编程 [50]；前馈、单值且经过外部训练的人工神经网络[51]；同时采用外部训练和局部训练的脉冲式前馈人工神经网络 [58]；利用半导体少光子发光二极管和超导纳米线单光子探测器构建的前馈多层人工神经网络 [56]；带有

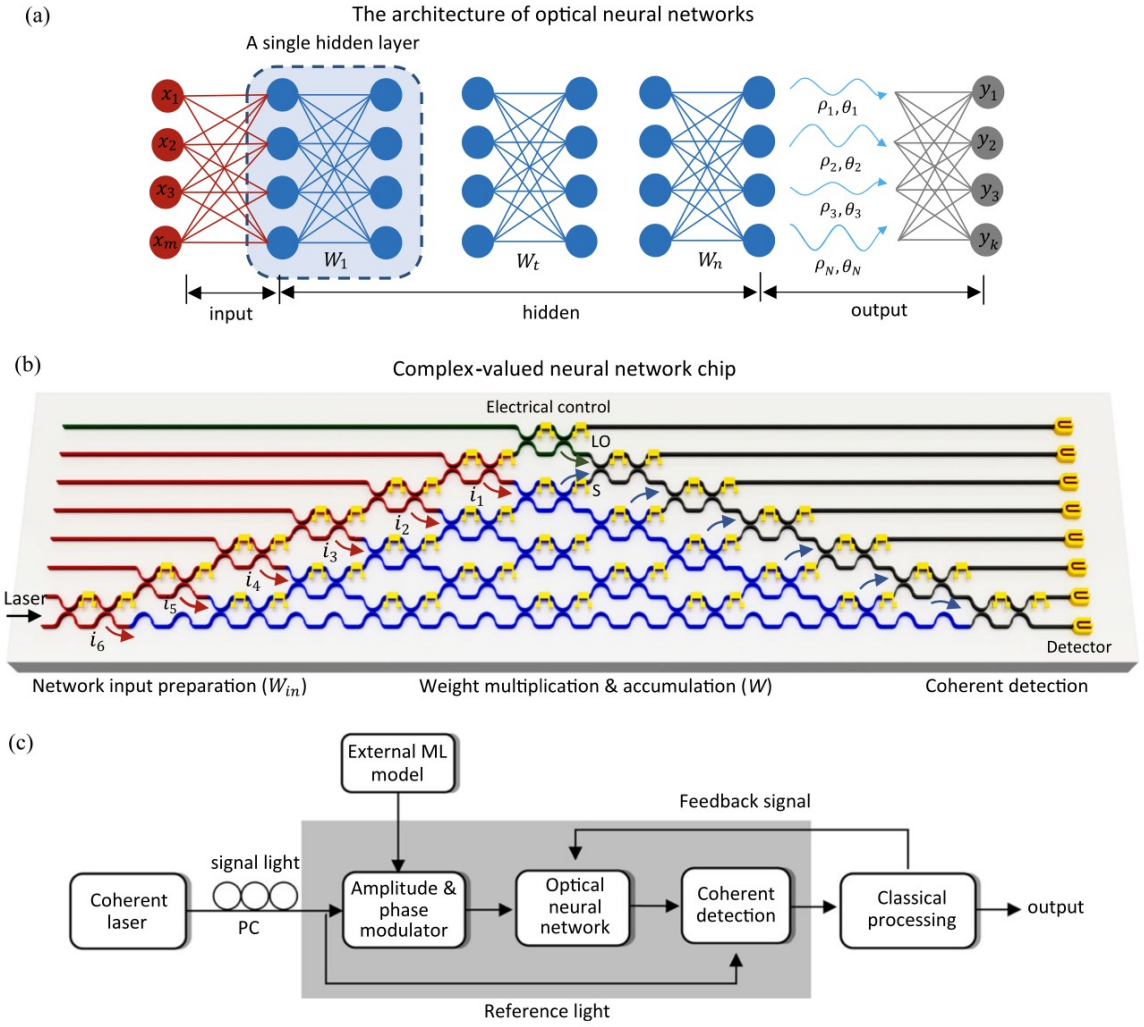

图 4. 复值相干光神经网络。(a) 包含输入层、多个隐藏层和输出层的示意图。(b) 光学神经芯片实现复值网络的示意图。单个芯片完成所有阶段，例如输入准备、权重乘法和相干探测。光信号 ($i_1 - i_6$) 的分束和调制由马赫-曾德尔干涉仪（红色）实现。绿色马赫-曾德尔干涉仪用于分离参考光。蓝色马赫-曾德尔干涉仪用于实现 6×6 复值权重矩阵。灰色马赫-曾德尔干涉仪用于片上相干探测。(c) 光神经芯片系统的工作流程。图片来源： [52]。

非线性 [49]。这些平台所解决的计算任务涵盖了机器学习和人工智能所涉及的主要功能：图像和音频识别与分类、动力系统仿真、组合优化以及许多其他应用，我们将在第五节中讨论这些内容。其中一些架构及其不同的实验实现展示于图2、图3和图4中。

神经网络硬件的关键优势在于其能耗水平，该水平可以通过以下指标进行评估

每秒每毫米^2 的千万亿次乘加运算（乘加运算）处理速度 [63]以及每次乘加运算的阿托焦耳级能效 [64]。总体而言，当前的光电硬件在实现人工神经网络方面具有显著优势，但消除电学部分必然会带来益处。对于神经形态光子系统的实际应用，需要降低电子与光子在信息传输过程中的散热。改进光源、高效调制器以及光子模数接口，可以减少对电子处理器的需求。然而，当前的光子平台缺乏逻辑门、高级编译器和汇编器、模数模转换以及存储器等功能。尽管光子学在连接性和线性运算方面优于电子学，但片上存储器仍然具有挑战性。存内计算通过称为忆阻器的存储器件阵列在原位执行处理，这种技术已经得到确立 [65, 66]；然而，以高频率进行读写仍然具有挑战性。人工神经网络发展的近期趋势表明，人们越来越需要降低器件的功耗。与此同时，多年来对并行性和可扩展性的要求保持不变 [67]。因此，光域为满足未来的硬件需求提供了颇具前景的解决方案。

II.4. 储备池及其他神经形态计算系统

储备池计算（RC）是一种基于循环神经网络的计算框架，可将输入信号映射到固定非线性系统动力学所对应的特定计算空间中。该系统通常称为“储备池”，其状态会被传递至一个简单的读出机制，该机制经过专门训练以获得最终输出 [68]。储备池计算的最初概念可追溯至液态状态机 [69] 和回声状态网络 [70]。许多物理系统都能够复现这一计算框架，光学/光子学领域也不例外。将储备池计算扩展为深层分层储备池计算，可以构建更高效的模型，同时研究分层组合在循环结构中所发挥的内在作用。另一个富有前景的研究方向是将储备池计算与量子物理系统相结合，以访问更大的计算空间。

储备池计算的理念是利用可控非线性系统丰富的非线性动力学，同时克服循环架构的缺点，因为循环架构对硬件和软件系统而言都需要具有挑战性且耗时的训练。储备池计算

仅在读出阶段进行训练，因为储层动力学是固定的。这种读出框架能够发挥特定光子物理系统的优势，例如速度或能耗较低，从而降低学习成本。储备池计算的另一项优势是能够学习时间（动态）依赖关系，而前馈架构则用于静态（非时间）数据处理。储备池计算训练过程的简便性颇具吸引力。然而，在缺乏严谨理解的情况下访问复杂动力学可能会导致许多问题。在储备池计算框架下运行通常需要进行大量实验和实验验证，这是因为目前仍需要建立统一的储备池计算理论。另一个缺点是，由于存在噪声而导致性能不稳定，这种情况在近似混沌动力系统中十分典型。

尽管如此，RC 的许多成功案例正被应用于实际问题，例如时间模式分类、时间序列预测、模式生成、自适应滤波与控制，以及系统近似。此外，RC 也可按照传统方式用于静态数据处理。RC 的首个全光学实现是在一个简单的光学延迟反馈回路中实现的，该回路结合了光学放大器的非线性[72]。关于自由空间光学原理，研究人员使用一种预先设计的配置成功解决了图像处理任务，该配置包含衍射光栅、傅里叶成像以及随机互连的微环谐振器 [73]。由衍射光学元件构成的储备池基于 8×8 激光器阵列（由 VCSELs 组成）和一个 SLM 构建。该系统展现出丰富的动态特性，并具有扩展规模的潜力 [74]。进一步改进这一设置，加入激光照明场和数字微镜器件后，实现了大规模 RC 方案，其中包含 2025 个衍射耦合光子节点，并应用于时间序列预测任务 [75]。在这一循环式 24 节点硅光子神经网络中，微环权重库用于配置连接；研究人员利用“神经编译器”对其进行编程，以解决微分系统仿真任务，相较于传统基准实现了 294 倍加速 [50]。

一些混合架构（例如光电器件）同样受益于储备池计算概念。例如，在语音识别[76–78], 混沌时间序列预测 [77, 79, 80], 和雷达信号预测 [81], 方面，已取得出色性能；其运行速度处于兆赫兹范围内，并有望提升至吉赫兹速度，同时保持最先进的数值精度。文献中还报道了其他储备池计算成功应用的案例 [68, 76, 82]。我们将考虑神经网络

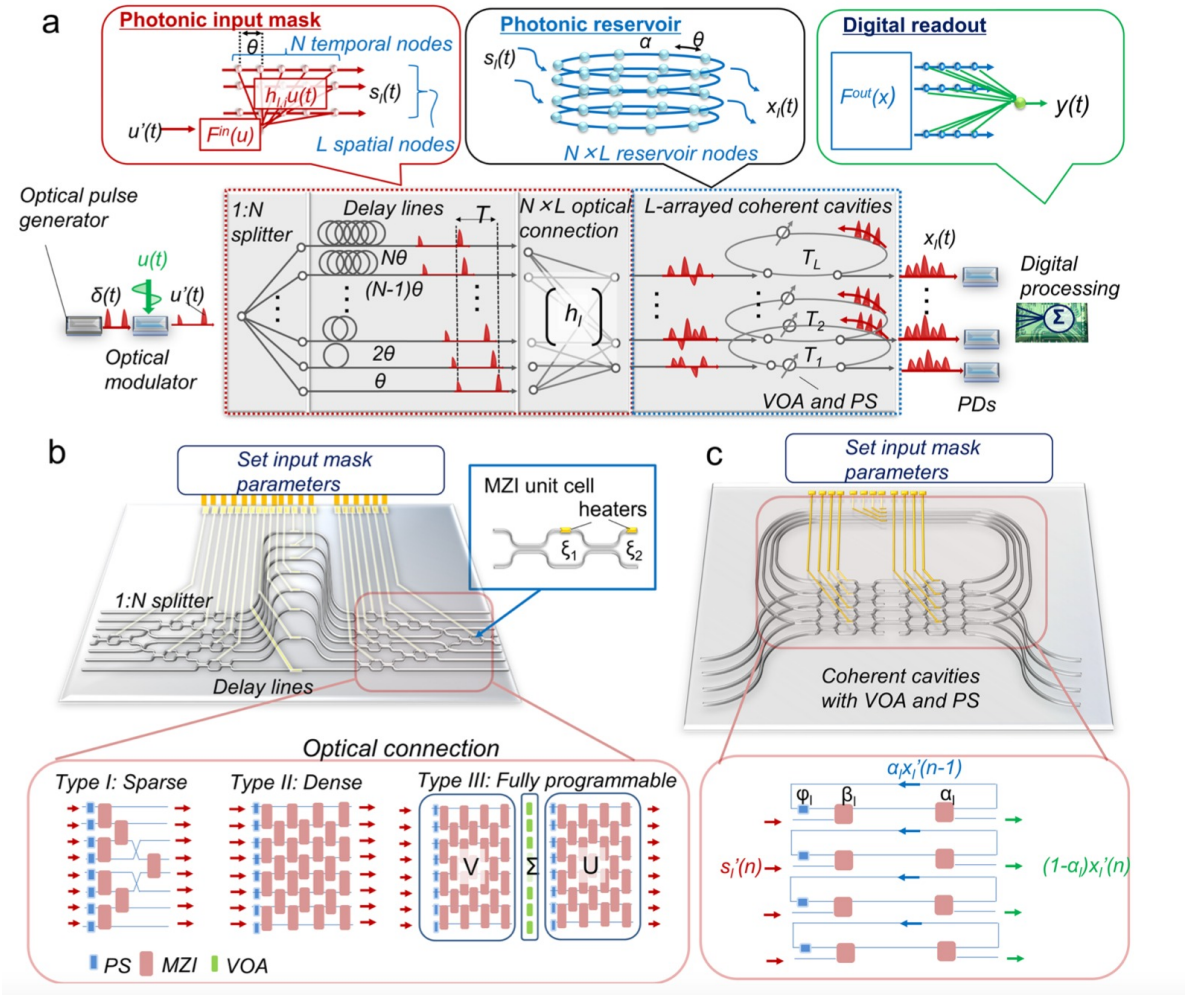

图 5。（a）所提出的储备池计算（RC）架构示意图。电输入信号 $u(t)$ 编码在光脉冲上，$\delta(t)$ 由光调制器编码。正弦非线性通过电光转换（F^{in}）实现。RC 系统由 L- 个光学谐振腔阵列组成，包含 N 个时间节点和 $N \times L$ 个虚拟节点。光电探测器（PD）从光学电路获取输出信号，并产生非线性转换（F^{out}）。数字处理单元检测信号 $|x_l|^2$，并对权重进行加权求和，以获得最终输出 $y(t)$。（b）输入掩模电路波导布局示意图，展示了三种光连接安装方式；（c）输入掩模储备池电路。输入权重 h_l 和储备池参数可通过移相器、马赫-曾德尔干涉仪（MZI）及可变光衰减器设置进行调节。图和说明引自 [71]。

以及第 VII.1 节中涉及量子效应的 RC 架构案例。图 5 展示了另一个示例。

III. 使用光学机器进行非线性优化 **ES**

光学硬件能够解决的问题涵盖广泛的优化问题：针对二元、整数、实数或复数变量的线性和非线性问题，以及有约束或无约束的问题。这样一个通用框架可以涵盖社会科学、金融、电信、航空航天、生物与化学工业等领域的许多应用 [83]。

非线性优化问题在最优解附近的二阶近似为二次形式，因此通常会简化为二次规划（QP）：在满足线性约束的条件下，使变量的二次函数最小化。即使在可行解空间之外，也可以成功完成这种近似。二次规划可用于最小二乘回归，也可以作为更大问题的一部分，例如支持向量机（SVM）训练。二次规划目标函数与各种物理系统中的二体自旋哈密顿量之间存在明显的对应关系，因此可以将该问题映射到物理设置中。在这里，变量与“自旋”相关联，而目标函数则对应于一个编码自旋之间相互作用模式和强度的“哈密顿量”。

系统可以通过准平衡或非平衡运行模式，找到自旋哈密顿量的最优解或基态。在热力学平衡状态下，系统可以使用具有含时哈密顿量的量子退火。这包括从初始平凡哈密顿量到最终哈密顿量的绝热演化，后者对原始目标函数进行编码。然而，由于谱隙缩小 [84]，对于更大的系统和更复杂的哈密顿量，这一过程可能会变得效率低下。

许多开放的非平衡增益耗散系统，例如激光器以及光子或极化激元凝聚体，都是非厄米系统，因此没有基态。相反，它们倾向于在趋向相干性的过程中使损耗最小化。我们可以借助几何类比，将其运行原理描述为从下方逼近优化代价函数（损耗景观）的表面。导致损耗最小化的主要过程有两个：阈值以下的玻色子受激效应，以及阈值处操作的相干性；后者决定了解的质量。增益提高到足以克服线性损耗，并由增益饱和的非线性稳定后，涌现出的相干态便会使损耗最小化（这相当于使粒子总数最大化）。因此，它实现了映射到目标自旋哈密顿量中的损耗最小化。由此产生的系统各要素演化与.....十分相似

四十年前，人们提出可利用Hopfield网络的动力学来求解二次优化问题 [85]。尽管当时取得了一些成功，也激起了极大热情，但基于Hopfield网络的优化器几乎被遗忘了，主要原因是神经元之间需要高连接度，而经典架构所用网络的演化时间也随之增加。近年来，Hopfield网络重新受到关注，因为现在可以用电子电路或光子神经网络等物理系统来模拟它们。与电子系统相比，光子系统的优势在于运行速度更快，而且能够通过单根光波导传输许多信号。这意味着，作为优化器的Hopfield网络光子实现可以具有较高维度、稠密连接，并能快速收敛到最优解。

III.1. 自旋哈密顿量与困难优化

现实中的决策或优化问题对于传统经典计算机而言可能颇具挑战。这些问题通常可以重新表述为寻找某个自旋哈密顿量的基态，并可通过量子、经典或混合模拟器进行模拟。在这一映射过程中，所需额外变量的数量开销至多为多项式级。然而，这类自旋模型哈密顿量在实验上难以实现和控制。通常考虑两类自旋哈密顿量：伊辛模型和XY模型。伊辛模型最受关注，因为许多具有挑战性的离散组合优化问题都可以映射到该模型中 [86]。利用耦合矩阵**J** 对伊辛哈密顿量进行最小化（即对二次无约束二进制优化问题（QUBO）进行最小化），其形式为

$$\min_{s_i} \quad -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j<i}^{N} J_{ij}s_i s_j, \quad \text{subject to} \quad s_i \in \{-1,1\}. \tag{1}$$

推广到二次以上将得到一个 k 局域自旋哈密顿量：

$$\min_{s_i} \quad -\sum_{i_1,i_2,\ldots i_k}^{N} Q_{i_1,i_2,\ldots i_l,\ldots,i_k} s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_l}\ldots s_{i_k} \quad \text{subject to} \quad s_{i_l} \in \{-1,1\}. \tag{2}$$

这个称为高阶二元优化问题（HOBO）的问题出现在许多场景中，包括包括 k布尔可满足性问题 [87], 整数分解 [88], 计算配分

函数、四维纯晶格规范理论的配分函数 [89], 分子相似性测量 [90], 以及分子构象采样 [91]。在 XY模型中，“自旋”是连续向量 $\mathbf{s_j} = (\cos\,\theta_j, \sin\,\theta_j)$，二次连续优化问题（QCO）则变为

$$\min_{\mathbf{s_i}} \quad -\sum_{i,j<i} J_{ij}\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = \min_{\theta_i} \quad -\sum_{i,j<i} J_{ij}\cos(\theta_i - \theta_j) \quad \text{subject to} \quad \theta_i \in [0, 2\pi), \tag{3}$$

并可直接应用于相位恢复问题 [92–95]。当相位 θ_j 被限制为取离散值 $2\pi/n$ 且具有一个整数 $n > 2$时，式(3)就变成具有 $n-$个状态的钟模型，可应用于化学材料和蛋白质折叠研究 [96]。

连续自旋的出现是许多光学系统的共同特征，因为短光子脉冲可以通过振幅和相位变量来表征。一些用于机器学习的光学硬件利用了这一特征。例如，有人提出了复值神经网络 [52], ，以及更为新颖的概念，即利用一组非线性函数进行模拟变换 [97]。

问题的计算复杂性由其规模增大时解决问题所需的时间或操作次数决定。如果存在用于解决问题的多项式算法，则该问题属于P类。如果存在用于验证解的多项式算法，则该问题属于非确定性多项式时间（NP）类。NP中最困难的问题大多称为NP完全问题。它们彼此等价，即要么全部存在多项式时间算法，要么一个也不存在。如果某个问题存在高效算法意味着所有NP完全问题都存在此类算法，则该问题称为NP完全问题。如果一个具有“是”或“否”答案的判定问题是NP完全问题，那么与其对应的优化问题就称为NP困难。这意味着，NP难问题并不比相应的NP完全判定问题更容易解决。伊辛模型的计算复杂性已经得到研究，并已证明在某些情况下属于NP困难 [98]。通用自旋哈密顿量的存在性已经得到确立，这意味着所有经典自旋模型都可以在此类模型中复现 [99]。包括Karp的21个NP完全问题在内的各种NP问题到具有多项式开销的伊辛模型的映射已经得到构建 [86]。

用于创建“困难”自旋哈密顿量实例的过程是在

统计物理的基础上发展起来的，在这里，问题的难度与系统中的一级相变相关 [100–103]。事实上，即使是中等规模的困难实例，由于操作数量会随规模呈指数增长，在经典计算机上也很难求解。拥有一套难度可调的统一优化问题集是当前持续开展的研究方向。这将有助于对经典和/或量子模拟器及算法进行客观基准测试。否则，将很难评估最先进平台和方法的性能。

当前研究为制定标准化的性能评估流程奠定了良好基础。例如，近期提出了“优化简易性准则”，用于识别计算上较为简单的实例 [104]。光学机器通常通过模式选择操作追随耦合矩阵的主导特征值，并找到与主特征向量各分量符号相对应的极小值解。如果给定问题的极小值解具有这一性质，就能在多项式时间内（至多为二次时间）轻松求得解。一个广为人知的例子是莫比¨乌斯梯形图上的伊辛模型 [104]。通过将莫比¨乌斯梯形图重新连边为随机 3-正则图，可以使用多种数值方法探测 P 类与 NP困难类之间的中间计算复杂性。构造测试实例的另一种方法涉及植入式集成技术 [103, 105]。

IV. 用于优化的物理光学平台描述

使用模拟器或模拟处理设备的概念早于现代计算机 [106]。近年来，不同的物理平台一直在竞相以快于传统硬件的速度解决经典优化问题。这场竞争促成了一个新领域的出现：相干网络/哈密顿量模拟器。该领域处于激光与凝聚态物理学、《工程》以及复杂性理论的交叉地带。各种物理系统已经成为解决计算问题的有前景的平台。下面我们将按照 [15] 中所采用的结构，对其中一些系统进行概述。

IV.1. 激光网络

新一代复杂激光器，例如简并腔激光器、多模光纤放大器、大孔径垂直腔面发射激光器和随机激光器，在用于计算时，相较于传统激光谐振腔具有诸多优势 [107]。它们拥有许多空间自由度以及可控的非线性相互作用。发射光的空间相干性可以在很大范围内调节，而输出光束可以具有任意轮廓，从而提供成对耦合。这些特性使复杂激光器能够用于储备池计算（RC）[108] ，或用于表示耦合矩阵相互作用。在激光网络中，可以通过将一台激光器的光相互注入另一台激光器来设计耦合。这会引入取决于激光器之间相对相位的损耗，并驱动系统进入能够使损耗最小化的锁相状态 [109]。简并腔激光器作为哈密顿量模拟器尤其具有潜力，因为其所有横模都具有几乎相同的 Q ，从而实现大量横模的同步 [107]。

N 单横模和纵模B类激光器的演化由 [110, 111]描述

$$\frac{dA_i}{dt} = (G_i - \alpha_i)\frac{A_i}{\tau_p} + \sum_j J_{ij}\frac{A_j}{\tau_p}\cos(\theta_i - \theta_j), \tag{4}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \Omega_i - \sum_j J_{ij}\frac{A_j}{\tau_p A_i}\sin(\theta_i - \theta_j), \tag{5}$$

$$\frac{dG_i}{dt} = \frac{1}{\tau_c}[P_i - G_i(1 + |A_i|^2)], \tag{6}$$

其中，对于激光器 i， $A_i[\theta_i]$ 为振幅， [为相位，]为增益， G_i 为泵浦强度， P_i 为损耗，Ω α_i 为频率失谐， $_i$ 和 τ_p 分别为腔往返时间和载流子寿命。第 τ_c 个和第 i个激光器之间的耦合强度表示为 j。如果所有振幅均相等，则方程（5）可化为耦合相位振子的Kuramoto方程

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \Omega_i - \frac{1}{\tau_p}\sum_j J_{ij}\sin(\theta_i - \theta_j). \tag{7}$$

方程（7）被广泛用于描述复杂系统中相干行为的出现 [112, 113]。

实验表明，找到XY

哈密顿量全局最小值的概率，在激光器阵列的实验实现与数值模拟之间是一致的。然而，在相同的耦合强度矩阵上对Kuramoto模型方程（7）进行模拟时，找到全局最小值的概率要低得多。这表明，振幅动力学提供了一种到达较低能量态的机制。因此，腔激光器可用作高效的物理模拟器，用于寻找XY哈密顿量的全局最小值并求解相位恢复问题。一个特别成功的例子是数字简并腔激光器 [95]。它是一种全光系统，利用非线性激光过程寻找一个解决方案，使其最符合从物体散射的光的傅里叶幅值约束。

IV.2. 光学参量振荡器

耦合简并光学参量振荡器（DOPO）网络已用于最小化伊辛哈密顿量 [114–120]。DOPO 是一种非线性振荡器，在超过阈值后具有两种可能的相位态，可与伊辛自旋相对应。这些人工伊辛自旋由非线性光学过程（即光学参量放大）产生的短激光脉冲的光学相位编码。基于 DOPO 的模拟器——相干伊辛机（CIM）——是一种增益耗散系统，其中伊辛哈密顿量的基态对应于损耗最低的构型。通过驱动系统进入近阈值区间，可以找到最优解；在该区间内，其他局部能量极小值仍不稳定。

目前，大多数成功实现的CIM采用基于光纤的简并DOPO和基于测量的反馈耦合，其中矩阵-向量乘法在嵌入反馈回路的现场可编程门阵列上执行，参见图6所示的方案。这种受电子反馈限制的可扩展光学处理器的计算性能，已针对各种大规模伊辛问题进行了验证 [114–116]。CIM相较于经典算法可能实现的加速效果仍在研究中 [117, 121]。此外，在任意两个自旋之间实现任意耦合连接的能力 [114] 意味着其可扩展性优于基于固态技术的退火器，即D-Wave机器[115]。

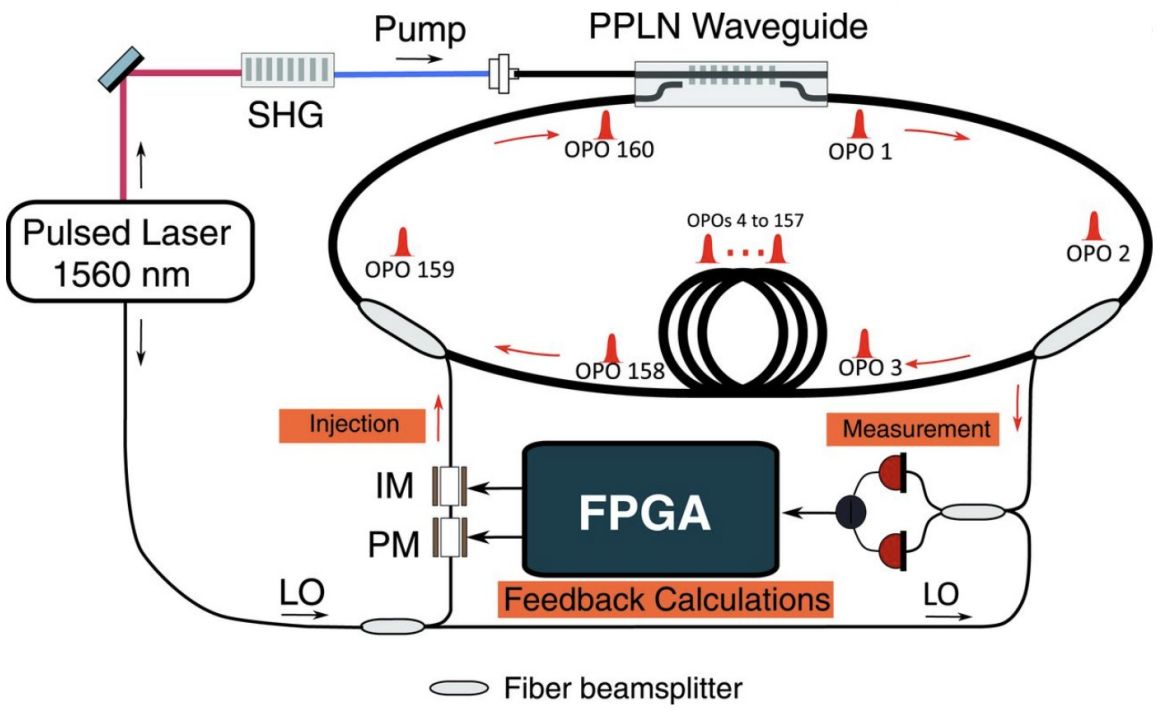

图 6. 带反馈机制的相干伊辛机（CIM）示意图。时分复用脉冲简并参量振荡器由光纤环形腔中的非线性晶体（周期性极化铌酸锂（PPLN））构成，腔内含有 160 个脉冲。反馈信号将腔内彼此独立的脉冲耦合起来，并根据对不同脉冲分量的测量结果计算得出。IM—强度调制器；PM—相位调制器；LO—本地振荡器；SHG—二次谐波产生；FPGA—现场可编程门阵列。该图引自 [114]。

在CIM中，每个伊辛自旋（一个DOPO）由以下内容描述

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = p\Psi_i^* - \Psi_i - |\Psi_i|^2\Psi_i + \sum_j J_{ij}\Psi_j, \tag{8}$$

其中，$\Psi_i = A_i \exp[i\theta_i]$ 为复振幅，θ_i 为相位，p 为泵浦强度，线性损耗和非线性损耗均已归一化。每次往返后，部分光从腔中提取出来，与参考脉冲进行零差探测，产生 Ψ_i 并馈入现场可编程门阵列（FPGA）；方程（8）的最后一项在其中计算，并转换回光信号，用于下一次往返。

相干伊辛机的核心元件是简并光学参量振荡器，其采用一种称为模式选择或增益耗散原理的非常规工作机制。每个简并光学参量振荡器都被制备为不同激发态的线性叠加态，以实现量子并行搜索。代价函数

通过将耦合系数设为与 J_{ij}成正比，映射为给定网络的有效损耗（即光子衰减率）； J_{ij}编码了有关给定任务的信息。伊辛哈密顿量的基态对应于网络损耗最低的振荡模式。系统在阈值泵浦率下以最小损耗达到基态。随后，系统开始以单一稳定模式振荡，触发光子的受激发射，并影响所有其他模式的饱和。检测这一单一振荡模式即可得到所需问题的解。

IV.3. 光-物质粒子网络

光子在计算任务方面兼具吸引人的特性与不足之处。然而，尽管存在众所周知的光学平台，例如自由光学装置或激光器系统，仍然可以将光子与物质波激发结合起来。这催生了将光子与物质相结合的独特设计，例如激子-极化激元。激子-极化激元（或简称极化激元）是由受限于半导体微腔内的光与束缚电子-空穴对发生耦合而形成的准粒子。它们属于玻色子，在超过临界密度 [122] 后可以形成凝聚态。材料的设计与选择能够控制极化激元质量，并在有机结构中实现室温下的固态非平衡凝聚体。在低增益极限下，固态凝聚体类似于处于平衡态的玻色-爱因斯坦凝聚体。在高增益状态下，它们则趋近于激光器。类似于极化激元，受限于染料填充光学微腔中的光子气体可以形成宏观相干态 [123–126]。

实验表明，可以使用各种技术构建极化激元或光子凝聚体晶格。其中一种技术是通过使用 SLM 将极化激元注入样品的特定区域，从而对极化激元晶格进行光学工程 [127–131]。此外，还可以设计势能景观，以限制极化激元或光子 [132–134]。晶格中增益耗散凝聚体的演化由基于紧束缚近似推导出的速率方程描述 [135, 136], ，其形式为斯图尔特-兰道方程：

$$\dot{\Psi}_i = (\gamma_i - |\Psi_i|^2)\Psi_i - iU|\Psi_i|^2\Psi_i + \sum_{j\neq i} \mathcal{C}_{ij}\Psi_j, \tag{9}$$

