arXiv:2301.11852v1 [cs.CE] 27 Jan 2023

一种用于均质化多物理场问题双尺度优化的序贯全局规划方法：应用于Biot多孔介质

Bich Ngoc Vu[1*]、Vladimir Lukeˇs[2]、Michael Stingl[1] 和Eduard Rohan[2*]

[1]科学计算能力单元，埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，Martenstrasse 5a，埃朗根，91058，德国。[2]力学系与NTIS信息社会新技术，比尔森西波希米亚大学，Univerzitn´ı 22，Plzeˇn，30614，捷克共和国。

*通讯作者。电子邮箱：bich.ngoc.vu@fau.de；rohan@kme.zcu.cz；贡献作者：vlukes@kme.zcu.cz；michael.stingl@fau.de；

摘要

我们提出了一种新方法和一种算法，用于在双尺度设置下优化流体饱和多孔介质的材料构型与行为。状态问题由Biot模型控制，该模型描述了均质化孔弹性结构中的流固耦合。然而，该方法具有广泛适用性，可用于涉及多个宏观场的多物理场问题，其中均匀化建立了微观构型与宏观数学模型之间的关系。优化变量通过孔隙形状描述局部微结构设计，而孔隙形状决定有效介质性质——即通过均匀化方法计算得到的材料系数。数值优化策略的主要思想包括：a）采用与几何参数相关联的材料系数预计算数据库；b）应用序贯全局规划（SGP）方法，求解材料系数在宏观尺度上的优化分布问题。尽管该方法与自由材料优化（FMO）方法存在相似之处，但只有有效材料系数被视为可行，其对应的可配置微结构集合必须具有明确的定义。得益于SGP方法的灵活性，可以轻松处理具有完全独立参数化的不同类型微结构。通过一系列数值实验展示了该方法的有效性。我们表明，SGP方法能够同时处理具有复杂参数化的多种微结构，并且只需求解数量相当少且稳定的状态问题。

关键词： 多材料优化；序贯全局规划；均匀化；Biot模型；孔弹性；灵敏度分析

1 引言

流体饱和孔弹性介质（FSPM）的设计正逐渐成为一个日益受到关注的研究主题

研究兴趣源于其数学上的复杂性和巨大的应用潜力。尽管FSPM理论是在地质力学和土木工程背景下发展起来的，但如今这类材料十分丰富

，广泛应用于许多工程领域。对微结构进行合理设计，可以赋予超材料与可控流体输运或弹性相关的特性。特别是，软体机器人可以设计成可充气多孔结构，通过流体含量的变化产生运动和力，例如， [1]。为此，流体饱和多孔材料的行为采用Biot模型进行描述 [2], ，该模型建立在小应变理论框架内，并采用现象学方法提出。均匀化方法使得准静态Biot方程得以推导[3]。此后，许多研究将相关结果扩展到了动力学情形，这对于处理波传播十分重要，参见例如 [4]。作为对线性理论的扩展，文献 [5]提出了一种具有应变相关孔弹性系数和渗透率系数的修正Biot模型。

构成流体饱和多孔介质的微结构拓扑优化已在 [6] 和 [1]中得到研究。其中，在均匀化框架下处理了流固耦合问题，并提出了一种用于简化计算的近似方法。

本文旨在提出一种双尺度优化方法，以实现微结构设计的空间分级。双尺度优化问题此前已在文献中得到广泛讨论。整个思想始于Bendsøe和Kikuchi的开创性论文 [7]，其中提出了如下概念：对于给定的单胞参数化，在预处理步骤中，基于固定的参数网格执行均匀化过程。随后，在优化的每一步中，首先通过插值为每个设计元素获取（近似的）有效材料系数。接着，将这些系数代入状态方程，求解该方程并评估代价。反过来，灵敏度则通过链式法则计算，即首先求目标量关于材料系数的导数，然后再求材料系数关于设计参数化的导数。这一过程为应用任何合适的基于梯度的优化求解器铺平了道路，例如OCM [8]、MMA [9] 或SNOPT [10], ，这里只列举结构拓扑和材料优化中最常用的几种。

尽管这一概念本质上可以推广到其他类别的问题（例如 [11–13]针对热机械问题所做的推广），但本文选择了略有不同的路线。原因有ددع：首先，该概念从其本质上说，在很大程度上取决于所选择的参数化方式。如果参数以显著的非凸方式影响均匀化性质（例如允许旋转基胞时就是如此），则可能会引入许多局部极小值，并且必须采取额外措施以避免陷入其中。其次，要将原始概念扩展到使用完全独立的单胞类型并不容易，这些单胞类型可能具有不同的几何形状或材料构型。在这种情况下，指定一个光滑的参数化并非易事。典型做法是首先分别为不同的单胞类型引入独立的参数化（例如使用尺寸变量），然后在此基础上添加一种用于有效张量的光滑插值方案，例如多材料优化中所采用的方案（见[14]）。然而，问题在于，第二层插值会引入一些材料系数，而这些系数通常无法不 从微结构角度进行解释。因此，需要额外的惩罚策略，以确保这些不符合物理的选择不会保留在最优解中。近期的工作[15]成功展示了这种方法。在另一篇近期文章中， [16]选择了两种通过水平集函数描述的单胞类型，使得它们的几何参数混合后可以直接解释为第三种单胞类型。 [17] 同样选择使用水平集函数描述微结构的几何形状。然而，在处理多个材料类别时，作者定义了浮动块，其中每个块都是设计域的一个子域，并且只由一种微结构类型占据。随后，在宏观尺度上对这些块的布局进行优化，并通过可微最大算子组合它们的重叠部分。

在本文中，我们介绍如何利用 SGP 概念克服这些缺点。其基本思想已在 [18]中提出，现将其推广至多物理场双尺度设置。这包括将一种 MMA 型块可分离模型函数（见 [19]）扩展为

孔弹性环境，将计算拆分为一个离线和一个在线阶段；这种拆分特别适用于基于均匀化的问题。此外，还包括一种用于近似全局优化块可分离子问题的数值求解方案。这里想指出，术语块可分离意味着可以针对每个设计元素分别进行最小化；不过，单个设计元素本身可以由多个设计自由度描述。关于 SGP方法的进一步动机，请参见第 3 节的第一段。这里我们还想补充一点：在整个优化过程中，有两种不同类型的灵敏度值得关注。首先，是约束或代价函数相对于有效材料系数的灵敏度。这是 SGP方法核心所用块可分离模型的重要组成部分。其次，是材料系数相对于所选参数化的灵敏度。在本文提出的双尺度 SGP 框架中，后一类灵敏度并非严格必需，但有助于改进离线阶段使用的插值模型。无论如何，本文针对流体饱和多孔介质这一特定情境所推导的灵敏度，依据的是 [20], 中的推导；该文也报告了均质化系数的灵敏度，另见 [5]。

最后，我们想对所提出方法的普适性作一些说明。尽管本文所阐述的SGP概念可以应用于大范围的多物理场双尺度材料优化问题，但流体饱和多孔介质的Biot模型为该方法提供了理想的测试平台。这有几个原因：首先，物理耦合并非无关紧要。其次，设置相互竞争的目标函数非常自然，例如，一方面是结构柔度，另一方面是通过出流边界增强流体流动。第三，支持第一种或第二种目标的可配置微结构可以直接推导出来。

本文其余部分的结构如下：在第 2 节中，将介绍两尺度问题的所有组成要素。其中包括对Biot模型本构定律的简要回顾（第 2.1 节）、孔弹性状态问题的变分形式（第 2.2 节）、由孔弹性方程约束的两尺度问题概略图（第 2.3 节），以及针对有效材料系数进行灵敏度分析的伴随分析，后文的 SGP方法将使用该分析（第 2.4 节）。最后，以可配置单胞的形式提出两类微结构（第 2.5 节）。在第 3 节中，将更详细地介绍用于求解两尺度优化问题的 SGP 概念。为此，将对两尺度问题进行离散化，并扩展其以支持多种类型的单胞（第 3.1 节）。随后提出一种可分离的序列近似概念（第 3.2 节），最后以算法形式介绍 SGP方法（第 3.3 节）。在第 4 节中，将通过各种类型的两尺度问题讨论 SGP算法的优势。

2 双尺度优化问题的表述

本节将介绍我们的优化策略。尽管该策略可以应用于涉及多个物理场的类似问题或多物理场问题，但在本文中，我们考虑由Biot模型表示的流体饱和多孔介质。该模型可以通过对局限于小变形运动学的流固耦合问题进行均匀化而推导得到，参见例如 [3, 21, 22]。下一节我们将报告所介绍的均匀化结果

符号说明
我们采用以下记号。由于我们处理的是一个双尺度问题，因此分别用 x 和 y区分“宏观”和“微观”坐标。当分别对坐标 x 和 y 进行微分时，我们使用$\nabla_x = (\partial_i^x)$和 $\nabla_y = (\partial_i^y)$，其中 $\nabla \equiv \nabla_x$。用 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = 1/2[(\nabla \boldsymbol{u})^T + \nabla \boldsymbol{u}]$表示向量值函数 $\boldsymbol{u}$的应变，其中转置算子由上标 ^{T}表示。在有界开域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上平方可积函数的Lebesgue空间记作$L^2(D)$；在 D 上具有一阶广义导数的平方可积向量值函数的Sobolev空间 $\boldsymbol{W}^{1,2}(D)$缩写为$\mathbf{H}^1(D)$。此外，$\mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)$是向量值Y-周期函数的Sobolev

空间（下标#）。

2.1 均匀化 Biot–Darcy 模型

我们报告均匀化结果，例如见 [5], 参见 [20],其中描述了局部优化微结构问题。多孔弹性介质的均匀化模型包含用于特征响应的局部问题，这些问题用于计算 Biot模型的有效材料系数。

下面规定的与均匀化模型相关的局部问题定义在微观代表性单胞$Y = \Pi_{i=1}^{3}]0,\ \ell_i[\subset \mathbb{R}^3$。该单胞分为占据域 Y_m 的固体部分和互补的通道部分 Y_c。因此，

$$\begin{aligned} Y &= Y_m \cup Y_c \cup \Gamma_Y \ , \\ Y_c &= Y \setminus Y_m \ , \\ \Gamma_Y &= \overline{Y_m} \cap \overline{Y_c} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

其中，对于 $d = m$的 Y_d， c，我们用 Y_d表示有界开域的闭包。对于 $\fint_{Y_d} = |Y|^{-1} \int_{Y_d}$，其中 $Y_d \subset Y$满足 $d = m,\ c$，我们用其表示局部平均值（$|Y|$ 是域 Y的体积）。显然，可以始终选择单位体积 $|Y| = 1$。我们采用通常的弹性双线性型，其中涉及两个向量场 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$，其形式为

$$a_Y^m(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \fint_{Y_m} (\mathbb{D}\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{w})) : \boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}) \ , \tag{2}$$

其中 ID $=(D_{ijkl})$ 为满足通常对称性的弹性张量，$D_{ijkl} = D_{klij} = D_{jikl}$，且 $\boldsymbol{e}_y(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla_y \boldsymbol{v} + (\nabla_y \boldsymbol{v})^T)$ 为与位移场 $\boldsymbol{v}$ 相关的线性应变张量。

下文中，微结构 $\mathcal{Y}(x)$，指的是分解式（1）所示的代表性胞元 Y 以及材料属性；在我们的情形中，材料属性仅由弹性 ID 表示。如果结构完全周期性，微结构$\mathcal{Y} \equiv \mathcal{Y}(x)$不依赖于宏观位置 $x \in \Omega$。否则，必须在任意宏观位置考虑局部问题，也就是说，对于几乎所有的 $x \in \Omega$，参见例如 [21]关于缓慢变化的“准周期”微结构的讨论。应当指出，在处理基于均匀化的材料设计优化时，这一问题尤为重要；如下文所述，需要进行正则化，以控制 Ω 内设计的变化。

局部微观结构响应通过求解以下解耦问题获得：

- Find $\boldsymbol{\omega}^{ij} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)$ for any $i,j = 1,2,3$ satisfying

$$a_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij}, \boldsymbol{v}\right) = 0 \ , \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m) \ , \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}^{ij} = (\Pi_k^{ij})$、$i,j,k = 1,2,3$ 的分量为 $\Pi^{ij} = {}_k\delta \circ y_j \ {}_{ik}$

- Find $\boldsymbol{\omega}^P \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m)$ satisfying

$$a_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P, \boldsymbol{v}\right) = \oint_{\Gamma_Y} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^{[m]} \, \mathrm{dS}_y, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_m) \ . \tag{4}$$

- 求解 $(\boldsymbol{\psi}^i, \pi^i) \in \mathbf{H}^1{}_{\#}(Y_c) \times L^2(Y_c)$，其中 $i = 1,2,3$ 满足

$$\begin{aligned} \int_{Y_c} \nabla_y \boldsymbol{\psi}^k : \nabla_y \boldsymbol{v} - \int_{Y_c} \pi^k \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \int_{Y_c} v_k \ , \\ \int_{Y_c} q \nabla_y \cdot \boldsymbol{\psi}^k &= 0 \ , \end{aligned} \tag{5}$$