其中， Ψ_i 是复振幅， U 是极化激元-极化激元相互作用强度， γ_i 是有效注入率（增益减去损耗）。耦合强度是复数 $\mathcal{C}_{ij} = J_{ij} + iG_{ij}$，其中耦合的耗散部分为 J_{ij}，而约瑟夫森部分为 G_{ij}。如果 $|J_{ij}| \gg |G_{ij}|$ 并引入注入反馈，将注入率修改为使所有振幅达到相同值 $A_{\rm th}$，例如通过 $\dot{\gamma}_i = \epsilon(A_{\rm th}^2 - |\Psi_i|^2)$，则公式（9）达到不动点，该不动点是 XY哈密顿量 [135]的最小值。系统中的准粒子总数变为

$$\text{Total} \equiv NA_{\rm th}^2 = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}^{N} J_{ij}\cos(\theta_i - \theta_j), \tag{10}$$

其中， θ_i 是第 i–个凝聚体的相位。由式（10）可知，如果用于激发相应数量准粒子的总注入量 $\sum\gamma_i$ 达到最小值，那么 XY哈密顿量也达到全局最小值。要使伊辛哈密顿量或 n态时钟哈密顿量达到最小值，可以向系统中加入共振泵浦 [137]。共振泵浦可调谐至凝聚体频率，或调谐至凝聚体频率的 n 倍，以实现 $n > 1$（n :1 共振）。在这种情况下，振荡器（例如光子或极化激元）的动力学满足

$$\dot{\Psi}_i = (\gamma_i - |\Psi_i|^2)\Psi_i - iU|\Psi_i|^2\Psi_i + \sum_{j\neq i} J_{ij}\Psi_j + h(t)\Psi_i^{*(n-1)}, \tag{11}$$

其中， h（t）是共振激发的强度，它随时间增长，直至达到其稳态值 H。在不动点处，系统中的准粒子总数达到

$$\text{Total} \equiv NA_{\rm th}^2 = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}^{N} J_{ij}\cos(\theta_i - \theta_j) - HA_{\rm th}^{n-2}\cos(n\theta_i). \tag{12}$$

在 $n > 1$ 中，方程（12）的最后一项迫使相位取离散值 $\theta_i = 2\pi/n$，因此使伊辛哈密顿量（对于 $n = 2$）或 n 态时钟哈密顿量（对于 $n > 2$）最小化。

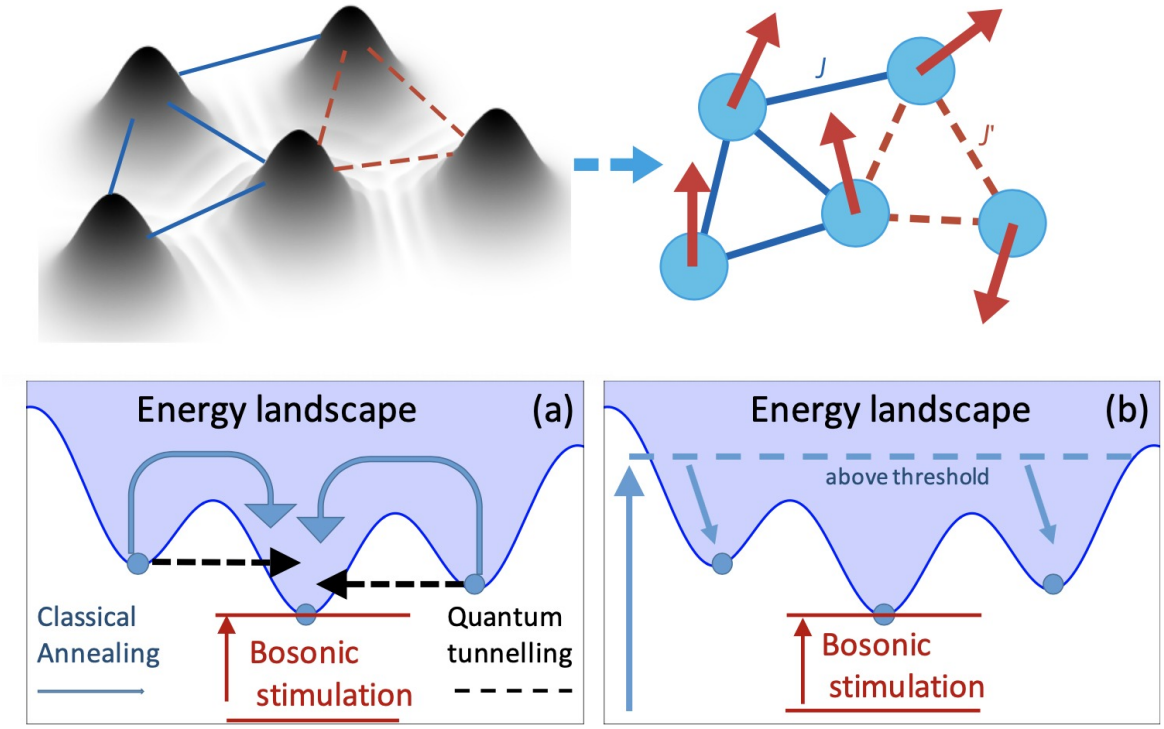

图7. 顶部：五顶点极化激元图的凝聚态密度图示意图。耦合的符号取决于各位点之间的间距，可以是铁磁耦合（实线蓝线）或反铁磁耦合（虚线红线）。图中每个极化激元顶点代表一个映射到经典矢量自旋的局域相位。底部：用于寻找模拟XY哈密顿量能量景观全局最小值的不同类型退火示意图 [131]。

IV.4. 混合光学机器

如果物理学为优化提供了路径，我们可以进一步思考，能否将最佳优化算法与光学功能相结合。采用混合方法进行优化，同时结合光学技术和电子技术各自的优势，有望大幅提升优化过程的效率和有效性。Microsoft 最近通过构建一个混合光电平台实现了其中一种可能性：该平台在光域中执行矩阵-向量乘法，同时利用电子学迭代应用梯度下降，以求得目标函数的最小值 [138]。这种非常规硬件与算法的协同设计，为具有存内计算操作和变量空分复用表示的可扩展架构铺平了道路。

IV.5. 光学优化器的数学描述

许多现有的光学机器都可以描述为一组 N 经典自由度的演化。原子、极化激元、激子、光子等多种光学平台，在其数学描述中具有许多相似的特征。我们在此以结构化列表的形式，呈现图8中仿生物理系统和算法背景下所使用的主要方程。强调这些方程的统一图景有几个主要原因。首先，这表明所呈现的所有方程都代表最小化原理和分岔动力学这一相同现象，从而统一了来自数学、物理学、神经网络理论等领域的许多方程，参见 [139]。第二个重要特征体现在列表的结构上。人们可以很容易地找到任意两个选定方程之间的正确变换。这也是我们以非严格的方式对它们进行排序的原因：将规范的安德罗诺夫–霍普夫振子（AHO）模型置于列表顶部，而将最直接的梯度置于底部。从规范模型出发，通过在导致解的分岔邻域内使用适当的变换，或省略某些项或导数，便可以得到所需的方程。此外，所呈现方程之间的差异似乎仅在于系统所选的参数化。即使在经典动力系统的范围内，优化过程也可以根据所选参数以不同方式进行。这样一个统一框架使人们能够合并许多经验结果，或在通用模型的同一框架下开展工作，以便更好地比较结果。

最小作用量原理、最小功耗原理（或最小熵产生原理）以及变分原理，都是“优化内在于物理学之中”这一观点的有力例证 [140]。在哈密顿表述中，最小作用量原理的基本内容是：对于一个系统，在给定时间内，从初始构型到最终构型的真实动力学轨迹，是从一组可能的虚构轨迹中选出的、使作用量局部驻定（换言之，使作用量最小）的那条轨迹。这类变分问题是物理学引出复杂问题的绝佳例子。对于更复杂的问题，可以考虑经典场论和量子场论中的最小作用量原理表述。图8的第二个模块中没有列出显式的哈密顿方程（$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$）。然而，

它们也与所呈现的方程相联系，并为从物理学家的视角考察整个列表提供了绝佳切入点。在本综述的范围内，我们将讨论限定于自由度为离散数量的经典系统，并聚焦于可映射为牛顿型运动方程的偏微分方程。此外，我们不太关注原始运动方程中的变化，例如拉格朗日乘子、完整约束或相对论因子。

图8还展示了广为人知的经典梯度下降动力学，其目标代价函数由梯度 $-\sum_{j\neq i} Q_{ij}(x_j)$ 定义，这是所展示的动力系统中最为直接的方程。它可以与带动量的梯度下降（见图8中央）相联系，也可以与经典动量（CM）方法[141],或其改进版本——Nesterov加速梯度下降 [142]）相联系。

Kuramoto模型是一种广为人知的数学模型，用于描述耦合振子系统中出现的同步现象 [143–145]。这一模型可以通过变换从AHO方程导出，该变换涉及Hopf分岔附近耦合矩阵的特征值和特征向量；也可以直接从非平凡的耗散哈密顿量推导得出，或者将其视为对经典XY哈密顿量对应的代价函数进行梯度下降的模型。

图8的底部展示了Hopfield神经网络和相干伊辛机的描述。Hopfield神经网络是一种循环人工神经网络，可视为带有有效投影项的梯度下降变体，其特征时间为 τ，梯度项为$-\sum_{j\neq i} Q_{ij}(x_j)$；这些项通常通过 $-\sum_{j\neq i} J_{ij}\varphi(x_j)$ 表示，其中 $\varphi(x_j)$ 是投影函数， J_{ij} 是耦合强度 [85]。CIM方程与Hopfield描述非常接近。CIM是由光学参量振荡器构成的网络，其中振荡的“最强”集体模对应于某个特定伊辛问题的最优解，此时系统已超过其阈值 [114, 115]。CIM的经典描述（其本质上是否为非经典描述仍有争议 [146, 147]）与Hopfield神经网络的主要区别在于，前者还包含额外的泵浦项 p 和饱和机制 $-x_i^2$。

图8中间部分包含模拟分岔机（SBM）方程，这些方程受到表现出分岔现象 [148–150] 的经典非线性哈密顿系统绝热演化的启发。更高阶的导数使其与物理学的联系更加明显，并提升了该模拟算法在特定参数下的性能。

现代霍普菲尔德网络（也称稠密联想记忆） [151, 152]为物理学中的拉格朗日/哈密顿系统与神经网络演化之间的联系提供了另一种视角。现代霍普菲尔德网络由特征 x_i 和记忆（隐藏） h_μ 神经元组成，这些神经元以连续变量的形式随连续时间演化。每组神经元的特征时间分别为 τ_f 和 τ_h。对称耦合函数根据 $Q_{i\mu}(h_\mu) = \xi_{i\mu} f_\mu$ 和 $G_{\mu i}(x_i) = \xi_{\mu i} g_i$ 选取，并且只连接不同组的神经元，即特征神经元 i 与记忆神经元 μ 之间的连接，反之亦然。记忆神经元和特征神经元的输出分别用非线性函数 $f(\{h_\mu\})$和 $g_i = g(\{x_i\})$表示。这些函数可以表示为两组神经元的拉格朗日函数的导数，分别为 $f_\mu = \frac{\partial L_h}{\partial h_\mu}$ 和$g_i = \frac{\partial L_x}{\partial x_i}$。选择特定的拉格朗日函数将决定网络的动力学（或更新规则），从而使能量函数最小化。通过消去隐藏神经元，可以得到有效的演化理论。

—— ——

图8上半部分包含安德罗诺夫-霍普夫振子模型 [153, 154], 这一典范模型描述了分岔的出现。分岔是神经元动力学中观察到的重要现象之一，并负责产生周期性活动。函数 Q_{ij} 负责 i 与 j 振荡器之间的相互作用，而 γ_i、 ω_i、 σ_i、U_i 分别表示有效增益、自频率、非线性耗散和自相互作用。许多激光器 [155], 、光子系统、极化激元系统 [136], 以及生物系统 [156]都会在阈值处表现出所谓的安德罗诺夫-霍普夫分岔，从而可能产生极限环行为。AHO 可作为统一框架，适用于此处介绍的许多模型；这些模型展现了各种集体现象 [139]。AHO 模型的另一项重要性质是其规范性，这意味着在分岔附近，通过某种变换，可以将图（8）中位于 AHO 下方的每个方程转化为 AHO；反向则不成立。人们还可以研究分岔现象以及分岔点附近系数随时间的变化行为，因为这是系统找到优化任务解的关键机制。AHO 与另一种模型——弱相互作用神经网络——具有相同的规范性。该网络由 N 个神经振子构成，包括兴奋性神经元（x_i（t）） 和抑制性神经元（y_i（t）），它们按照所给出的动力学方程 [156]演化。在局部层面，函数f, g 负责系统中第 i部分的内部行为。同时， p, q 表示外部相互作用，其强度由以下参数表征：

ϵ参数。该　　方程之间的显式变换可见于 [157–159]　　.

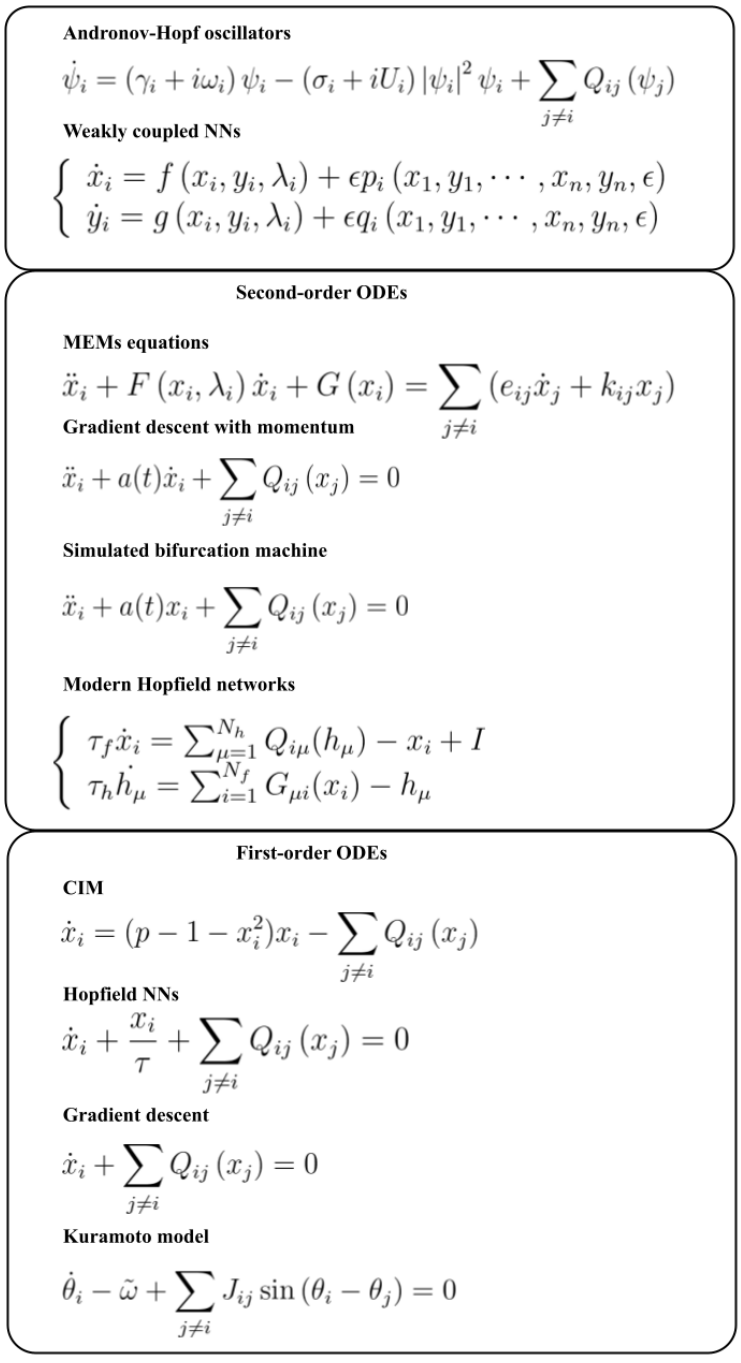

图8. 优化背景下采用的不同科学分支主要模型的排列列表。最一般的方程位于上方，从典范 AHO 模型开始；通过某些变换，该模型涵盖了下方的所有方程。相比之下，梯度下降等较简单的模型位于底部。我们按照模型是否使用二阶导数项，对其进行了非严格的分组。函数 $\sum_{j\neq i} Q_{ij}(x_j)$ 可以有不同形式，例如梯度下降中的$\eta\frac{\partial E}{\partial x_i}$，Hopfield 神经网络中的$Q_{ij}(x_j) = J_{ij}x_j$ 或 $Q_{ij}(x_j) = J_{ij}\varphi(x_j)$ 。

我们将省略从上方方程推导至下方方程的变换过程的具体描述，详细讨论及相应参考文献见 [139]。尽管耦合微机电系统（MEMs）不含光学元件，但其遵循类似的光学二阶微分方程[159]。从 AHO 到 CIM、Hopfield 或 SBM 方程的转换也可见于 [139]。值得注意的是，引入复杂的参数时间动力学，可以改善本文所述各类方程的最小化性质。例如，可以引入特定的时间调度（如混沌振幅方法，根据振荡器振幅与其饱和点之间的差异对耦合项进行退火 [160]），也可以引入高阶项（如 $\dot{\psi}_{i_k} \sim \sum_{i_1,\ i_2,\ \ldots i_k-1}^{N} Q_{i_1,\ i_2,\ \ldots i_l,\ \ldots\ldots,\ i_k} \psi_{i_1} \psi_{i_2} \ldots \psi_{i_l} \ldots \psi_{i_k-1}^{*}$ [161]）。

还应特别强调最小功耗原理及其在模拟优化机器中的作用。研究表明，许多物理系统通过这一原理运行，并执行拉格朗日函数优化 [140]。拉格朗日乘子由增益或损耗系数，或其随时间变化的参数化形式给出；例如参见相干伊辛机的方程。根据机器的特性，它在许多其他应用领域中也可能发挥作用。

由 N 个元件组成的光学机器，其运行可以统一描述为一组 N 经典或量子振荡器的演化。经典与量子之间的差异源于系统的初始状态。它会影响找到最终状态（通常是某个问题的解）的速度和概率。如果振荡器的占据数较大且具有一定不确定性，同时相互作用较弱，那么系统就会作为经典场系综演化，并具有相应的经典场作用量 [162]。这一类比适用于任何玻色振荡器，包括光学振荡器：原子、极化激元、激子、光子等。例如，具有较大且有一定不确定性的占据数的完全无序弱相互作用玻色气体，其密度矩阵在相干态表示中几乎是对角的。初始状态可以视为相干态的统计系综。在最低阶近似下，每个相干态都沿其经典轨迹演化。这种演化会导致波数空间低能区域中的占据数爆发式增加，而有序化过程正是在该区域发生的 [162]。即使初始状态中的占据数为数量级一，因而经典物质场描述尚不适用，系统的演化在这一阶段仍可由标准

玻尔兹曼量子动理学方程描述，并最终不可避免地导致粒子分布低能区域中出现较大的占据数。因此，当占据数变得足够大时，可以在演化的某个特定时刻，将动力学方程切换为对场的长波长分量采用物质场描述。此时，光学系统可以用经典物质场描述。然而，此前的量子动力学发挥着至关重要的作用。这种包含纠缠和态叠加的完整量子动力学，能够在找到相干态之前对系统的高维空间进行完整扫描。此后，系统表现出经典行为，而该相干态则逐渐稳定到作为问题解的不动点。在向相干态过渡的过程中，量子效应应当能够增强对最优态的搜索，并有可能带来量子加速。

IV.6. 联想记忆模型

本节将联想记忆模型作为神经网络模型之一进行介绍，该模型利用了与自旋哈密顿量之间的联系。这种对应关系意味着，许多具有非平凡（非零）相互作用势的物理系统都可以用作计算设备。

联想记忆的标准模型 [85]使用由 N 二值神经元组成的系统，其取值为 ± 1。所有神经元的一个构型表示为向量 $\sigma_i,\ i = 1, \ldots\ldots N$. 该模型存储 K 个记忆，记作 $\xi_i^\mu,\ \mu = 1, \ldots\ldots K$，这些记忆同样是二值的。该模型由一个能量函数（或更进一步地说，李雅普诺夫函数）定义，其形式为

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_i J_{ij} \sigma_j, \quad J_{ij} = \sum_{\mu=1}^{K} \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \tag{13}$$

以及一个在每次更新时都会降低能量的动态更新规则。其基本问题在于，当输入一个新的图案时，网络应当响应一个与输入最为相似的存储记忆。我们在第 IV 节中考察的许多物理系统都能够沿着该李雅普诺夫函数的梯度演化，从而自动将自身转换为人工神经网络。

Hebb学习理论探讨了联想记忆 [163, 164]，并描述了如何设定神经元 J_{ij} 之间的耦合系数（通常按

模式数量 K归一化）。通常， J_{ij} 取为已存储模式的外积之和。定义联想记忆中耦合系数的方法还有很多，例如伪逆规则、Storkey学习规则等。许多研究探讨了该模型的存储容量，即网络能够存储并可靠检索的记忆的最大数量。研究表明，对于随机记忆，这一最大值的数量级为 $K^{\max} \approx 0.14N$ [85, 165, 166]。如果尝试存储更多模式，构型空间中若干相邻的记忆将会合并，从而形成能量（13）的全局最小值，导致无法恢复已存储的记忆。通过修改哈密顿量（13），消除已存储模式 [167]之间的二阶相关性，可以将存储容量提升至接近 $K^{\max} = N$ 。

简单的联想记忆模型（13）有许多优点。首先，它关于变量是二次的，这意味着能量梯度关于这些变量是线性的。因此，人们可以轻松计算出相应的神经元更新，从而降低能量函数（13）。这种数学结构带来的一个结果是，可以利用各种物理硬件系统复现能量函数（13）及其所需的动态行为。要构建联想记忆机，需要通过与强度 J_{ij} 成正比的非平凡相互作用势，将代表模拟变量的元素连接起来，并将最终的稳定态投影到离散域中，以获得神经元的二进制状态。此外，该模型的简洁性使其易于修改，也便于纳入其他扩展。最后，该模型的普适性意味着可以通过任务之间的映射，利用联想记忆解决不同任务；例如，分类任务可以归约为模式识别/恢复。

联想记忆模型的另一个广为人知的名称是 Hopfield神经网络，它是一种具有二值阈值节点的循环人工神经网络。此外，Hopfield神经网络与物理自旋玻璃模型以及若干组合优化任务有许多相似之处。例如，Hopfield模型与磁性伊辛模型（零温度下）同构， [168], 后者已在物理学领域得到广泛分析。在组合优化中，求解伊辛模型的基态是 NP困难问题，并且与 QUBO 相关。此外，计算自旋玻璃的统计和具有同样的 NP困难复杂度类，这给计算其各种热力学量带来了重大障碍。其他任务示例包括布尔可满足性问题

或布尔可满足性问题 [169] 以及加权MAX-2-SAT。

要完整定义联想记忆模型，必须指定神经元的动态更新规则。例如，更新规则可以描述神经元在离散时间步中的离散状态：

$$\sigma_i(t+1) = \begin{cases} 1, & \text{if } \Sigma_j J_{ij}\sigma_j(t) > 0, \\ -1, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{14}$$

使用与第13式中相同的记号。连续版本的形式为：

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{x_i}{\tau} + \sum_j J_{ij} g\left(x_j\right) + h_i, \tag{15}$$

其中， x_i 表示第 i个神经元的平均状态，该状态可在最初定义的范围内取连续值； h_i 是直接输入，或者在李雅普诺夫函数（13）具有非零场的情况下表示偏置系数； g 是一个单调函数，用于限定连续状态，并在最终收敛状态下将其转换为离散状态，例如建立变量之间的对应关系，如 σ_i =sign(x_j)； τ 是收敛至最优解或次优解的特征时间。

神经网络中的模拟计算可以描述为高维连续空间中向量状态变量的演化。利用式（15）可以对其进行精确追踪。这种微分方程结构的关键在于李雅普诺夫函数的存在。Hopfield神经网络背后的这个李雅普诺夫函数 E 有助于理解可能的最终状态，这些状态似乎是系统动态行为的吸引子。对于两种模型，都可以利用此前描述的特定硬件系统实现动态状态更新。然而，应区分硬件层面上可以实现的不同运行模式：寻找模型的基态（全局最小值），以及模式恢复（沿李雅普诺夫函数曲面下降至最近极小值）。

具有非零场的模型离散变体中，李雅普诺夫函数的显式公式为：

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \sigma_i J_{ij} \sigma_j - \sum_{i=1}^{N} h_i \sigma_i. \tag{16}$$

对于连续变量的情况，式（15）中的同一函数形式略有不同：

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i J_{ij}\sigma_j - \sum_{i=1}^{N}h_i\sigma_i + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N}\int^{\sigma_i} g^{-1}(Z)dZ, \tag{17}$$

其中，最后一项是由于离散状态与连续状态 $\sigma_i = g(x_i)$ 之间的对应关系而出现的。对于 $g(x)$，通常选择 $g(x) = \tanh(x/\beta)$ 函数，其中，时间相关参数 β 在 Hopfield神经网络的演化过程中趋于零，从而迫使方程（17）的最后一项消失 [170]。动态更新规则的基本性质是，能量会随着系统演化而降低，进而在相空间中形成最终的稳定模式。

经典Hopfield神经网络在李雅普诺夫函数、变量更新规则和其他特征方面有许多变体。其中一个版本称为现代Hopfield神经网络 [151]。具有连续状态的现代Hopfield网络可以集成到深度学习架构中，因为它们相对于其参数是连续且可微的。此外，它们只需一次更新即可检索模式，符合深度学习层的特点。基于这些原因，现代Hopfield网络可以作为深度网络中的专用层，为其配备记忆。Hopfield层在深度网络架构中的可能应用包括多示例学习、抵御对抗性攻击[171], 对点集的处理以及基于点集的学习、序列分析和时间序列预测、存储和检索参考数据（例如训练数据）、离群值、高误差数据点、原型以及许多其他用途 [151]。更重要的是，现代Hopfield网络的功能可以与机器学习领域中的各种方法相比较，例如支持向量机、随机森林、提升法、决策树、贝叶斯方法以及许多其他方法[172, 173]。

如上文所述，许多光学系统都可以执行优化任务。由于这一任务与联想记忆模型之间存在内在相似性，因此可以利用这种关系，通过光学系统实现Hopfield神经网络。这类实现包括前文讨论过的激光网络、伊辛机、光子 [174] 和极化激元系统[131], 以及共焦腔量子电动力学神经网络 [175], ，见图9。光学网络与Hopfield模型之间的联系十分重要，因为它使我们能够将这类层融入更复杂的光学架构，而无需进行复杂的调整。

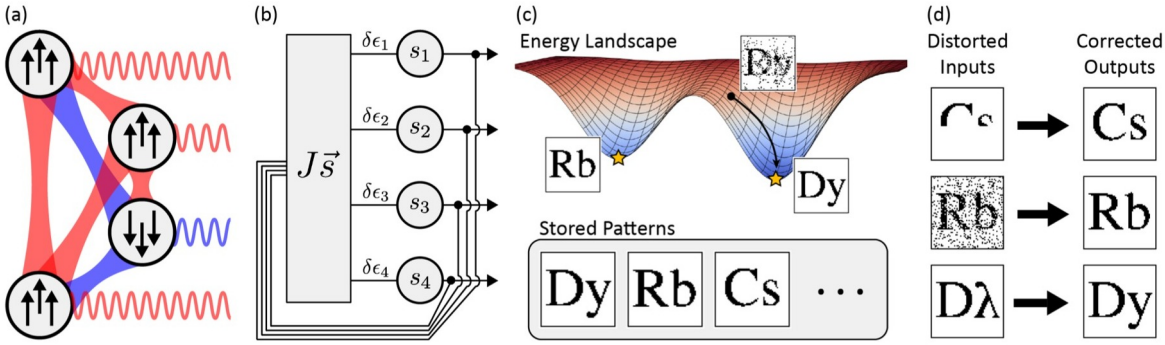

图 9。（a）具有全连接耦合以及自旋系综之间变号连接的四个节点。蓝色和红色分别表示铁磁与反铁磁 J_{ij} 链接。物理细节见 [176]。（b）通过自旋系综实现 Hopfield神经网络。单层网络的二值神经元 s_i 经过循环反馈，并进行线性变换 J，随后执行逐元素阈值运算。（c）Hopfield模型呈现出具有许多亚稳态的能量景观。能量最小化动力学将相似的自旋构型驱动至存储的局部最小值，该局部最小值由吸引域表征。记忆过多会导致吸引域消失。（d）联想记忆问题示意图：通过补全失真的输入图像来回忆多个存储模式。图片来自 [176]。

IV.7. 高阶系统

Hopfield模型的一项重要扩展是引入张量项，这些张量项以多项式形式依赖于 σ_i 变量 n [177]。这种扩展能够将存储模式的数量增加到 $K^{max} = \alpha_n N^{n-1}$，其中 α_n 是一个数值常数。此外，在神经网络训练中增加 n 时，还可以观察到所谓的“特征到原型转变”。原型理论提供了一种替代性的学习方法，在这种方法中，物体被作为一个整体加以识别。尽管人们认为张量项在生物学上并不合理 [152], ，但它们可以在某些人工物理装置上得到复现 [161]。从这一角度来看，人工张量平台可以充分利用这些技术机遇。高阶霍普菲尔德神经网络 [178]可以写成

$$\frac{dx_l}{dt} = -\frac{x_l}{\tau} + \sum_{\bar{\Omega}} \mathbf{A}^k_{l,i_1,\cdots,i_k} s_{i_1} \cdots s_{i_k}; \qquad s_l = g\left(\frac{x_l(t)}{\beta}\right), \tag{18}$$

其中，x_l 是实连续变量，$g\,(x)$ 是阈值函数，而 β 是可随时间变化的缩放参数。由于 k 局部耦合，这类系统能够求解高阶二元优化，见式（2）。

它曾 如 [161]所示，阈值以上的极化激元系统可描述为 by

$$\frac{d\Psi_l}{dt} = \Psi_l(\gamma_l(t) - |\Psi_l|^2) + \sum_{\bar{\Omega}} \mathbf{A}^k_{i_1,\cdots i_k} \Psi_{i_1} ... \Psi^*_{i_k}, \tag{19}$$

$$\frac{d\gamma_l}{dt} = \epsilon(\rho_{\text{th}} - |\Psi_l|^2), \tag{20}$$

¯其中，Ω 是不包含索引 l 的索引集合。式（20）描述了反馈机制，该机制驱动所有 $\rho_i = |\Psi_i|^2$ 达到预先设定的值 ρ_{th}； ϵ 则表征了 γ_i 对 ρ_i变化作出调整的速度。接下来，我们将介绍如何以不同方式将实际计算任务与所述系统的真实物理行为相联系。

V. 应用的数学表述

本节探讨一系列通用应用，这些应用基于网络求解优化问题和/或充当 Hopfield网络的能力。我们首先从经典计算机科学中的简单问题入手，并介绍如何将其映射为 QUBO 或混合整数问题。然后转向一些现代任务：这些任务的存储容量各不相同，且被认为受到所谓的“维度灾难”影响；对于这类任务，与其处理单个变量，不如处理概率分布。不过，在这两种情况下，我们都不关注所介绍的映射是否高效（如下一小节所述），还是需要在多次顺序操作之间进行大量预处理和后处理，因此效率较低。有些低效的嵌入仍然具有数学上的挑战性，并且可以通过改进通用表述或利用特定任务的信息加以优化。本章最后将讨论神经网络架构及其能力。

V.1. 直接编码/解码

本小节介绍不同计算任务之间的连接/对应关系 [169, 179, 180]。

命题可满足性问题（SAT）是这种对应关系的核心。它是一类基础问题，用于判定命题逻辑中的一组句子是否可满足。子句由若干

布尔变量或其否定的析取（逻辑或，记作 $\wedge$）构成。由多个必须同时满足的子句组成的集合，是这些子句的合取（逻辑与，记作 $\wedge$）。可将可满足性问题写成一般形式：

$$(x_1 \vee x_2 \vee ...) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee ...) \wedge ...(...), \tag{21}$$

其中，x_i, y_i 是“文字”，即任意一个原始变量或其否定。形式（21）称为合取范式（CNF），显然，布尔变量之间的任何逻辑命题都可以写成合取范式。

布尔可满足性问题是第一个被证明为NP完全的问题 [169, 179]。目前，尚无已知算法能够高效求解每一个SAT实例。它是否存在等价于著名的P与NP问题。尽管如此，许多启发式SAT算法能够求解涉及大量变量的问题实例，足以满足许多应用的需求。此外，SAT问题还有许多变体，例如3-SAT及其推广形式k-SAT、HORN-SAT和XOR-SAT，这些变体更适合某些特定的非常规任务。

一种特定的SAT变体——加权MAX-2-SAT，可以很容易地将任务重新表述为QUBO。简单的2-SAT包含 m 个子句，每个子句含有2个文字。MAX-2-SAT旨在通过赋值使满足的子句数量最大化。加权MAX-SAT为每个子句赋予正权重，使违反子句的代价能够体现在问题中。要将加权MAX-2-SAT问题重新表述为QUBO，需要利用这样一个事实：使满足子句的权重最大化，等价于使未满足子句的权重最小化，并利用逻辑 $x_i \vee x_j = x_i \wedge x_j$。最终形式如下：

$$\max_{x_i} \sum_{i,j<i} w_{ij} x_i x_j, \tag{22}$$

这就是与式(1)具有相同形式的QUBO。因此，布尔可满足性问题（可通过布尔逻辑轻松转换为加权MAX-2-SAT）与QUBO之间的联系由此揭示。

我们已经知道许多 NP问题的伊辛形式化 [86]。例如，已涵盖的问题包括数划分、图划分、团存在性、二进制整数线性规划、精确覆盖、集合打包（或极大独立集）、顶点覆盖、可满足性（

重点是从 3SAT 到 MIS 的归约）、集合覆盖、整数权重背包问题、图着色、哈密顿回路与路径、旅行商问题、斯坦纳树、反馈顶点集、反馈边集和图同构，以及一些适用于近期量子绝热优化设备的实用技巧。下面我们会以略有不同的形式介绍其中一些问题。

V.2. 物流

物流和规划问题通常与著名的旅行商问题（TSP）有关。TSP 是一个著名的优化问题，其目标是找到一条尽可能短的路线，访问给定的一组 N 城市后返回起始城市。解决这一问题的一种方法是使用自旋矩阵表示路线。自旋矩阵的元素为$x_{v,\ i} \in \{0,1\}$ 由顶点编号 v 及其在路径中的顺序索引。来自边集 E 的加权边 $w_{uv} \geq 0$ 描述了两个城市之间的旅行成本。伊辛哈密顿量可写为

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{TSP}} \;=\; & A\sum_{i=1}^{N}\left(1-\sum_{v=1}^{N}x_{v,i}\right)^2 + A\sum_{v=1}^{N}\left(1-\sum_{i=1}^{N}x_{v,i}\right)^2 + A\sum_{(uv)\notin E}\sum_{i=1}^{N}x_{u,i}x_{v,i+1} \\ & +\; B\sum_{(uv)\in E}w_{u,v}\sum_{i=1}^{N}x_{u,i}x_{v,i+1}. \end{aligned} \tag{23}$$

哈密顿量中的前两项确保每个城市都在路线中且只出现一次。哈密顿量中的第三项确保路线中任意相邻的城市彼此连接，而第四项则使路线中所有边的权重之和最小。通过为常数 A 和 B 选择合理的值（例如， A 对于 $B > 0$应足够大），可以确保只探索有效路线。

V.3. 金融应用

优化投资组合选择意味着为机构或个人找到最优的投资组合。现代投资组合优化问题之一

公式具有以下形式 [181]:

$$\min_{0\leq x_i\leq 1} \lambda\Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} J_{ij}x_i x_j\Big] - (1-\lambda)\Big[\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i\Big], \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \tag{24}$$

其中， N 是不同资产的数量， x_i 是表示投资于资产 i的资本比例的决策变量。此处，耦合系数 J_{ij} 表示资产 i 和 j收益率之间的协方差， μ_i 是资产 i的平均收益率， $\lambda \in [0,1]$ 是风险厌恶参数。当 $\lambda = 0$时，模型将投资组合的平均收益率最大化，最优解将仅由平均收益率最高的资产构成。当 $\lambda = 1$时，仅最小化与投资组合相关的总风险。

投资组合优化问题有不同的变体。例如，可以引入边界约束条件和基数约束条件，规定投资组合中应包含 K种不同的资产，和/或某些资产的占比应处于特定范围内。这可以通过以下方式实现：

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = K, \quad \epsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i, \quad z_i \in \{0,1\}. \tag{25}$$

带基数约束的均值-方差模型是一个混合二次整数规划问题，属于NP困难问题类别。如果遵循Hopfield动力学 [182, 183]，则可以将其最小化。离散动力学变为

$$x_i(t+1) = G_i[-2\lambda \sum_{j} J_{ij}x_j(t) + (1-\lambda)\mu_i)], \tag{26}$$

其中 G_i 是一个 sigmoid，其取值范围为 $[\epsilon_i, \delta_i]$. 。在求解任何优化问题时，约束条件通常会出现在能量函数中。然而，在许多 Hopfield网络中，这并非必要。对 x_i 的约束条件通过 sigmoid 的激活函数得到满足，因为其输出已经处于所需区间内。为满足基数约束条件，我们从 $3K/2$ 个神经元开始。在获得目标函数的最小值后，我们移除输出值最小的资产，并重复这一过程，直到网络中恰好有K 项资产。这些剩余资产即可解决原始的投资组合选择问题。为满足约束条件 $\sum x_i = 1$，可以进行各种调整，例如评估每个投资组合的

可行性，并改变分配给每项选定资产的资本比例 x_i [182]。

构建了一种用于求解混合整数规划的 Hopfield网络变体，用于解决金融交易结算问题，并在光电子硬件中实现 [138]。该方法基于图8所示的 MEMs 方程的离散化版本，并对参数 $\gamma(t)$ 和 $\alpha(t)$ 进行退火，在

$$\ddot{x}_i + \gamma(t)\dot{s}_i + \alpha(t)x_i = \sum_{j \neq i} J_{ij} g(x_j), \tag{27}$$

其中， $g(x)$再次将 x 的值限制在 -1 和 1 之间（例如， $g(x) = \tanh(x)$）。

V.4. 混合整数与盒约束规划

上一节讨论的金融应用并不是唯一采用混合整数规划或盒约束连续优化形式的应用。事实上，离散组合问题与连续非凸规划之间存在很强的相关性，因此，通常有利于将离散组合问题表示为适合采用多种高效方法求解的连续形式。一个早期示例是 NP困难最大团问题的 Motzkin-Straus 连续形式[184]。最大团问题的目标是在给定图中识别最大的完全子图，使得该子图中的所有顶点对都通过一条边相连。如果 J 表示图邻接矩阵，那么待最小化的最大团伊辛哈密顿量如下：

$$H = -\sum_i s_i + \lambda \sum_{i,j} (1 - J_{ij}) s_i s_j, \tag{28}$$

其中， $s_i \in \{0, 1\}$ ，当 i–个顶点属于最大子图时取值为 1。第一项表示使子图尽可能大的目标，第二项则惩罚子图中顶点之间缺少连接边的情况。参数 λ 是用于强制满足约束的拉格朗日乘子。然而，该问题也可以表述为连续的盒约束二次优化问题，如下所示：[184]

$$\min_{x_i \geq 0} \quad -\sum_{i,j} J_{ij} x_i x_j + \lambda (1 - \sum_i x_i)^2. \tag{29}$$

其中， x_i 为实数。最优解中满足 $x_i = 1/d$的项为非零项，其中 d 为最优子图的规模。此外，混合整数或盒约束优化广泛存在于众多实际应用中。例如，它可用于调度和资源分配问题，在这些问题中，需要决定如何将有限资源分配给各项任务。它还可应用于运输和物流领域，以帮助优化路线并降低成本。在制造和生产规划中，它可用于优化生产计划并降低成本。我们上文考虑的所有光学平台都以连续振幅运行，因此，它们似乎可以自然地以模拟方式对这些问题进行原生编码和处理。近年来，已经提出了若干求解此类连续问题的方法。混合整数规划可以通过一组可编程玻色量子场模来处理，因为玻色数算符的特征谱由非负整数构成，因此能够自然地表示整数变量 [185]。盒约束二次规划问题可以通过修改基于光学参量振荡器的 CIMS 动力学[186]，或采用光电迭代机 [138]来求解。

V.5. 相位恢复

用于解决二次约束优化（QCO）问题的 XY模型最小化，与具有挑战性的相位恢复问题密切相关。相位恢复问题的目标是根据其傅里叶变换的模 [92–94]恢复信号或图像。该问题之所以出现，是因为信号探测器通常只能记录衍射图样的模，从而导致光波相位信息的损耗。任务是根据测量得到的实向量 $\mathbf{b} = |\mathbf{Ax}|$确定复向量$\mathbf{x}$ ，其中矩阵$\mathbf{A}$ 为复值，因此 [187]

$$\min_{x_j,u_i} \sum_i \left(\sum_j A_{ij}x_j - b_i u_i \right)^2. \tag{30}$$

这里，$\mathbf{u}$ 是一个振幅为 1 的复向量，其满足$\mathbf{Ax} = diag\mathbf{(b)u}$。引入$\mathbf{J} = diag\mathbf{(b)(I} - \mathbf{AA}^\dagger\mathbf{)}$ $diag\mathbf{(b)}$（其中，矩阵$\mathbf{A}$ 的穆尔-彭若斯逆记作$\mathbf{A}^\dagger$），我们将式（30）改写为对 XY 哈密顿量的最小化问题

$$\min_{\theta_i} \sum_{ij} J_{ij}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j, \tag{31}$$

其中 $\mathbf{s_i} = (\cos(\theta_i),\ \sin(\theta_i))$。

V.6. 机器学习

数据的指数级增长已超出我们利用人力和计算资源处理数据的能力。这促使数据驱动方法不断发展，并推动我们从经典计算机科学范式转向现代机器学习（ML）方法。在机器学习中，重点是根据给定数据预测结果，而数据的丰富程度会显著影响性能。机器学习的三个关键组成部分是数据、特征和算法。数据可以通过各种方式收集，其价值取决于具体情境。特征代表所研究对象的属性，对机器学习方法的成功至关重要。然而，确定并选择合适的特征可能耗时较长。算法的选择取决于具体情境，并会影响精度、速度和计算复杂性。这些组成部分按其在机器学习流程中的重要性依次呈现。

各组成部分按照其在机器学习流程中的重要性进行介绍。简单来说，人们只能从嘈杂但有意义的数据集中提取有用信息。下一小节将从简单的经典算法开始讨论，这些算法是许多现有应用的基础。然后，我们概述主要机器学习方法背后的核心思想，这些方法将成为迁移至专用硬件时的重点关注对象。在本章末尾，我们将介绍神经网络的广泛能力。

V.6.1. 回归

回归分析是一种统计方法，多年来一直用于估计因变量与一个或多个自变量之间的关系。这种方法可以对这些变量之间的关系进行建模，并可根据自变量的值预测因变量。回归分析最常用的形式之一是线性回归，它假设因变量与自变量之间存在线性关系。在线性回归中，通过拟合一条直线，使观测到的因变量值与预测值之间的误差平方和最小，而这条直线则基于数据进行拟合

并根据该直线得出相应的值。该模型假设，以 y_i 表示的因变量分别依赖于点的 m 维向量 $\{x_{i1}, \ldots, x_{im}\}_{i=1}^{n}$，并在每种情况下加上扰动项 ϵ_i 。这种关系可以写成以下形式：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_m x_{im} + \epsilon_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_{ij} + \epsilon_i. \tag{32}$$

为简化记法，我们采用矩阵形式 $\mathbf{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ 其中：$\mathbf{y} = \{y_i\}, \boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}, \boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}$, $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_i\}, (i = 1, \ldots, n), (j = 0, \ldots, m)$，其中 $x_{i0} = 1$。线性回归任务是根据数据点 x_{ij} 和可观测量 y_i估计回归系数 β_j 的值，使误差项 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$ 最小化。为此，可以使用不同的度量指标，例如 ϵ_i 的误差平方和，或其他指标。

最常用的参数估计技术称为最小二乘估计。在此，最优参数通过最小化均方损失之和来定义

$$\min_{\beta_j} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j x_{ij} - y_i \right)^2, \tag{33}$$

这可以与传统的二次规划联系起来。对参数 β_j求式（33）的导数并令其等于零，即可得到最优解。用矩阵形式表示，该解可写为

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^T \mathbf{y}. \tag{34}$$

所提出的过程存在不同的改进形式：广义最小二乘法，即在残差之间引入一定程度的相关性 ϵ_i (33)；或加权最小二乘法，即将观测值方差的相关知识作为每个残差前的系数 w_k 纳入。此外，还可以基于最大似然估计、贝叶斯方法或正则化，采用本质上不同的技术。

线性回归的一个自然延伸，是用多项式替代线性依赖关系。对于一个自变量的情况，可以将公式（32）改写为

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \cdots + \beta_m x_i^m + \epsilon_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_i^j + \epsilon_i. \tag{35}$$

给定数据点 x_i^j，任务与公式（33）相同，只是变量发生了变化$x_{ij} \to x_i^j$。类似地，也可以用一组非线性函数 $f(x_i)_j$ 替代多项式基，从而使 $x_i^2 \to f(x_i)_j$。

多元线性回归是对具有多个自变量的线性回归的推广。多元线性回归的基本模型可以写成类似的形式：

$$\mathbf{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \boldsymbol{X}_{i1} + \beta_2 \boldsymbol{X}_{i2} + \cdots + \beta_m \boldsymbol{X}_{im} + \boldsymbol{e}_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \boldsymbol{X}_{ij} + \boldsymbol{e}_i, \tag{36}$$

其中，不再使用变量 x_{ij}，而是使用一组大小为 $k \times k$ 的矩阵元素 $\boldsymbol{X}_{ij}$。根据为矩阵选定的范数，可以构造寻找回归系数的任务。取矩阵的平方弗罗贝尼乌斯范数时，对最优系数 β_i 的搜索等价于求解公式（33），但需要额外对 k^2矩阵元素求和：

$$\min_{\beta_j} \sum_{l=1}^{k^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j x_{ij}^l - y_i^l \right)^2. \tag{37}$$

这一方法还可以进一步扩展到多变量线性回归，或与非线性基函数结合；除系数预处理过程因任何修改而变得复杂得多之外，在参数搜索和硬件操作方面只会带来较小的影响。回归可以被视为监督学习最简单的形式。

V.6.2. 分类

分类是机器学习中的一项常见任务。分类的目的是将对象归入预先定义的类别中。最早的算法包括朴素贝叶斯和决策树。这里我们只考虑马尔可夫随机场（MRF）编码，这是此类模型的一般情形。

k近邻算法是一种用于统计学 [188, 189]的非参数分类方法。它通过考察与所定义类别的 k 最近邻来对对象进行分类。随后，将对象归入特定群组的过程会不断重复，直至收敛。由于其公式与下文介绍的 k均值（即无监督聚类算法）相似，因此我们省略相应的显式公式，具体如下：

这两种方法通常都基于欧几里得距离，并且可以轻松移植到专用优化硬件上。

另一种分类方法称为支持向量机（SVM）。SVM 是一种有监督学习模型，用于分析数据以进行分类。其目标是在高维空间中构造一个位于训练数据点各类别之间的超平面，并通过最大化间隔来实现良好的分离效果。SVM 于[190]提出，并于 [191]标准化。

线性支持向量机处理 n 点$\mathbf{x}$ ，这些点位于 m 维空间中，其中每个点都被分配了一个二元类别 $y_i = \pm 1$。任务是构造一个超平面，以最大距离将这两个群组分隔开来。所谓的“硬间隔”情形假设初始数据是线性可分的。可以先构造两个平行超平面，以两平面之间的最大距离分隔不同类别的群组。这两个超平面之间的目标平面称为最大间隔超平面。为了用数学方式描述这些平面，可以写成：

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}^i - b = \sum_j w_j x_j^i - b = \pm 1, \tag{38}$$

其中， w_j 是两个超平面的法向量分量， x_j^i 是序号为 i 的向量的 m 维坐标， b 定义相对于零坐标的平面偏移， ± 1定义类别。位于 $y = 1$ 以上的所有内容属于一个类别，而位于 $y = -1$ 以下的所有内容属于另一个类别。超平面的偏置由 $b/\|\mathbf{w}\|$ 确定，而间隔距离等于 $2/\|\mathbf{w}\|$。要最大化间隔距离，就必须最小化 $\|\mathbf{w}\|$ 的范数，进而最小化其平方 $\|\mathbf{w}\|^2$。该任务可以重新表述为优化问题，并加入防止数据点落入间隔内的约束条件

$$\begin{aligned} &\min \|\mathbf{w}\| \\ &\text{s.t. } y_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{x}^i - b\right) \geq 1, \text{ for } i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{39}$$

SVM 的自然扩展是考虑所谓的“软间隔”情形。假设给定的数据点并非线性可分。在这种情况下，必须为每个点 i 引入一种新变量 $\xi_i = \max(0, 1 - y_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{x}^i - b\right))$，它

通常称为合页损失函数，起正则化项的作用。因此，可以将式（39）改写为

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i + C\|\mathbf{w}\|^2 \\ &\text{s.t.} y_i\left(\mathbf{w}^T\mathbf{x}^i - b\right) \geq 1-\xi_i \text{ and } \xi_i \geq 0, \text{ for all } i, \end{aligned} \tag{40}$$

其中，常数 C 调节纯硬间隔分类器与软间隔分类器之间的相互作用。我们可以利用拉格朗日对偶性重新表述该问题：

$$\begin{aligned} &\max_{a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i a_i \left(\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j\right) y_j a_j \\ &\text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0, \text{ and } 0 \leq a_i \leq \frac{1}{2nC} \text{ for all } i, \end{aligned} \tag{41}$$

其中，范数向量 $\mathbf{w}$ 通过新变量 a_i表示，使得 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \mathbf{x}^i$，而确定曲面偏置的初始任务则表示为 $\mathbf{b} = \mathbf{w}^T\mathbf{x}^i - y_i$。因此，可以得到一个具有精确二次规划表述的问题。该问题可以通过标准二次算法求解，因而也可以利用专用硬件求解。

有必要提及支持向量机的非线性扩展，它可以解决非线性分类任务，并能够利用核的不同函数形式。根据模拟硬件的特性，可以在二次形式公式（41）中用不同的核函数 $k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$替换标量点积。

V.6.3. 寻找主特征向量

求给定矩阵 $\mathbf{J}$ 的主（占优）特征向量属于 $\mathbb{P}$ 类问题。然而，对于不断增大的大型矩阵，求其占优特征向量会成为计算密集型任务，无法与摩尔定律相容。与此同时，许多现实问题都能从快速计算主特征向量中获益。PageRank 算法 [192, 193]是一种广为人知的方法，它根据网页之间的链接结构评估网页的相对重要性。网络表示为一个有向图，其中每个页面都是一个节点，每条超链接都是一条边

用于连接一个页面与另一个页面。PageRank 算法为整个网页数据库计算一个单一的评分向量，即 PageRank。该算法的核心假设是，页面通过链接将重要性传递给其他页面，因此 PageRank 向量的各个分量决定了每个页面的重要性。从数学上讲，求 PageRank 向量等价于计算链接结构矩阵（又称 Google 矩阵）的主特征向量。社会网络分析、文献计量学、推荐系统、DNA 测序、生物信息学和分布式计算系统等其他领域也需要计算主特征向量[194–196]。

PageRank 在化学和《工程》科学网络中有众多应用，可用于研究和分析复杂系统。随着系统规模和复杂性不断增加，其网络与子网络之间的相互作用可能变得日益复杂，难以追踪。为了整理和研究这些复杂性，可以使用 PageRank 等网络分析方法。这些方法提供了一种分析网络结构并识别其中重要节点或关系的方式 [195]。例如，MonitorRank 可诊断现代分布式系统中问题的根本原因：错误日志和追踪调试信息 [197]。PageRank 已被用于道路与城市空间网络，有助于预测交通流和人类移动。研究表明，在预测单条道路上的交通状况方面，PageRank 是最佳网络度量指标 [198]。

近期研究表明，光学系统在计算主特征向量方面具有显著优势 [196]。通过为这些光学系统选择适当的控制参数，可以利用光学网络的稳态来解决特征值最大化问题 [199]。由此可以确定由相互作用矩阵最大特征值所对应特征向量的符号决定的能量状态，即主特征向量。具体而言， [196] 中 प्रस्तुत的估计结果表明，与经典计算架构相比，用于 PageRank 计算的专用光学机器可能会显著降低功耗。

V.6.4. 降维

降维涉及将数据从多维空间转换到低维空间，同时通常保留原始数据中有意义且有价值的属性-

质。由于空间体积的增长，在实践中处理高维数据并不容易。降维是数据密集型领域中的标准方法。它可用于信号处理、神经信息学和生物信息学 [200, 201]。其应用还包括推荐系统 [202], 语义搜索 [203] ，或作为许多涉及数值分析的领域中的主要工具。

主成分分析（PCA）是广为人知的降维方法之一 [204]。PCA 的核心思想是用较低维度的线性流形近似特定数据。另一种理解方式是：寻找低维子空间，使数据在其上的正交投影具有最大的数据变异。

PCA 的首要任务是利用直线和平面找到对数据点的最佳近似。给定向量集合 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$，目标是找到一系列 k k 维仿射空间 $L_k \subset \mathbb{R}^n$ ，用于寻找

$$\min_{L_k} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}^2\left(\mathbf{x}_i, L_k\right) = \min_{a_{jl}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(x_{il} - a_{0l} - \sum_{j=1}^{k} a_{jl} \sum_{q=1}^{n} a_{jq}\left(x_{iq} - a_{0q}\right) \right)^2, \tag{42}$$

对每个 k，其中 $\mathbf{d}\left(\mathbf{x}_i, L_k\right)$ 是点 $\mathbf{x}_i$ 到 L_k 的欧几里得距离。仿射空间 L_k 定义为线性组合 $L_k = \{\mathbf{a}_0 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k\}$ 的集合，其系数为 $\alpha_i \in \mathbb{R}$；而向量 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中构成标准正交基。

式（42）是一个优化问题。初始向量 $\mathbf{a}_0$ 简单定义为以下方程的解

$$\min_{\mathbf{a}_0} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}^2\left(\mathbf{x}_i, L_0\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i. \tag{43}$$

下一个分量通过迭代求得，方法是对对应于 L_j 的向量减去投影 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{a}_0 \left(\mathbf{a}_0^T \mathbf{x}_i\right)$（其中标量积为 $\mathbf{a}_0^T \mathbf{x}_i$）：

$$\mathbf{a}_j = \underset{\|\mathbf{a}_j\|=1}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_i\right)\right)^2 \right). \tag{44}$$

迭代过程会持续进行，直到仿射空间 k达到初始问题空间维度的 $n-1$。利用恒等式 $\| \mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_i\right) \|^2 = |\mathbf{x}_i|^2 - \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_i\right)^2$，可以轻松地将该任务映射为包含$\mathbf{a}_i$ 个变量、具有归一化约束和耦合矩阵 $J_{ij} = -x_i x_j$的二次规划。为简化所呈现的符号，迭代过程

可以类似地写成最大化任务的形式

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X} - \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{X}\mathbf{w}_{(s)}\mathbf{w}_{(s)}^{\mathrm{T}}, \tag{45}$$

$$\mathbf{w}_{(k)} = \arg\max_{\|\mathbf{w}\|=1} \left\{ \left\| \hat{\mathbf{X}}_k \mathbf{w} \right\|^2 \right\}, \tag{46}$$

其中， k 是主成分的数量，$\mathbf{X}$ 是大小为 $n \times m$ 的数据矩阵，$\mathbf{w}_s = (w_1, \ldots, w_m)^{(s)}$ 是权重系数。如果顺序操作受限于特定硬件系统，仍可使用 PCA 方法的第一次迭代来获得矩阵的最大特征值。PCA 任务还有许多替代表述，例如消除坐标间的相关性，即对协方差矩阵进行对角化或进行奇异值分解。

奇异值分解（SVD）是矩形矩阵分解的一种特殊形式，其形式为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}, \tag{47}$$

其中，$\mathbf{U}$ 是幺正矩阵（在几何解释中，表示空间的线性变换，即旋转），$\mathbf{\Sigma}$ 是矩形对角矩阵，其对角线上为非负实数（称为奇异值；矩阵的作用可解释为按相应对角元素进行缩放），而$\mathbf{V}^{\top}$ 是另一个幺正矩阵（同样可解释为旋转）。

奇异值分解对于潜在语义分析（LSA）[205, 206], 的标准技术至关重要，其目的是处理文档并检测词库与术语之间的关系。

PCA 与 SVD 分解之间存在直接对应关系。要执行主成分分析，必须求出协方差矩阵 $\mathbf{X}\mathbf{X}^{\top}$ （不含适当的缩放因子 $\frac{1}{n-1}$）的特征向量。协方差矩阵可对角化，因此利用归一化的特征向量，可以写成

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{\top}. \tag{48}$$

对同一个数据矩阵 $\mathbf{X}$ 应用 SVD 可得

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} = \left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}\right)\left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}\right)^{\top} = \left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}\right)\left(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{\top}\right), \tag{49}$$

从而得到

$$\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^{\top} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{2}.\mathbf{U}^{\top}, \tag{50}$$

利用这一对应关系，可以在专用硬件上执行作为主成分分析的奇异值分解。

V.6.5. 聚类

对聚类最详细的描述是按照特定依据对对象进行分离。其目标可以定义为在没有任何类别先验信息的情况下进行分类。机器可以预先设定簇的数量，也可以自动确定簇的数量。该算法根据对象标记的特征确定其相似性，并将具有许多相似特征的对象归入同一类别。聚类已成功应用于市场分析（消费者分析）、图像压缩、数据分析和异常检测。

K-均值聚类是一种旨在将 n 个观测值划分为 k个簇的聚类方法。每个观测值都位于均值最近的簇中，该均值也称为质心 [207–209]。存在用于处理此类赋值的启发式算法；然而，该问题属于NP困难问题。

给定 $\{\mathbf{x}_1, \ldots\ldots, \mathbf{x}_n\}$ 个 d维空间中的观测值，k-均值算法旨在将这些观测值划分为 k 个集合 $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$，以最小化簇内平方和（或方差）：

$$\arg\min_{S_i} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mathbf{x}\in S_i} \left\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{S_i}\right\|^2, \tag{51}$$

其中，$\boldsymbol{\mu}_{S_i}$ 是集合 S_i 中各点的均值。通常使用由两个步骤组成的迭代技术来执行此类优化任务。给定 k 个均值的初始集合 $\boldsymbol{m}_1^1$、.....、$\boldsymbol{m}_k^1$，第一步是根据欧几里得距离，将每个观测值分配给均值最近的簇。下一步是重新计算质心：$\boldsymbol{m}_i^{t+1} = \sum_{x_j \in S_{i,\ (t)}} \boldsymbol{x}_j$。最后，循环会一直运行，直到收敛。该算法使用

根据欧几里得距离将对象分配给最近的簇，这种方法适合将其顺序操作转移到特定硬件上。

均值漂移是一种高维空间分析方法，用于在给定从任意密度函数中采样的离散数量数据的情况下定位最大密度函数。它有助于复杂的层次算法，并用于不同的计算机视觉或图像处理领域。

给定 n维空间中的数据点 $\boldsymbol{x}_i$ ，可以使用作用于范数值 r的核函数 $k(r)$来确定均值漂移的值。核函数必须是非负、非递增且连续的。可以使用平坦核，使得 $k(r) = 1$当 $r < r_0$ 时成立，在其他情况下为 0。每次迭代都包括计算函数

$$F(x) = \sum_i k\left(\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)^2}{\alpha^2}\right), \tag{52}$$

其中有 α 个状态。使用平方范 m.