$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{\#}(Y_c)$ 和 $\forall q \in L^2(Y_c)$。

均质化可变形流体饱和多孔介质的有效材料属性用均质化孔弹性系数表示：排水弹性 $\boldsymbol{C}$、应力耦合 N和压缩性 $\boldsymbol{K}$，这些系数均与固体骨架相关。所有这些系数，包括固有水力渗透率 $\boldsymbol{K}$，均通过将特征微观响应式（3）至（5）代入以下表达式进行计算：

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= a_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij}, \boldsymbol{\omega}^{kl} + \boldsymbol{\Pi}^{kl}\right) \ , \\ C_{ij} &= -\fint_{Y_m} \mathrm{div}_y \boldsymbol{\omega}^{ij} = a_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P, \boldsymbol{\Pi}^{ij}\right) \ , \\ N &= a_Y^m\left(\boldsymbol{\omega}^P, \boldsymbol{\omega}^P\right) = \oint_{\Gamma_Y} \boldsymbol{\omega}^P \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{dS}_y \ , \\ K_{ij} &= \fint_{Y_c} \psi_i^j = \fint_{Y_c} \nabla_y \boldsymbol{\psi}^i : \nabla_y \boldsymbol{\psi}^i \ . \end{aligned} \tag{6}$$

显然，张量 AA $= (A_{ijkl})$、$\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ 和 $\boldsymbol{K} = (K_{ij})$ 是对称的；AA 遵循 ID 的全部对称性；此外，AA 是正定的，并且 $N > 0$。水力渗透率 $\boldsymbol{K}$ 通常是半正定的。当通道构成由 Y_c 生成的周期晶格所形成的单连通域时，它是正定的；为此，记 $\Gamma_Y^k \subset \partial Y$、$k = 1$、.....、6 为 Y 的面，则对于所有 $k = 1$、.....、6，必须有 $\Gamma_Y^k \cap \partial Y_c \neq \emptyset$。

流动变形耦合问题

定义在 Ω 上的准静态演化问题的孔弹性介质 Biot–Darcy模型由以下涉及应力 $\boldsymbol{\sigma}$、位移 $\boldsymbol{u}$、应变 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$、流体压力 p 和渗流速度 $\boldsymbol{w}$的方程组成：

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{f}^s, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{B}p, \\ -\nabla \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{B} : \boldsymbol{e}(\dot{\boldsymbol{u}}) + M\dot{p}, \\ \boldsymbol{w} &= -\frac{\boldsymbol{K}}{\bar{\eta}} \left(\nabla p - \boldsymbol{f}^f \right), \end{aligned} \tag{7}$$

其中，均质化系数由式（6）和

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &:= \boldsymbol{C} + \phi \boldsymbol{I}\,, \\ M &:= N + \phi\gamma\,. \end{aligned} \tag{8}$$

上述，$\bar{\eta}$ 为相对流体黏度，γ 为流体压缩性，$\phi = |Y_c|/|Y|$ 为孔隙率（充满流体的通道的体积分数）。式（7）中的有效体力 作用于固体相和流体相，分别记为 $\boldsymbol{f}^s$和 $\boldsymbol{f}^f$。需要注意的是，$\bar{\eta} = \eta^{\text{phys}}/\varepsilon_0^2$ 是针对给定流体（η^{phys}）和微结构尺度定义的：$\varepsilon_0 = \ell_0/L$ 其中，L 为特征宏观长度，ℓ_0 为特征微结构尺寸，通常由“孔径”给出。因此，对于给定流体，有效渗透率 $\boldsymbol{K}/\bar{\eta}$ 与ε_0^2成正比，即反映了微结构尺寸。相比之下，所有其他系数均与尺度无关（当尺度分离成立，即 ε_0 足够小时）。

注1。本文仅考虑 *Biot* 介质的稳态问题，因此 方程 (7) 中的所有时间导数均为零。因此，*Biot*压缩性 M 不涉及，因为由通道 Y_c生成的周期性晶格多孔相是连通的。对于具有非连通孔隙的任意微结构，即$Y_c \subset Y$，因此 Y_c 构成一个或多个包含一个胞元的夹杂物 Y，见 *[22]*，其渗透率为零。于是，对 方程(7)进行时间积分后，质量守恒方程可写为 $\boldsymbol{B}$： $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + Mp = 0$，其中假设初始构型未发生变形，且夹杂物中的压力为零。在优化问题中，除了具有非退化渗透率的微结构外，我们还将考虑具有球形、因而为非连通孔隙的微结构，其构成不透水材料。对于这种情况，可以选择充液孔隙或空孔隙；唯一的区别在于使用所谓的不排水材料弹性 $\text{AA}_U = \text{AA} + M^{-1}\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}$，或使用弹性 AA 来描述具有空孔隙的“排水”骨架的有效弹性。

2.2 状态问题表述

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界开域。其边界 $\partial\Omega$ 分解如下：$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$以及 $\partial\Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_w$，其中 $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$且 $\Gamma_p \cap \Gamma_w = \emptyset$。假设 Γ_p 由两个不相连且互不重叠的部分组成：Γ_p^k、$k = 1$，2、$\Gamma_p = \Gamma_p^1 \cup \Gamma_p^2 \qquad \Gamma_p^1 \cap \Gamma_p^2 = \emptyset$ ，以及。

我们考虑占据区域 Ω 的线性 Biot 连续介质的稳态问题。孔弹性材料参数和水力渗透率（统称为均匀化系数）通常由局部定义的微结构 $\mathcal{Y}(x)$ 给出，并且可随 $x \in \Omega$ 变化。本文提出的双尺度优化方法能够结合具有连通孔隙和非连通孔隙的微结构；后者的特点是渗透率为零。为此，将区域 $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+$分解为两部分：可渗透区域 Ω_+ 和不透水区域 Ω_0,；这两部分不一定是连通域，也可能分裂成多个互不连通的子区域。因此，界面 $\Gamma_+ = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_0$ 是不透水的。关于边界分解，我们假设$\Gamma_{p+}^k := \Gamma_p^k \cap \partial\Omega_+ \neq \emptyset$，对于 $k = 1$，2，从而当多孔结构连通 Γ_{p+}^1 和 Γ_{p+}^2时，允许流体通过区域 Ω_+输运。

我们考虑以下宏观问题：给定表面牵引力 $\boldsymbol{g}$，以及

边界上的压力 $\bar{p}^k$，求解满足条件的位移 $\boldsymbol{u}$ 和水力压力 P

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(\mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})-P\boldsymbol{B}) &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \\ \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{in } \Gamma_D\,, \\ (\mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})-P\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{g} \quad \text{in } \Gamma_N\,, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $P=0$ 在 Ω_0 中。而在 Ω_+ 中，P 满足

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot\boldsymbol{K}\nabla P &= 0 \quad \text{in } \Omega_+\,, \\ P &= \bar{p}^k \quad \text{on } \Gamma_{p+}^k\,, \quad k=1,2\,, \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}\nabla P &= 0 \quad \text{on } \Gamma_w\cup\Gamma_+\,. \end{aligned} \tag{10}$$

对于稳态问题，这组方程式（7）可导出以下两个问题式（9）和式（10）组成一个解耦系统：首先，可由式（10）P求得，然后可由式（9）$\boldsymbol{u}$求得。此外，对于所考虑的边界条件类型，由于未涉及体积力，解与黏度 $\bar{\eta}$无关，参见式（7）。

此外，我们将 $\bar{p}^k$ 从边界 Γ_p^k 延拓到整个区域 Ω，使得$\bar{p}^k=0$ 在 Γ_p^l 上成立（按迹的意义），其中 $l\neq k$。那么，$P=p+\sum_k\bar{p}^k$ 在 Ω_+ 中，且 $p=0$在 Γ_{p+}上成立。请注意，p 可以直接通过在 Ω_0 中取零来延拓。为简化记号，我们引入 $\bar{p}=\sum_k\bar{p}^k$。根据 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的狄利克雷边界条件，我们引入以下空间：

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\,|\,\boldsymbol{v}=0 \text{ on } \Gamma_D\}\,, \\ Q_0 &= \{q\in L^2(\Omega)\cap H^1(\Omega_+)\,|\,q=0 \text{ on } \Gamma_{p+}\}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

我们采用双线性型和线性泛函 g,

$$\begin{aligned} a_\Omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= \int_\Omega(\mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})):\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,, \\ b_{\Omega_+}(p,\boldsymbol{v}) &= \int_{\Omega_+} p\boldsymbol{B}:\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})\,, \\ c_{\Omega_+}(p,q) &= \int_{\Omega_+}\nabla q\cdot\boldsymbol{K}\nabla p\,, \\ g(\boldsymbol{v}) &= \int_{\Gamma_N}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

为了在双尺度优化的背景下定义状态问题，我们采用如下弱形式：求 $\boldsymbol{u}\in V_0$ 和 $p\in Q_0$，使得对于所有 $\boldsymbol{v}\in V_0$ 和 $q\in Q_0$,

$$\begin{aligned} a_\Omega(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b_{\Omega_+}(p,\boldsymbol{v}) &= g(\boldsymbol{v})+b_{\Omega_+}(\bar{p},\boldsymbol{v})\,, \\ c_{\Omega_+}(p,q) &= -c_{\Omega_+}(\bar{p},q)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

为在 p 中唯一确定 $p\equiv 0$ 在 $_0=$ 中 $\setminus$ 中$_+$。由于这两个场相互解耦，首先由 p 方程 （13）$_2$，求解 $\boldsymbol{u}$，然后由 方程 （13）$_1$,求解，其中 p 已知。

注 2。在由充满流体的封闭孔隙定义的不排水孔隙率的背景下 $Y_c\subset Y$，见注 *1*，公式 方程 （13）也与此类微结构类型一致 $\mathcal{Y}_0^\square$，其中AA_U 替代AA，位于弹性双线性型方程 （12）$_1$中。压力随后在 Ω_0中逐点定义为 $P:=-\boldsymbol{B}:\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})/M$。

我们用 $\alpha(x)$ 表示一个抽象优化变量，该变量决定任意位置 $x\in\Omega$ 处的均质化系数。下面考虑 α，它表示表征给定类型微结构 $\mathcal{Y}(x)$ 的若干几何参数。尽管在本节中我们忽略了与处理多种 $\mathcal{Y}$ 相关的一些具体细节，但我们注意到存在两类微结构，即 $\mathcal{Y}_+^\square$ 和 $\mathcal{Y}_0^\square$，它们与孔隙连通类型相关，如上文所述。“可渗透”域 Ω_+ 由逐点给定的材料占据，表示为 $\mathcal{Y}(x)\in\mathcal{Y}_+^\square$，对所有 $x\in\Omega_+$ 均成立。因此，Ω 的两个子域均由微结构类型隐式定义：Ω_i是满足以下条件的 $x\in\Omega$ 集合：$\mathcal{Y}(x)\in\mathcal{Y}_i^\square$，其中$i=+,0$。

在下一节中，我们将考虑一个两尺度优化问题，该问题具有以下特征：

- 几何约束在针对所选微结构类型的容许设计集合的相应定义中给出。为简洁起见，令 A 表示可容许设计的集合，进一步地，对于任意 $x\in\Omega$，我们考虑 $\alpha(x)\in A$。
- 我们考虑多个作为目标函数或等式约束的优化准则。不失一般性，我们将讨论范围限定为两个准则 $\Phi_\alpha(\boldsymbol{u})$

和 $\Psi_\alpha(p)$，其定义如下：

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(\boldsymbol{u}) &= g(\boldsymbol{u}) \,,\\ \Psi_\alpha(p) &= -\int_{\Gamma_p^2} \boldsymbol{K}\nabla(p+\bar{p})\cdot\boldsymbol{n}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

尽管 $\Phi_\alpha(\boldsymbol{u})$ 表示结构柔度，准则函数 $\Psi_\alpha(p)$ 表示由于压力差而流经表面 Γ_p^2 的流体量 $\bar{p}^1-\bar{p}^2$，参见边界条件 式（10）2。这两个准则相互对立：孔隙体积缩减自然会使结构变得更刚，但会降低渗透率。因此，对于目标函数 Φ_α，函数 Ψ_α 则作为约束，反之亦然。

2.3 双尺度优化问题

为简化记号，这里仅考虑一种微结构类型，即 $\mathcal{Y}(x) \in \mathcal{Y}_+^{\square}$，从而可考虑 $\Omega \equiv \Omega_+$。因此，式（12）中的所有双线性形式均通过在 Ω 上积分定义。之后，在第 3 节中，我们将考虑由属于 $\mathcal{Y}_+^{\square}$ 和 $\mathcal{Y}_0^{\square}$ 类的不同单胞类型表征的微结构；不过，下面介绍的公式很容易进行调整。