V.7. 神经网络

人工神经网络通常与机器学习相关联。我们在 IV.6 小节中讨论了联想记忆模型，这是一种简单的循环浅层神经网络。该模型可以扩展到更高阶系统，同时获得许多有用的特性。然而，光学系统并不局限于这种架构 [10]。

任何神经网络都可以定义为一组神经元及其之间的连接。人工神经元的任务是接收输入数值，以某种方式对其进行处理（执行特殊函数），并输出结果。单个神经网络层的标准数学变换可以写作 $\varphi(\sum_{i=0}^{N} w_i x_i + b)$，其中 w_i 表示输入数据点 x_i （或自变量）的权重，而常数 b 是称为偏置的平移量。在这里， φ是非线性激活函数。执行类似变换并产生单个输出数值的单层神经网络称为感知器。由感知器组装而成的多层结构称为多层感知器。关于神经网络的介绍见 [210–212] ，其中还介绍了更多现代研究成果 [213] 以及深度学习突破之后的最新结果 [214]。

激活函数 φ 在神经网络的设计中起着至关重要的作用，因为没有它，输出

信号将只是一个线性函数。激活函数有很多种，例如二值阶跃函数、Sigmoid（或逻辑函数）、双曲正切函数等。它们使神经网络能够适当地将输入映射到输出。因此，神经网络被视为通用函数逼近器 [215]。为了选择神经网络权重，通常会使用反向传播过程 [216, 217], ，尽管也有许多替代方法。反向传播包括根据网络实际输出值与预测值之间的差异来调优神经网络权重，最终目标是最小化这种差异或代价函数。调优过程涉及计算每一层的总差异梯度，从最后一层开始，并更新相应的权重值。经过大量此类迭代后，权重有望以所需的方式得到调优。

许多深层神经网络（具有许多层的神经网络）可以映射为浅层神经网络，但标准层中的神经元数量会显著增加。这意味着，原则上，任何深层神经网络的功能都可以在适用于浅层架构的物理设备上实现。通过适当的映射，两个网络将具有相同的逼近能力 [218–221]。

训练良好的神经网络可以逼近许多复杂的算法，其中一些已在本综述中介绍。然而，必须提供足够的输入条件和高质量的输出答案，尤其是在问题具有较高计算复杂性时。此外，所得相关性仍需进一步理解。神经网络的宝贵特性远不止于优化领域。下面将介绍其中一些。

V.7.1. 神经网络与动力系统

在物理科学领域使用机器学习模型，即将物理定律和领域知识融入神经网络架构，称为物理信息机器学习（PIML）。它为模拟各种物理现象提供了一种强有力的方法。这个快速发展的领域还可以追求许多其他目标，包括构建精度高且泛化能力可靠的更优预测模型、提高数据处理速率、通过优化架构加速动力过程，以及利用可解释模型求解逆问题。人们可以预期，PIML 将有助于模拟复杂的非线性动力学。这一点可从以下应用中看出：天

气预报 [222], 湍流建模 [223, 224], 非线性动力学[225, 226], 机器学习在 Koopman算子理论中的应用 [227]。光学硬件有望用于加速这些应用。

神经网络架构与动力系统之间的对应关系十分直接。某些神经网络可以视为动力系统的离散化；反过来也成立：可以设计具有特定属性（如可逆性）的神经网络 [228]。这种对应关系能够拓展潜在光学硬件的适用范围。它们与动力系统和深度学习的联系见 [229]。受不同光学系统启发的优化算法的推广具有典范普适性 [230]。

V.8. 概率图模型

图模型为处理众多任务中的不确定性和复杂性提供了自然工具，并为表示和分析复杂数据结构建立了强大的框架。这些模型采用的图论方法为数据建模和设计高效的通用算法提供了接口。统计学、系统工程、信息论和模式识别等不同领域中使用的许多模型，都可以视为一般图模型形式体系的特例。图模型特别适合表示联合概率分布，并基于观测数据进行推断 [231–233]。

概率图模型（PGM）是由图构成的，其中节点表示随机变量，连接这些节点的边表示条件独立性假设。概率图模型（PGM）为联合概率分布提供了一种紧凑的表示方式。图模型主要有两种类型：无向模型，也称为马尔可夫随机场（MRF），广泛应用于物理学和视觉领域；以及有向模型，也称为贝叶斯网络（BN）、信念网络或因果模型，在人工智能和机器学习领域更为常见 [231]。

自旋哈密顿量对概率图模型尤其有用。我们回顾式（1）中的伊辛自旋模型。每个自旋变量 s_i 都可以视为一个二元随机变量，因此它们之间的耦合强度可作为随机变量之间的连接。某些自旋变量的配置

自旋变量 $X = (x_1, \ldots, x_N) \in \{-1, +1\}^N$称为一种赋值。概率图模型中某个赋值的概率为

$$\mathrm{P}(s_i = x_i) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j<i}^{N} J_{ij} x_i x_j \right), \tag{53}$$

其中

$$Z = \sum_{X \in \{-1,+1\}^N} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j<i}^{N} J_{ij} x_i x_j \right) \tag{54}$$

是所谓的配分函数。

概率图模型中有几个值得关注的量。首先是推断任务，即计算由式（54）给出的量 Z。精确推理是对所有可能的赋值计算 Z，对于任意图而言，这是一个困难问题。用于求取 Z 的精确算法，其运行时间随相应图节点中最大簇的规模呈指数增长。在伊辛模型图中，只有少数情况下可以在多项式时间内计算其配分函数，但计算 Z 通常是困难的。因此，近似推理得到了广泛应用。其他值得关注的量还包括寻找低能态（低能量采样）、最差间隔违例项、配分函数的组成部分（赋值似然和边缘概率），以及与配分函数和目标值相关的某些矩。

一些常用的近似推理方法包括采样（蒙特卡洛）、变分方法和消息传递算法 [231]。与传统计算机相比，许多光学自旋机在可编程性方面并不灵活，因此很难在硬件操作中利用复杂的方法。这就是从硬件角度来看，采样过程尤其适用于推断任务的原因。鉴于光学效率领域的速度和能效，扩展自旋机的功能是一个很有前景的方向。

物理系统通常实现对称耦合系数，使模型成为无向模型。利用能够重新定向光的系统专用器件，可以在变量连接中引入不对称性，从而为有向概率图模型开辟道路。除了普适性概念之外，还可以看到，许多编码到伊辛模型中的实际任务（例如投资组合优化）都是概率图模型的特例。此外，硬件实现高阶相互作用项的能力，使得人们能够编码复杂的

条件 条件依赖关系，而变量数量几乎无需增加任何开销 .

然而，旨在模拟概率图模型的光学机器，其应用范围远不止于此类问题。人们可以对包含许多因子的大型复杂图进行编码，以表示大规模实际问题，并将其高效地用作决策网络。此外，它们还可应用于控制理论和博弈论。例如，概率图模型可以利用稀疏图紧凑地表示联合概率分布，从而反映复杂系统中的条件独立关系。类似地，也可以分解多属性代价函数（或效用函数）。例如，可以将一般代价函数表示为若干局部成本函数之和。每个局部项都依赖于其父节点（随机变量或因子）。此外，某些效用节点也会包含类似于父节点的作用量（控制）节点，因为它们取决于环境状态和已执行的作用量。由此得到的图称为影响图。利用这种图，可以像执行推断任务一样进行采样，并计算使代价函数最大化或最小化的最优作用量序列[231, 234]。相同策略也已应用于多人博弈论 [235]。这样，人们便可利用光学自旋机研究因子图上的动力系统和决策策略。自旋系统功能、控制理论与决策之间的这种对应关系还有许多其他应用。光学系统的优势将有助于处理单元间连接复杂的大型复杂图[231]。探索光学机器在不同范式下的功能，是一个很有前景的研究方向。

V.9. 图像处理

计算机视觉中的若干问题可以表述为二元二次规划，这是 QUBO 的一种特例。人们也可以看到它们与概率图模型的相似性。解决此类问题的传统方法是采用半定松弛技术，该方法已显示出相当高的效率 [236]。讨论的问题包括图像协同分割、带有不同约束条件的图像分割、图匹配、图像反卷积、图二分以及其他问题。这些问题的计算复杂性很高，因此有必要提出一种改进的半定规划方法，使其效率更高且可扩展性更强。其中一些表述仅列出而未附有相应的

详细信息，读者可参阅原始文献 [237]。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\{-1,+1\}^N} \ & \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \ & \left(\mathbf{x}^\top \mathbf{t}_i\right)^2 \leq \kappa^2 n_i^2, i = 1, \ldots, s, \end{aligned} \tag{55}$$

是使用矩阵 $\mathbf{A}$ [237]进行的图像协同分割任务，其中 s 是图像数量， n_i 是 i第图像的像素数量， $n = \sum_{i=1}^{s} n_i.\mathbf{t}_i \in \{0,1\}^n$ 是第 i幅图像的指示向量， $\kappa \in$ $(0, 1]$ 是一个参数。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^{KL}} \ & \mathbf{h}^\top \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{H}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{j=1}^{L} \mathbf{x}_{(i-1)L+j} = 1, i = 1, \ldots, K \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{K} \mathbf{x}_{(i-1)L+j} \leq 1, j = 1, \ldots, L \end{aligned} \tag{56}$$

是图匹配任务，其中 $x_{(i-1)L+j} = 1$ 表示第 i个源点与第 j个目标点匹配，否则等于 0。 $h_{(i-1)L+j}$ 记录了源点 i 与目标点 j之间的局部特征相似度； $H_{(i-1)L+j,\ (k-1)L+l} = \exp\left(-(\mathrm{d}_{ij} - \mathrm{d}_{kl})^2 / \sigma^2\right)$ 编码了源点 i， j 与目标点 k， l之间的结构一致性。相应的详细信息见 [238]。

$$\min_{\mathbf{x}\in\{0,1\}^n} \|\mathbf{q} - \mathbf{K}\mathbf{x}\|_2^2 + \mathrm{S}(\mathbf{x}) \tag{57}$$

是图像反卷积任务，其中$\mathbf{K}$ 是与模糊核$\mathbf{k}$，对应的卷积矩阵，S表示平滑度代价，$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{q}$ 分别表示输入图像和模糊图像 [236]。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\{-1,1\}^n} \ & -\mathbf{x}^\top \mathbf{W}\mathbf{x}, \\ \text{s.t.} \ & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 0 \end{aligned} \tag{58}$$

是图二分任务，其中 $W_{ij} = \exp\left(-\mathrm{d}_{ij}^2/\sigma^2\right)$，若 $(i, j) \in \mathcal{E}$；否则为 0，其中 d_{ij} 表示 i 与 j之间的欧几里得距离。这些任务有望映射到用于处理二次指派或低级可编程任务的专用硬件上。

V.10. 硬件嵌入的若干示例

这里我们考察此前讨论过的若干任务的硬件表示。我们描述每项赋值，说明其在特定类型硬件（自旋机）上的可能嵌入，并描述此类嵌入的若干参数。我们考察离散变量和连续变量（后者可能需要额外的离散运算单元开销）、问题系数的直接映射或对其他因子的部分考量、硬件是否要求以特定方式执行后续操作、是否将额外约束纳入问题系数，以及其他细节。总体而言，这些因子决定了可能的嵌入是否高效（例如，是否存在显著开销、是否需要后续操作等）。示例见表 I。

本综述的重要篇幅用于介绍解决优化问题的还原论方法：需要将目标赋值转换为已知形式（例如伊辛模型）或条件组合（参见图模型），然后将其映射到特定硬件上，以获得恰当的解。尽管本文介绍的许多方法彼此相似，但我们的讨论范围并不局限于这些方法。为佐证这一点，我们列举了一些特定计算问题的高复杂性实现。

其中，值得一提的是近期在光子处理器上实现自然语言处理的演示 [240], ，见图 11。这项重要进展实现了超过 1.5×10^{10} 个光学节点的存储容量，从而支持大规模应用。另一项工作中[241], ，作者构建了一个光学神经网络，以模拟推断；在计算机视觉模型 Resnet50（残差网络）上的光学能耗为 2.7 aJ/MAC，在自然语言处理模型 BERT（来自 Transformer 的双向编码器表征）上的光学能耗为 1.6 aJ/MAC，且精度仅略有下降。第三个例子 [239]展示了基于光子计算核心实现复杂生成网络的方案，该核心由一组可编程相变超表面模式转换器构成。相应方案见图 10。总体而言，越来越复杂的架构正通过光学平台得以复现。

表 I. 各项任务的可能编码示例

赋值	表述	详细信息
MIN-2-SAT	$$\min_{x_i\in\{0,1\}^n} \sum_{i,j<i} w_{ij}x_i x_j \quad (59)$$	离散变量，直接映射，直接操作通过重新-关于动态更新，高效。
相位恢复	$$\text{最小化} \sum_{ij} M_{ij}u_i u_j$$ $$\text{使得} \quad |u_i| = 1, \quad i = \overline{1,\ n} \quad (60)$$	连续变量，直接映射在 QCO（公式（3））上，直截了当-向前操作，在.....方面高效QCO硬件。
回归	$$\min_{\beta_j} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j x_{ij} - y_i \right)^2 \quad (61)$$	连续变量，部分的 map-ping，直接操作，关于变量的低效映射。
SVM	$$\min \ \|\mathbf{w}\| \Rightarrow \min(\textstyle\sum_j w_j^2)$$ $$\text{满足 } y_i \left(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - b\right) \geq 1, \quad \text{对于 } i = 1, \ ..., \ n \quad (62)$$	连续变量，部分映ping, 直接操作，就变量而言效率低下mapping.
k-均值聚类	$$\min_{S_i} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mathbf{x}\in S_i} \left\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{S_i}\right\|^2 \quad (63)$$	连续变量，部分 map-ping、后续操作、低效的变量映射和操作设置。
图二分	$$\min_{x_i\in\{-1,1\}} -\sum_{i,j} w_{ij}x_i x_j$$ $$\text{s.t.} \ \sum_i x_i = 0 \quad (64)$$	离散变量，部分映射由于约束条件、直接操作、约束条件的低效表示。
图像协同分割	$$\min_{x_i\in\{-1,+1\}} \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$$ $$\text{满足约束条件} \quad (\sum_j t_{i,\ j}x_j)^{\ 2} = 0 \leq \kappa^2 n_i^2、 \ i = 1、 ...、 \ s \quad (65)$$	离散变量，部分映射由于约束条件，直接的操作，在辅助变量上的开销，在.....方面效率低下约束条件和开销。

V.11. 自旋玻璃模拟器

自旋玻璃模型与优化任务之间的内在联系长期以来一直是研究课题。人们投入了大量精力来考察

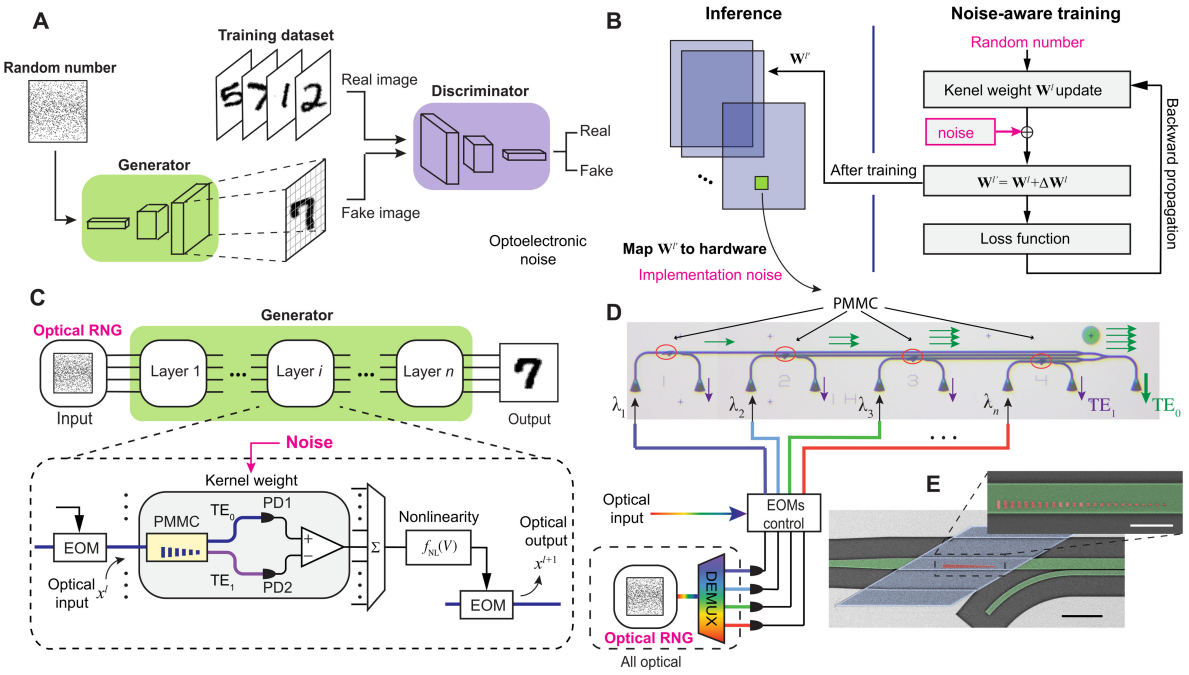

图10. (A) 由判别器和生成器组成的生成对抗网络架构示意图。(B) 生成器的离线噪声感知训练与推理流程。(C) 将生成器分解为各个独立层。每一层中，输入信号经过光子张量核心，并由光电探测器（PD）转换至电域。经过后处理后，数据被转换回光域并传输至下一层。EOM，电光调制器。(D) 由四个输入通道组成的光子张量核心的光学显微图像。在我们的实验中，光学随机数发生器的输入信号通过光电与电光转换输入光子张量核心。DEMUX，解复用器。(E) 光子张量核心的伪彩色扫描电子显微镜（SEM）图像。氮化硅波导、GST超表面和氧化铝保护层分别以绿色、红色和蓝色标示。比例尺： 10 μ米。插图：波导上相位梯度超表面的SEM放大图。比例尺： 2 μ米。图片及其说明引自 [239]。

这两种范式的复杂性。在这方面，可以将逼真的玻璃模型模拟视为一个计算问题。因此，有必要提及几项利用光学平台进行此类模拟的研究。文献 [242]对通过光学装置测量人工无序系统的各种参数作了简要综述，重点关注重叠分布和复制对称性破缺实现。此外，本章还介绍了随机激光器中光模态动力学统计模型的构建，并为重叠分布提出了一种新的等价表述。关于随机激光器系统中重叠分布的早期实验测量之一，见文献 [243]。随后，Basak等人在 2016 [244] 中描述了在

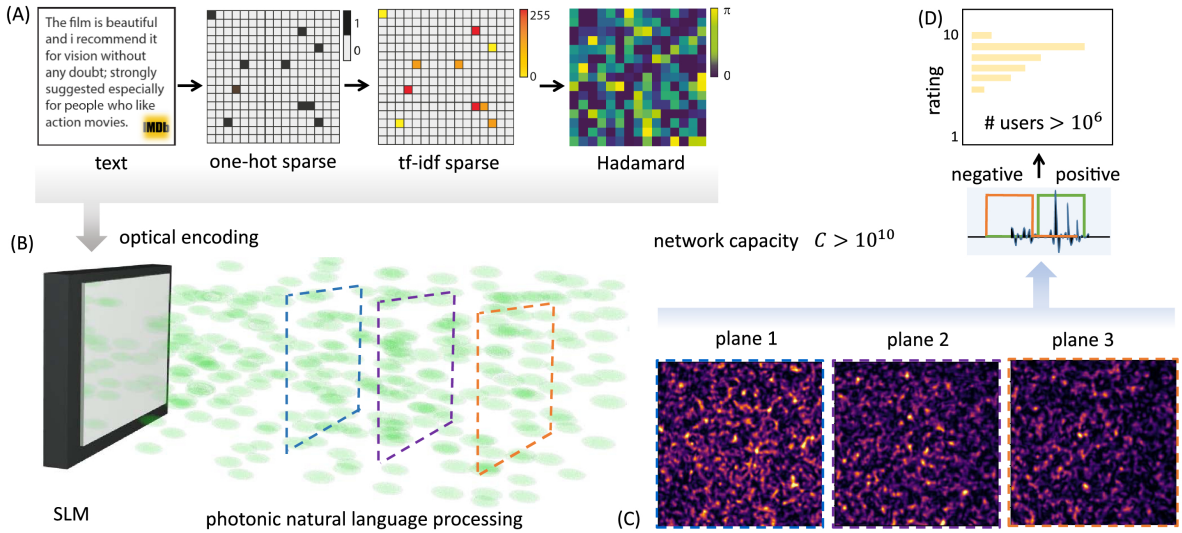

图 11. 用于语言处理的三维 PELM。(A) 文本数据库条目是一个长度可变的段落。文本预处理：将输入段落的稀疏表示映射到相位值为 $0, \pi$ 的哈达玛矩阵中。(B) 通过纯相位空间光调制器将掩模编码到光波前中。光场的自由空间传播将输入数据映射为三维强度分布（类散斑体积）。(C) 在多个远场平面上对传播中的激光束进行采样，可扩展特征空间。(D) 此示例展示了一个用于大规模评级的二元文本分类问题。图片及其说明摘自 [240]。

标准有序腔体中观察到的强度涨落，后续分析进一步揭示了复制对称性破缺现象。另一个例子是 Moura 等人在 [245],中的研究，他们测量了多模调 Q Nd:YAG 激光器自发模式锁定状态下的强度涨落重叠分布。自旋玻璃模拟器的研究与优化领域密切相关，这促使人们寻找非常规硬件，而这正是本文综述的重点。这推动了光学计算平台的实现，使其能够大规模处理自旋玻璃问题，例如基于空间光调制和多重光散射的光学平台 [246]。

VI. 光计算技术发展的主要方向

由于计算资源被用于许多实际应用，对计算资源的需求正在不断增长。知名信息技术公司（Microsoft、Google、IBM、亚马逊等）和快速发展的初创企业日益浓厚的产业兴趣，进一步推动了这一趋势。为了更好地了解全局情况，必须理解当前传统重♀♀♀

计算，以及光学机器能够提供哪些优势。首先，我们介绍标准方法的几个关键度量指标，然后展示光学器件的优势。之后，我们将描述光子神经形态计算中采用的策略。

VI.1. 信息处理系统的性能

一般而言，摩尔定律涉及多个度量指标。所有这些指标都正在达到饱和，但速度各不相同。为了维持硬件相同的效能，需要采用新技术。然而，对更高性能硬件的更大需求源于人工智能应用的爆炸式增长，这给研发性能带来了更大压力。例如，由于人工智能的发展，从2012年到2018年，对计算能力的需求增加了五个数量级以上，OpenAI 报告 [8] 展示了这一点。

若干关键度量指标用于表征信息处理系统的性能。我们将使用 MAC（乘加运算，包含一次乘法和一次加法）和 FLOP（浮点运算）。二者之间的关系是：1 MAC 计为 2 FLOP。通常使用 MAC 和 FLOP 来衡量设备的速度性能，该性能取决于频率或硬件上特征性的内在运算时间。或者，也可以使用每秒运算次数（OPs），无论其指的是常规数学运算还是硬件状态切换，但这种表示法很少使用。另一个重要指标是能耗或能效，可用 FLOPs/W（每瓦浮点运算次数）进行衡量。还可以考虑其他度量指标，例如训练神经网络时以焦耳为单位的总训练能耗，或在脉冲神经网络（SNN）架构上执行运算时每个脉冲所消耗的焦耳数。还存在许多组合度量指标及其变体，例如单位面积运算速度（Op/s/mm），用于描述其他一些能耗特性。硬件设置的其他重要参数可能包括模拟噪声水平、可扩展性、特定架构参数等。

使用数千个中央处理器和数百个 GPU 的数据中心会消耗兆瓦级电力。尽管传统计算机具有多功能性，但其特性不足以在关键度量指标上实现高性能。因此，在架构和逻辑上有所不同的专用硬件缩小了期望效率与计算机能力之间的差距。关于这些设备的若干讨论可见于 [196, 247]with

关键度量指标的相应比较；另请参见图 12。此外，我们还提到其中一些电子设备，将其作为与光学器件进行比较的参考点。

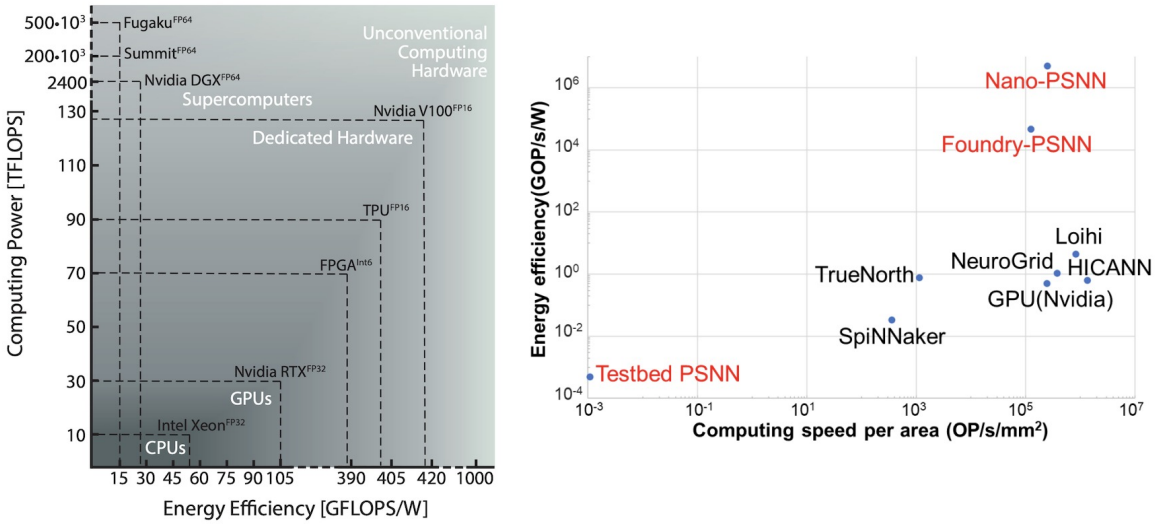

图12。左图：不同类型计算硬件的计算能力和能效。图中示意展示了多种中央处理器、图形处理器、现场可编程门阵列、超级计算机以及基于光学系统的潜在非常规计算设备在处理能力与能效之间的分布，经许可转载自 [196]。右图：脉冲事件硬件的能效值与单位面积运算速度，并与文献中所述结果进行比较。经许可转载自 [247]。

经典计算架构在同一类设备内部的具体细节上可能有所不同。然而，通常可以使用两个关键度量指标对其进行表征：以每秒浮点运算次数衡量的处理能力或计算速度，以及能效。可以使用每秒浮点运算次数与以瓦特（W）计的功耗之比，得到能效指标 [196]。

现代中央处理器效率的标准估计值为2 TFLOPs，而功耗效率约为10 GFLOPs/W。因此，在使用双精度格式进行运算时，英特尔至强处理器可以被视为效率最高的设备之一，其性能为4.8 TFLOPs，能效为29 GFLOPs/W [248]。图形处理器（GPU）是先进的专用电子架构，并且由于具备并行计算能力，已成为当前实际应用中机器学习任务的主力硬件。大多数图形处理器的功耗接近0.3 kW，在双精度格式运算下，其性能范围为0.5至7 TFLOPs，相应的能效范围为1.6至23 GFLOPs/W。

另一类经典硬件是功能强大的非分布式计算机系统，它们的能效并不高，但拥有极其强大的计算能力。排名前十的榜单始于

NVIDIA DGX SuperPOD，其性能为 2356 太 FLOPS，能效接近 26.2 GFLOPs/W。处理能力最强的超级计算机是富士通的 Fugaku，拥有 442000 太 FLOPS 和 14.8 GFLOP/J。人们可以将多台设备连接成强大的分布式系统，以更高的能耗为代价获得大幅提升的处理能力。

另一类电子设备可称为“专用硬件”。虽然 GPU 通常不被归入这一类，但它发挥着类似的作用。一个很好的例子是现场可编程门阵列（FPGA），这是一种集成电路，客户可以使用硬件描述语言对其进行配置。平均而言，FPGA 可实现 10 TFLOPs 的性能，能耗率接近 50 GFLOPs/W；若使用精度较低的数值，性能还能提高数倍（×5，×7） [249]。专用硬件的另一个例子是 Google 的张量处理单元（TPU）。TPU 是为加速机器学习工作负载而定制开发的专用集成电路（ASIC）。其性能可估算为 90 TFLOPs，能效为 400 GFLOPs/W [250]。

电子专用设备的进一步改进预计将来自基于忆阻器 [251]，非易失性存储器的模拟架构、小型低电压场效应晶体管，以及在考虑量子效应的前提下对二维材料异质结构的设计。另一种途径是探索专用硬件的不同架构。例如，IBM 声称，在特定应用中，其仿生神经形态芯片 TrueNorth 芯片的能效比传统通用 Intel i7 系统高出 176000 倍 [252]。然而，TrueNorth 的频率相对较低，为 1 kHz，能效约为 2.3 pJ/bit。此外，它还需要额外的连接来接收输入神经脉冲。还可以进一步探索 Intel Loihi [253] 或 NeuroGrid [254] 设备，它们的性能接近现代 GPU [255]。

尽管取得了令人瞩目且富有创新性的发展，但仅依靠目前所展示的经典架构仍不足以满足需求。例如，对未来自动驾驶车辆需求的一些估算表明，信息处理需要达到每秒 100 万亿次运算，同时能耗低于 100 瓦，并且还需具备低延迟特性 [256]。

VI.2. 光学能耗

光学器件可以瞬时处理信息。其他优势还包括可忽略不计的能耗和热量产生。当前最先进的中央处理器和图形处理器的度量指标可换算为 20 pJ/乘加运算 [257]。专用硬件和特定应用电路在降低计算精度的情况下，可以实现 1 pJ/乘加运算 [258]。同样的所谓“理想”基准也得到了该项工作的支持 [51], ，其中作者使用可编程纳米光子处理器，在硅光子集成电路中采用由 56 个可编程马赫-曾德尔干涉仪级联组成的阵列，执行元音识别任务。现代人工智能芯片的运行功率可达到每秒 100 mW/GOps，但未来的竞争性要求应达到 $\sim 10-1$ mW/GOps [8]。

我们可以考察光子硬件的若干实例，并重点介绍其技术特性，例如速度和能耗。基于相干探测的光子加速器架构 [53] 可实现新一类超低能耗处理器，以极低能量（低于 aJ）执行乘加运算。这些结构可以在运行过程中重新编程和训练，并且具有良好的可扩展性，最多可达一百万个元件。此外，[53] 讨论了光学神经网络的“标准量子极限”；对于不可逆数字计算，其上限可界定为 50 zJ/乘加运算。

光学神经网络能够以极低的光学能量实现准确的结果 [259]。实验表明，采用光学方式计算点积的光学神经网络，在 MNIST 手写数字分类任务中取得了很高的精度，每次权重乘法仅需少量光子（光学能量约为 10^{-19} J）。其核心思路是降低点积求和中累积标量乘法所产生的噪声。

一些光学机器可以利用预先优化的数学结构来获得架构优势。一个很好的例子是高能效、高吞吐量且紧凑的张量化光学神经网络，它采用了张量列车分解 [260]。与数字电子人工神经网络硬件相比，这种神经网络可将能效提高 1.4×104 倍；与硅光子技术相比，可提高 2.9×102 倍。此外，在足迹能效计算 [260]中，使用更少的元件也能实现更高的能效。总体而言，神经形态光子系统有望实现每平方毫米每秒千万亿次乘加运算^2 的处理速度 [63] ，以及每次乘加运算阿焦级的能效 [64]。

能耗与神经架构的物理属性密切相关。

例如，事件驱动的脉冲神经网络（SNNs）在能效方面优于人工神经网络。许多模型的动力学可用通用伊日凯维奇模型 [255] 描述。事件驱动的神经形态计算克服了传统冯·诺依曼架构的局限，但在吞吐量、可扩展性、训练方法等方面仍存在一些特定问题。

文献 [247]报道了受 Izhikevich 模型启发的光电子脉冲神经元的成功实现。输入能量为 200 aJ/脉冲的纳米级光电子神经元能够触发片上纳米激光器产生 10 fJ/脉冲的输出。该神经元在神经网络中以 10 GSpikes/秒运行时，可支持 ~ 80 的扇出，或克服 19 dB 的额外光损耗。与 Loihi 和 NeuroGrid 等最先进的电神经形态硬件相比，这种方案的吞吐量提高了 100 倍，能效提高了 1000 倍 [247]。准粒子混合系统也可能成为脉冲式架构的另一种潜在平台。激子-极化激元可实现 1 pJ/脉冲的能量，时间尺度为 100 ps[261, 262]。

VI.3. 速度评估

通用光学计算机并非与经典计算机竞争的可行选择。相反，作为混合经典/非经典架构一部分的专用光学计算机或光学模块，已成为近期研究的重点。最早实现简单数学运算的方案之一，例如自由空间扇入/扇出向量-矩阵乘法，由 Goodman 于 1978 [263] 提出。这是一种基本的线性代数运算：将输入向量加载到光源阵列中，并将乘法矩阵编码到空间光调制器（SLM）中。光传播相当于将初始向量广播到空间光调制器上，由其执行逐元素乘法；随后，透镜收集水平方向上的所有光束，并对光强求和。该器件的性能可评估为：向量与含有 N 个元素的方阵 N^2 相乘一次，可完成 N^2 次乘加运算。然而，系统的频率 f（主要受空间光调制器限制）制约了其有效性能，使其达到 fN^2 次乘加运算；另见 [264]。尽管如此，采用长度为 256 的输入向量和 125 MHz 的频率，该器件的性能仍可达到惊人的 ~ 8 万亿次乘加运算。

基于自由空间矩阵-向量乘法不同形式的其他方案可以

达到类似的数值。2020年，Lightmatter推出了光电混合芯片“Mars”，其性能可达 $0.4-4$ 万亿次乘加运算，具体取决于权重的频率 [265]。一种基于交叉开关架构的大规模并行16×16“张量核心”卷积方案已经在芯片上实现，该芯片对输入的调制速度为13吉赫兹，性能约为2万亿次乘加运算 [266]。另一种基于电光马赫–曾德尔调制器的方案实现了通用的光学向量卷积加速器，速度超过10万亿次运算，并成功应用于光学卷积神经网络，用于人脸与手写数字图像识别 [267]。大多数采用前馈架构的光子硬件都可以在较高的（吉赫兹）速度下运行，并且通常具有良好的可扩展性[53, 259, 260]。

影响光学器件速度性能的另一个关键因素是硬件架构。从这一角度看，储备池计算可能改善光学计算设备的许多方面。与典型的人工神经网络结构相比，速度有望提升数个数量级。储备池计算的光电/光学实现通常分为空间分布式和时间延迟式两类 [82]。采用光波导、分光器和光合束器的硅光子芯片上的储备池计算方案，可实现0.12至12.5吉比特每秒的数据处理速率 [268]。此外，激子-极化激元等更为特殊的物理系统也能达到类似性能，使脉冲神经网络架构能够实现约100 ps的特征运算时间，能效为1 pJ/脉冲[261, 262]

基于光学的自旋机器同样具有竞争力的速度特性。相干伊辛机从2014年（斯坦福大学）仅有4个自旋和12个连接，发展到2021年拥有16K个自旋和256M个连接。2000节点版本可在0.1 ms内求得代价函数的半定松弛最小值，并进一步改进解 [269]。基于薄膜铌酸锂（薄膜铌酸锂调制器）光子电路的新一代CIMS将于2022年发布。该设备将采用光学参量振荡器网络，其泵浦功率为 $\sim \mu W$ ，脉冲持续时间为 $\sim$ fs，时钟频率为100 GHz–1 THz，并支持芯片上多个相干伊辛机同步运行。

激子-极化激元具有更快的超快时间尺度。例如，极化激元图模拟器 [131] 可轻松扩展至 10K 个元素，并分别表现出 ~ 100 ps 的运行时间，而简并激光器 [95] 系统具有 $\sim \mu$s 的特征时间尺度。然而，全连接可控耦合尚未在实验中实现。

VI.4. 其他重要属性

其他重要因子无疑也会影响光学器件的吸引力和性能，例如硬件的固有噪声和模拟精度。例如，使用 MNIST 手写数字进行识别时，不同器件可能表现出不同的精度，这可以很好地衡量特定神经网络针对特定任务的调整效果 citelee2021izhikevich。电光器件误差源及其分类的综合分析见 [8]。

硬件的核心部分在于其结构/架构。它会影响光学器件的许多其他属性，例如精度、可扩展性以及未来优化的潜力等。硬件的电子器件与光子器件之间的相互作用取决于架构。在混合架构中，架构会直接影响光电转换、数据的存储与读取，以及逻辑运算的成本。

可扩展性是关键度量指标之一，也是架构选择所带来的结果。它衡量系统在自变量数量不断增加的情况下保持其算法性能的能力。

与传统电子硬件相比，光学装置拥有额外的自由度。例如，复平面中的两个自变量可以对短光脉冲进行参数化。此外，还可以探索光学特有的自由度，例如偏振和光的轨道角动量。

最后，目前的光学硬件所采用的是对于标准电子架构而言较为传统的经典算法和神经网络架构。这些算法基于布尔逻辑设计，适用于数字计算系统。然而，它们并不总是适合在光学系统中实现。因此，有必要开发针对光学计算机平台进行优化的专用算法，从而进一步降低运算复杂性和执行时间。

VI.5. 模拟光学计算中的噪声

在许多模拟器件中，噪声在其运行过程中发挥着至关重要的作用。对光学系统中的噪声、其来源及其特性的研究是一项基础课题，相关研究

已得到广泛开展。激光噪声经典理论 [270] 涵盖了若干基本概念，包括原子在低能级和高能级之间跃迁所引起的涨落，以及经典规定的光场之间相互独立这一性质，并同时考察中等功率和高功率激光器的情形。此后，相关理论进一步纳入了量子噪声源（例如光学频率下的电子动量涨落，以及与不确定性相关的电磁场涨落）、散粒噪声、高功率激光器中向经典噪声的转变、激射模式与非激射模式的区别，以及不同频率下的强度涨落及其相应分布 [271]。经典噪声与量子噪声之间的转变已得到广泛研究 [272], ，相关讨论探讨了量子噪声源于动力学的可逆部分还是不可逆部分，并将其与纯粹的经典涨落及相应的物理实例进行了比较 [273]。尽管模拟光子学中的噪声通常被视为有害影响，但可以通过针对具体系统的技术减轻其影响，或使系统能够抵御特定类型的扰动。模拟深度学习平台会受到确定性和非确定性噪声源的共同影响，且运行速度越快，噪声越大。为解决这一问题并高效执行乘加（MAC）运算， [274] 的作者提出并通过实验验证了一种抗噪深度学习方案，实现了创纪录的 10GMAC/sec/axon 计算速率。该方法采用相干硅集成电路，将抗噪线性神经元架构方案与噪声感知训练方法相结合。

还有许多其他方法可以处理“有噪声”的模拟计算。例如，在 [275], 中，作者讨论了具备位精度运算能力的预训练模拟光学处理器的优势。由于光子硬件尺寸受限，且高速电光元件的位精度有限，为了超越数字处理器的性能，工程师通常会采用推理平均、动态精度推理等训练后技术，以补偿“有噪声”的模拟计算。因此，作者提出并通过实验演示了一种基于分块矩阵乘法（TMM）的速度优化型动态精度神经网络（NN）推断方法，该方法运行于硅光子处理器上，旨在用于高精度且经过速度优化的分类任务。光计算相较于数字计算在加速深度学习方面的优势，在于以低精度执行运算。这里的关键指标是模拟处理器的有效精度位数，而该指标受噪声限制。动态精度

模拟计算（面向神经网络）于 [241]中被提出。其原理是重复运算并对结果取平均，从而降低噪声的影响。对于特定的计算机视觉模型，该方法可将能耗降低最多89%；对于自然语言处理模型，则可降低24%，同时克服权重噪声、热噪声和散粒噪声。

来自不同来源的计算误差往往会不断累积，严重损害大规模光子神经网络的性能。通常，人们无法指望从噪声实现中获得任何有价值的信息。与当前的普遍认知相反，已有研究证明，光子生成网络可以作为生成对抗网络的一部分，用于生成手写数字 [239]。该实现采用由可编程相变存储单元阵列组成的光子核心，通过注入额外噪声实施噪声感知训练，并展示了网络对硬件非理想性的鲁棒性。针对判别模型，人们提出了多种离线噪声感知训练方案，例如向层输入、突触权重和预激活中注入噪声 [239]。总之，噪声被认为是实现高效光学计算的一大障碍；然而，也可以巧妙地利用或开发噪声。

VI.6. 自旋哈密顿量的光学最小化器

旨在最小化自旋哈密顿量的光学系统有望找到困难优化问题的全局最小值。这些系统具有多项优势，包括能够在固定时间内为各种非线性优化问题找到更优解，更快地找到具有给定精度的解，或在固定且有限的成本下解决更复杂的问题。然而，这些机器也存在局限性，并且在可扩展性、所需耦合的工程实现能力、交互调优的灵活性、读出精度以及其他有助于趋近全局最小值而非局部最小值的因素方面各不相同。尽管存在这些局限性，所有这些机器的运行方式都具有某些方面，有望相较于经典计算提升性能。要使用自旋哈密顿量的光学最小化器解决优化问题，就必须将现实问题映射到自旋哈密顿量上，并找到最优映射。某些最优映射已经为人所知，而对于其他问题，找到最优映射则是成功解决问题的关键一步。

组合优化是一门研究如何为给定问题找到绝对最小配置的学科。

imum配置。然而，在许多应用中，理想的目标不仅是找到一个绝对最小值，还要获得多个或所有简并绝对最小值，并在某些情况下对许多低能激发态进行采样 [276]。这种采样能力有助于需要了解最优解分布信息的应用，例如将玻尔兹曼机实现为用于机器学习的生成模型 [277]。在工业场景中，获取优化问题的多个候选解可以使流程更高效、更灵活。例如，在药物发现 [278], 中，基于结构的先导化合物优化可以生成许多候选分子，以便同时进行测试。

解决大型优化问题的一种方法，是将其分解为较小的子问题并分别求解，例如以适应硬件限制。对每个子问题，使用多个低能样本而不只是最优解，可以构造出原始问题的更优解 [279]。然而，为组合优化设计的自旋最小化器可能不适合对所有基态和低能态进行采样。在量子噪声存在的情况下，这类机器的非线性随机动力学可用于对自旋模型中简并的基态和低能自旋构型进行采样。当这些光学机器在量子噪声主导且光子寿命较短（即腔精细度较低）的工作状态下运行时，对系统进行零差监测可以高效地产生低能自旋构型样本，其表现优于经典对应方法 [280]。

要恰当地探究这类系统的特性，可以在多种情形下使用计算机模拟。这类仿真无需进行大量耗时的实验，即可准确预测这类系统的特性、调节参数以实现最佳性能，甚至为传统计算机启发出新类别的算法。仿真算法见 [281, 282]。这类技术适用于广泛类型的神经网络。

VI.7. 人工神经网络的效率

人工神经网络是处理大型数据集和快速分析海量信息的强大工具，而且无需明确指令。因此，各种神经网络架构已被开发并应用于多种

应用中。开发不同的神经网络非常重要，因为每种架构都能表示不同的系统，同时在近似和表示复杂系统方面保持一定程度的普适性。这拓展了神经网络原本已经十分广泛的适用范围。

无源光学能够在超过 50 Gb/s 的速率下执行许多线性变换，且无需功耗并具有极低的延迟。光逻辑门已被证明是可行的 [283–287]。然而，在光子学中复制经典布尔电子逻辑电路的尝试并未成功。模拟光子计算器件凭借快速且高能效的计算能力，非常适用于神经网络。光学非线性可用于实现各种非线性函数 [288]。近期发展表明，与电子解决方案相比，神经网络的光学实现能够在计算速度和能效方面实现超越。然而，利用光子学开发真正深层的神经网络仍然面临挑战。光子多层感知器和光子脉冲神经网络有望实现全光人工神经网络。用于卷积神经网络的光子加速器，是近期最有希望提升推理速度并降低功耗的光子解决方案。

然而，光子神经网络的实现仍有许多机会有待探索和改进。例如，还需要开展更多研究，以评估是否能够以高效的方式在光学领域实现特定类型的深层神经网络，从而相较于完全电子化的实现展现优势。此外，一些深层神经网络，例如长短期记忆神经网络、生成对抗网络、几何深度神经网络和深度置信网络，目前尚未在光子学中实现。

最终目标是实现具有数千个节点、跨越多个隐藏层并包含大量互连的光子神经网络。为此，必须致力于提升光子神经网络的级联能力，以及其对制造缺陷和随时间发生的参数漂移的鲁棒性 [289]。微环谐振器等谐振结构容易受到制造偏差的影响 [290]。基于马赫-曾德尔干涉仪的线性光学处理器由于具有可重构性，似乎更加稳健。一些研究探讨了如何利用非理想元件实现可靠的光子计算 [291]。

要以全光方式在光子神经网络中实现非线性激活函数，仍需进一步研究。虽然软件可以模拟非线性特性，但将非线性元件集成到硬件中仍是一项挑战。目前已有多种方法被提出，以

解决这一问题，包括使用马赫-曾德尔干涉仪 [292], 石墨烯和量子阱电光吸收调制器，以及光子晶体 [293]。技术突破将使光子神经网络受益匪浅，尤其是实现集成式、非易失且高能效的光子存储元件。相变材料有望用于实现此类光子存储器，因为它们具备多级存储的潜力[294]。这类材料的细胞已应用于光子神经网络，尤其是脉冲神经网络（SNNs） [58]。

VI.7.1. 全光反向传播

训练神经网络时，通常默认采用反向传播算法。反向传播的核心思想是，根据链式法则计算损失函数相对于每个权重的梯度，并按照这一系列步骤逐层进行，从最后一层向前迭代，以避免对中间项进行冗余计算 [214, 216]。这种过程可以针对给定任务拟合神经网络的权重。然而，反向传播的复杂性非常高。它随训练样本或批次的数量、迭代次数（该次数无法预先确定）以及前馈输入传播的基本复杂性线性增长，而后者可以估计为一系列连续的矩阵-向量乘法。这些评估适用于许多情况，其中假设采用批量梯度下降算法，并在输入传播中使用简单的矩阵乘法。不过，通过一些近似方案，可以减少步骤数量。目前，训练神经网络有许多不同的方法，包括反向传播的各种变体，或无反向传播学习等替代方法 [295]。

因此，反向传播算法仍然是计算成本最高的组件之一。由于神经网络训练反向传播过程中的梯度需要按顺序计算，因此会消耗大量功率和时间。通过非线性神经元进行反向传播是光学神经网络领域面临的另一项挑战，也是全光训练方案面临的重要概念障碍。尽管已有几种实用且简单的解决方案，例如采用泵浦-探测方案提供的近似方法，该方案仅需无源光学元件 [296] ，或基于光互易性和相位共轭原理测量正向和反向传播的光场 [297]，但这些方案仍分别涉及数字电子学或对高速空间光调制器进行编程。

因此，端到端光学训练神经网络的研究仍在进行中，现有解决方案尚不完整。实现高效的全光反向传播训练方法（除了实现深度和非线性之外）将是该领域的一项重大成就。由于不存在阻碍此类发展的根本性限制，实现这一目标只是时间问题 [298, 299]。

VI.8. 替代学习方法

神经网络运算中计算量最大的部分是学习过程，而反向传播是许多权重训练案例所采用的标准方法。利用物理机制降低此类训练过程的能耗（例如光学方案中的训练），应当被视为光学神经网络的一项重要成就。 [300] 中介绍了一种称为物理感知训练的混合原位–计算机内通用算法，并通过若干示例（包括一个光学示例）进行了演示。由于按照直接链式法则进行反向传播项的模拟计算较为复杂，科学家和工程师设计了许多替代学习方法。例如，名为直接反馈对齐的训练算法在 [301], 中提出，见图13。这是一种基于随机投影的通用方法，采用替代性的非线性激活，且不需要了解物理系统的性质。另一种方法是通过简单机制，在随机突触权重的作用下将教学信号传递到各神经元层；在许多任务中，其表现与反向传播相近 [302]。

VI.9. 统计采样

统计采样是另一个能够从光学机器中受益的重要领域。概率图模型能够有效表示复杂系统中不同因子的概率分布。此外，得益于其通用结构，人们可以针对各种实际问题，对包含许多因子的复杂大型图进行建模。

伊辛模型与成对概率图模型的概率测度之间的对应关系，使人们能够解决许多任务，例如基于给定观测值进行推断

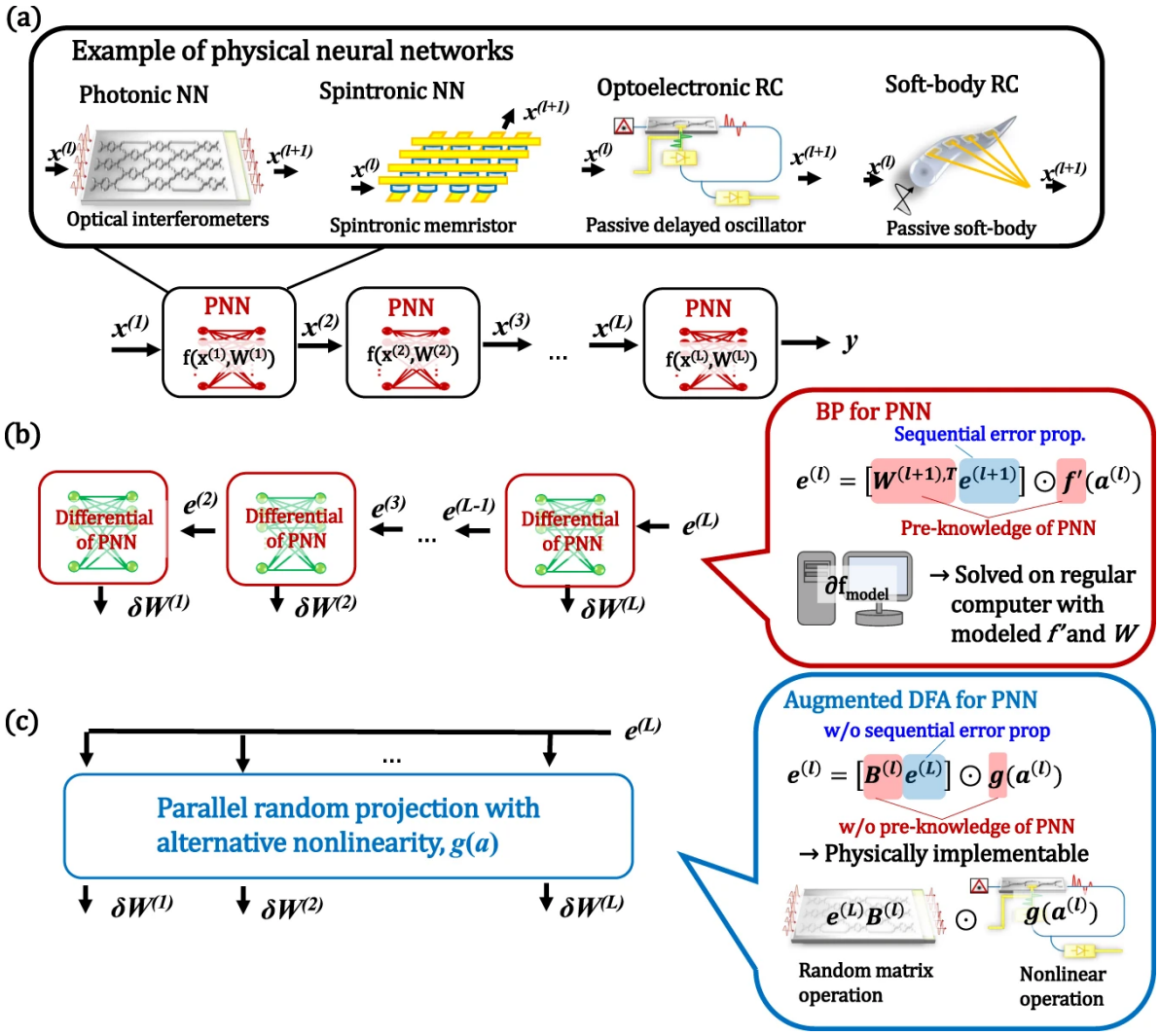

图13. 物理神经网络（PNN）的示意图。PNN采用（b）反向传播和（c ）增强型生物学合理训练方法（称为直接反馈对齐，DFA）的训练流程。增强型DFA基于随机投影和替代非线性函数g(a)，可实现深度物理网络的并行、可扩展且可由物理系统加速的训练。图片及其说明取自 [301]。

或进行采样。例如，后者可以利用能量函数前的符号来获得概率最高和最低的状态。此外，若干类型硬件中具备的特定附加机制，可以增强采样过程，从而高效地将其用作特定问题的额外信息来源。

遗憾的是，使用光学机器模拟概率图模型仍需进一步研究。显而易见的方向包括提高光学自旋模型的可编程性，以获得更多操控伊辛/XY模型/Potts 等状态的选项，或将规模庞大且结构丰富的概率图模型分解为可由自旋哈密顿量

模拟器访问的离散近似形式。另一种选择是在概率图模型的背景下研究额外的硬件改进。最后，这种自旋系统功能、控制理论与决策之间的对应关系还有许多其他应用。

VI.9.1. 神经网络架构与迁移学习

许多神经网络架构在形式（深层或浅层、前馈或循环）、训练方法、网络拓扑和运行原理方面各不相同。前文提到过一些光子架构，参见第 II.3 节。此外，有些结构更适合某些用途，而非其他用途。例如，循环神经网络擅长处理时间依赖关系，而卷积神经网络是图像处理任务中的标准架构。然而，由于特定硬件的物理限制或设计本身效率不高，我们无法轻易在其上实现所有架构。

要实现不同架构之间的功能迁移，可以关注迁移学习领域。最初，迁移学习是机器学习的一个研究方向，旨在通过解决一类问题获取知识，并将其应用于相关的另一领域；参见近期综述 [303, 304]。不过，迁移学习也可以将一种架构的特征迁移到另一种架构，从而使问题更适合硬件实现。

功能迁移将对机器学习领域产生重大影响，并使硬件计算领域受益。对于光学器件而言，这一点至关重要，因为其在实现某些架构方面存在一定的工程限制。许多其他相关研究方向，例如神经架构搜索，也可以进行调整，以优化硬件系统。

VII. 光学量子计算

光子集成电路中的人工神经网络以及自旋哈密顿量的光学极小化器，是已建立工程基础且发展方向明确的光学平台的主要范式。与作为高风险探索的前沿量子技术相比，经典光学器件在短期至中期内，具有速度、并行性、能耗或运行策略方面的优势。因此，我们可以说，光学

技术正在重复电子专用硬件的发展路径，技术进步使其“在螺旋式发展中又走了一圈”。量子计算机源于物理学和计算理论领域令人振奋的发展。量子计算有多个硬件平台可供开发，目前仍在探索哪种技术或技术组合最有可能取得成功。

本节基于光子评估量子计算的现状与未来潜力。由于量子计算技术与我们当前使用的信息技术存在巨大差异，学术界目前在讨论量子计算技术未来的实际应用时普遍持谨慎态度。许多人认为，量子技术将在未来几十年对社会产生重大影响 [305]。不过，对于量子技术在近期（五至十年内）的商业潜力，持有信心的人并不多 [306]。还有一些人怀疑量子计算机是否终有一天能够发挥作用 [307]。批评者反对量子计算机可行性的核心论据在于复杂性这一概念。迄今为止，噪声中等规模量子计算机所能识别和描述的概率分布，其复杂度类仍处于非常低的水平。这类计算机既无法实现高质量的量子纠错，也无法证明“量子霸权”——即量子计算机能够完成经典计算机无法完成或极其难以完成的计算 [307]。

VII.1. 量子光学器件

量子计算机的运行依赖于三个原理：量子纠缠、量子复杂性和量子纠错。因此，量子计算机利用量子系统各部分之间具有特征性的相关性，使其能够稳健地扩展到大型器件，用于解决复杂问题。

截至2022年，量子计算领域宣布了许多进展（但其中一些后来也被推翻）。目前领先的技术基于超导量子比特（Google、IBM、Rigetty）和囚禁离子（IonQ、Honeywell）。Google团队于2019年宣布使用53个量子比特实现了量子霸权；IBM使65个量子比特发生纠缠，同时公布了到2023年实现超过1000个量子比特的路线图。超导量子比特系统的优势在于，它们基于成熟的半导体技术；然而，必须将其保持在低温（10mK）下，而且退相干时间很短（$< 10\mu$秒）。相比之下，囚禁离子非常稳定，具有更长的退相干时间（数分钟）、更远程的相互作用（超越最近邻），并且在所有量子计算机系统中报告了最佳的量子体积。然而，许多激光器需要同时进行控制，运行速度还可以更快，而且很难在芯片上放置大量离子。

IonQ目前已在一条链中实现了32个囚禁离子，并承诺在2025年前实现量子霸权、在2028年前解决有趣的现实问题。还有其他方案以及使用硅量子点 [308]、金刚石空位 [309]、中性原子 [310, 311] 等进行的小规模实现。Microsoft在2021年投资拓扑量子比特时遭遇了最严重的失望之一。由一对马约拉纳零模构成的拓扑量子比特理论上可以受益于拓扑保护。这种保护可能带来稳定性并避免退相干，从而有望使拓扑量子计算机比其他方法更容易提升计算能力。理论上存在马约拉纳零模这一说法曾被宣称已在实验中实现，但由于发现数据存在错误，该论文后来被撤回。

基于光子的量子计算机在量子计算机发展的早期曾被认为并不实用，因为生成和控制所需量子态存在困难。然而，除了密集的学术研究之外，Xanadu（多伦多）和PsiQuantum（帕洛阿尔托，加利福尼亚州）等光子学公司也正在开发这类计算机。基于光子的量子计算机的优势包括可在室温下运行、退相干时间长得多（从毫秒到数小时），以及系统成本更低且更易于构建。不过，这类计算机很快就会变得庞大（尽管PsiQuantum 声称仍有可能实现一百万个量子比特）。

对于基于光子的量子计算机，玻色子采样被提出作为超导量子比特系统中随机量子线路的对应方案。采样任务是指计算机从特定概率分布中生成样本。量子算法能够从远超经典计算机能力范围的概率分布中进行采样。最著名的例子是肖尔因式分解算法，它利用了在量子计算机上基于函数傅里叶系数高效地对概率分布进行采样的能力。

光的压缩态在振幅和相位之间具有不均等的量子不确定性分布。一个态的压缩程度越高，其中包含的光子就越多。多光子压缩光常见于许多量子光学实验中，并且已

在量子计算模型中被研究了二十多年 [313]。有人提出，由分束器和光子计数器组成、利用压缩光特性的相对简单的光学电路，可以比经典计算机更快地执行采样算法 [314, 315]。这类算法有许多实际应用，包括寻找分子之间的匹配构型 [316] 或同一分子的不同状态 [317]。

更严格地说，玻色子采样器是一种量子光学器件，其中线性光学网络会混合多个非经典光子源。因此，光子彼此不可区分；当它们来自不同光源时，会在输出探测器处产生复杂的光子计数统计。当玻色子采样器的输入/输出通道数量较大时，人们认为使用经典计算机仿真此类器件是 $\sharp\,\mathbb{P}$-困难的 [314, 318]。在最初的定义中，玻色子采样器被引入为一种由单光子源、线性干涉仪以及输出通道上的光子计数探测器组成的器件。多项实验实现了这一装置的变体：在21模光学电路中使用5个输入光子 [319], ，以及在60模干涉仪中使用20个输入光子 [320]。

使用单光子源会带来各种技术难题，从而降低所需的可扩展性，使其难以超越经典计算机的计算（计算量大致随操作次数按 2^k 增长，其中 k 是输入光子的数量）。基于单光子的集成平台实验缺乏可扩展性，原因在于态制备和门实现具有非确定性。采用确定性制备的压缩态和线性光学，并通过光子计数探测器提供非高斯操作，可以显著增加输入/输出通道的数量。因此，人们提出了高斯玻色子采样方案，用参量下转换光源生成的单模压缩光取代单光子源 [314]。近期有报道称，使用50个输入通道和一个100模干涉仪实现高斯玻色子采样，取得了“量子计算优势”[321]。作者称，他们的设备能够在200秒内生成样本，而经典计算机需要数十亿年才能完成相同任务。具体而言，该论文报告了一项高斯玻色子采样实验，其中量子态表示在 10^{30}维希尔伯特空间中，其采样速度比使用数字超级计算机快 10^{14} 。这篇论文被称为对 Google 量子优势声明的首次独立验证，并声称

其表现比 Google 的量子霸权高出几个数量级。

这项巨大的计算优势 [321] 建立在特定的统计检验之上，这些统计检验用于衡量测量样本与量子实验结果之间的接近程度；这些量子实验结果是通过经典数字超级计算机对该量子实验进行无噪声模拟得到的。此前已有研究表明，经典采样分布只需复现实际理论分布[322]的小规模关联，就可能通过相同的统计检验。此外，一种基于对玻色子采样分布 [322]进行截断傅里叶–厄米特展开的多项式时间算法，可能通过 [321]的统计方法实现相近或更高的采样质量。另有一种基于 Clifford 和 Clifford 算法 [323] 、用于实现相近采样质量的方法也已被提出 [324]。最后，最近又提出了一系列近似方法，可在多项式复杂度 [325]下生成任意特定测量结果的概率分布。该实验在四阶近似下借助一台笔记本电脑实现了所需的精度。该算法针对实际实验进行了调优，仅适用于高斯玻色子采样（不适用于福克态玻色子采样） [314], ，且仅适用于阈值探测器（不适用于光子计数探测器），并且只适用于少量模式（而非像原始提案 [314]中那样，模式数与光子数呈二次关系）。后续实验在 GBS 样本中报告了非平凡的真正高阶关联，为其抵御可能的经典模拟方案提供了证据 [326]。

迄今为止，GBS 的实验实现要么缺乏可编程性（电路的可重构性），要么损耗率高得难以接受，从而限制了其可扩展性。尽管近期取得了一些进展 [327]，但仍需要严格的理论证据来证明 GBS 的经典难度。

2021年，Xanadu 和 NIST 试图通过实现一种可编程且具有高度可扩展潜力的电路来解决这一问题 [328]。该系统使用八个强压缩真空模式，并将其初始化为单个时间模式中的双模压缩态。这些状态经过一个完全可编程的四模式干涉仪，并通过所有输出端的光子数分辨探测器进行读出。该系统通过强压缩和高采样率实现了这一点。干涉仪实现了用户可编程的门序列，该序列基于由分束器和移相器构成的网络。所得的八模式高斯态在福克基上使用八个独立的光子数分辨探测器进行测量。整个设备由一块 10 mm $\times$ 4 mm 光子芯片组成，并与一个

hig级应用程序编程接口在经典计算机上运行 r.