我们首先定义直接优化问题，以求得设计 $\alpha(\Omega)$，使其最小化基于式（14）中所定义准则的代价泛函。进一步地，我们引入集合 $\mathcal{T}=\mathbb{S}^6\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，并将 $\mathrm{IH}=(\mathrm{AA}\ \boldsymbol{B},\boldsymbol{K},\ \rho_m,\ R)\in\mathcal{T}$ 记为（局部）材料参数，其中包括有效（均匀化）材料系数、固体部分体积 $\rho_m=1-\phi=|Y_m|/|Y|$ 以及正则化参数 R，后者通常仅取决于设计。需要指出的是，为简化记号，正则化标签 R 的维数暂取为 1；不过，稍后在第 4.3 节中将使用更一般的正则化标签。显然，IH 由局部可容许设计 $\alpha(x)\in A,\ x\in\Omega$ 唯一确定；对于适当选取的参数化，可容许集可简单地表示为

$$A=[\underline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{a}}]\subset\mathbb{R}^n.$$

此类参数化示例以及下界和上界的描述 $\underline{\boldsymbol{a}},\ \overline{\boldsymbol{a}}\in\mathbb{R}^n$ 见第2.5节。

对于给定的可容许设计 $\alpha(\Omega)$，状态 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{u},\ p)$ 是以下方程的解：方程（13），其中均质化系数 $\mathrm{IH}(\alpha)$ 由方程（6）给出，其中使用了特征响应 $\boldsymbol{W}(\alpha):=(\boldsymbol{\omega}^{ij},\boldsymbol{\omega}^P,\boldsymbol{\psi}^k,\pi^k)$。$\boldsymbol{W}(\alpha)$ 是方程（3）至（5）的解，这些方程依赖于由微观构型 $\mathcal{Y}(x)$ 表示的 $\alpha(x)$。通过这种方式，映射 $\mathcal{S}:\alpha(\Omega)\mapsto\boldsymbol{z}(\Omega)$ 引入了可容许状态。

它可以通过复合映射 $\mathcal{S}=\mathcal{Z}\circ\mathcal{E}\circ\mathcal{W}$来定义，其中 $\mathcal{W}$ 表示施加于局部微观构型上的特征问题的预解算子，$\mathcal{E}$ 提供均匀化材料，而 $\mathcal{Z}$ 是宏观状态问题的预解算子，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{W}&:\alpha\mapsto W\,,\\ \mathcal{E}&:(\alpha,W)\mapsto\mathbb{H}\,,\\ \mathcal{Z}&:\mathbb{H}(\Omega)\mapsto\boldsymbol{z}(\Omega)\,.\end{aligned} \tag{15}$$

此外，我们采用映射

$$\mathcal{H}:\alpha\mapsto\mathbb{H},$$

使得 $\mathcal{H}=\mathcal{E}\circ\mathcal{W}$ 是针对任意可容许设计 $\alpha(x)\in A$定义的复合映射，对于几乎所有的 $x\in\Omega$。

宏观状态问题是映射 $\mathcal{Z}:\mathrm{IH}\mapsto\boldsymbol{z}$的隐式形式，使得$\boldsymbol{z}\in S_0=V_0\times Q_0$ 满足

$$\varphi_{\mathbb{H}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})=0\quad\forall\boldsymbol{v}\in S_0\,, \tag{16}$$

其中 S_0 是可容许状态问题解的空间。对于Biot介质问题，式（16）等同于式（13）。

2.3.1 直接双尺度优化问题

对于给定的两个目标函数 Φ 和Ψ，它们都取决于材料分布 $\mathrm{IH}(x)$ 和状态 $\boldsymbol{z}(x)$，双尺度抽象优化问题可写为：

$$\begin{aligned}\min_{\alpha\in A}\ &\Phi(\mathbb{H},\boldsymbol{z})+\Lambda_\Xi\Xi(\mathbb{H})\\ \text{s.t. }&\Psi(\mathbb{H},\boldsymbol{z})=\Psi_0\,,\\ &\boldsymbol{z}=\mathcal{S}(\alpha),\\ &\mathbb{H}=\mathcal{H}(\alpha),\\ &\int_\Omega\rho_m\le\bar{\rho}_m|\Omega|\,,\end{aligned} \tag{17}$$

其中，目标函数中的项 $\Xi(\mathbb{H})$ 与设计正则化有关，即与参数 R 有关，而 $\Lambda_\Xi \in \mathbb{R}^+$ 是惩罚参数。回顾链映射 $\mathcal{H}:\alpha(x)\mapsto \mathbb{H}(x)$，对于任意 $x\in\Omega$，有 $\boldsymbol{z}=\mathcal{Z}(\Omega)$。下文将 $\Phi_\alpha(\boldsymbol{z})=$ 简写为：$\Phi(\mathcal{H}(\alpha)\ \boldsymbol{z})$，并将 $\Psi_\alpha(\boldsymbol{z})=$ 简写为：$\Psi(\mathcal{H}(\alpha)\ \boldsymbol{z})$。在公式（14）中，给出了与 Biot介质优化相关的具体示例。

优化问题 式（17）与以下下确界-上确界问题相关，

$$\min_{\alpha\in A}\inf_{\boldsymbol{z}\in S_0}\sup_{\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbb{R}^2,\tilde{\boldsymbol{z}}\in S_0}\mathcal{L}(\alpha,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{z}})\,, \tag{18}$$

其拉格朗日函数为，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Lambda},\tilde{\boldsymbol{z}}) = \Lambda_\Phi\Phi_\alpha(\boldsymbol{z})\\ +\Lambda_\Xi\Xi(\mathcal{H}(\alpha))\\ +\Lambda_\Psi(\Psi_\alpha(\boldsymbol{z})-\overline{\Psi_0})\\ +\varphi_{\mathbb{H}(\alpha)}(\boldsymbol{z},\tilde{\boldsymbol{z}})\,,\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=(\Lambda_\Phi,\ \Lambda_\Psi)\in\mathbb{R}^2$ 是与目标泛函和约束泛函 Φ 以及 Ψ相关的拉格朗日乘子，并且 $\tilde{\boldsymbol{z}}\in S_0$ 是与问题约束相关的拉格朗日乘子——伴随变量 式（17）。

暂且可以将材料系数 IH 视为优化变量（尽管它们由 $\alpha\in A$参数化）。此外，假设给定值为 $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbb{R}^2$；请注意，$\boldsymbol{\Lambda}$ 中的元素可以为正或负，具体取决于所需的流动增强或减弱。在数值算例中，我们选取了 $\Lambda_\Phi>0$，而$\Lambda_\Psi<0$ 表示约束对 Ψ 相对于 Φ 的影响。将 $\mathrm{Im}(\mathcal{H})$ 记为 $=\mathcal{H}(\mathrm{A})$，即所有可容许设计的像空间，并定义

$$\begin{aligned}U_{\mathrm{ad}}=\{&\mathbb{H}\in L^\infty(\Omega;\ \mathcal{T})\,|\,\mathbb{H}(x)\in\mathrm{Im}(\mathcal{H})\\ &\text{for a.a. } x\in\Omega\}\,,\end{aligned}$$

优化问题 式（17） 可改写为一个双准则最小化问题，

$$\begin{aligned}\min_{\mathbb{H}\in U_{\mathrm{ad}}}\quad &\mathcal{F}(\mathbb{H},\boldsymbol{z})\,,\\ \text{s.t. }&\boldsymbol{z}=\mathcal{Z}(\mathbb{H})\\ &\int_\Omega\rho_m\le\bar{\rho}_m|\Omega|\,,\end{aligned} \tag{20}$$

其中，

$$\mathcal{F}(\mathbb{H},\boldsymbol{z})=\Lambda_\Phi\Phi(\mathbb{H},\boldsymbol{z})+\Lambda_\Psi\Psi(\mathbb{H},\boldsymbol{z})+\Lambda_\Xi\Xi(\mathbb{H})\,.$$

对于 Biot介质优化，其中两个准则函数 Φ_α 和 Ψ_α 见公式（14），拉格朗日函数可写为

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(\alpha,(\boldsymbol{u},p),\boldsymbol{\Lambda},(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{q}))\\ &=\Lambda_\Phi\Phi_\alpha(\boldsymbol{u})+\Lambda_\Psi(\Psi_\alpha(p)-\overline{\Psi_0})+\Lambda_\Xi\Xi_\alpha(\mathbb{H})\\ &\quad+a_\Omega(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{v}})-b_\Omega(p+\bar{p},\tilde{\boldsymbol{v}})\\ &\quad-g(\tilde{\boldsymbol{v}})+c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{q})\ .\end{aligned} \tag{21}$$

2.4 伴随响应与灵敏度分析

本节将详细介绍上一节所采用的灵敏度分析。我们令 α 表示一个与有效介质参数 IH 相关的一般优化变量。值得注意的是，在自由材料优化（FMO）的背景下，也可以考虑 $\alpha\equiv$IH。

为获得伴随方程，我们考虑（$\boldsymbol{u}$，p）的最优性条件。因此，由公式（21）可得

$$\begin{aligned}&\delta_{(\boldsymbol{u},p)}\mathcal{L}(\alpha,(\boldsymbol{u},p),\boldsymbol{\Lambda},(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{q}))\circ(\boldsymbol{v},q)\\ &=\Lambda_\Phi\delta_{\boldsymbol{u}}\Phi_\alpha(\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v})+\Lambda_\Psi\delta_p\Psi_\alpha(p;\ q)\\ &\quad+a_\Omega(\boldsymbol{v},\tilde{\boldsymbol{v}})-b_\Omega(q,\tilde{\boldsymbol{v}})+c_\Omega(q,\tilde{q})\ ,\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{u}}\Phi_\alpha(\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v})&=g(\boldsymbol{v}),\\ \delta_p\Psi_\alpha(p;\ q)&=-\int_{\Gamma_p^2}\boldsymbol{K}\nabla q\cdot\boldsymbol{n}.\end{aligned} \tag{23}$$

为避免计算 Ω 上的梯度 ∇q，我们考虑 $\tilde{p}\in H^1(\Omega)$，使得 $\tilde{p}=0$ 在 $\Gamma\setminus\Gamma_p^2$ 上成立，同时 $\tilde{p}=1$ 在 Γ_p^2 上成立，则容易看出

$$\begin{aligned}-\Psi_\alpha(p)=r(p):=c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{p})\ ,\\ -\delta_p\Psi_\alpha(p;\ q)=\delta_p r(p;\ q)=c_\Omega(q,\tilde{p})\ .\end{aligned} \tag{24}$$

最优性条件方程（22）与状态可容许性相关，给出伴随状态

$(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{q}) \in V_0 \times Q_0$ 其满足以下恒等式：

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{v} \in V_0 :\ a_\Omega(\boldsymbol{v},\ \tilde{\boldsymbol{v}}) = -\Lambda_\Phi \delta_{\boldsymbol{u}} \Phi_\alpha(\boldsymbol{u};\ \boldsymbol{v}),\\
&\forall q \in Q_0 :\quad c_\Omega(q,\tilde{q}) = b_\Omega(q,\tilde{\boldsymbol{v}}) - \Lambda_\Psi \delta_p \Psi_\alpha(p;\ q).
\end{aligned} \tag{25}$$

利用式（23）和式（24），上述方程可改写为对所有 $(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{q}) \in V_0 \times Q_0$：

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{v} \in V_0 : a_\Omega(\boldsymbol{v},\tilde{\boldsymbol{v}}) = -\Lambda_\Phi g(\boldsymbol{v}) \qquad ,\\
&\forall q \in Q_0 :\quad c_\Omega(q,\tilde{q}) = b_\Omega(q,\tilde{\boldsymbol{v}}) + \Lambda_\Psi c_\Omega(q,\tilde{p}) .
\end{aligned} \tag{26}$$

为使状态伴随变量独立于 $\boldsymbol{\Lambda}$，我们定义如下分解

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{v}} &= \Lambda_\Phi \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} ,\\
\tilde{q} &= \Lambda_\Phi \tilde{q}_1 + \Lambda_\Psi \tilde{q}_2 ,
\end{aligned} \tag{27}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ 和 $\tilde{q}_k$，$k = 1,\ 2$ 对所有 $(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{q},\ \tilde{q}) \in V_0 \times Q_0$均满足

$$\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{v} \in V_0 :\quad a_\Omega\left(\boldsymbol{v},\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\right) = -g(\boldsymbol{v}),\\
&\forall q \in Q_0 :\quad c_\Omega(q,\tilde{q}_1) = b_\Omega\left(q,\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\right),\\
&\forall q \in Q_0 :\quad c_\Omega(q,\tilde{q}_2) = c_\Omega(q,\tilde{p}) .
\end{aligned} \tag{28}$$