在量子计算机上实现的量子采样要对实际应用发挥作用，还需要克服许多问题。必须控制并大幅降低光子损耗，使光子能够在电路中传输，从而提高可扩展性。还必须提高采样保真度和压缩态的质量。最令人期待的应用需要能够分别控制每个压缩态的压缩程度和光功率。然而，利用当前架构能够解决的实际应用数量仍然有限。Xanadu 团队通过将问题编码到分束器网络中，实现了两种具有潜在实用价值的算法。他们利用生成的样本确定分子态之间跃迁的能谱，并找出不同分子的图表示之间的相似性。具体而言，可以通过将图的邻接矩阵映射到采用压缩光的线性光学干涉仪结构中，将图编码到光子电路中 [329]。光子计数统计可用于确定所谓的“特征向量”，这些特征向量在欧几里得空间中表示图 [330] ，从而可以利用它们之间的距离量化相应图之间的相似性。由高斯玻色子采样设备得到的这种图间相似性度量，例如对于机器学习中的分类而言十分重要。最近，理论上还提出了其他基于压缩态的光学计算平台，为构建实用的光学量子计算机铺平道路 [331, 332]; 见图 14。

VII.2. 玻色子采样与图同构

使用光干涉网络进行量子模拟计算具有许多实际优势。我们曾提到，采用玻色子采样设置可以计算特定矩阵的矩阵永久式，而从计算角度来看，这一问题极其困难。然而，要使这项计算发挥实用价值则更加复杂，这一问题曾长期悬而未决，仍存在一些争议。最近，高斯玻色子采样器与图同构问题之间的联系得以确立 [334]。研究人员将图编码为光的量子态，然后使用光子数分辨探测器探测其性质。利用一组完备的图不变量，作者证明，只有在输出端的探测概率相等的情况下，设置中的概率才可以合并，并且图同构才可被确定,

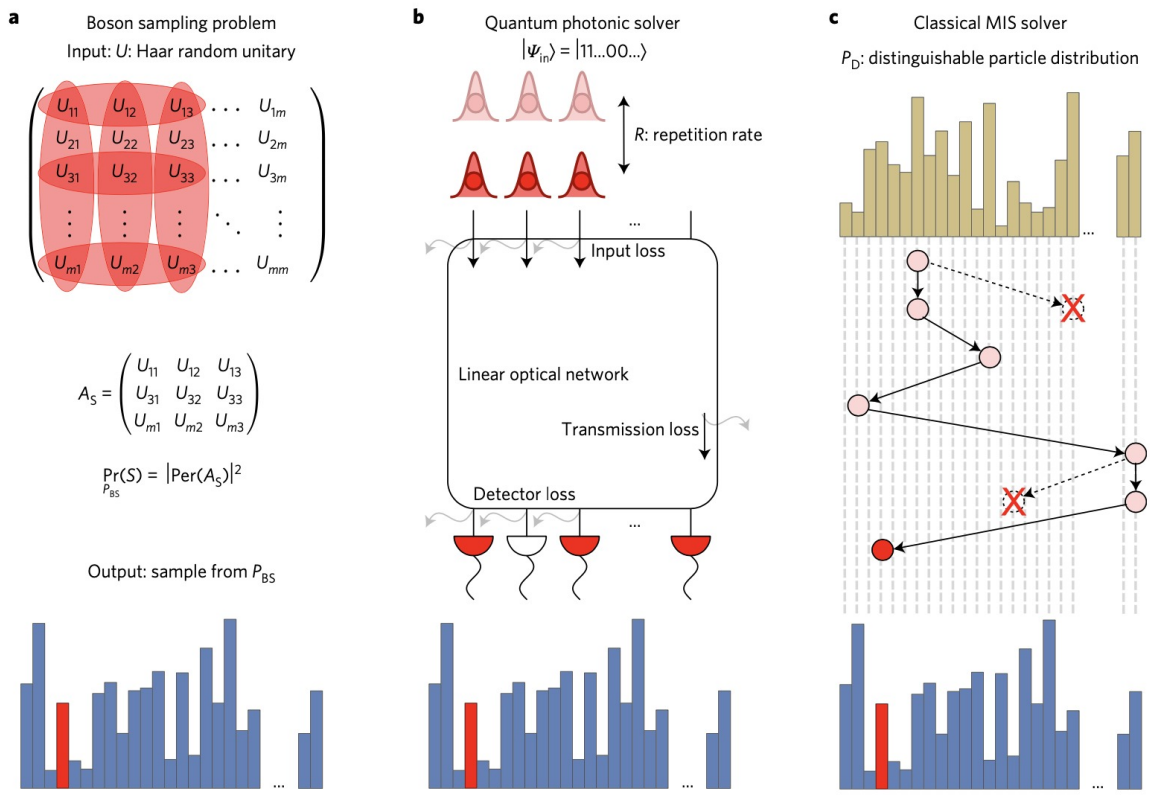

图 14。a）问题定义。根据 Haar随机酉矩阵的子矩阵模方永久式所定义的特定分布，计算样本U。b）光子实验方案，即单光子通过线性光学网络传播，随后进行探测。c）一种基于Metropolis独立采样的经典玻色子采样算法，使用可区分粒子转移概率作为提议分布。经许可转载自 [333] 。

两个图才能被确定为同构。

图同构是否具有某种特定的复杂性类型，目前仍是一个悬而未决的问题。人们认为它属于 NP中间计算问题这一类。能否在多项式时间内确定两个图是否同构，尚无定论；不过，目前已经存在准多项式类型的算法。关于光子玻色子采样的最新进展，包括技术改进和未来挑战的介绍，可参见 [335]。图同构与玻色子采样之间提出的联系，还可以进一步扩展到其他实际任务，例如为处理图结构数据的机器学习应用构建图核[330]。

VII.3. 量子机器学习

可编程波导网格能够在多组输入波导与输出波导之间执行任意线性变换，这是光子量子计算中的一项基本操作。在这一范式中，量子信息被编码在通过光子集成电路传播的光的量子态中 [336]。一种普遍采用的方案是，将量子比特编码为处于两条轨道波导叠加态中的单光子 [337]。含噪声中等规模量子（NISQ）设备已展现出在量子机器学习领域的潜力，有望以显著快于经典计算机的速度处理海量数据集 [338]。量子机器学习与经典光子深度神经网络加速器有相似之处，后者由多个线性波导网格级联而成，各级网格之间通过具有强可逆非线性的激活层相互连接 [339]。在量子光学神经网络（QONN）中，对NISQ计算机进行编程需要通过监督学习，利用输入和输出量子态训练波导网格中的相位。QONN可以经过训练来执行一系列量子信息处理任务，包括量子光学态压缩和强化学习。近期，一种QONN成功实现了单向量子中继器的编程 [339, 340]。然而，在当前实验能力下，这些概念以及神经量子架构中的许多其他设想，距离实际实现仍相距甚远。

VII.4. 与其他量子优化方法的比较

如前所述，与处理类似稠密矩阵实例的 D-Wave2000Q 量子退火机相比，相干伊辛机（CIM）的求解时间优势达到了数个数量级。近期对量子近似优化算法（QAOA）与量子退火、模拟退火等竞争方法的比较 [341], 将实现 QAOA 的 D-Wave2000Q 量子退火机与 IBM Q Experience 系统进行比较 [342], ，以及对 Google「Sycamore」上 QAOA 的基准测试 [343] ，使我们能够在一定程度上比较光学自旋机与 QAOA 的性能。

在 QAOA 中，变分波函数类似于量子退火过程的 Trotter 化版本：

$$|\Psi(\beta,\gamma)>=\prod_{i=1}^{N} e^{-i\beta_i H_0} e^{-i\gamma_i H_{\text{objective}}}, \tag{66}$$

其中，初始态 $|+>$ 是 σ_x 本征值为 1 的本征态的乘积态，$|+>=\prod_i(|0>_i+|1>_i)/\sqrt{2}$ 同时也是所有计算基态的叠加态。与量子退火的 Trotter 化版本不同，参数 β_i和 γ_i 会在经典学习循环中进行调整，以最小化目标函数。这类调整本身被认为是 $\mathbb{NP}$-困难问题。正如 $P\to\infty$所指出的，QAOA 可平滑地逼近 QA。根据 [341], 的研究结果，量子近似优化算法（QAOA）能够确定性地求解专门构造的优化问题；由于被最小化函数存在又宽又高的能垒，量子退火和模拟退火都无法解决这些问题。然而，对于这些实例，存在一种高效的经典算法。

在 [342], 小规模（最多 $N=18$）的加权最大割问题和2-SAT问题中，使用配备 IBM Q Experience 的 D-Wave2000Q 量子退火机进行了测试。实际的 IBM Q 机器在 16 个量子比特上所得的解质量非常差，因此将 D-Wave200Q 上的真实物理实验与 QAOA 的模拟结果进行了比较。即便如此，在规模小至 $N=8$ 的矩阵上，物理量子退火仍显示出远高于 QAOA 的成功概率（分别为 99.92 对 8.84($p=1$) 和 42.39($p=3$）！）研究得出的结论是，对于所考虑的问题实例集合，并以成功概率作为衡量标准，“QAOA 无法与量子退火竞争”。相应的图表见图 15。

在 [343], 这项研究中，作者使用 Google Sycamore 超导量子比特量子处理器，在与硬件连通性相匹配的平面图上运行量子近似优化算法（QAOA），以解决组合优化问题。他们还将 QAOA 应用于 Sherrington-Kirkpatrick模型和最大割，这两类高维图问题都需要对 QAOA 进行大量编译。这些问题的规模最高达到 $N=23$，并通过数值方法（无噪声）和实验方式求解。实验中使用了 QAOA 理论上的最优 β,γ和 $p\in 1,2,3,4,5$。对于图匹配硬件上的问题，平均成功概率在 $N>8$ 处趋于稳定：数值结果约为 80%，实验结果约为 45%。对于 SK 和最大割问题，性能则迅速下降（对于任何 p），最终达到随机猜测找到解的概率（对于 $N>15$）。作者据此推断，尽管当前量子处理器尚无法超越经典优化启发式算法，但在代表性问题上运用量子近似优化算法（QAOA）等常用技术，可作为评估不同硬件平台的基准。为了使量子优化

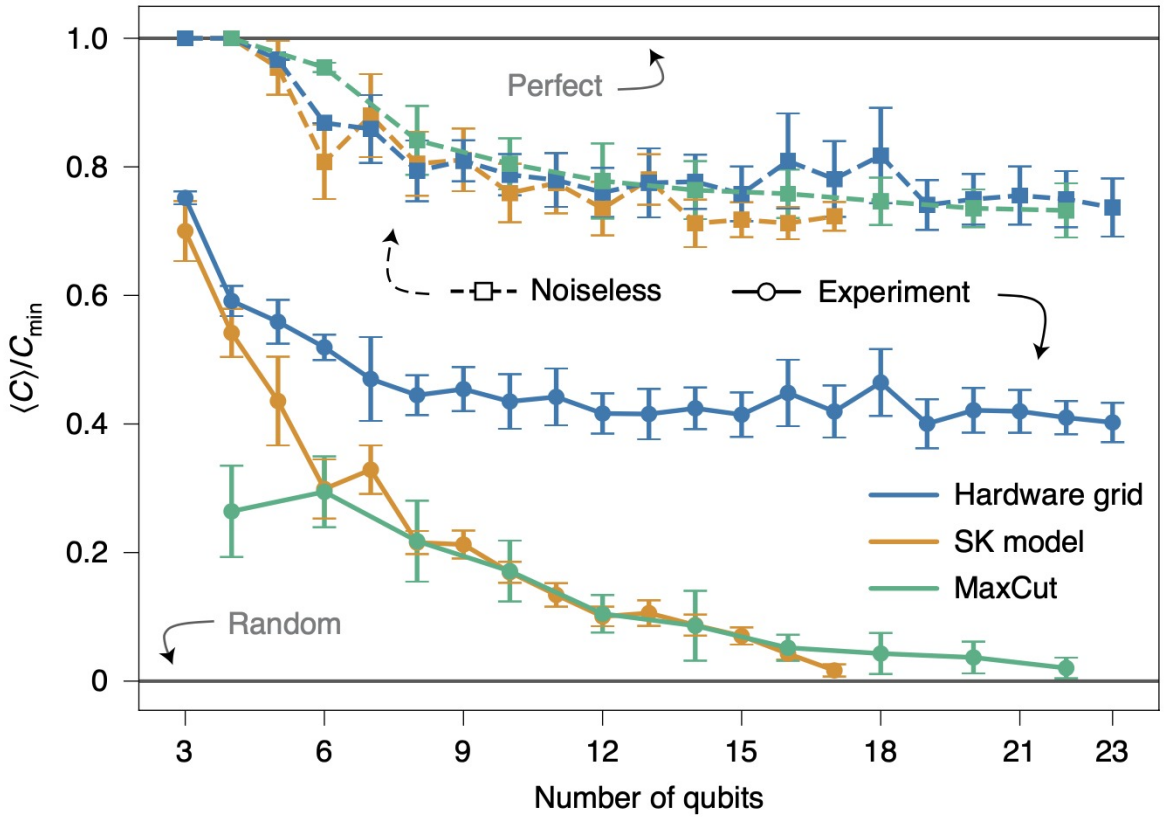

图 15. 使用量子近似优化算法处理不同规模的问题时，找到的解与最优解之比 N。每个解均取十个随机实例的平均值（误差线表示标准差）。随着 N 增大，SK 模型和最大割模型的实验解趋近于随机结果。该图取自 [343]。

能够在实际问题上与经典方法匹敌，必须超越电路深度较低的人工问题。

VII.5. 量子效应与光学机器

我们可以看到，不同的光学硬件采用不同的工作机制。其主要机制可以是纯经典、量子或混合性质。即使在经典极限附近运行，量子效应也可能至关重要，并对实际运行状态产生重大影响。

例如，研究表明，在量子噪声存在的情况下，可以有效利用相干伊辛机的非线性随机动力学，对伊辛模型的简并基态和低能自旋构型进行采样，研究对象为最大割问题 [344]。

量子噪声和光学非线性都在系统动力学中发挥着关键作用。去除这些关键要素会导致采样性能下降。补充数值结果超越了经典模拟的范畴，进一步阐明了量子机制在相干伊辛机运行中的作用。另一项研究 [146]考察了三种用于组合优化的量子算法的性能扩展情况，包括相干伊辛机、离散绝热量子计算，以及基于 Grover 搜索的量子最小值搜索 D¨urr-Høyer 算法。作者声称，相干伊辛机在求解最大割问题时性能显著更优。此外，相干伊辛机与在中央处理器、GPU 和现场可编程门阵列上实现的各种启发式求解器相比也具有竞争力。

许多光学器件都属于开放量子系统。要解释许多复杂效应，就需要采用这种形式体系。为此，人们开发了马尔可夫开放量子系统框架 [345, 346]。系统约化密度矩阵的这种有效动力学导出了林德布拉德形式主方程，使人们能够追踪与泵浦的平衡、衰减过程、系统热化以及与环境相互作用的不同方面。尽管研究这类过程的数值方法相当复杂，人们通常会开发近似方案，以考虑被省略的效应。还有许多系统也适合用这种方法来描述微妙但至关重要的特征——除相干伊辛机（CIM）外，另一个例子是前文经常提及的激子-极化激元系统。此外，还应关注激子-极化激元系统中的其他微观过程，因为与简单的平均场理论相比，考虑这些过程能提供更多可供考察的自由度 [347–349]。

VIII. 总结

VIII.1. 光学机器基准测试

迄今为止，光学硬件的研究与开发正迅速发展。主要问题在于，光学机器通常在规模和难度各不相同的问题上进行测试，因此难以比较它们的能力。由此，无论通过实验还是数值仿真过程，都很难判断特定机制的缩放特性。另一个问题是结果存在偏倚，可能会被精挑-

细选出来以便更好地展示。总的来说，很难找到全面、完整、及时且无偏的结果来比较不同类型的光学硬件。

尽管大多数神经网络光学架构都可以通过标准指标进行比较，这些指标涉及特定数据集上的精度和所需的工作负载，但我们仍概述目前已知的情况，以及如何比较部分光学机器。例如，在 [350] 中，研究者使用同一组包含 60 个节点的稠密最大割图，对忆阻器、GPU、D-Wave 和相干伊辛机进行了比较。相干伊辛机的求解时间（以 99 % 的概率达到最优解）为 600μ 秒，而 D-Wave 为 1000 秒。研究表明，基于光电反馈系统的伊辛机能够求解具有 100 个自旋的规则图和受挫图上的最大割优化问题，其性能可与基于简并光学参量振荡器的相干伊辛机相媲美，甚至更优 [118]。由于基于光电振荡器的计算型存储器可实现为集成光子电路，因此可利用可编程硅光子电路，在光学上实现灵活的自旋耦合。这将充分发挥光学系统的高带宽优势，并显著加速现有的相干伊辛机方案。

建立通用基准将吸引更多人参与，因为了解硬件在特定问题上的成功与失败，有助于最大限度地发挥其效用。此外，这一研究方向与当前关于神经网络架构以及统计方法中计算问题相变的研究存在类似问题 [102], ，这将使所有相关领域受益。

VIII.2. 光计算最具前景的应用

我们的主观看法是，现代光计算有望在三个主要应用领域带来显著的计算优势：**神经网络、非线性优化和统计采样**。

光学硬件是为这些应用实现加速的一个有前景的平台，其许多计算优势来自混合量子/经典运行模式。光学天然支持这些任务，同时还受益于更多因素，例如特定架构以及这些架构与光系统固有属性之间的相互作用。

例如，模式选择机制是以下系统的一种有益运行模式：

一个量子系统跨越可能解构成的高维空间，并在最终稳定到占据数较大的第一个可能相干态时找到一个最优解。另一个组成部分是经典动力系统行为，它可以模拟神经网络动力学，沿着不断变化的能量景观进行经典梯度动力学，同时隧穿越过势垒，抵达最近的能量极小值。如果该极小值对应于问题的最优解，就完成了这项任务。最后，一种类似的机制负责对能量景观的低能子空间进行采样。

VIII.3. 未来展望

优化领域的“无免费午餐”（NFL）定理指出，对所有可能的问题实例取平均后，任意两种优化算法的性能都相同。将该定理应用于硬件而非算法，会带来更多影响。NFL 定理的推论之一是，求解器/硬件结构与问题难度之间存在对应关系，涵盖最佳情形和最坏情形。

要利用光学自旋机加速解决特定行业的实际问题，就需要认真考虑远超 QUBO 范畴的应用范围。这些应用必须与光学机器的运行原理紧密匹配，才能充分发挥其潜在优势。在光学自旋机能够用于实际应用之前，还有许多问题需要解决。不同机器之间应使用哪些平台进行比较？与经典计算相比，光学量子计算的优势有多重要？经典计算之间、混合计算与经典计算之间，以及光学计算与其他基于物理的硬件之间，又该如何比较？硬件性能与传统系统上运行的最佳算法相比如何？要回答这些问题，我们需要建立一套标准，以便公平比较不同的机器和方法。工作流程中的哪个环节更值得优化？更靠近硬件的环节和更靠近用户的环节，哪个应更受重视？如何恰当地优化预处理和后处理？我们应如何评估结果，又该使用哪些度量指标？例如，可以用汉明距离、能量空间中的距离、能量比、神经架构的精度，或其他误差度量指标（如泛化误差）来评估所找到的 QUBO 解之间的接近程度。我们如何从多个重要维度评估优化性能，例如计算时间、解的质-

量、能效、输入范围等？这些都可以用于评估。我们如何考虑给定架构和特定任务约束所带来的开销？如何优化实现、转换、嵌入、调优和后处理？如何找到既难又相关的输入？如何避免使用过于简单的输入？对于参数化任务，应绘制可能的相图。我们如何尽可能提高结论的普适性？如果只能测试部分输入与硬件组合，结论的普适性又能达到何种程度？

优势将体现在以下方面：(i) 开发针对特定应用进行调优的专用解决方案；(ii) 开发混合算法和方法（例如，将机器学习作为混合解决方案的一部分）；以及 (iii) 利用可编程加速器执行核心任务。要将光学计算系统（或任何其他非常规计算系统）的潜力转化为实际应用，还需要开展更多研究。回答这些关键问题，将使我们更深入地理解非常规光学机器的基本原理，提升其性能，并最终产生显著的实际影响。

致谢

N.G.B. 感谢朱利安·施温格基金会通过 JSF-19-02-0005 号资助提供财务支持。

[1] G. E. Moore，《将更多元件塞入集成电路》，《电子学》，第38卷，1965年4月。[2] G. E. Moore、M. Hill、N. Jouppi和G. Sohi，《计算机体系结构读本》，美国加利福尼亚州旧金山：*Morgan Kaufmann*出版社，第56–59页，2000年。[3] J. Von Neumann，《EDVAC报告初稿》，《*IEEE*计算史年鉴》，第15卷，第4期，第27–75页，1993年。[4] J. Edwards和S. O'Keefe，《用于缓解冯·诺依曼瓶颈的主动循环存储器》，载于*2016*年*IEEE*计算智能研讨会系列（*SSCI*），第1–5页，IEEE，2016年。

[5] M. Naylor和C. Runciman，《reduceron：使用现场可编程门阵列扩展图规约的冯·诺依曼瓶颈》，载于函数式语言实现与应用研讨会，第129–146页，施普林格，2007年。[6] C. S. Lent、K. W. Henderson、S. A. Kandel、S. A. Corcelli、G. L. Snider、A. O. Orlov、P. M. Kogge、M. T. Niemier、R. C. Brown、J. A. Christie、等，《分子细胞网络：一种用于分子电子学的非冯·诺依曼架构》，载于*2016*年*IEEE*计算重启国际会议（*ICRC*），第1–7页，IEEE，2016年。[7] D. Shin和H.-J. Yoo，《采用非冯·诺依曼架构的异构深度神经网络处理器》，《*IEEE*学报》，第108卷，第8期，第1245–1260页，2019年。[8] C. Li、X. Zhang、J. Li、T. Fang和X. Dong，《现代计算的挑战与光学的新机遇》，*PhotoniX*，第2卷，第1期，第1–31页，2021年。[9] J. Wu、X. Lin、Y. Guo、J. Liu、L. Fang、S. Jiao和Q. Dai，《面向人工智能的模拟光学计算》，《工程》，2021年。[10] G. Genty、L. Salmela、J. M. Dudley、D. Brunner、A. Kokhanovskiy、S. Kobtsev和S. K. Turitsyn，《超快光子学中的机器学习与应用》，*Nature Photonics*，第15卷，第2期，第91–101页，2021年。[11] S. Xiang、Y. Han、Z. Song、X. Guo、Y. Zhang、Z. Ren、S. Wang、Y. Ma、W. Zou、B. Ma、等，《综述：用于光神经计算的光子器件、架构与算法》，《半导体学报》，第42卷，第2期，第023105页，2021年。[12] Z. Chen和M. Segev，《聚焦光子学：展望下一个十年》，*ELight*，第1卷，第1期，第1–12页，2021年。[13] B. J. Shastri、A. N. Tait、T. F. de Lima、W. H. Pernice、H. Bhaskaran、C. D. Wright和P. R. Prucnal，《面向人工智能与神经形态计算的光子学》，*NaturePhotonics*，第15卷，第2期，第102–114页，2021年。[14] G. Wetzstein、A. Ozcan、S. Gigan、S. Fan、D. Englund、M. Solja˘ci´c、C. Denz、D. A. Miller和D. Psaltis，《利用深度光学与光子学进行人工智能推断》，《自然》，第588卷，第7836期，第39–47页，2020年。[15] K. P. Kalinin和N. G. Berloff，《用于非常规计算的非线性系统》，《非线性科学新兴前沿》，第345–369页，2020年。[16] S. Dolev和M. Oltean，《光学超级计算：第*4*届国际研讨会，*OSC 2012*，纪念*H. John Caulfield*，意大利贝尔蒂诺罗，*2012*年*7*月*19*日至*21*日。修订版精选论文集，

第7715卷。施普林格，2013年。[17] D. R. Solli和B. Jalali，“模拟光学计算”，*Nature Photonics*，第9卷，第11期，第704–706页，2015年。[18] P. Ambs，“光计算：60年历程”，*Advances in Optical Technologies*，2010年。[19] A. Mar´echal和P. Croce，“用于改善光学图像对比度的空间频率滤波器”，法国科学院周报，第237卷，第12期，第607–609页，1953年。[20] C. Weaver和J. W. Goodman，“一种对两个函数进行光学卷积的技术”，*Applied Optics*，第5卷，第7期，第1248–1249页，1966年。[21] E. Abbe，“显微镜理论与显微观察理论的贡献”，*Archiv f¨ur mikroskopische Anatomie*，第9卷，第1期，第413–468页，1873年。[22] F. Zernike，“刀口检验的衍射理论及其改进形式——相位衬度法”，皇家天文学会月报，第94卷，第377–384页，1934年。[23] P. Elias，“光学与通信理论”，*SPIE*里程碑系列，第105卷，第52–52页，1995年。[24] P. Elias、D. S. Grey和D. Z. Robinson，“光学过程的傅里叶处理”，*JOSA*，第42卷，第2期，第127–134页，1952年。[25] D. Gabor，“一种新的显微原理”，《自然》，第161卷，第777–778页，1948年。[26] T. Maiman，“红宝石中的光学和微波光学实验”，*Physical Review Letters*，第4卷，第11期，第564页，1960年。[27] T. H. Maiman等，“红宝石中的受激光辐射”，1960年。[28] E. N. Leith和J. Upatnieks，“连续色调物体的波前重建”，*JOSA*，第53卷，第12期，第1377–1381页，1963年。[29] E. N. Leith和J. Upatnieks，“利用漫射照明和三维物体进行波前重建”，*JOSA*，第54卷，第11期，第1295–1301页，1964年。[30] B. R. Brown和A. W. Lohmann，“利用二值掩模进行复数空间滤波”，*Applied Optics*，第5卷，第6期，第967–969页，1966年。[31] A. W. Lohmann和D. Paris，“计算机生成的二值夫琅禾费全息图”，*Applied Optics*，第6卷，第10期，第1739–1748页，1967年。

[32] F. Dumont、J. Hazan和D. Rossier，“phototitus 光学转换器”，《飞利浦技术评论》，第34卷，第10期，第274–287页，1974年。[33] S. Iwasa，“光学处理：使用两个 itek prom 器件的近实时相干系统”，*Applied Optics*，第15卷，第6期，第1418–1424页，1976年。[34] D. S. Oliver，“用于光学/数字处理系统的实时空间调制器”，*OpticalEngineering*，第17卷，第3期，第173288页，1978年。[35] K. Jain和G. Pratt Jr，“光学晶体管”，《应用物理学快报》，第28卷，第12期，第719–721页，1976年。[36] R. Hauck和O. Bryngdahl，“采用脉冲密度调制的计算机生成全息图”，*JOSA A*，第1卷，第1期，第5–10页，1984年。[37] T.-C. Poon、R. Juday和T. Hara，“空间光调制器——研究、开发与应用：专题特刊导言”，*Applied Optics*，第37卷，第32期，第7471–7471页，1998年。[38] E. Abraham、C. T. Seaton和S. D. Smith，“光学计算机”，《科学美国人》，第248卷，第2期，第85–93页，1983年。[39] D. J. Jackson，“光子处理器：系统方法”，*Applied Optics*，第33卷，第23期，第5451–5466页，1994年。[40] R. S. Tucker，“光学在计算中的作用”，*Nature Photonics*，第4卷，第7期，第405–405页，2010年。[41] W. Bogaerts、D. P´erez、J. Capmany、D. A. Miller、J. Poon、D. Englund、F. Morichetti和A. Melloni，“可编程光子电路”，《自然》，第586卷，第7828期，第207–216页，2020年。[42] P. Singh、D. K. Tripathi、S. Jaiswal和H. Dixit，“全光逻辑门：设计、分类与比较”，*Advances in Optical Technologies*，2014年。[43] V. Jandieri、R. Khomeriki、T. Onoprishvili、D. H. Werner、J. Berakdar和D. Erni，“用于真实时域信号处理的非线性光子晶体波导中的功能性全光逻辑门”，*Optics Express*，第28卷，第12期，第18317–18331页，2020年。[44] P. Minzioni、C. Lacava、T. Tanabe、J. Dong、X. Hu、G. Csaba、W. Porod、G. Singh、A. E. Willner、A. Almaiman、等，“全光处理路线图”，《光学杂志》，第21卷，第6期，第063001页，2019年。[45] D. Woods和T. J. Naughton，“光计算”，《应用数学与计算》，第215卷，第4期，第1417–1430页，2009年。

[46] H. Wu 和 Q. Dai，《光加速的人工智能》，2021年。[47] E. G. Paek 和 D. Psaltis，《利用傅里叶变换全息图实现光学联想记忆》，*Optical Engineering*，第 26 卷，第 5 期，第 265428 页，1987年。[48] X. Lin、Y. Rivenson、N. T. Yardimci、M. Veli、Y. Luo、M. Jarrahi 和 A. Ozcan，《利用衍射深度神经网络实现全光机器学习》，《科学》，第 361 卷，第 6406 期，第 1004–1008 页，2018年。[49] Y. Zuo、B. Li、Y. Zhao、Y. Jiang、Y.-C. Chen、P. Chen、G.-B. Jo、J. Liu 和 S. Du，《具有非线性激活函数的全光神经网络》，*Optica*，第 6 卷，第 9 期，第 1132–1137 页，2019年。[50] A. N. Tait、T. F. De Lima、E. Zhou、A. X. Wu、M. A. Nahmias、B. J. Shastri 和 P. R. Prucnal，《利用硅光子权重库实现神经形态光子网络》，*Scientific Reports*，第 7 卷，第 1 期，第 1–10 页，2017年。[51] Y. Shen、N. C. Harris、S. Skirlo、M. Prabhu、T. Baehr-Jones、M. Hochberg、X. Sun、S. Zhao、H. Larochelle、D. Englund、等，《利用相干纳米光子电路实现深度学习》，*Nature Photonics*，第 11 卷，第 7 期，第 441–446 页，2017年。[52] H. Zhang、M. Gu、X. Jiang、J. Thompson、H. Cai、S. Paesani、R. Santagati、A. Laing、Y. Zhang、M. Yung、等，《用于实现复值神经网络的光学神经芯片》，*Nature Communications*，第 12 卷，第 1 期，第 1–11 页，2021年。[53] R. Hamerly、L. Bernstein、A. Sludds、M. Solja˘ci´c 和 D. Englund，《基于光电倍增的大规模光学神经网络》，*Physical Review X*，第 9 卷，第 2 期，第 021032 页，2019年。[54] K. Kravtsov、M. P. Fok、D. Rosenbluth 和 P. R. Prucnal，《漏积分发放神经元的超快全光实现》，*Optics Express*，第 19 卷，第 3 期，第 2133–2147 页，2011年。[55] A. N. Tait、M. A. Nahmias、B. J. Shastri 和 P. R. Prucnal，《广播与加权：用于可扩展光子尖峰处理的集成网络》，*Journal of Lightwave Technology*，第 32 卷，第 21 期，第 4029–4041 页，2014年。[56] J. M. Shainline、S. M. Buckley、R. P. Mirin 和 S. W. Nam，《用于神经形态计算的超导光电子电路》，*Physical Review Applied*，第 7 卷，第 3 期，第 034013 页，2017年。[57] V. Bangari、B. A. Marquez、H. Miller、A. N. Tait、M. A. Nahmias、T. F. De Lima、H.- T. Peng、P. R. Prucnal 和 B. J. Shastri，《用于

卷积神经网络（DEAP-CNNs）》，*IEEE*量子电子学专题期刊，第 26 卷，第 1 期，第 1–13 页，2019年。[58] J. Feldmann、N. Youngblood、C. D. Wright、H. Bhaskaran 和 W. H. Pernice，《具有自学习能力的全光脉冲神经突触网络》，《自然》，第 569 卷，第 7755 期，第 208–214 页，2019年。[59] M. Reck、A. Zeilinger、H. J. Bernstein 和 P. Bertani，《任意离散酉算子的实验实现》，*Physical Review Letters*，第 73 卷，第 1 期，第 58 页，1994。[60] B. Gholipour、P. Bastock、C. Craig、K. Khan、D. Hewak 和 C. Soci，《非晶金属硫化物微纤维实现用于类脑计算的光子突触》，《先进光学材料》，第 3 卷，第 5 期，第 635–641 页，2015年。[61] I. A. Williamson、T. W. Hughes、M. Minkov、B. Bartlett、S. Pai 和 S. Fan，《面向光学神经网络的可重编程电光非线性激活函数》，*IEEE*量子电子学专题期刊，第 26 卷，第 1 期，第 1–12 页，2019年。[62] A. N. McCaughan、V. B. Verma、S. M. Buckley、J. Allmaras、A. Kozorezov、A. Tait、S. Nam 和 J. Shainline，《用于连接超导体与半导体的超高阻抗超导热开关》，*Nature Electronics*，第 2 卷，第 10 期，第 451–456 页，2019年。[63] M. A. Nahmias、T. F. De Lima、A. N. Tait、H.-T. Peng、B. J. Shastri 和 P. R. Prucnal，《用于神经网络的光子乘加运算》，*IEEE*量子电子学专题期刊，第 26 卷，第 1 期，第 1–18 页，2019年。[64] K. Nozaki、S. Matsuo、T. Fujii、K. Takeda、A. Shinya、E. Kuramochi 和 M. Notomi，《飞法级光电子集成实现节能信号转换与非线性函数》，*Nature Photonics*，第 13 卷，第 7 期，第 454–459 页，2019年。[65] C. R´ıos、M. Stegmaier、P. Hosseini、D. Wang、T. Scherer、C. D. Wright、H. Bhaskaran 和 W. H. Pernice，《集成式全光非易失多级存储器》，*Nature Photonics*，第 9 卷，第 11 期，第 725–732 页，2015年。[66] C. R´ıos、N. Youngblood、Z. Cheng、M. Le Gallo、W. H. Pernice、C. D. Wright、A. Sebastian 和 H. Bhaskaran，《基于光子平台的存内计算》，《科学进展》，第 5 卷，第 2 期，第 eaau5759 页，2019年。[67] C. D. Schuman、T. E. Potok、R. M. Patton、J. D. Birdwell、M. E. Dean、G. S. Rose 和 J. S. Plank，《神经形态计算与硬件神经网络综述》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1705.06963*，2017年。