我们可以利用以下表达式计算拉格朗日函数的总变分

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} = {}& \Lambda_\Phi \delta_{\boldsymbol{u}} g(\boldsymbol{u};\ \delta_\alpha \boldsymbol{u}) - \Lambda_\Psi \delta_p r(p;\ \delta_\alpha p)\\
&+ \Lambda_\Phi \delta_\alpha g(\boldsymbol{u}) - \Lambda_\Psi \delta_\alpha r(p) + \Lambda_\Xi \delta_\alpha \Xi_\alpha(\mathbb{H})\\
&+ a_\Omega(\delta_\alpha \boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{v}}) - b_\Omega(\delta_\alpha p,\tilde{\boldsymbol{v}}) + c_\Omega(\delta_\alpha p,\tilde{q})\\
&+ \delta_\alpha a_\Omega(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{v}}) - \delta_\alpha b_\Omega(p+\bar{p},\tilde{\boldsymbol{v}})\\
&+ \delta_\alpha c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{q}) \ .
\end{aligned} \tag{29}$$

若数对 $(\boldsymbol{u},\ p)$ 满足状态问题，且 $(\tilde{\boldsymbol{v}},\ \tilde{q})$ 是其伴随状态，则 公式（29）等价于以下表达式：

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} = {}& \Lambda_\Phi \delta_\alpha g(\boldsymbol{u}) - \Lambda_\Psi \delta_\alpha r(p) + \Lambda_\Xi \delta_\alpha \Xi_\alpha(\mathbb{H})\\
&+ \delta_\alpha a_\Omega(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{v}}) - \delta_\alpha b_\Omega(p+\bar{p},\tilde{\boldsymbol{v}})\\
&+ \delta_\alpha c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{q}) \ .
\end{aligned} \tag{30}$$

如上所述，双线性型的形状导数 δ_α 可用均质化系数的灵敏度表示

。除了显然为零的导数 $\delta_\alpha g(\boldsymbol{u}) = 0$之外，还可以得到

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha a_\Omega(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{v}}) \circ \delta_\alpha \mathbb{A} &= \int_\Omega \delta_\alpha \mathbb{A}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{v}}) ,\\
\delta_\alpha b_\Omega(p+\bar{p},\tilde{\boldsymbol{v}}) \circ \delta_\alpha \boldsymbol{B} &= \int_\Omega (p+\bar{p}) \delta_\alpha \boldsymbol{B} : \boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{v}}) ,\\
\delta_\alpha c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{q}) \circ \delta_\alpha \boldsymbol{K} &= \int_\Omega \nabla\tilde{q} \cdot \delta_\alpha \boldsymbol{K} \nabla(p+\bar{p}) ,\\
\delta_\alpha r(p) &= \delta_\alpha c_\Omega(p+\bar{p},\tilde{p}) \circ \delta_\alpha \boldsymbol{K}\\
&= \int_\Omega \nabla\tilde{p} \cdot \delta_\alpha \boldsymbol{K} \nabla(p+\bar{p}) .
\end{aligned} \tag{31}$$

使用“总压力” $P := p+\bar{p}$，采用以下张量来计算 公式（31）中的表达式：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}) , \quad P\boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}) ,\\
&\nabla P \otimes \nabla\tilde{q}_1 , \quad \nabla P \otimes \nabla\tilde{q}_2 ,\\
&\nabla\tilde{p} \otimes \nabla P .
\end{aligned} \tag{32}$$

现在，利用这些张量，公式（29）计算如下：

$$\begin{aligned}
&\delta_\alpha^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} = -\Lambda_\Psi \delta_\alpha r(p)\\
&+ \Lambda_\Phi \left(\delta_\alpha a_\Omega\left(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\right) - \delta_\alpha b_\Omega\left(P,\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\right) + \delta_\alpha c_\Omega(P,\tilde{q}_1) \right)\\
&+ \Lambda_\Psi \delta_\alpha c_\Omega(P,\tilde{q}_2) + \Lambda_\Xi \partial_{\mathbb{H}} \Xi(\mathbb{H}) \delta_\alpha \mathbb{H} .
\end{aligned} \tag{33}$$

因此，$\mathcal{L}$ 相对于AA $\boldsymbol{B}$和 $\boldsymbol{K}$ 的变分由以下公式给出

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{A}}^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} &= \Lambda_\Phi \int_\Omega \delta\mathbb{A}_e : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}) ,\\
\delta_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} &= -\Lambda_\Phi \int_\Omega \delta\boldsymbol{B}_e : P\boldsymbol{e}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}) ,\\
\delta_{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{tot}}\mathcal{L} &= \int_\Omega \delta\boldsymbol{K}_e : (\Lambda_\Phi \nabla P \otimes \nabla\tilde{q}_1\\
&\qquad + \Lambda_\Psi (\nabla P \otimes \nabla\tilde{q}_2 - \nabla\tilde{p} \otimes \nabla P))
\end{aligned} \tag{34}$$

由于 $\Xi(\mathrm{IH})$ 仅取决于正则化参数 $\boldsymbol{R}$，见公式（47），我们得到

$$\partial_{\mathbb{H}} \Xi(\mathbb{H}) \delta_\alpha \mathbb{H} = \int_\Omega (\boldsymbol{R} - \mathbb{F}(\boldsymbol{R})) \cdot (\delta\boldsymbol{R} - \partial_{\boldsymbol{R}} \mathbb{F}(\boldsymbol{R}) \circ \delta\boldsymbol{R})$$

公式（33）中的正则化项公式（33）。在第 3 节所介绍的有限元离散中，均质化系数在划分域 Ω_e 的每个单元中作为常数给出。因此，公式（32）中的表达式在高斯积分点处逐单元给出。

2.5 设计参数化

胞元 Y的设计，即将其分解为固体骨架 Y_m 和孔隙Y_c，可以通过多种方式进行参数化。在[20],中，我们采用了一种所谓的样条盒结构，该结构通过定义样条控制多面体位置的设计变量进行参数化。这种参数化方式具有较强的通用性，能够处理相当任意的设计，因而十分便利；但它会导致复杂的设计约束表达式，而这些约束对于保持基本的几何要求（例如通道横截面的正值性）是必需的。

本文采用了两种具体的微结构类型，如图1所示，其中通道呈三维十字形（类型1）或球形（类型2）。因此，后一种微结构具有零渗透率，故我们在力学模型中考虑干燥孔隙（空穴）。得益于这些特定的几何形状，我们可以采用一种相当简单的参数化方式，具体列于表1中。对于类型1的单胞，r_x 和r_y 分别表示沿 x轴和 y轴指向的圆柱体半径。第三个参数φ 描述绕轴 z的胞元旋转。对于2型晶胞，球形空穴的半径由 r_s描述，它们形成具有近似各向同性弹性性质的正交各向异性材料。因此，该单胞类型不启用旋转。重要的是，可以直接对 r_x、 r_y和 r_s 施加盒约束，以保证几何可行性。

微结构编号	单元胞参数		
1	r_x	r_y	φ
2	r_s	-	-

表 1：两类微结构孔隙几何形状的参数化：1：三维十字形，2：球体。

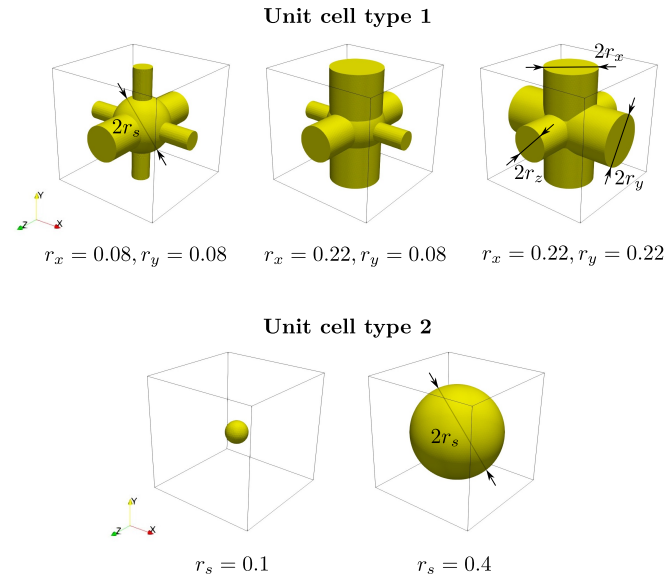


图 1：单胞的参数化：1型晶胞由半径 r_x 和 r_y 进行参数化，二者取值范围均为 0.08 至 0.22，$r_z = 0.15$ 和 $r_s = 0.25$ 保持不变；2型晶胞由半径 r_s 进行参数化，其取值范围为 0.1 至 0.4。

为说明由均质化系数 IH、In 确定的材料图2中，对于第2类单元胞，弹性

唯一相关的材料属性表示为 r_s。在图3中，对于类型1的单胞，孔弹性张量和渗透率的选定分量表示为 r_y的函数。

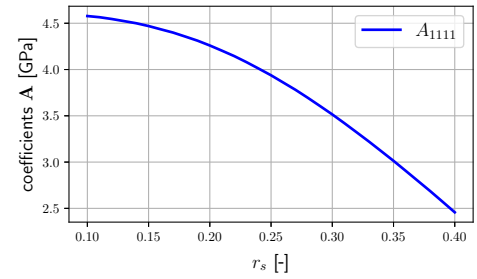


图2：2型晶胞： A_{1111} 对参数 r_s的依赖关系。

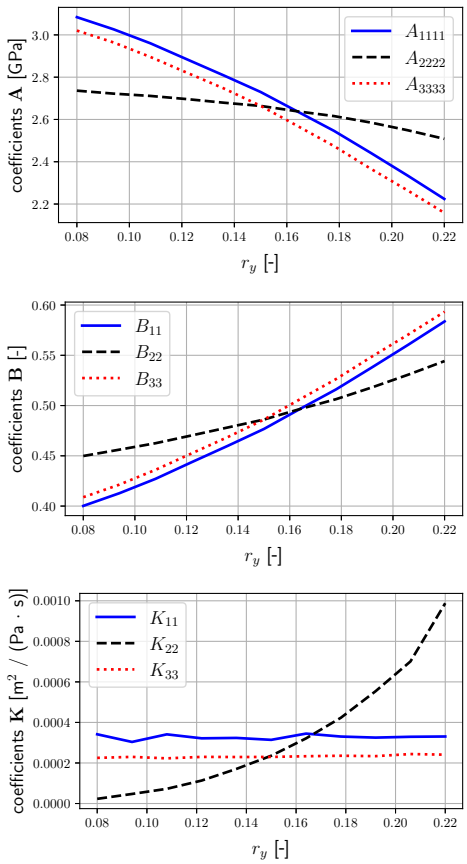


图3：1型晶胞：均质化系数 AA、 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 对 r_y 的依赖关系； $r_x = 0.15$ 固定。

3 序贯全局规划表述

序贯全局规划算法的基本描述及其收敛性方面的内容见 [18]，，其中SGP被应用于基于二维时谐亥姆霍兹状态方程的多材料优化。本文所述的设置和过程与 [18] 有所不同，主要体现在以下几点：首先，在 [18] 中，有限个预先确定的材料被选作可行集。本文中，每种可行材料均通过对单胞进行均质化计算得到，而单胞本身可由若干几何参数进行配置。因此，设计者可以在设计域中的每个点从 M 不同的单胞类型并 调整后者的几何参数。其次，SGP 方法通过采用略有不同的可分离近似扩展到多物理场设定；第三，对于由此产生的子问题，采用了不同的求解策略。该策略不对参数化施加任何假设。特别是，参数化可以是非解析且不可微的。这带来了更大的设计灵活性。尽管存在这些差异，但本文所介绍的方法与 [18] 中概述的方法还有一个重要的共同特征：可分离模型是根据（有效）材料张量 IH，而不是其参数化 α 建立的。随后，在子问题层面直接处理参数化，而无需进一步凸化。得益于所选一阶模型的可分离特性，由此产生的通常为非凸的子问题原则上仍可求得全局最优解。

该方法的优势有两点：首先，由于可分离模型函数还能够捕捉原始代价函数的非凸特征，通常只需较少的外层迭代，即需要求解的状态问题数量较少；其次，由于可分离模型与代价函数具有良好的拟合效果，并且非凸子问题能够求得全局最优解，整个算法对初始值的依赖较小，也不易陷入较差的局部极小值。这与传统方法形成对比，在传统方法中，通常直接基于代价函数相对于设计参数化的灵敏度建立局部模型 α。

下面我们首先针对问题式（20）的略微推广形式，推导其完全离散化的对应形式。然后，我们将详细说明如何构造可分离的一阶近似，最后给出完整 SGP算法的实际流程，其中包括一个通用子求解器，该子求解器允许使用蛮力策略为子问题计算近似全局最优解。

3.1 完全离散化的双尺度设计问题

为简单起见，集合和函数的定义在第2.2节

和第2.3节 中基于仅存在一种单胞类型的假设给出，因此 $M = 1$。在此，为了考虑更一般的情形，我们考虑 M种单胞类型，每种类型均具有 n_i 个设计参数，并引入指标集 I: $= \{1, \dots, M\}$.对于每种单胞类型 $i \in I$，可容许集由盒约束和其他纯几何约束定义。通过选择合适的参数化，我们可以将这些约束表示为（几何）参数集

$$A_i = [\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i] \subset \mathbb{R}^{n_i}, \tag{35}$$

其中 $\underline{\boldsymbol{a}}_i, \overline{\boldsymbol{a}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 为约束相应参数向量 $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$的上下界向量。

备注 3。需要指出的是，尽管在本文中，方程 (35) 中的参数始终用于改变单胞的几何性质，但材料参数的变化也可以用相同的方式描述。因此，*SGP*可以处理这两种情况。

我们进一步为所有 $i \in I$ 定义 $i \in I$ map

$$\mathcal{H}_i : \begin{cases} A_i & \to \mathcal{T} \\ \boldsymbol{\alpha}_i & \mapsto (\mathbb{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{K}, \rho_m, R), \end{cases} \tag{36}$$

其中 $\mathcal{H}_i(\boldsymbol{\alpha})$执行了第2.3节中所述的均匀化过程。图4 展示了 $\mathcal{H}_i(\boldsymbol{\alpha}_i)$的组成部分。

我们将所有 $\mathcal{H}_i$ 取值范围的并集记为

$$H \coloneqq \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{H}_i(A_i) \tag{37}$$

并据此将可容许设计函数的集合推广为

$$U_{\text{ad}} = \{\mathbb{H} \in L^\infty(\Omega;\, \mathcal{T}) \,|\, \mathbb{H}(x) \in H \text{ for a.e. } x \in \Omega\}.$$

现在，状态问题算子

$$\mathcal{Z} : \begin{cases} U_{\text{ad}} & \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ \mathbb{H} & \mapsto \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{u}, p), \end{cases} \tag{38}$$

使用位移函数 $\boldsymbol{u}$(IH) 和水力压力函数 p(IH) 时，读取结果与之前完全相同。

最后，我们采用一个比第 2.2 节和第 2.3 节中略为更一般的资源函数，如下所示:

$$\rho : \begin{cases} U_{\text{ad}} & \to \mathbb{R} \\ \mathbb{H} & \mapsto \rho. \end{cases} \tag{39}$$

一个具体化实例可以是某种特定材料相的总体积百分比（参见 $\bar{\rho}_m$ 第2.3 节中的说明）。

基于这些定义，我们随后 formulates 一个 FMO型问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbb{H} \in U_{\text{ad}}} \quad & \mathcal{F}(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}) := \Lambda_\Phi \Phi(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}) + \Lambda_\Psi \Psi(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}) \\ & \qquad + \Lambda_\Xi \Xi(\mathbb{H}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{z} = \mathcal{Z}(\mathbb{H}), \\ & \rho(\mathbb{H}) \le \bar{\rho}_m, \end{aligned} \tag{40}$$

其中， $\bar{\rho}_m \in \mathbb{R}$ 是资源约束值，代价函数及其 Φ、Ψ、 Ξ 以及它们的权重Λ_Ψ、 Λ_Φ、 Λ_Ξ 已在第 2.3 节中介绍。

尽管问题式（40）直接以张量变量 IH 表述，但要实现可行性条件 IH $\in U_{\text{ad}}$，就必须计算均质化映射 $\mathcal{H}_i$ （$i \in I$）。这意味着，每次计算代价函数时，都必须执行一次均匀化过程，其中包含一系列单胞问题。为缓解这一情况，我们遵循 [7]，仅针对设计参数空间的离散样本执行均匀化过程。对于每种单胞类型 i，我们引入一个包含节点的网格 $A_i^{\text{nodes}} \subseteq A_i$，并且仅通过均匀化在该网格的采样节点处计算有效材料系数。此外，我们为这些样本定义一个分段三次 Hermite 插值器，以实现连续映射

$$\tilde{\mathcal{H}}_i : \begin{cases} A_i \to \mathcal{T} \\ \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto (\mathbb{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{K}, \rho_m, R), \end{cases} \tag{41}$$

对于所有 $i \in I$。我们将这一过程称为离线阶段，即双尺度优化方法中的离线阶段，因为它可以独立于在线优化过程执行；该过程受到超出参数集盒约束的其他约束限制，如式（35）所示。

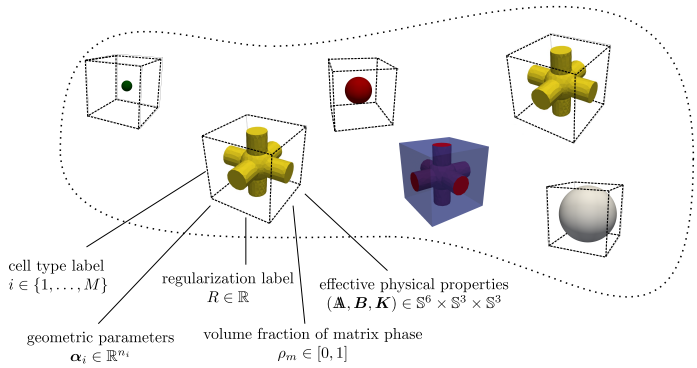


图 4：材料集合：每种材料均由一个单胞对象表示，并附带一组数据，例如几何参数、物理性质及其他标签。

对于 $M = 1$的情况，传统方法会基于˜插值函数 $\mathcal{H}_1$ 对整个参数集 A_1进行优化。但这对于 $M > 1$而言无法直接实现。一种解决办法是引入不同单胞类型之间的另一层插值，这与离散材料优化（DMO）中的做法类似 [14]。我们不采用这种做法，而是引入设计网格

$$A_i^{\text{grid}} \subset A_i,\ i \in I, \tag{42}$$

对于所有单胞类型。稍后在优化过程中，仅考虑 A_i^{grid} 、 $i \in I$ 中的元素。这样一来，通常只能计算出设计问题的一个近似解。不过，事实证明，这一策略与后文第 3.2 节中介绍的可分离非凸模型结合得很好。此外，由此产生的误差可以通过 A_i^{grid} 、 $i \in I$中的样本距离和数量轻松控制。不同网格以及材料系数映射之间的关系在图 5中进行了可视化和详细说明。

As we only optimize on A_i^{grid}, $i \in I$, eq. (37) is approximated by

$$\tilde{H} := \bigcup_{i=1}^{M} \tilde{\mathcal{H}}_i(A_i^{\text{grid}}). \tag{43}$$

˜我们注意到， H 的元素可以在离线 阶段预先计算。一般来说，这会导致更高的内存需求，但还可以缩短在线 计算时间。

最后，我们简要介绍有限元近似，其中包含 n_{el} 有限元，并因此引入有限元指标集 E: $= \{1, \dots, n_{\text{el}}\}$，以通过其索引 $e \in E$明确标识一个有限元。我们进一步假设设计在每个单元上均为常数，因此可以表示为

$$\mathbb{H} \in \tilde{H}^{n_{\text{el}}}$$

˜我们指出，通过定义 H 在式（43）中，该条件已经表明，只有材料张量才符合要求，并且存在一个单元胞类型 i 和一个参数向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 在 A_i^{grid} 中。此外，我们将物理函数 Φ 和 Ψ、正则化函数 Ξ 以及解算子 $\mathcal{Z}$替换为它们的离散化对应形式，例如：

$$\mathcal{Z}_h : \begin{cases} \tilde{H}^{n_{\text{el}}} \to \mathbb{R}^{n_{\text{dof}}} \\ \mathbb{H} \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \end{cases}, \tag{44}$$

其中 n_{dof} 表示离散状态解空间的维数。资源函数 ρ 式（39）的离散化版本为

$$\rho_h : \begin{cases} \tilde{H}^{n_{\text{el}}} \to \mathbb{R} \\ \mathbb{H} \mapsto \rho_h. \end{cases} \tag{45}$$

在设计和状态空间中完全离散化后，优化问题可写为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbb{H} \in \tilde{H}^{n_{\text{el}}}} \max_{\lambda_\rho \in \mathbb{R}^+} \quad & \mathcal{F}_h(\mathbb{H}, \mathbf{z}, \lambda_\rho) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z} = \mathcal{Z}_h(\mathbb{H}), \end{aligned} \tag{46}$$

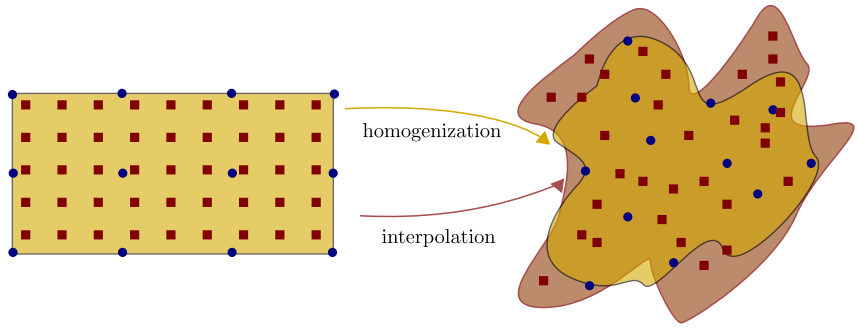


图 5：左：参数集 A_i 及其子集中的样本 A_i^{nodes}（蓝点）的示意图，这些样本构成了插值的 $\tilde{\mathcal{H}}_i$以及 A_i^{grid} （红色方块）的构造基，并在 A_i^{grid} 上执行优化过程。一般而言， A_i^{nodes}和 A_i^{grid} 可以彼此完全独立。右：原始有效材料系数空间 $\mathcal{H}_i$（A_i）（黄色曲面）以及 ˜插值的 $\mathcal{H}_i$（A_i）的映像（红色曲面）的简化示意图。蓝点和红色方块分别表示来自 A_i^{nodes}或 A_i^{grid} 的参数的映像。

with

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h(\mathbb{H}, \mathbf{z}, \lambda_\rho) :=& \Lambda_\Phi \Phi_h(\mathbb{H}, \mathbf{z}) + \Lambda_\Psi \Psi_h(\mathbb{H}, \mathbf{z}) \\ &+ \lambda_\rho \left(\rho_h(\mathbb{H}) - \bar{\rho}_m\right) + \Lambda_\Xi \Xi_h(\mathbb{H}).\end{aligned}$$

我们注意到，通过拉格朗日形式，我们消除了资源约束。稍后我们将建议采用 [8] 中介绍的二分策略，用于广为人知的 OCM 方法框架。最后，我们将正则化项具体化为

$$\Xi_h(\mathbb{H}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{R} - \mathbb{F}(\boldsymbol{R})\|^2, \tag{47}$$

其中， $\mathbb{F}$ 表示一个标准密度滤波函数（参见例如 [23]），其满足

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^{n_{\text{el}}} \to \mathbb{R}^{n_{\text{el}}}. \tag{48}$$

并且， $\boldsymbol{R}$ 是与所有有限元 $e \in E$相关联的正则化标签向量。

3.2 子问题的构造

对于任何序贯规划算法，都必须首先定义一系列子问题。在这里，在每次迭代 k 中，我们针对展开点$\mathbb{H}^k \in \tilde{H}^{n_{\text{el}}}$，为代价函数的各个组成部分构造可分离的一阶近似

$$\mathcal{J}(\mathbb{H}, \lambda_\rho) := \mathcal{F}_h(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}, \lambda_\rho) \tag{49}$$

原优化问题在式（46）中的模型问题为

$$\min_{\mathbb{H}} \max_{\lambda_\rho \in \mathbb{R}} \quad \mathcal{J}_{\text{sep}}\left(\mathbb{H}, \lambda_\rho;\ \mathbb{H}^k\right) \tag{50}$$

其中，我们的模型函数定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\text{sep}}\left(\mathbb{H}, \lambda_\rho;\ \mathbb{H}^k\right) &:= \sum_{e \in E} \mathcal{J}_{\text{sep},e}\left(\mathbb{H}_e, \lambda_\rho;\ \mathbb{H}_e^k\right) \\ &= \sum_{e \in E} \widetilde{\mathcal{J}}_{\text{phys}}\left(\mathbb{D}_e;\ \mathbb{D}_e^k\right) + \lambda_\rho \widetilde{\mathcal{J}}_{\text{vol}}((\rho_m)_e) \\ &+ \Lambda_\Xi \widetilde{\mathcal{J}}_{\text{reg},e}(R_e;\ R_e^k) + \Lambda_g \widetilde{\mathcal{J}}_{\text{glob}}(\mathbb{A}_e;\ \mathbb{A}_e^k)\end{aligned} \tag{51}$$

with

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_e &:= (\mathbb{A}_e, \boldsymbol{B}_e, \boldsymbol{K}_e) \in \mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \\ \mathbb{D}_e^k &:= (\mathbb{A}_e^k, \boldsymbol{B}_e^k, \boldsymbol{K}_e^k) \in \mathbb{S}^6 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, \\ \mathbb{H}, \mathbb{H}^k &\in \tilde{H}^{n_{\text{el}}}.\end{aligned}$$