[68] G. Tanaka, T. Yamane, J. B. H´eroux, R. Nakane, N. Kanazawa, S. Takeda, H. Numata, D. Nakano 和 A. Hirose, 《物理储备池计算的最新进展：综述》, 《神经网络》, 第115卷, 第100–123页, 2019年。[69] W. Maass、T. Natschl¨ager 和 H. Markram, 《没有稳定态的实时计算：一种基于扰动的神经计算新框架》, 《神经计算》, 第14卷第11期, 第2531–2560页, 2002年。[70] H. Jaeger, 《分析和训练循环神经网络的"回声状态"方法——附勘误说明》, 德国波恩：德国国家信息技术研究中心*GMD*技术报告, 第148卷第34期, 第13页, 2001年。[71] M. Nakajima、K. Tanaka 和 T. Hashimoto, 《相干线性光子处理器上的可扩展储备池计算》, *Communications Physics*, 第4卷第1期, 第1–12页, 2021年。[72] F. Duport、B. Schneider、A. Smerieri、M. Haelterman 和 S. Massar, 《全光储备池计算》, *Optics express*, 第20卷第20期, 第22783–22795页, 2012年。[73] C. Mesaritakis、A. Bogris、A. Kapsalis 和 D. Syvridis, 《通过光子储备池计算子系统对色散傅里叶图像进行高速全光模式识别》, *Optics letters*, 第40卷第14期, 第3416–3419页, 2015年。[74] D. Brunner 和 I. Fischer, 《基于衍射耦合的可重构半导体激光器网络》, *Optics letters*, 第40卷第16期, 第3854–3857页, 2015年。[75] J. Bueno、S. Maktoobi、L. Froehly、I. Fischer、M. Jacquot、L. Larger 和 D. Brunner, 《大规模光子循环神经网络中的强化学习》, *Optica*, 第5卷第6期, 第756–760页, 2018年。[76] Y. Paquot、F. Duport、A. Smerieri、J. Dambre、B. Schrauwen、M. Haelterman 和 S. Massar, 《光电储备池计算》, *Scientific reports*, 第2卷第1期, 第1–6页, 2012年。[77] L. Larger、M. C. Soriano、D. Brunner、L. Appeltant、J. M. Guti´errez、L. Pesquera、C. R. Mirasso 和 I. Fischer, 《超越图灵的光子信息处理：储备池计算的光电实现》, *Optics express*, 第20卷第3期, 第3241–3249页, 2012年。[78] R. Martinenghi、S. Rybalko、M. Jacquot、Y. K. Chembo 和 L. Larger, 《具有多延迟波长动力学的光子非线性瞬态计算》, *Physical review letters*, 第108卷第24期, 第244101页, 2012年。[79] M. C. Soriano、S. Ort´ın、D. Brunner、L. Larger、C. R. Mirasso、I. Fischer 和 L. Pesquera, 《光电储备池计算：应对噪声引起的性能退化》, *Op-*

tics express，第21卷第1期，第12–20页，2013年。[80] S. Ort´ın、M. C. Soriano、L. Pesquera、D. Brunner、D. San-Mart´ın、I. Fischer、C. Mirasso 和 J. Guti´errez，《基于单个时延神经元的储备池计算与极限学习机统一框架》，*Scientific reports*，第5卷第1期，第1–11页，2015年。[81] F. Duport、A. Smerieri、A. Akrout、M. Haelterman 和 S. Massar，《全模拟光子储备池计算机》，*Scientific reports*，第6卷第1期，第1–12页，2016年。[82] G. Van der Sande、D. Brunner 和 M. C. Soriano，《光子储备池计算的进展》，《纳米光子学》，第6卷第3期，第561–576页，2017年。[83] G. E. Santoro、R. Marto˘n´ak、E. Tosatti 和 R. Car，《伊辛自旋玻璃量子退火理论》，《科学》，第295卷第5564期，第2427–2430页，2002年。[84] E. Farhi、J. Goldstone、S. Gutmann 和 M. Sipser，《通过绝热演化进行量子计算》，*arXiv*预印本 *quant-ph/0001106*，2000年。[85] J. J. Hopfield，《具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统》，《美国国家科学院院刊》，第79卷第8期，第2554–2558页，1982年。[86] A. Lucas，《许多NP问题的伊辛形式化》，《物理学前沿》，第2卷，第5页，2014年。[87] B. Moln´ar、F. Moln´ar、M. Varga、Z. Toroczkai 和 M. Ercsey-Ravasz，《具有高模拟性能的连续时间最大可满足性求解器》，*Nature communications*，第9卷第1期，第4864页，2018年。[88] C. J. Burges，《因式分解作为优化问题》，*Microsoft Research MSR-TR-200*，2002年。[89] G. De las Cuevas、W. D¨ur、H. Briegel 和 M. Martin-Delgado，《将所有经典自旋模型映射到格点规范理论》，*New Journal of Physics*，第12卷第4期，第043014页，2010年。[90] M. Hernandez、A. Zaribafiyan、M. Aramon 和 M. Naghibi，《一种用于确定分子相似性的全新基于图的方法》，*arXiv*预印本 *arXiv:1601.06693*，2016年。[91] D. Marchand、M. Noori、A. Roberts、G. Rosenberg、B. Woods、U. Yildiz、M. Coons、D. De-vore 和 P. Margl，《使用量子退火机进行构象搜索的变邻域下降启发式方法》，*Scientific Reports*，第9卷第1期，第1–13页，2019年。[92] R. W. Harrison，《晶体学中的相位问题》，*JOSA a*，第10卷第5期，第1046–1055页，1993年。[93] O. Bunk、A. Diaz、F. Pfeiffer、C. David、B. Schmitt、D. K. Satapathy 和 J. F. Van Der Veen，《周期性样品的衍射成像：获取微流控通道中的一维浓度分布曲线》，*Acta Crystallographica Section A: Foundations of Crystallog-*

晶体学，第63卷，第4期，第306–314页，2007年。[94] J. Miao、T. Ishikawa、Q. Shen和T. Earnest，“扩展X射线晶体学以实现对非晶材料、细胞和单蛋白质复合物的成像”，《物理化学年度评论》，第59卷，第387–410页，2008年。[95] C. Tradonsky、I. Gershenzon、V. Pal、R. Chriki、A. Friesem、O. Raz和N. Davidson，“用于相位恢复问题的快速激光求解器”，《科学进展》，第5卷，第10期，文章编号eaax4530，2019年。[96] M. Ekeberg、C. L¨ovkvist、Y. Lan、M. Weigt和E. Aurell，“改进蛋白质中的接触预测：使用伪似然推断Potts模型”，*Physical Review E*，第87卷，第1期，文章编号012707，2013年。[97] N. Stroev和N. G. Berloff，“基于经典XY模型的神经网络架构”，*Physical Review B*，第104卷，第20期，文章编号205435，2021年。[98] F. Barahona，“关于伊辛自旋玻璃模型的计算复杂性”，*Journal ofPhysics A: Mathematical and General*，第15卷，第10期，第3241页，1982年。[99] G. De las Cuevas和T. S. Cubitt，“简单通用模型涵盖所有经典自旋物理学”，《科学》，第351卷，第6278期，第1180–1183页，2016年。[100]L. Zdeborov´a，“困难优化问题的统计物理学”，*arXiv*预印本*arXiv:0806.4112*，2008年。[101] M. Mezard和A. Montanari，《信息、物理与计算》。牛津大学出版社，2009年。[102] L. Zdeborov´a和F. Krzakala，“推断的统计物理学：阈值与算法”，*Advances in Physics*，第65卷，第5期，第453–552页，2016年。[103] F. Hamze、J. Raymond、C. A. Pattison、K. Biswas和H. G. Katzgraber，“Wishart植入系综：具有一级相变的可调粗糙成对伊辛模型”，*Phys-ical Review E*，第101卷，第5期，文章编号052102，2020年。[104] K. P. Kalinin和N. G. Berloff，“NP问题伊辛形式中的计算复杂性连续谱”，*Communications Physics*，第5卷，第1期，第1–10页，2022年。[105] F. Hamze、D. C. Jacob、A. J. Ochoa、D. Perera、W. Wang和H. G. Katzgraber，“从近在咫尺到永恒：自旋玻璃植入、铺砖谜题与约束满足问题”，*Physical Review E*，第97卷，第4期，文章编号043303，2018年。

[106] J. Hertz、A. Krogh、R. G. Palmer和H. Horner，“神经计算理论导论”，*Physics Today*，第44卷，第12期，第70页，1991年。[107] H. Cao、R. Chriki、S. Bittner、A. A. Friesem和N. Davidson，“具有可控相干性的复杂激光器”，《*Nature Reviews Physics*》，第1页，2019年。[108] D. Brunner、M. C. Soriano、C. R. Mirasso和I. Fischer，“利用瞬态实现每秒千兆字节数据速率的并行光子信息处理”，*Nature Communications*，第4卷，文章编号1364，2013年。[109] L. Bao、N.-H. Kim、L. J. Mawst、N. N. Elkin、V. N. Troshchieva、D. V. Vysotsky和A. P. Napartovich，“来自大孔径反导引垂直腔面发射激光器阵列的近衍射极限相干发射”，《应用物理学快报》，第84卷，第3期，第320–322页，2004年。[110] F. Rogister、K. S. Thornburg Jr、L. Fabiny、M. M¨oller和R. Roy，“局部耦合激光器阵列中的幂律空间相关性”，*Physical Review Letters*，第92卷，第9期，文章编号093905，2004年。[111] V. Pal、C. Tradonsky、R. Chriki、A. A. Friesem和N. Davidson，“利用耦合激光器观测耗散拓扑缺陷”，*Physical Review Letters*，第119卷，第1期，文章编号013902，2017年。[112] Y. Kuramoto，《化学振荡、波与湍流》。Courier Corporation，2003年。[113] Y. Kuramoto，“理论物理中的数学问题国际研讨会”，《物理学讲义》，第30卷，第420页，1975年。[114] P. L. McMahon、A. Marandi、Y. Haribara、R. Hamerly、C. Langrock、S. Tamate、T. Inagaki、H. Takesue、S. Utsunomiya、K. Aihara、等，“具有全连接的完全可编程100自旋相干伊辛机”，《科学》，第354卷，第6312期，第614–617页，2016年。[115] R. Hamerly、T. Inagaki、P. L. McMahon、D. Venturelli、A. Marandi、T. Onodera、E. Ng、C. Langrock、K. Inaba、T. Honjo、等，“相干伊辛机与量子退火机性能差异的实验研究”，《科学进展》，第5卷，第5期，文章编号eaau0823，2019年。[116] F. B¨ohm、T. Inagaki、K. Inaba、T. Honjo、K. Enbutsu、T. Umeki、R. Kasahara和H. Take-sue，“通过大规模二维伊辛模型仿真理解相干伊辛机的动力学”，*Nature Communications*，第9卷，第1期，文章编号5020，2018年。

[117] Y. Haribara、H. Ishikawa、S. Utsunomiya、K. Aihara 和 Y. Yamamoto，《相干伊辛机相对于经典神经网络的性能评估》，*Quantum Scienceand Technology*，第 2 卷，第 4 期，044002 页，2017年。[118] F. B¨ohm、G. Verschaffelt 和 G. Van der Sande，《基于光电反馈系统、用于求解优化问题的简易相干伊辛机》，*Nature com-munications*，第 10 卷，第 1 期，第 1–9 页，2019 年。[119] K. Takata 、 A. Marandi 和 Y. Yamamoto，《相互注入简并光学参量振荡器中的量子关联》，*Physical Review A*，第 92 卷，第 4 期，043821 页，2015年。[120] T. Leleu、Y. Yamamoto、P. L. McMahon 和 K. Aihara，《通过校正振幅异质性使模拟自旋系统中的局部最小值失稳》，*Physical review letters*，第 122 卷，第 4 期，040607 页，2019年。[121] A. D. King、W. Bernoudy、J. King、A. J. Berkley 和 T. Lanting，《用平均场算法模拟相干伊辛机》，*arXiv preprint arXiv:1806.08422*，2018年。[122] J. Kasprzak、M. Richard、S. Kundermann、A. Baas、P. Jeambrun、J. Keeling、F. Marchetti、M. Szyma´nska、R. Andr´e、J. Staehli、*et al.*，《激子-极化激元的玻色–爱因斯坦凝聚》，*Nature*，第 443 卷，第 7110 期，409 页，2006年。[123] J. Klaers、J. Schmitt、F. Vewinger 和 M. Weitz，《光学微腔中光子的玻色–爱因斯坦凝聚》，*Nature*，第 468 卷，第 7323 期，545 页，2010。[124] J. Klaers、F. Vewinger 和 M. Weitz，《“白墙”光子盒中二维光子气体的热化》，*Nature Physics*，第 6 卷，第 7 期，512 页，2010。[125] J. Klaers、J. Schmitt、T. Damm、F. Vewinger 和 M. Weitz，《近轴光的玻色–爱因斯坦凝聚》，*Applied Physics B*，第 105 卷，第 1 期，17 页，2011年。[126] J. Schmitt、T. Damm、F. Vewinger、M. Weitz 和 J. Klaers，《聚合物主体基质中二维光子气体的热化》，*New Journal of Physics*，第 14 卷，第 7 期，075019 页，2012年。[127] E. Wertz、L. Ferrier、D. Solnyshkov、R. Johne、D.Sanvitto、A. Lemaˆıtre、I. Sagnes、R. Grous- son、A. V. Kavokin、P. Senellart、*et al.*，《扩展极化激元凝聚体的自发形成与光学操控》，*Nature physics*，第 6 卷，第 11 期，860 页，2010。[128] F. Manni、K. G. Lagoudakis、T. C. H. Liew、R. Andr´e 和 B. Deveaud-Pl´edran，《极化激元凝聚体中的自发图案形成》，*Physical review letters*，第 107 卷，第 10 期，

106401 页，2011年。[129] G. Tosi、G. Christmann、N. Berloff、P. Tsotsis、T. Gao、Z. Hatzopoulos、P. Savvidis 和 J. Baumberg，《用光在非线性量子流体中塑造振荡器》，*NaturePhysics*，第 8 卷，第 3 期，190 页，2012年。[130] G. Tosi、G. Christmann、N. Berloff、P. Tsotsis、T. Gao、Z. Hatzopoulos、P. Savvidis 和 J. Baumberg，《半导体量子流体中几何锁定的涡旋晶格》，*Naturecommunications*，第 3 卷，1243 页，2012年。[131] N. G. Berloff、M. Silva、K. Kalinin、A. Askitopoulos、J. D. T¨opfer、P. Cilibrizzi、W. Langbein 和 P. G. Lagoudakis，《在极化激元模拟器中实现经典XY哈密顿量》，*Nature materials*，第 16 卷，第 11 期，1120 页，2017年。[132]C. Schneider、K. Winkler、M. Fraser、M. Kamp、Y. Yamamoto、E. Ostrovskaya 和 S. H¨ofling，《激子-极化激元囚禁与势景观工程》，*Reports onProgress in Physics*，第 80 卷，第 1 期，016503 页，2016年。[133] A. Amo 和 J. Bloch，《晶格中的激子-极化激元：非线性光子模拟器》，*Comptes Rendus Physique*，第 17 卷，第 8 期，第 934–945 页，2016年。[134] D. Dung、C. Kurtscheid、T. Damm、J. Schmitt、F. Vewinger、M. Weitz 和 J. Klaers，《热化光与耦合凝聚体的可变势》，*Nature Photonics*，第 11 卷，第 9 期，565 页，2017年。[135] K. P. Kalinin 和 N. G. Berloff，《用于全局优化的非平衡凝聚体网络》，*New Journal of Physics*，第 20 卷，第 11 期，113023 页，2018年。[136] K. P. Kalinin 和 N. G. Berloff，《作为耦合振子动力学范式的极化激元网络》，*Physical Review B*，第 100 卷，第 24 期，245306 页，2019年。[137] K. P. Kalinin 和 N. G. Berloff，《用非平衡凝聚体模拟伊辛模型、n态平面Potts模型及外场》，*Physical review letters*，第 121 卷，第 23 期，235302 页，2018年。[138] K. Kalinin、G. Mourgias-Alexandris、H. Ballani、N. G. Berloff、J. H. Clegg、D. Cletheroe、C. Gkantsidis、I. Haller、V. Lyutsarev、F. Parmigiani、L. Pickup、*et al.*，《模拟迭代机（AIM）：利用光求解含混合变量的二次优化问题》，*arXiv preprint arXiv:2304.12594*，2023年。[139] M. Syed 和 N. G. Berloff，《物理增强型分岔优化器：只需一个规范复网络》，*arXiv preprint arXiv:2207.11256*，2022年。

[140] S. K. Vadlamani、T. P. Xiao 和 E. Yablonovitch，《物理学成功实现拉格朗日乘子优化》，《美国国家科学院院刊》，第 117 卷，第 43 期，第 26639–26650 页，2020年。[141] B. T. Polyak，《加快迭代方法收敛的一些方法》，《苏联计算数学与数学物理》，第 4 卷，第 5 期，第 1–17 页，1964。[142] Y. Nesterov，《一种求解无约束凸最小化问题的方法，其收敛速率为 o (1/kˆ 2)》，载于《苏联科学院学报》，第 269 卷，第 543–547 页，1983年。[143] Y. Kuramoto，《理论物理中的数学问题国际研讨会》，《物理学讲义》，第 30 卷，第 420 页，1975年。[144] Y. Kuramoto 和 T. Tsuzuki，《反应-扩散系统中耗散结构的形成：约化摄动方法》，《理论物理进展》，第 54 卷，第 3 期，第 687–699 页，1975年。[145] J. A. Acebr´on、L. L. Bonilla、C. J. P. Vicente、F. Ritort 和 R. Spigler，《Kuramoto模型：同步现象的一个简单范例》，《现代物理评论》，第 77 卷，第 1 期，第 137 页，2005年。[146] K. Sankar、A. Scherer、S. Kako、S. Reifenstein、N. Ghadermarzy、W. B. Krayenhoff、Y. Inui、E. Ng、T. Onodera、P. Ronagh、等，《组合优化量子算法的基准研究：幺正与耗散》，*arXiv*预印本 *arXiv:2105.03528*，2021年。[147]Y. Inui 和 Y. Yamamoto，《耦合非简并参量振荡器中的纠缠与光子反聚束》，《熵》，第 23 卷，第 5 期，第 624 页，2021年。[148] H. Goto，《利用非线性振荡器网络实现基于分岔的绝热量子计算》，《科学报告》，第 6 卷，第 1 期，第 1–8 页，2016年。[149] H. Goto、K. Tatsumura 和 A. R. Dixon，《通过模拟非线性哈密顿系统中的绝热分岔进行组合优化》，《科学进展》，第 5 卷，第 4 期，文章编号 eaav2372，2019年。[150] H. Goto、K. Endo、M. Suzuki、Y. Sakai、T. Kanao、Y. Hamakawa、R. Hidaka、M. Yamasaki 和 K. Tatsumura，《基于经典力学的高性能组合优化》，《科学进展》，第 7 卷，第 6 期，文章编号 eabe7953，2021 年。[151] H. Ramsauer 、 B. Sch¨afl 、 J. Lehner 、 P. Seidl、M. Widrich、T. Adler、L. Gruber、M. Holzleitner、M. Pavlovi´c、G. K. Sandve、等，《Hopfield网络就是你所需要的一切》，*arXiv*预印本 *arXiv:2008.02217*，2020年。

[152] D. Krotov 和 J. Hopfield，《神经生物学与机器学习中的大型联想记忆问题》，*arXiv*预印本 *arXiv:2008.06996*，2020年。[153] J. E. Marsden 和 M. McCracken，《*Hopf*分岔及其应用》，第 19 卷。Springer Science & Business Media，2012年。[154] A. A. Andronov，《平面动力系统分岔理论》。以色列科学翻译计划；[可从美国部门……获取，1971年。[155] V. Pal、S. Mahler、C. Tradonsky、A. A. Friesem 和 N. Davidson，《用激光模拟器快速公平采样 x-y 自旋哈密顿量》，*Physical Review Research*，第 2 卷，第 3 期，文章编号 033008，2020年。[156] F. C. Hoppensteadt 和 E. M. Izhikevich，《弱连接神经网络》，第 126 卷。Springer Science & Business Media，1997年。[157] F. C. Hoppensteadt 和 E. M. Izhikevich，《弱连接神经振子的突触组织与动力学性质》，《生物控制论》，第 75 卷，第 2 期，第 117–127 页，1996年。[158] F. C. Hoppensteadt 和 E. M. Izhikevich，《弱连接神经振子的突触组织与动力学性质 II：学习相位信息》，《生物控制论》，第 75 卷，第 2 期，第 129–135 页，1996年。[159] F. C. Hoppensteadt 和 E. M. Izhikevich，《MEMS谐振器的同步与机械神经计算》，*IEEE*电路与系统汇刊*I*：基础理论与应用，第 48 卷，第 2 期，第 133–138 页，2001年。[160] T. Leleu、F. Khoyratee、T. Levi、R. Hamerly、T. Kohno 和 K. Aihara，《混沌振幅控制在高性能组合优化中的扩展优势》，《通讯物理》，第 4 卷，第 1 期，第 1–10 页，2021年。[161] N. Stroev 和 N. G. Berloff，《利用凝聚体相干网络和复耦合切换进行离散多项式优化》，*Physical Review Letters*，第 126 卷，第 5 期，文章编号 050504，2021年。[162] N. G. Berloff 和 B. V. Svistunov，《强非平衡玻色-爱因斯坦凝聚的情景》，*Physical Review A*，第 66 卷，第 1 期，文章编号 013603，2002年。[163] D. O. Hebb 和 W. Penfield，《额叶大范围双侧切除后的人的行为》，*Archives of Neurology & Psychiatry*，第 44 卷，第 2 期，第 421–438 页，1940年。

[164] D. O. Hebb，《高等动物学习的显著特征》，大脑机制与学习，第37卷，第46页，1961年。[165] D. J. Amit、H. Gutfreund 和 H. Sompolinsky，《在神经网络自旋玻璃模型中存储无限多个模式》，*Physical Review Letters*，第55卷，第14期，第1530页，1985年。[166] R. McEliece、E. Posner、E. Rodemich 和 S. Venkatesh，《霍普菲尔德联想记忆的存储容量》，《*IEEE*信息论汇刊》，第33卷，第4期，第461–482页，1987年。[167] I. Kanter 和 H. Sompolinsky，《无错误的记忆联想检索》，*Physical ReviewA*，第35卷，第1期，第380页，1987年。[168] E. Ising，《对铁磁性理论的贡献》，《物理学杂志》，第31卷，第1期，第253–258页，1925年。[169] R. M. Karp，《组合问题之间的可归约性》，载于计算复杂性，第85–103页，施普林格，1972年。[170] J. J. Hopfield 和 D. W. Tank，《用于优化问题决策的“神经”计算》，《生物控制论》，第52卷，第3期，第141–152页，1985年。[171] D. Krotov 和 J. Hopfield，《稠密联想记忆对对抗输入具有鲁棒性》，《神经计算》，第30卷，第12期，第3151–3167页，2018年。[172] M. Fern´andez-Delgado、E. Cernadas、S. Barro 和 D. Amorim，《解决现实世界的分类问题是否需要数百个分类器？》，《机器学习研究杂志》，第15卷，第1期，第3133–3181页，2014年。[173] G. Klambauer、T. Unterthiner、A. Mayr 和 S. Hochreiter，《自归一化神经网络》，载于第*31*届神经信息处理系统国际会议论文集，第972–981页，2017年。[174] M. Leonetti、E. H¨ormann、L. Leuzzi、G. Parisi 和 G. Ruocco，《具有可调复杂度的自旋玻璃动力学光学计算》，《美国国家科学院院刊》，第118卷，第21期，2021年。[175] B. P. Marsh、Y. Guo、R. M. Kroeze、S. Gopalakrishnan、S. Ganguli、J. Keeling 和 B. L. Lev，《利用共焦腔量子电动力学增强联想记忆的检索能力和存储容量》，*Physical Review X*，第11卷，第2期，第021048页，2021年。[176] B. P. Marsh、Y. Guo、R. M. Kroeze、S. Gopalakrishnan、S. Ganguli、J. Keeling 和 B. L. Lev，《利用共焦腔量子电动力学增强联想记忆的检索能力和存储容量》，

Physical Review X，第11卷，第2期，第021048页，2021年。[177] D. Krotov 和 J. J. Hopfield，《用于模式识别的稠密联想记忆》，神经信息处理进展，第29卷，第1172–1180页，2016年。[178] G. Joya、M. Atencia 和 F. Sandoval，《用于优化的Hopfield神经网络：不同动力学的研究》，神经计算，第43卷，第1–4期，第219–237页，2002年。[179] S. A. Cook，《定理证明过程的复杂性》，载于第三届*ACM*计算理论年度研讨会论文集，第151–158页，1971年。[180] M. R. Garey、D. S. Johnson 和 L. Stockmeyer，《一些简化的NP完全问题》，载于第六届*ACM*计算理论年度研讨会论文集，第47–63页，1974年。[181] H. Markowitz，《〈金融〉第7卷中的投资组合选择》，1952。[182] A. Fern´andez 和 S. G´omez，《使用神经网络进行投资组合选择》，计算机与运筹学研究，第34卷，第4期，第1177–1191页，2007年。[183] A. N. Sadigh、H. Mokhtari、M. Iranpoor 和 S. Ghomi，《基于粒子群优化和Hopfield神经网络混合方法的基数约束投资组合优化》，先进科学快报，第17卷，第1期，第11–20页，2012年。[184] T. S. Motzkin 和 E. G. Straus，《图的最大值及土兰定理的一种新证明》，*Canadian Journal of Mathematics*，第17卷，第533–540页，1965年。[185] F. Khosravi、A. Scherer 和 P. Ronagh，《使用玻色量子计算机进行混合整数规划》，*arXiv*预印本 *arXiv:2112.13917*，2021年。[186] P. Ronagh、F. Khosravi、U. Yildiz 和 A. Scherer，《使用相干光网络进行非凸二次规划》，2022年。[187] I. Waldspurger、A. d'Aspremont 和 S. Mallat，《相位恢复、最大割与复半定规划》，*Mathematical Programming*，第149卷，第1–2期，第47–81页，2015年。[188] E. Fix，判别分析：非参数判别及其一致性性质，第1卷。美国空军航空医学学院，1985年。[189] N. S. Altman，《核与最近邻非参数回归简介》，*The American Statistician*，第46卷，第3期，第175–185页，1992年。[190] V. Vapnik 和 A. Y. Lerner，《借助广义画像进行模式识别》，*Avtomat. i Telemekh*，第24卷，第6期，第774–780页，1963年。[191] C. Cortes 和 V. Vapnik，《支持向量网络》，机器学习，第20卷，第3期，第273–297页，1995年。

[192] S. Brin 和 L. Page，《大规模超文本网络搜索引擎的剖析》，1998年。[193] L. Page、S. Brin、R. Motwani 和 T. Winograd，《PageRank 引文排名：为网络建立秩序》，技术报告，斯坦福信息实验室，1999年。[194] L. Ermann、K. M. Frahm 和 D. L. Shepelyansky，《有向网络的 Google 矩阵分析》，《现代物理评论》，第87卷，第4期，第1261页，2015年。[195] D. F. Gleich，《超越网络的 PageRank》，《*SIAM Review*》，第57卷，第3期，第321–363页，2015年。[196] K. P. Kalinin 和 N. G. Berloff，《非常规计算硬件上的大规模可持续搜索》，*arXiv*预印本 *arXiv:2104.02553*，2021年。[197] M. Kim、R. Sumbaly 和 S. Shah，《面向服务的架构中的根因检测》，*ACM SIGMETRICS*《性能评估评论》，第41卷，第1期，第93–104页，2013年。[198] B. Jiang、S. Zhao 和 J. Yin，《用于预测交通流的自组织自然道路：一项敏感性研究》，《统计力学杂志：理论与实验》，第2008卷，第07期，第P07008页，2008年。[199] S. V. Aiyer、M. Niranjan 和 F. Fallside，《Hopfield模型性能的理论研究》，*IEEE Transactions on Neural Networks*，第1卷，第2期，第204–215页，1990年。[200] L. Van Der Maaten、E. Postma 和 J. Van den Herik，《降维：一项比较研究》，《机器学习研究杂志》，第10卷，第66-71期，第13页，2009年。[201] C. O. S. Sorzano、J. Vargas 和 A. P. Montano，《降维技术综述》，*arXiv*预印本 *arXiv:1403.2877*，2014年。[202] B. Sarwar、G. Karypis、J. Konstan 和 J. Riedl，《降维在推荐系统中的应用：案例研究》，技术报告，明尼苏达大学明尼阿波利斯分校计算机科学系，2000年。[203] R. Jensen 和 Q. Shen，《语义保持降维：基于粗糙集和模糊粗糙集的方法》，《*IEEE* 知识与数据工程汇刊》，第16卷，第12期，第1457–1471页，2004年。[204] K. Pearson，《关于空间中点集的最佳拟合直线和平面》，《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》，第2卷，第11期，第559–572页，1901年。[205] T. Hofmann，《学习文档相似性：一种用于文档检索和分类的信息几何方法》，载于《神经信息处理进展》

系统，第914–920页，2000年。[206] T. K. Landauer，《潜在语义分析作为意义理论》，潜在语义分析手册，第3卷，第32页，2007年。[207] S. Lloyd，《脉冲编码调制中的最小二乘量化》，《*IEEE*信息论汇刊》，第28卷，第2期，第129–137页，1982年。[208] H. Steinhaus，《将物质体划分为若干部分》，《波兰科学院通报》，第1卷，第804期，第801页，1956年。[209] J. MacQueen 等，《多元观测值分类与分析的一些方法》，载于第五届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，第1卷，第281–297页，美国加利福尼亚州奥克兰，1967年。[210] K. Gurney，神经网络导论。CRC出版社，1997年。[211] J. A. Anderson，神经网络导论。MIT Press，1995年。[212] B. Kr¨ose、B. Krose、P. van der Smagt 和 P. Smagt，《神经网络导论》，1993年。[213] B. Yegnanarayana，人工神经网络。PHI Learning私人有限公司，2009年。[214] I. Goodfellow、Y. Bengio 和 A. Courville，深度学习。MIT Press，2016年。[215] G. Cybenko，《通过S形函数的叠加进行逼近》，《控制、信号与系统数学》，第2卷，第4期，第303–314页，1989年。[216] R. Hecht-Nielsen，《反向传播神经网络理论》，载于《用于感知的神经网络》，第65–93页，爱思唯尔，1992年。[217] Y. Chauvin 和 D. E. Rumelhart，《反向传播：理论、架构与应用》。心理学出版社，1995年。[218] J. Ba 和 R. Caruana，《深度网络真的需要很深吗？》，《神经信息处理进展》，第27卷，2014年。[219] T. Poggio、H. Mhaskar、L. Rosasco、B. Miranda 和 Q. Liao，《深度网络而非浅层网络为何以及何时能够避免维度灾难：综述》，国际自动化与计算杂志，第14卷，第5期，第503–519页，2017年。[220] H. N. Mhaskar 和 T. Poggio，《深层网络与浅层网络：一种逼近理论视角》，《分析与应用》，第14卷，第06期，第829–848页，2016年。[221] V. Khrulkov、A. Novikov 和 I. Oseledets，《循环神经网络的表达能力》，*arXiv*预印本 *arXiv:1711.00811*，2017年。