下面将详细介绍$\mathcal{J}_{\text{sep}}$ 的各个组成部分。

为此，我们将 $\mathcal{J}(\mathbb{H}\ \lambda_\rho)$ 拆分为

$$\mathcal{J}(\mathbb{H}, \lambda_\rho) = \mathcal{J}_{\text{phys}}(\mathbb{H}) + \lambda_\rho \mathcal{J}_{\text{vol}}(\mathbb{H}) + \Lambda_\Xi \mathcal{J}_{\text{reg}}(\mathbb{H})$$

with

$$\mathcal{J}_{\text{phys}}(\mathbb{H}) := \Lambda_\Phi \Phi_h(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}) + \Lambda_\Psi \Psi_h(\mathbb{H}, \boldsymbol{z}), \tag{52}$$

$$\mathcal{J}_{\text{vol}}(\mathbb{H}) := \rho_h(\mathbb{H}) - \bar{\rho}_m, \tag{53}$$

$$\mathcal{J}_{\text{reg}}(\mathbb{H}) := \Xi_h(\mathbb{H}). \tag{54}$$

在元组 IH 中，只有有效材料系数 AA $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 与 $\mathcal{J}_{\text{phys}}$ 相关。因此，对于 $\mathcal{J}_{\text{phys}}$，我们定义一种类型为

$$\sum_{e\in E}\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{phys}}\left(\mathbb{D}_e;\ \mathbb{D}_e^k\right), \tag{55}$$

~其中 $\mathcal{J}_{\text{phys}}$ 是以下一阶类似 MMA 的模型的推广形式，该模型由 [19] 针对张量变量中的函数提出:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{phys}}\left(\mathbb{D}_e;\ \mathbb{D}^k\right)\\
&= C_{\text{phys}} - \left\langle \mathbb{A}_e^k\left[\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{phys}}(\mathbb{D}^k)}{\partial \mathbb{A}}\right]_e \mathbb{A}_e^k, \mathbb{A}_e^{-1}\right\rangle_{\mathbb{S}^6}\\
&- \left\langle \boldsymbol{B}_e^k\left[\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{phys}}(\mathbb{D}^k)}{\partial \boldsymbol{B}}\right]_e \boldsymbol{B}_e^k, \boldsymbol{B}_e^{-1}\right\rangle_{\mathbb{S}^3}\\
&- \left\langle \boldsymbol{K}_e^k\left[\frac{\partial \mathcal{J}_{\text{phys}}(\mathbb{D}^k)}{\partial \boldsymbol{K}}\right]_e \boldsymbol{K}_e^k, \boldsymbol{K}_e^{-1}\right\rangle_{\mathbb{S}^3}.
\end{aligned} \tag{56}$$

这里， C_{phys} 是为确保模型的零阶正确性而选取的常数，$<\cdot,\ \cdot>_{\{\mathbb{S}^6,\mathbb{S}^3\}}$ 表示分别来自 $\mathbb{S}^6$ 和 $\mathbb{S}^3$ 的矩阵之间的 Frobenius 内积。还需指出的是，与 [19], 中的模型不同，我们不采用灵活的广义渐近线 $L_e^{\mathbf{A}}\in\mathbb{S}^6$、$L_e^{\boldsymbol{B}}$、$L_e^{\boldsymbol{K}}\in\mathbb{S}^3$，而是直接将它们全部选为零矩阵。根据 $\mathcal{J}_{\text{phys}}$ 关于材料系数 AA $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的偏导数，可以很容易地从 公式（34）中的表达式中提取出来。

描述所利用基体材料比例的函数 $\mathcal{J}_{\text{vol}}$ 根据定义是可分离的，并且仅取决于 ρ_m。因此，我们选取

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{vol}}((\rho_m)_e;\ \rho_m^k) = (\rho_m)_e. \tag{57}$$

该函数 $\mathcal{J}_{\text{reg}}$ 由式（54）给出，仅取决于正则化标签 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{n_{\text{el}}}$，~该标签是元组IH $\in H^{n_{\text{el}}}$的一个分量。因此， $\mathcal{J}_{\text{reg}}$ 的可分离近似具有如下形式

$$\sum_{e\in E}\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{reg},e}(R_e;\ \boldsymbol{R}^k), \tag{58}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{reg},e}(R_e;\ \boldsymbol{R}^k) \tag{59}$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\widetilde{R}_e\left(R_e;\ \boldsymbol{R}^k\right) - \left[\mathbb{F}\left(\widetilde{R}_e\left(R_e;\ \boldsymbol{R}^k\right)\right)\right]_e\right\|^2.$$

在公式（59），我们进一步采用函数

$$\widetilde{R}_e\left(R;\ \boldsymbol{R}^k\right) := \left(R_1^k,\ldots,R_{e-1}^k,R,R_{e+1}^k,\ldots,R_{n_{\text{el}}}^k\right),$$

其中，仅在 e第 R项中将正则化标签改变为给定值，并在相邻项中使用展开点 $\boldsymbol{R}^k$ 的贡献。需要注意的是，式（59）可以化简为如下形式的凸二次函数

$$a_e R_e^2 + b_e R_e + c_e,$$

通过预先计算 a_e、b_e、$c_e\in\mathbb{R}$，它们与 R_e 无关。

最后，我们通过添加以下项，对相邻两次迭代中的设计实施步长控制

$$\sum_{e\in E}\widetilde{\mathcal{J}}_{\text{glob}}\left(\mathbb{A}_e,\mathbb{A}_e^k\right) = \sum_{e\in E}\frac{1}{2}\left\|\mathbb{A}_e - \mathbb{A}_e^k\right\|^2 \tag{60}$$

在模型代价函数中加入一个正因子 Λ_g。或者，也可以采用一种更一般的全局化策略，类似于正则化标签为 R 的正则化方法（见式（59））， 即引入特定的全局化标签。这里，我们假设根据刚度张量 AA_e 和 AA_e^k评估设计步长已足够，尤其是假设全局化标签具有唯一性，即

$$\mathbb{A}_e = \mathbb{A}_e' \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_e = \boldsymbol{\alpha}_e', \tag{61}$$

得到满足。

3.3 采用暴力子求解器的SGP算法

鉴于我们已经掌握了目标函数和惩罚项的可分离一阶近似，现在可以构造由算法 1所描述的迭代方案。我们充分利用了

$$\mathcal{J}_{\text{sep}}\left(\mathbb{H},\lambda_\rho;\ \mathbb{H}^k\right) = \sum_{e\in E}\mathcal{J}_{\text{sep},e}\left(\mathbb{H}_e,\lambda_\rho;\ \mathbb{H}_e^k\right)$$

并对每次迭代 k中的每个有限元 $e \in E$ 分别求解子问题。具体而言，需要对$\mathcal{J}_{\text{sep},\ e}$ 所有（有限多个）$\tilde{}\mathbf{IH}_e \in H$ 进行评估，并基于这些评估结果确定一个全局最小化解$\mathbf{IH}_e^*$。请注意，对于每个$\mathbf{IH}_e$，都对应一个唯一的几何单元标签 α_e，因此，通过确定$\mathbf{IH}_e^*$，我们也可以确定相应的 α_e^* 和材料类别索引i^*。如前文所述，我们采用二分策略处理资源约束，详情请参见算法2。为简化问题，假设资源约束在最小化解处始终处于激活状态。如果不施加资源约束，则算法 2 中的外层循环将直接省略。

每次迭代后，使用当前子问题解 $\mathcal{J}$ 对原始成本函数进行评估$\mathbf{IH}_e^*$。若 $\mathcal{J}$ 实现了下降，则继续迭代过程。否则，通过增大 Λ_g 全局化项式（60）的乘子，采用算法2重新求解子问题。

算法 1 用于参数化多材料优化的序贯全局规划

$k \leftarrow 0$
初始化 $\mathbf{IH}^0 \in \tilde{H}^{n_{\text{el}}}$
$\mathcal{J}_{\text{diff}} \leftarrow \infty$
当 $\mathcal{J}_{\text{diff}} > 0$ 且 $k \leq k_{\max}$ **执行时**
  初始化 $\Lambda_g \in \mathbb{R}$
  当 $\mathcal{J}_{\text{diff}} < 0$ **执行时**
    $\mathbf{IH}^*_{\Lambda_g} \leftarrow$ 求解 公式（50） 至全局使用算法2实现最优性
    增加 Λ_g
  结束 while 循环
  $\mathbf{IH}^* \leftarrow \mathbf{IH}^*_{\Lambda_g}$
  $\mathcal{J}_{\text{diff}} \leftarrow \mathcal{J}(\mathbf{IH}^k) - \mathcal{J}(\mathbf{IH}^*)$
  $k \leftarrow k + 1$
结束 while 循环

4 数值结果

本节通过数值算例展示 SGP 的能力。我们逐步增加设计自由度，首先研究双尺度优化问题，同时观察相应的优化设计，随后研究正则化的影响。

算法2 通过穷举策略求解子问题策略

初始化 $\lambda_\rho \in \mathbb{R}$ 进行体积二分法
当 体积约束不满足**时**
  对所有 有限元 $e \in E$ **执行**
    对于所有 单胞类型 $i \in I$ **执行**
      $\boldsymbol{\alpha}_i^* \leftarrow$ 在 A_i^{grid} 上的最小化器
    结束循环
    $\boldsymbol{\alpha}^* \leftarrow$ 在所有 $\boldsymbol{\alpha}_i^* (i \in I)$ 中的最小化器
    $i^* \leftarrow \boldsymbol{\alpha}^*$ 的单胞类型索引
    $\mathbf{IH}_e^* \leftarrow$ 计算 $\tilde{\mathcal{H}}_{i^*}(\boldsymbol{\alpha}^*)$（参见 式（41））
  结束循环
  $\rho \leftarrow$ 计算 $\rho_h(\mathbf{IH}_e^*)$（参见 公式 (45)）；
  如果 $\rho > \bar{\rho}_m$ **则**
    增加 λ_ρ
  else
    减少 λ_ρ
  结束条件判断
结束 while 循环

在第4.1节中，我们从由三条相交流道构成的单胞开始，如图1顶行所示，并研究微结构的局部取向对优化设计性能的影响。我们将看到，得益于模型的优势，我们既不必采用巧妙的初始取向（例如 [24, 25] 通过使各向异性材料与应力张量的主方向对齐），也不必人为强制采用规则设计。

随后，我们展示帕累托前沿，并考察代价函数中柔度和流体通量的不同权重对所得设计的影响。从帕累托前沿上的一个点转到下一个点时，我们有意不将前一个设计用作热启动。尽管加权代价函数具有非凸性，仍得到了一组帕累托曲线，其中没有任何一点被其他点支配。我们将这一观察归因于SGP方法避免较差局部解的能力。

在第4.2节中，我们将进一步展示 SGP 处理多种单胞类型的能力。对于这一情形，我们同样计算帕累托曲线。可以观察到，由于设计自由度的增加，新的帕累托前沿严格支配了此前的前沿。还可以观察到，更复杂的参数化

平均而言并不会导致每次优化运行需要求解的状态问题数量增加。需要注意的是，对于第4.1节和第4.2节中所介绍的设置，无需采用全局化策略来控制相邻迭代之间的设计变化。因此，我们将全局化参数设为 $\Lambda_g = 0$.

最后，在第4.3节中，我们对设计参数应用滤波技术，以控制局部取向的变化速率以及两种单胞类型之间的界面长度。在此，我们还采用了公式（60）中所述的全局化项。

孔弹性问题的设置如图6所示。这是对 [20], 中宏观问题设置的再现，其中作者从宏观域中选取了一个有限元，并通过样条盒方法优化局部微结构的形状。在本文中，我们通过使用第3节中所述的SGP方法求解两尺度优化问题，对该示例进行了扩展。需要指出的是，我们采用了相当粗的宏观域离散化。原因在于，这样的离散化足以展示上述SGP的能力。另一方面，从算法2中可以很容易看出，宏观单元的数量以线性方式影响SGP的计算复杂度。因此，原则上，采用更精细的离散化并不存在障碍。

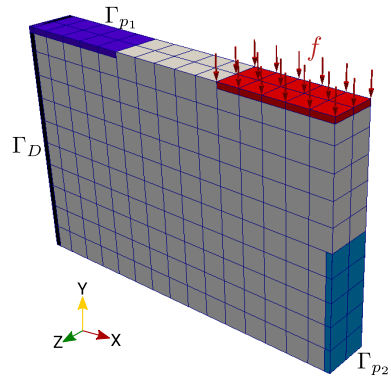


图 6：宏观问题的设置：机械牵引力 $f = (0,\ -1,\ 0)^\top$ 作用于物体表面的一部分（红色区域），同时在 Γ_D 上提供支承，并在 Γ_{p_1} 和 Γ_{p_2}上规定压力值 $p_1 = 1.0$ 和$p_2 = 0.5$。设计域采用 15 x 10 x 2 个六面体单元进行离散。

4.1 使用一种单元胞类型进行优化

本节采用图中所示的1型晶胞 图1。其几何结构由三个相互连接的圆柱形流体通道组成，通道内填充甘油（杨氏模量为4.35 GPa，动力黏度为0.95 Pa·s），三条通道彼此垂直，并与胞元中心的一个空心球相交。这些通道嵌入由聚苯乙烯制成的基体材料中，基体材料的杨氏模量为3.9 GPa，动力黏度为0.34 Pa·s。几何设计参数的可行范围为 $A_1 = [0.08, 0.22]^2$。因此，在每个有限元 $e \in E$ 中，我们设置设计参数 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (r_x,\ r_y)^\top \in A_1$，以控制沿 y方向和 x方向的通道半径。沿方向（面外方向）的流体通道半径保持不变。在设计参数空间的边界处，刚性材料相的体积分数分别为$\rho\left(\mathcal{H}_1\left([0.08, 0.08]^\top\right)\right) = 0.7154$ 和 $\rho\left(\mathcal{H}_1\left([0.22, 0.22]^\top\right)\right) = 0.879$。该单胞最柔软版本的方向刚度通过极坐标图展示于图7中。对 $\mathcal{H}_1$ 的插值基于 A_1^{nodes}。此处，

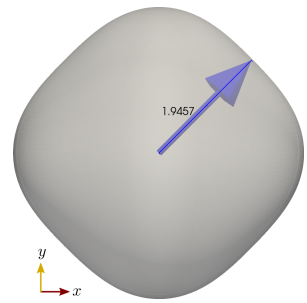


图 7：具有最大程度开放流体通道的单胞（$r_x = 0.22,\ r_y = 0.22$）的方向刚度可视化图。该球面图通过绘制旋转材料张量 AA 的条目 $A_{1111} \in \mathbb{S}^6$ 生成，其中旋转角 $(\theta,\ \phi) \in [0, 2\pi]^2$ 绕 z 轴和 y轴变化。例如，图中绘制的箭头指向（$\pi/2,\ 0$），其长度 1.9457 来自绕 z轴旋转 $\pi/2$ 后的材料张量的第一个条目。

A_1^{nodes}是由 $\boldsymbol{\alpha}_1$的各分量张成的参数网格，对于每个分量，我们选取

11个等间距样本。SGP算法的子问题基于离散参数网格 A_1^{grid} 求解。对于该网格，我们为两个通道半径各选取了28个样本；这些样本同样等间距分布。

对于以下采用结构柔度与流体通量加权和形式的优化结果，我们使用一个初始设计猜测，该猜测在图 8中可视化展示，对机械性能和流体流动状态都没有特别有利。

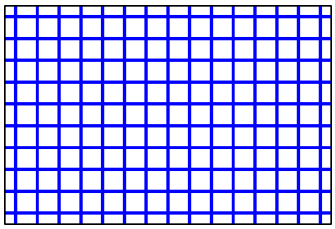
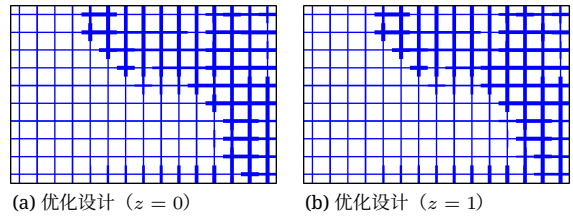


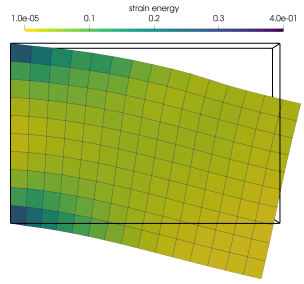
图 8：均匀初始设计，$r_x = r_y = 0.15$ 且无胞元旋转，物理性能为 $\Phi_{\text{init}} = 28.9$ 和 $\Psi_{\text{init}} = 0.135$。

对于所述设置，我们选择 $\Lambda_\Psi = -10$并得到如图 9a所示的优化设计。请注意，设计域沿 z方向划分为两层有限元。根据我们的经验，对于本文给出的所有数值结果，第 $z = 0$ 层与第 $z = 1$ 层的优化设计差异非常小，无法通过视觉辨别。因此，本文其余部分仅展示第 $z = 0$ 层的优化设计。

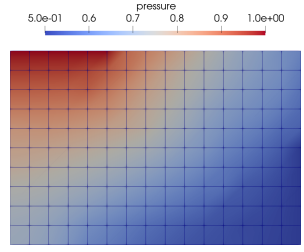
SGP 在迭代 19 次后停止，这是因为新旧设计的目标函数值之差被发现为 0。我们注意到，这一相对较少的迭代次数与设计离散化的精细程度有关。因此，使用更多的网格点可能会导致迭代次数略有增加。另一方面，在我们沿这一方向进行的实验中，所得结果的可视化效果几乎无法区分，参见 图 10。这就是为什么我们不报告不同 A_i^{grid} 、$i \in I$选择的结果。我们还可以观察到，所得设计中的流体通道是完全连通的。这是因为没有使用旋转设计自由度。另一方面，我们接下来将看到



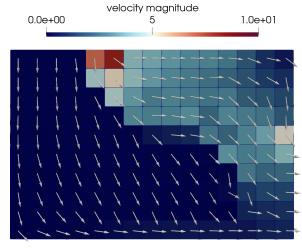
(a) 优化设计（$z = 0$）　(b) 优化设计（$z = 1$）



(c) 力学状态

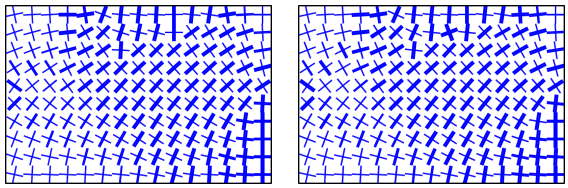


(d) 压力场



(e) 速度场

图 9：优化结果，针对 $\Lambda_\Psi = -10$ 以及固定的局部微结构取向（无旋转），其中 $\Phi_{\text{opt}} = 27.25$ 和 $\Psi_{\text{opt}} = 0.275$ 对应于优化设计 (a)、(b)。初始猜测为 图 8所示的设计。在(c) 中，通过根据物理位移使域发生变形，展示了优化设计的力学状态。应变能以颜色表示。在 (e)中，使用等比例箭头可视化流动方向，颜色表示流场的大小。



(a) (b)

图 10：针对 A_1^{grid} 的不同样本数量得到的两种优化设计。（a）针对 r_x 和 r_y各使用 10 个样本，针对 φ 使用 180 个样本。（b）针对 r_x和 r_y 各使用 28 个样本，针对 φ使用 180 个样本。这里，$\Lambda_\Psi = 1$ 和 $\Lambda_\Psi = -10$。两者在视觉上的差异几乎难以察觉，不过（b）的柔度比（a）低 1.5%，通量高 1.7%。

如果允许微结构进行局部旋转，性能会好得多。

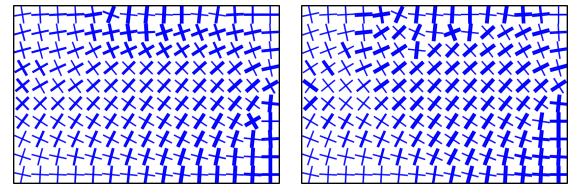
4.1.1 微结构的优化局部面内旋转

我们引入角度变量 $\varphi \in [0, \pi]$，以允许微结构绕 z轴进行面内旋转。有效材料系数通过 φ 旋转，其解析表达式如下：

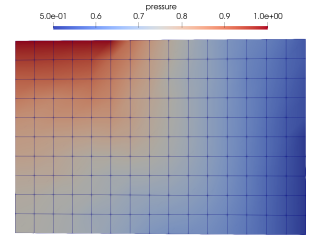
$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{\text{rot}}(r_x, r_y, \varphi) &= \boldsymbol{Q}_6(\varphi)\mathbb{A}(r_x, r_y)\boldsymbol{Q}_6(\varphi)^T, \\
\boldsymbol{B}_{\text{rot}}(r_x, r_y, \varphi) &= \boldsymbol{Q}_3(\varphi)\boldsymbol{B}(r_x, r_y)\boldsymbol{Q}_3(\varphi)^T, \\
\boldsymbol{K}_{\text{rot}}(r_x, r_y, \varphi) &= \boldsymbol{Q}_3(\varphi)\boldsymbol{K}(r_x, r_y)\boldsymbol{Q}_3(\varphi)^T, \quad (62)
\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_6 \in \mathbb{R}^{6\times6}$ 是 Voigt记号下刚度张量 AA 的旋转矩阵，而 $\boldsymbol{Q}_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ 是 Biot耦合和渗透率张量的旋转矩阵。需要注意的是，无需额外计算均质化算子，因为旋转的是有效材料张量，而非微结构。φ离散为 180 个步长，用蛮力法求解具有算法 2的 SGP子问题。

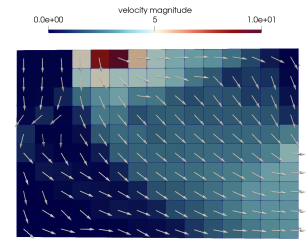
再次设定 $\Lambda_\Phi = 1$和 $\Lambda_\Psi = -10$，如图 9所示，并观察图 11a 和11b ，可以看到，当两个物理模型相互制约时，设计是如何演化的：力学模型力求使用尽可能多的材料，以使柔度最小；而当设计域中的材料较少时，流体通量达到最大。优值函数 $\mathcal{J}$ 和



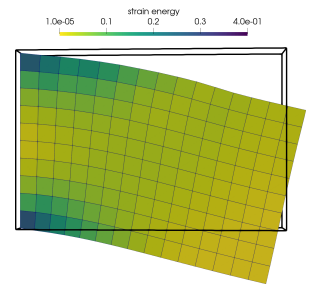
(a) 迭代一次后的设计 (b) 优化设计



(c) 压力场



(d) 速度场



(e) 机械应变

图11：具有旋转设计自由度的优化设计及其对应的物理状态，适用于 $\Lambda_\Phi = 1$ 和 $\Lambda_\Psi = -10$，其中 $\Phi_{\text{opt}} = 27.1$ 和$\Psi_{\text{opt}} = 0.413$。

柔度函数 Φ，显示于图12中，表明柔度在第一次迭代中下降，随后略有上升，最终稳定在约27.0的数值附近。总体而言，我们在数值研究中观察到，最大的设计变化发生在开始阶段的几次迭代内。之后，仅进行细微调整以进一步微调目标函数。这种行为表明SGP模型及其近似具有良好的质量，

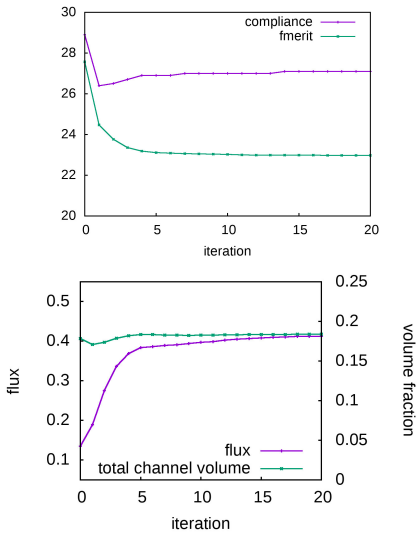


图12：图示设计的收敛图见图11。

第3节中所述。让我们更仔细地观察图11a中所示的中间设计。同样，初始猜测对于力学性能和流体流动状态而言都不特别理想。在第一次迭代后，我们从图11a中看到，一些靠近流出区域的通道被大幅拓宽，而更靠近力学支承的单元则经过调整，形成更窄的流体通道，以改善设计的力学性能。与图9中的解相比（其中方向是固定的），该解的柔度小**1%**，流体通量则高出约**47%**。

我们想强调的是，尽管我们既没有像 [24, 25], 所提出的那样针对旋转变量采用基于应力的热启动，也没有采用正则化技术，但局部取向场看起来相当平滑。我们还可以观察到，在增加额外的设计自由度后，所需的总迭代次数并未增加。

我们通过给出此类双准则加权和公式的帕累托前沿，结束本小节：图13。所有优化均基于图8所示的初始猜测。这意味着，计算帕累托曲线上的下一个点时，同样没有采用热启动技术。尽管如此，仍得到了帕累托曲线，其中没有任何一点被其他点支配。这再次表明 SGP 方法能够避免较差的局部解。求解帕累托曲线上所有点对应问题所需的外层迭代次数为 3 到 31 次。对于极端情况，迭代次数仅为 3 次，此时 $\Lambda_\Psi = 0$。针对不同的 Λ_Ψ 选择得到的优化设计