[222] K. Kashinath、M. Mustafa、A. Albert、J. Wu、C. Jiang、S. Esmaeilzadeh、K. Azizzadenesheli、R. Wang、A. Chattopadhyay、A. Singh、等，“物理信息机器学习：天气与气候建模案例研究”，皇家学会哲学汇刊*A*辑，第379卷，第2194期，第20200093页，2021年。[223] J.-L. Wu、H. Xiao和E. Paterson，“用于增强湍流模型的物理信息机器学习方法：一个综合框架”，《*Physical Review Fluids*》，第3卷，第7期，第074602页，2018年。[224] A. T. Mohan、D. Tretiak、M. Chertkov和D. Livescu，“采用物理信息诊断的三维湍流时空深度学习模型”，《*Journal of Turbulence*》，第21卷，第9–10期，第484–524页，2020年。[225] W. Chen、Q. Wang、J. S. Hesthaven和C. Zhang，“用于非线性问题降阶建模的物理信息机器学习”，《*Journal of Computational Physics*》，第446卷，第110666页，2021年。[226] G. E. Karniadakis、I. G. Kevrekidis、L. Lu、P. Perdikaris、S. Wang和L. Yang，“物理信息机器学习”，《*Nature Reviews Physics*》，第3卷，第6期，第422–440页，2021年。[227] S. L. Brunton、M. Budiˇsi´c、E. Kaiser和J. N. Kutz，“动力系统的现代Koopman理论”，《*SIAM Review*》，第64卷，第2期，第229–340页，2022年。[228] E. Celledoni、M. J. Ehrhardt、C. Etmann、R. I. McLachlan、B. Owren、C.-B. SCHONLIEB和F. Sherry，“保结构深度学习”，《*European Journal of Applied Mathe- matics*》，第32卷，第5期，第888–936页，2021年。[229] E. Weinan，“基于动力系统的机器学习提案”，《*Communications in Mathematics and Statistics*》，第1卷，第5期，第1–11页，2017年。[230] A. Bravetti、M. L. Daza-Torres、H. Flores-Arguedas和M. Betancourt，“受耗散系统几何启发的优化算法”，*arXiv*预印本 *arXiv:1912.02928*，2019年。[231] K. Murphy，“图模型导论”，技术报告，第96卷，第1–19页，2001年。[232] S. L. Lauritzen，图模型，第17卷。克拉伦登出版社，1996年。[233] M. I. Jordan，“图模型”，《*Statistical Science*》，第19卷，第1期，第140–155页，2004年。[234] R. G. Cowell、P. Dawid、S. L. Lauritzen和D. J. Spiegelhalter，概率网络与专家系统：贝叶斯网络的精确计算方法。Springer Science & Business Media，2006年。

[235] M. Kearns、M. Littman和S. Singh，“博弈论图模型，UAI-01：第17届人工智能不确定性年会论文集”，2001年。[236] P. Wang、C. Shen、A. van den Hengel和P. H. Torr，“采用半定松弛及其应用的大规模二元二次优化”，*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，第39卷，第3期，第470–485页，2016年。[237] A. Joulin、F. Bach和J. Ponce，“用于图像协同分割的判别聚类”，载于*2010*年*IEEE*计算机视觉与模式识别会议，第1943–1950页，IEEE，2010年。[238] C. Schellewald和C. Schn¨orr，“基于凸松弛的概率子图匹配”，载于计算机视觉与模式识别中的能量最小化方法国际研讨会，第171–186页，施普林格，2005年。[239] C. Wu、X. Yang、H. Yu、R. Peng、I. Takeuchi、Y. Chen和M. Li，“利用光子生成网络中的光电噪声”，《科学进展》，第8卷，第3期，第eabm2956页，2022年。[240] C. M. Valensise、I. Grecco、D. Pierangeli和C. Conti，“大规模光子自然语言处理”，*Photonics Research*，第10卷，第12期，第2846–2853页，2022年。[241] S. Garg、J. Lou、A. Jain、Z. Guo、B. J. Shastri和M. Nahmias，“面向神经网络的动态精度模拟计算”，*IEEE*量子电子学专题期刊，第29卷，第2期：光计算，第1–12页，2022年。[242] C. Conti、N. Ghofraniha、L. Leuzzi和G. Ruocco，“随机激光器中的复制对称性破缺。随机激光器中的复制对称性破缺：重叠分布的实验测量”，*arXiv*预印本 *arXiv:2209.03781*，2022年。[243] N. Ghofraniha、I. Viola、F. Di Maria、G. Barbarella、G. Gigli、L. Leuzzi和C. Conti，“随机激光器中复制对称性破缺的实验证据”，*Nature Communications*，第6卷，第1期，第6058页，2015年。[244] S. Basak、A. Blanco和C. L´opez，“固态和液态染料激光器在激光阈值处的大幅涨落”，*Scientific Reports*，第6卷，第1期，第1–8页，2016年。[245] A. L. Moura、P. I. Pincheira、A. S. Reyna、E. P. Raposo、A. S. Gomes和C. B. de Ara´ujo，“多模Nd:YAG激光器光子类铁磁自发锁模相中的复制对称性破缺”，*Physical Review Letters*，第119卷，第16期，第163902页，2017年。

[246] D. Pierangeli, M. Rafayelyan, C. Conti, and S. Gigan, “可扩展自旋玻璃光学模拟器”, *Physical Review Applied*, vol. 15, no. 3, p. 034087, 2021.[247] Y.-j. Lee, M. B. On, X. Xiao, R. Proietti, and S. Yoo, “采用兴奋性和抑制性输入的受伊日凯维奇模型启发的光电神经元，用于高能效光子脉冲神经网络”，*arXiv*预印本 *arXiv:2105.02809*，2021年。[248] Y. Sun, N. B. Agostini, S. Dong, and D. Kaeli, “利用产品数据总结中央处理器和图形处理器的设计趋势”, *arXiv*预印本 *arXiv:1911.11313*，2019年。[249] E. Nurvitadhi, G. Venkatesh, J. Sim, D. Marr, R. Huang, J. Ong Gee Hock, Y. T. Liew, K. Srivatsan, D. Moss, S. Subhaschandra, 等, “现场可编程门阵列能否在加速下一代深度神经网络方面胜过图形处理器？”，载于*2017*年 *ACM/SIGDA* 国际现场可编程门阵列研讨会论文集，第5–14页，2017年。[250] N. P. Jouppi, C. Young, N. Patil, D. Patterson, G. Agrawal, R. Bajwa, S. Bates, S. Bhatia, N. Boden, A. Borchers, 等，“张量处理单元在数据中心中的性能分析”，载于第*44*届年度国际计算机体系结构研讨会论文集，第1–12页，2017年。[251] H. Jeong and L. Shi，“用于神经网络的忆阻器件”, *Journal of Physics D: AppliedPhysics*，第52卷，第2期，023003页，2018年。[252] P. A. Merolla, J. V. Arthur, R. Alvarez-Icaza, A. S. Cassidy, J. Sawada, F. Akopyan, B. L. Jackson, N. Imam, C. Guo, Y. Nakamura, 等，“具有可扩展通信网络和接口的百万脉冲神经元集成电路”, 《科学》，第345卷，第6197期，第668–673页，2014年。[253] M. Davies, N. Srinivasa, T.-H. Lin, G. Chinya, Y. Cao, S. H. Choday, G. Dimou, P. Joshi, N. Imam, S. Jain, 等，“Loihi：一种支持片上学习的神经形态众核处理器”，*IEEE Micro*，第38卷，第1期，第82–99页，2018年。[254] B. V. Benjamin, P. Gao, E. McQuinn, S. Choudhary, A. R. Chandrasekaran, J.-M. Bussat, R. Alvarez-Icaza, J. V. Arthur, P. A. Merolla, and K. Boahen，“Neurogrid：一种用于大规模神经模拟的混合模拟-数字多芯片系统”，*IEEE*学报，第102卷，第5期，第699–716页，2014年。[255] E. M. Izhikevich，神经科学中的动力系统。MIT Press，2007年。[256] C. V. Poulton, M. J. Byrd, P. Russo, E. Timurdogan, M. Khandaker, D. Vermeulen, and M. R. Watts，“高性能远距离激光雷达与自由空间数据通信

光学相控阵列”，*IEEE*量子电子学专题期刊，第25卷，第5期，第1–8页，2019年。[257] S. W. Keckler, W. J. Dally, B. Khailany, M. Garland, and D. Glasco，“图形处理器与并行计算的未来”，*IEEE Micro*，第31卷，第5期，第7–17页，2011年。[258] V. Sze, Y.-H. Chen, T.-J. Yang, and J. S. Emer，“深度神经网络的高效处理：教程与综述”，*IEEE*学报，第105卷，第12期，第2295–2329页，2017年。[259] T. Wang, S.-Y. Ma, L. G. Wright, T. Onodera, B. C. Richard, and P. L. McMahon，“每次乘法使用少于1个光子的光学神经网络”，*Nature Communications*，第13卷，第1期，第1–8页，2022年。[260] X. Xiao, M. B. On, T. Van Vaerenbergh, D. Liang, R. G. Beausoleil, and S. B. Yoo，“在III–V族材料与硅集成的MOS电容器平台上实现大规模、高能效的张量化光学神经网络”，*APL Photonics*，第6卷，第12期，126107页，2021年。[261] K. Tyszka, M. Furman, R. Mirek, M. Kr´ol, A. Opala, B. Seredy´nski, J. Suffczy´nski, W. Pa-cuski, M. Matuszewski, J. Szczytko, 等，“激子-极化激元凝聚体中的漏泄积分-发放机制及其在光子脉冲神经元中的应用”，*arXiv*预印本 *arXiv:2111.13123*，2021年。[262] A. Opala, S. Ghosh, T. C. Liew, and M. Matuszewski，“金兹堡-朗道极化激元晶格系统中的神经形态计算”，*Physical Review Applied*，第11卷，第6期，064029页，2019年。[263] J. W. Goodman, A. Dias, and L. Woody，“一种用于执行离散傅里叶变换的全并行高速非相干光学方法”，《光学快报》，第2卷，第1期，第1–3页，1978年。[264] D. E. Tamir, N. T. Shaked, P. J. Wilson, and S. Dolev，“高速低功耗电光数字信号处理协处理器”，*JOSA A*，第26卷，第8期，第A11–A20页，2009年。[265] C. Ramey，“用于人工智能加速的硅光子学：Hot Chips 32”，载于*2020*年 *IEEE Hot Chips 32* 研讨会（*HCS*），第1–26页，IEEE，2020年。[266] J. Feldmann, N. Youngblood, M. Karpov, H. Gehring, X. Li, M. Stappers, M. Le Gallo, X. Fu, A. Lukashchuk, A. S. Raja, 等，“利用集成光子张量核心进行并行卷积处理”，《自然》，第589卷，第7840期，第52–58页，2021年。[267] X. Xu, M. Tan, B. Corcoran, J. Wu, A. Boes, T. G. Nguyen, S. T. Chu, B. E. Little, D. G. Hicks, R. Morandotti, 等，“用于光学神经网络的11 TOPS光子卷积加速器”，《自然》，第589卷，第7840期，第44–51页，2021年。

[268] K. Vandoorne、P. Mechet、T. Van Vaerenbergh、M. Fiers、G. Morthier、D. Verstraeten、B. Schrauwen、J. Dambre 和 P. Bienstman，《在硅光子芯片上实验演示储备池计算》，*Nature Communications*，第5卷，第1期，第1–6页，2014年。[269] T. Inagaki、Y. Haribara、K. Igarashi、T. Sonobe、S. Tamate、T. Honjo、A. Marandi、P. L. McMahon、T. Umeki、K. Enbutsu、等，《用于2000节点优化问题的相干伊辛机》，《科学》，第354卷，第6312期，第603–606页，2016年。[270] J. Arnaud，《激光噪声经典理论》，《光学与量子电子学》，第27卷，第63–89页，1995年。[271] C. H. Henry 和 R. F. Kazarinov，《光子学中的量子噪声》，《现代物理评论》，第68卷，第3期，第801页，1996年。[272] A. Schenzle，《非线性光学系统中的经典噪声与量子噪声》，《统计物理学杂志》，第54卷，第1243–1288页，1989年。[273] H. A. Haus，《从经典噪声到量子噪声》，*JOSA B*，第12卷，第11期，第2019–2036页，1995年。[274] G. Mourgias-Alexandris、M. Moralis-Pegios、A. Tsakyridis、S. Simos、G. Dabos、A. Totovic、N. Passalis、M. Kirtas、T. Rutirawut、F. Gardes、等，《利用相干硅光子学实现抗噪高速深度学习》，*Nature Communications*，第13卷，第1期，第5572页，2022年。[275] G. Giamougiannis、A. Tsakyridis、M. Moralis-Pegios、C. Pappas、M. Kirtas、N. Passalis、D. Lazovsky、A. Tefas 和 N. Pleros，《模拟纳米光子计算走向实用：用于具有动态精度的分块光学矩阵乘法的硅光子深度学习引擎》，《纳米光子学》，2023年。[276] Z. Zhu、A. J. Ochoa 和 H. G. Katzgraber，《二元优化问题基态构型的公平采样》，*Physical Review E*，第99卷，第6期，第063314页，2019年。[277] G. E. Hinton，《通过最小化对比散度训练专家乘积模型》，《神经计算》，第14卷，第8期，第1771–1800页，2002年。[278] H. Sakaguchi、K. Ogata、T. Isomura、S. Utsunomiya、Y. Yamamoto 和 K. Aihara，《利用简并光学参量振荡器网络进行基于结构的虚拟筛选中的玻尔兹曼采样》，《熵》，第18卷，第10期，第365页，2016年。[279] Z. Bian、F. Chudak、R. B. Israel、B. Lackey、W. G. Macready 和 A. Roy，《将约束优化问题映射到量子退火及其在故障诊断中的应用》，

Frontiers in ICT，第3卷，第14页，2016年。[280] E. Ng、T. Onodera、S. Kako、P. L. McMahon、H. Mabuchi 和 Y. Yamamoto，《利用相干伊辛机高效采样基态和低能伊辛自旋构型》，*Physical Review Research*，第4卷，第1期，第013009页，2022年。[281] K. P. Kalinin 和 N. G. Berloff，《利用增益耗散系统全局优化自旋哈密顿量》，*Scientific Reports*，第 8 卷，第1期，第17791页，2018年。[282] E. S. Tiunov、A. E. Ulanov 和 A. Lvovsky，《通过模拟相干伊辛机进行退火》，*Optics Express*，第27卷，第7期，第10288–10295页，2019年。[283] F. Bontempi、S. Pinna、N. Andriolli、A. Bogoni、X. J. Leijtens、J. Bolk 和 G. Contestabile，《多功能电流控制InP光子集成延迟干涉仪》，*IEEE*量子电子学杂志，第48卷，第11期，第1453–1461页，2012年。[284] D. Ballarini、M.De Giorgi、E. Cancellieri、R. Houdr´e、E.Giacobino、R. Cingolani、A. Bramati、G. Gigli 和 D. Sanvitto，《全光激子极化子晶体管》，*Nature Communications*，第4卷，第1期，第1–8页，2013年。[285] W. Chen、K. M. Beck、R. B¨ucker、M. Gullans、M. D. Lukin、H. Tanji-Suzuki 和 V. Vuleti´c，《由一个存储光子门控的全光开关和晶体管》，《科学》，第341卷，第6147期，第768–770页，2013年。[286] A. V. Zasedatelev、A. V. Baranikov、D. Urbonas、F. Scafirimuto、U. Scherf、T. St¨oferle、R. F. Mahrt 和 P. G. Lagoudakis，《室温有机极化子晶体管》，*NaturePhotonics*，第13卷，第6期，第378–383页，2019年。[287] A. V. Baranikov、A. V. Zasedatelev、D. Urbonas、F. Scafirimuto、U. Scherf、T. St¨oferle、R. F. Mahrt 和 P. G. Lagoudakis，《具有亚皮秒运行速度的全光可级联通用逻辑门》，*arXiv*预印本 *arXiv:2005.04802*，2020年。[288] K. Nozaki、T. Tanabe、A. Shinya、S. Matsuo、T. Sato、H. Taniyama 和 M. Notomi，《利用光子晶体纳米腔实现亚飞焦耳全光开关》，*Nature Photonics*，第4卷，第7期，第477–483页，2010年。[289] T. F. De Lima、H.-T. Peng、A. N. Tait、M. A. Nahmias、H. B. Miller、B. J. Shastri 和 P. R. Prucnal，《利用神经形态光子学进行机器学习》，*Journal of Lightwave Technology*，第37卷，第5期，第1515–1534页，2019年。[290] A. Tait、A. Wu、T. F. De Lima、M. Nahmias、B. Shastri 和 P. Prucnal，《具有改进通道密度和容差的微环权重库设计》，载于*2017 IEEE*光子学会议论文集

信息处理（*IPC*），第101–102页，IEEE，2017年。[291] D. A. Miller，“非理想元件下的完美光学”，*Optica*，第2卷，第8期，第747–750页，2015年。[292] G. Mourgias-Alexandris、A. Tsakyridis、N. Passalis、A. Tefas、K. Vyrsokinos和N. Pleros，“具有Sigmoid激活函数的全光神经元”，*Optics express*，第27卷，第7期，第9620–9630页，2019年。[293] H. Sharifi、S. M. Hamidi和K. Navi，“一种基于阈值逻辑的全光子晶体逻辑门及函数的新型设计方法”，*Optics Communications*，第370卷，第231–238页，2016年。[294] M. Wuttig、H. Bhaskaran和T. Taubner，“用于非易失性光子学应用的相变材料”，*Nature Photonics*，第11卷，第8期，第465–476页，2017年。[295] B. M. Wilamowski和H. Yu，“无需反向传播的神经网络学习”，*IEEETransactions on Neural Networks*，第21卷，第11期，第1793–1803页，2010年。[296] X. Guo、T. D. Barrett、Z. M. Wang和A. Lvovsky，“通过非线性单元进行反向传播，实现神经网络的全光训练”，*Photonics Research*，第9卷，第3期，第B71–B80页，2021年。[297] T. Zhou、L. Fang、T. Yan、J. Wu、Y. Li、J. Fan、H. Wu、X. Lin和Q. Dai，“衍射光学神经网络的原位光学反向传播训练”，*Photonics Research*，第8卷，第6期，第940–953页，2020年。[298] V. Lopez Pastor和F. Marquardt，“使用哈密顿回声反向传播设计自学习机器”，*Bulletin of the American Physical Society*，2022年。[299] F. Marquardt和V. Lopez-Pastor，“如何将时间反演不变物理系统转变为自学习机器”，*Bulletin of the American Physical Society*，2022年。[300] L. G. Wright、T. Onodera、M. M. Stein、T. Wang、D. T. Schachter、Z. Hu和P. L. McMahon，“通过反向传播训练的深度物理神经网络”，*Nature*，第601卷，第7894期，第549–555页，2022年。[301] M. Nakajima、K. Inoue、K. Tanaka、Y. Kuniyoshi、T. Hashimoto和K. Nakajima，“采用生物启发式训练方法的物理深度学习：物理硬件的无梯度方法”，*Nature Communications*，第13卷，第1期，第7847页，2022年。[302] T. P. Lillicrap、D. Cownden、D. B. Tweed和C. J. Akerman，“随机突触反馈权重支持深度学习中的误差反向传播”，*Nature communications*，第7卷，

第1期，第13276页，2016年。[303] K. Weiss、T. M. Khoshgoftaar和D. Wang，“迁移学习综述”，*Journal of Bigdata*，第3卷，第1期，第1–40页，2016年。[304] F. Zhuang、Z. Qi、K. Duan、D. Xi、Y. Zhu、H. Zhu、H. Xiong和Q. He，“迁移学习综合综述”，*IEEE*学报，第109卷，第1期，第43–76页，2020年。[305] A. Fedorov、N. Gisin、S. Beloussov和A. Lvovsky，“量子优势阈值下的量子计算：面向实际应用的综述”，*arXiv*预印本 *arXiv:2203.17181*，2022年。[306] J. Preskill，“NISQ时代及其之后的量子计算”，*Quantum*，第2卷，第79页，2018年。[307] G. Kalai，“反对量子计算机的论证、量子自然法则与Google的量子霸权主张”，*arXiv*预印本 *arXiv:2008.05188*，2020年。[308] M. Fuechsle、S. Mahapatra、F. Zwanenburg、M. Friesen、M. Eriksson和M. Y. Simmons，“少电子单晶硅量子点的光谱学”，*Nature Nanotechnology*，第5卷，第7期，第502–505页，2010年。[309] C. Bradley、J. Randall、M. Abobeih、R. Berrevoets、M. Degen、M. Bakker、M. Markham、D. Twitchen和T. Taminiau，“具有最长达一分钟量子存储能力的十量子比特固态自旋寄存器”，*Physical Review X*，第9卷，第3期，第031045页，2019年。[310] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、等，“探测51原子量子模拟器中的多体动力学”，*Nature*，第551卷，第7682期，第579–584页，2017年。[311] L. Henriet、L. Beguin、A. Signoles、T. Lahaye、A. Browaeys、G.-O. Reymond和C. Jurczak，“使用中性原子进行量子计算”，*Quantum*，第4卷，第327页，2020年。[312] H. Zhang、C.-X. Liu、S. Gazibegovic、D. Xu、J. A. Logan、G. Wang、N. Van Loo、J. D. Bom- mer、M. W. De Moor、D. Car、等，“量子化马约拉纳电导”，*Nature*，第556卷，第7699期，第74–79页，2018年。[313] N. C. Menicucci、P. Van Loock、M. Gu、C. Weedbrook、T. C. Ralph和M. A. Nielsen，“连续变量簇态的通用量子计算”，*Physical reviewletters*，第97卷，第11期，第110501页，2006年。[314] S. Aaronson和A. Arkhipov，“线性光学的计算复杂性”，载于第四十三届*ACM*计算理论研讨会论文集，第333–342页，2011年。

[315] C. S. Hamilton, R. Kruse, L. Sansoni, S. Barkhofen, C. Silberhorn 和 I. Jex, 《高斯玻色子采样》, *Physical review letters*, 第 119 卷, 第 17 期, 页码 170501, 2017年。[316] L. Banchi, M. Fingerhuth, T. Babej, C. Ing 和 J. M. Arrazola, 《利用高斯玻色子采样进行分子对接》, *Science advances*, 第 6 卷, 第 23 期, 页码 eaax1950, 2020年。[317] J. Huh, G. G. Guerreschi, B. Peropadre, J. R. McClean 和 A. Aspuru-Guzik, 《用于分子振电光谱的玻色子采样》, *Nature Photonics*, 第 9 卷, 第 9 期, 页码 615–620, 2015年。[318] B. Wu, B. Cheng, F. Jia, J. Zhang, M.-H. Yung 和 X. Sun, 《高斯玻色子采样经典模拟的加速》, *Science Bulletin*, 第 65 卷, 第 10 期, 页码 832–841, 2020年。[319] J. Carolan, J. D. Meinecke, P. J. Shadbolt, N. J. Russell, N. Ismail, K. W¨orhoff, T. Rudolph, M. G. Thompson, J. L. O'brien, J. C. Matthews, 等, 《线性光学中量子复杂性的实验验证》, *Nature Photonics*, 第 8 卷, 第 8 期, 页码 621–626, 2014年。[320] H. Wang, J. Qin, X. Ding, M.-C. Chen, S. Chen, X. You, Y.-M. He, X. Jiang, L. You, Z. Wang, 等, 《在 1 0 14 维希尔伯特空间中使用 20 个输入光子和 60 模干涉仪进行玻色子采样》, *Physical review letters*, 第 123 卷, 第 25 期, 页码 250503, 2019年。[321] H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, J. Qin, D. Wu, X. Ding, Y. Hu, 等, 《利用光子实现量子计算优势》, *Science*, 第 370 卷, 第 6523 期, 页码 1460–1463, 2020年。[322] G. Kalai 和 G. Kindler, 《高斯噪声敏感性与玻色子采样》, *arXiv*预印本 *arXiv:1409.3093*, 2014年。[323] P. Clifford 和 R. Clifford, 《玻色子采样的经典复杂性》, 载于第二十九届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集, 页码 146–155, SIAM, 2018年。[324] J. J. Renema, 《任意输入态玻色子采样器中的边缘概率》, *arXiv*预印本 *arXiv:2012.14917*, 2020年。[325] A. Popova 和 A. Rubtsov, 《突破高斯玻色子采样的量子优势阈值》, 载于*Quantum 2.0*, 页码 QW2A–15, Optica出版集团, 2022年。[326] H.-S. Zhong, Y.-H. Deng, J. Qin, H. Wang, M.-C. Chen, L.-C. Peng, Y.-H. Luo, D. Wu, S.-Q. Gong, H. Su, 等, 《利用受激压缩光进行相位可编程高斯玻色子采样》, *Physical review letters*, 第 127 卷, 第 18 期, 页码 180502, 2021年。[327] A. Deshpande, A. Mehta, T. Vincent, N. Quesada, M. Hinsche, M. Ioannou, L. Madsen, J. Lavoie, H. Qi, J. Eisert, 等, 《通过高维

高斯玻色子采样实现量子计算优势》，*Science advances*，第 8 卷，第 1 期，页码 eabi7894，2022年。[328] J. Arrazola, V. Bergholm, K. Br´adler, T. Bromley, M. Collins, I. Dhand, A. Fumagalli, T. Gerrits, A. Goussev, L. Helt，等，《在可编程纳米光子芯片上实现多光子量子电路》，*Nature*，第 591 卷，第 7848 期，页码 54–60，2021年。[329] K. Br´adler, P.-L. Dallaire-Demers, P. Rebentrost, D. Su 和 C. Weedbrook，《利用高斯玻色子采样寻找任意图的完美匹配》，*Physical Review A*，第 98 卷，第 3 期，页码 032310，2018年。[330] M. Schuld, K. Br´adler, R. Israel, D. Su 和 B. Gupt，《利用高斯玻色子采样器测量图的相似性》，*Physical Review A*，第 101 卷，第 3 期，页码 032314，2020年。[331] J. E. Bourassa, R. N. Alexander, M. Vasmer, A. Patil, I. Tzitrin, T. Matsuura, D. Su, B. Q. Baragiola, S. Guha, G. Dauphinais，等，《可扩展光子容错量子计算机蓝图》，*Quantum*，第 5 卷，页码 392，2021年。[332] M. V. Larsen, C. Chamberland, K. Noh, J. S. Neergaard-Nielsen 和 U. L. Andersen，《容错连续变量测量型量子计算架构》，*PrxQuantum*，第 2 卷，第 3 期，页码 030325，2021年。[333] A. Neville, C. Sparrow, R. Clifford, E. Johnston, P. M. Birchall, A. Montanaro 和 A. Laing，《性能优于近期实验的经典玻色子采样算法》，*Nature Physics*，第 13 卷，第 12 期，页码 1153–1157，2017年。[334] K. Br´adler, S. Friedland, J. Izaac, N. Killoran 和 D. Su，《图同构与高斯玻色子采样》，*Special Matrices*，第 9 卷，第 1 期，页码 166–196，2021年。[335] D. J. Brod, E. F. Galv˜ao, A. Crespi, R. Osellame, N. Spagnolo 和 F. Sciarrino，《玻色子采样的光子实现：综述》，*Advanced Photonics*，第 1 卷，第 3 期，页码 034001，2019年。[336] J. Wang, F. Sciarrino, A. Laing 和 M. G. Thompson，《集成光子量子技术》，*Nature Photonics*，第 14 卷，第 5 期，页码 273–284，2020年。[337] J. Carolan, C. Harrold, C. Sparrow, E. Mart´ın-L´opez, N. J. Russell, J. W. Silverstone, P. J. Shadbolt, N. Matsuda, M. Oguma, M. Itoh，等，《通用线性光学》，*Science*，第 349 卷，第 6249 期，页码 711–716，2015年。[338] J. Biamonte, P. Wittek, N. Pancotti, P. Rebentrost, N. Wiebe 和 S. Lloyd，《量子机器学习》，*Nature*，第 549 卷，第 7671 期，页码 195–202，2017年。

[339] G. R. Steinbrecher、J. P. Olson、D. Englund 和 J. Carolan，《量子光学神经网络》，*npj Quantum Information*，第 5 卷，第 1 期，第 1–9 页，2019年。[340] F. M. Miatto、M. Epping 和 N. L¨utkenhaus，《单向量子中继器的哈密顿量》，*Quantum*，第 2 卷，第 75 页，2018年。[341] M. Streif 和 M. Leib，《量子近似优化算法与量子退火及模拟退火的比较》，*arXivpreprint arXiv:1901.01903*，2019年。[342] M. Willsch、D. Willsch、F. Jin、H. De Raedt 和 K. Michielsen，《量子近似优化算法的基准测试》，*Quantum Information Processing*，第 19 卷，第 1–24 页，2020年。[343] M. P. Harrigan、K. J. Sung、M. Neeley、K. J. Satzinger、F. Arute、K. Arya、J. Atalaya、J. C. Bardin、R. Barends、S. Boixo、等，《在平面超导处理器上对非平面图问题进行量子近似优化》，*Nature Physics*，第 17 卷，第 3 期，第 332–336 页，2021年。[344] E. Ng、T. Onodera、S. Kako、P. L. McMahon、H. Mabuchi 和 Y. Yamamoto，《利用相干伊辛机高效采样基态和低能伊辛自旋构型》，*Physical Review Research*，第 4 卷，第 1 期，第 013009 页，2022年。[345] G. Lindblad，《关于量子动力学半群的生成器》，*Communications inMathematical Physics*，第 48 卷，第 2 期，第 119–130 页，1976年。[346] V. Gorini、A. Kossakowski 和 E. C. G. Sudarshan，《n能级系统的完全正动力学半群》，*Journal of Mathematical Physics*，第 17 卷，第 5 期，第 821–825 页，1976年。[347] J. Levinsen、G. Li 和 M. M. Parish，《微腔中激子-极化激元的微观描述》，*Physical Review Research*，第 1 卷，第 3 期，第 033120 页，2019年。[348] M. A. Bastarrachea-Magnani、A. Camacho-Guardian 和 G. M. Bruun，《由电子气介导的吸引性和排斥性激子-极化激元相互作用》，*Physical Review Letters*，第 126 卷，第 12 期，第 127405 页，2021年。[349] D. K. Efimkin、E. K. Laird、J. Levinsen、M. M. Parish 和 A. H. MacDonald，《激子-极化子问题中的电子-激子相互作用》，*Physical Review B*，第 103 卷，第 7 期，第 075417 页，2021年。[350] F. Cai、S. Kumar、T. Van Vaerenbergh、X. Sheng、R. Liu、C. Li、Z. Liu、M. Foltin、S. Yu、Q. Xia、等，《利用忆阻器中的固有噪声实现高能效组合优化

Hopfield神经网络”，*Nature Electronics*，第3卷，第7期，第409–418页，2020年 .