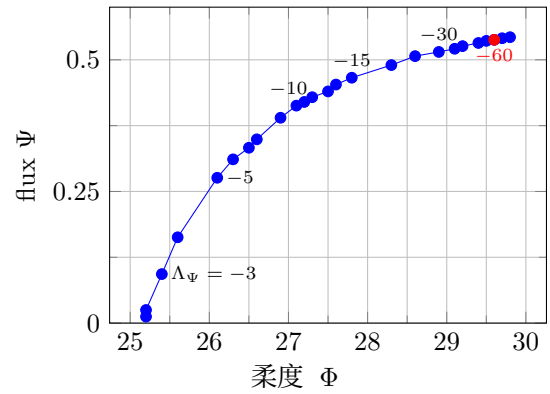
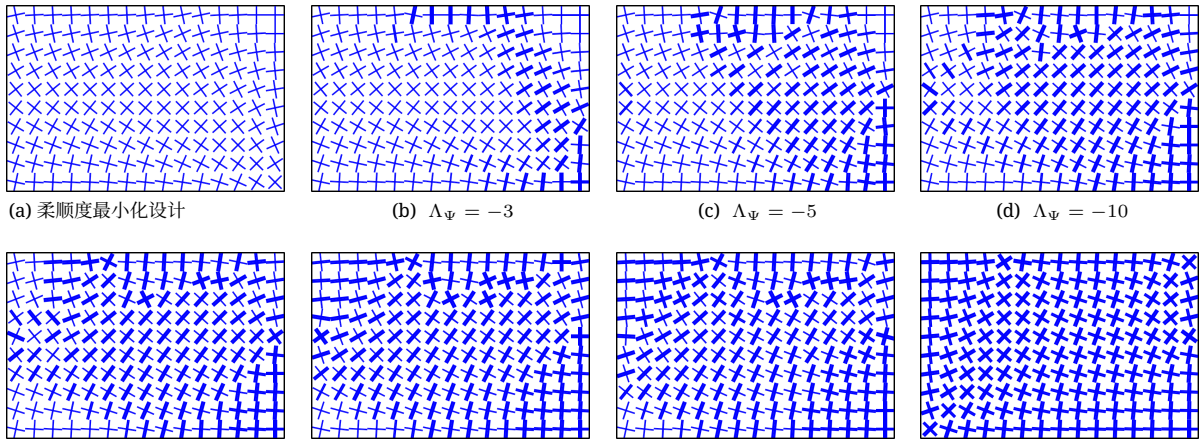


图13：加权和公式中 Λ_Ψ 变化时的帕累托前沿 $\mathcal{F}_{\text{phys}} = \Phi + \Lambda_\Psi \Psi$。优化基于1型单元，且初始设计始终为 $[0.15, 0.15, 0]^{n_{\text{el}}}$。由于我们最小化 Φ 并最大化 Ψ，因此在 Φ 和 Ψ 的像空间中，如果 $P_\Phi \leq Q_\Phi$ 且 $P_\Psi \geq Q_\Psi$，则点 $P = (P_\Phi, P_\psi)$支配点 $Q = (Q_\Phi, Q_\psi)$。

显示于图14。可以观察到，随着 Λ_Ψ 减小，柔度最小化设计（图14a）几乎平滑地转变为完全基于通量的设计（图14h）。

4.2 具有两种单胞类型的优化

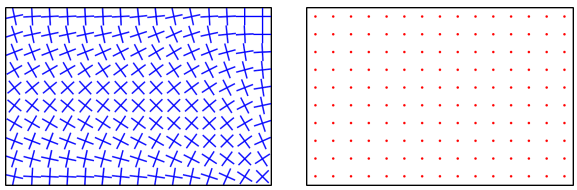
我们希望研究 SGP 处理多种单元胞类型的能力。为此，我们增加了 2 型晶胞，它由一个被基体材料包围的空心球组成（见图1的第二行）。在这种情况下，唯一的设计参数是空心球的半径 $r_s \in [0.1, 0.4]$ 。空心球越小，基体相的体积分数越高，因此胞元也越坚硬。因此，2型单元尤其适用于目标函数中的力学部分。仅优化柔度时，我们得到图15所示的平凡解。



(a) 柔顺度最小化设计 (b) $\Lambda_\Psi = -3$ (c) $\Lambda_\Psi = -5$ (d) $\Lambda_\Psi = -10$

(e) $\Lambda_\Psi = -15$ (f) $\Lambda_\Psi = -30$ (g) $\Lambda_\Psi = -60$ (h) 流量最大化设计

图14：与图13中标记点对应的优化设计可视化结果。



(a) 仅包含类型1的单元 (b) 2型单元优化设计带有 $\Phi_{\text{opt}} = 19.62$的设计

图15：柔顺度最小化设计：(a) 仅允许使用1型单元，以及(b)允许选择类型1和类型2。红点表示类型2单元中的空洞夹杂。设计(b) 的优化柔度比优化设计(a)低24%。

对于流体流动，2型单元毫无用处，因为它们不可渗透。不过，出于数值计算的考虑，我们将这类单元的渗透率设为 0.001。1型单元具有正交各向异性力学性质和横向各向同性渗透率张量，而2型单元具有各向同性力学性质，且不具备渗透性。尽管类型1和类型2的单胞在参数空间中互不相交，但它们对应的刚性基体材料体积分数范围有所重叠。我们有 $\rho(\mathcal{H}_1([0.08, 0.08]))$ =87。9% $\rho(\mathcal{H}_1([0.22, 0.22])) =$ 71.54%，且$\rho(\mathcal{H}_2$(0。4)) = 73.19% $\rho(\mathcal{H}_2$(0。1)) = 99.6%。A_2^{nodes}，用于插值 $\mathcal{H}_2$ 的基础由30个针对 $r_s \in$ 的均匀分布样本组成 $[0.1, 0.4]$ 并在 A_2^{grid} 上执行了优化过程，使用了60个样本，样本仍均匀分布。

接下来，我们展示采用两种单胞类型时，柔顺度最小化与流体通量最大化的更新帕累托前沿，见图16。我们再次

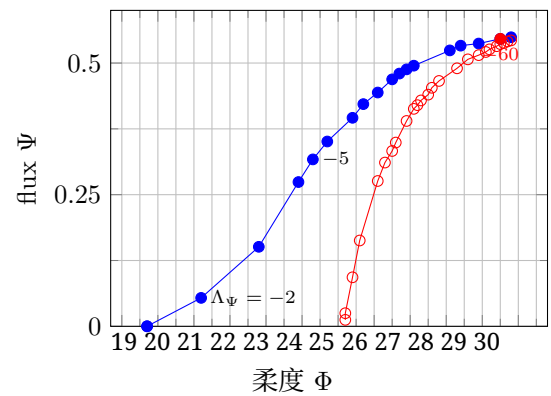


图16：比较不同Λ_Ψ下的帕累托曲线。蓝色：使用1型单元和2型单元进行优化。红色：仅使用类型1单元进行优化。蓝色曲线明显优于红色曲线。

需要强调的是，在计算帕累托曲线上的点时，我们并未使用增强的初始设计。将新的（蓝色）曲线与旧的（红色）曲线进行比较可以看出，所获得的设计始终更优。蓝色曲线上的点在帕累托意义下严格支配红色曲线上的点。这并不令人意外，因为随着

新增一种单元胞类型后，设计自由度得以增加。不过，值得一提的是，我们在这方面没有观察到任何离群值，这再次凸显了SGP方法的稳定性。所需的外层迭代次数介于4次和40次之间，这意味着尽管新增了第2类单元胞，迭代次数并未显著增加。在图17中，我们可以观察到，在优化设计中，2型单元的数量会随着递减而减少 Λ_Ψ。这是预期的，因为对于通量优先设计而言，第2类单元胞完全没有用处。

我们注意到，迄今为止所呈现的所有结果均是在未采用资源约束的情况下计算得到的。为展示 SGP 也能轻松处理加入资源约束的问题，我们简要讨论图 18中的一个选定结果。

4.3 同时对单胞类型进行优化以及对设计标签和界面进行正则化

我们通过对与单胞几何参数直接相关的正则化标签应用加权和滤波器 $\mathbb{F}$（例如 [23, 26]），对优化问题进行正则化；这种方法常用于拓扑优化领域。为此，我们引入映射

$$l_1 : \begin{cases} A_1 & \to \mathbb{R}^3 \\ (r_x, r_y, \varphi) & \mapsto R_1 \end{cases} \tag{63}$$

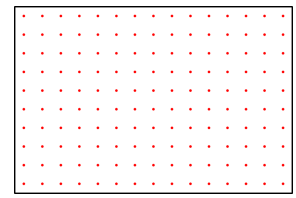
其中

$$R_1 = \left(\frac{r_x - 0.08}{0.14}, \frac{r_y - 0.08}{0.14}, \cos\left(2\frac{\varphi}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right) \right)^\top,$$

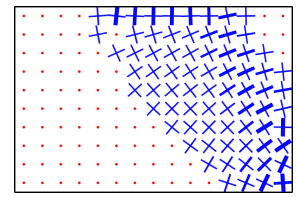
and

$$l_2 : \begin{cases} A_2 & \to \mathbb{R}^3 \\ r_s & \mapsto R_2 = (-1, -1, -1)^\top. \end{cases} \tag{64}$$

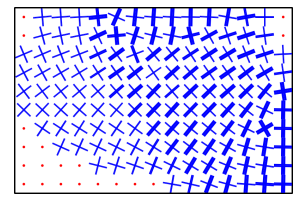
这种标签化选择具有以下效果：在类型1内部，从标签下界到标签上界的最大距离为 1。这与从类型1的最刚硬单元胞（ $r_x = r_y = 0.08$）跳转到类型2的任意单元所需的距离相同。因此，类型单元之间的界面



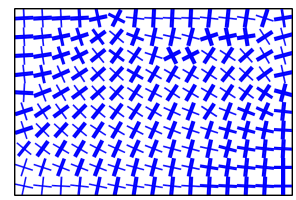
(a) 柔度最小化设计



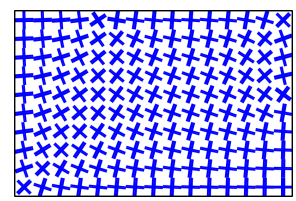
(b) $\Lambda_\Psi = -2$



(c) $\Lambda_\Psi = -5$



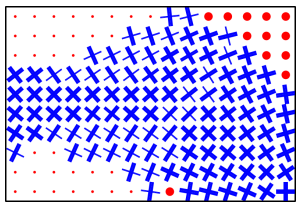
(d) $\Lambda_\Psi = -60$



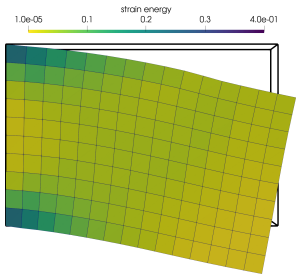
(e) 流量最大化设计

图17：采用类型1和类型2的单元进行双准则优化的结果，变化的 Λ_Ψ。此处展示的设计对应于图16中帕累托曲线上的标记数据点。

类型1和类型2之间的变化也会受到惩罚。代价最高的变化是从柔度偏好的类型1跳变到类型2的任意胞元，而后者对流体通量最有利。表达式中出现的平移余弦函数



(a) $z = 0$处的优化设计



(b) 力学状态 with $\Phi_{\text{opt}} = 23.78$

图 18：允许使用类型1和类型2单胞，并对刚性材料相施加有效体积分数约束 $\bar{\rho}_m = 0.8$时，纯柔度最小化的结果。与 图 17a相比，可以观察到，只有在此情况下，设计中才会出现类型1的单元。此外，资源约束会导致第2类单元胞的参数 r_s 发生变化。

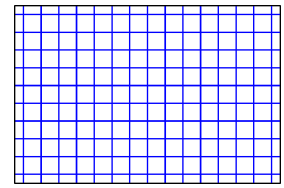
$(R_1)_3$ 用于消除角变量的歧义。

采用这些正则化标签后， $\mathcal{J}_{\text{reg}}$式 （59）变为

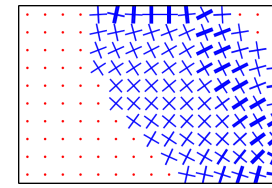
$$\mathcal{J}_{\text{reg}}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{3} \|\boldsymbol{R}_\ell - \mathbb{F}(\boldsymbol{R}_\ell)\|^2, \qquad (65)$$

其中 $\boldsymbol{R}_\ell \in \mathbb{R}^{n_{\text{el}}}$ 汇集了 ℓ-分配给每个有限元的正则化标签的各个分量，该标签由公式式（63）或式（64）定义，具体取决于相应有限元选择的是胞元类型1还是第2类单元胞 e。

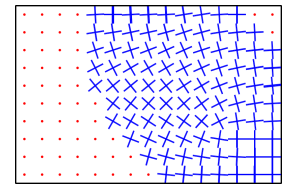
接下来，我们研究在特定选择 $\Lambda_\Psi = -3$下，正则化对优化结果的影响。图19展示了随着正则化参数 p_{filt}增加，设计所发生的变化。相应的目标函数值列于表2中。比较图19b和图19c可清楚地观察到流体通道半径的 p_{filt}正则化，



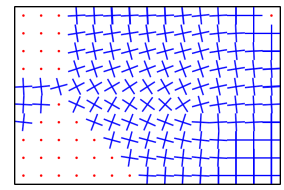
（a）初始设计



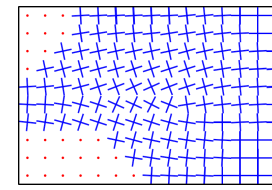
（b）无正则化



（c） $\Lambda_\Xi = 0.01$



（d） $\Lambda_\Xi = 0.02$



（e） $\Lambda_\Xi = 0.025$

图19： Λ_Ξ 变化时，滤波半径为1.3个单元且 $\Lambda_\Psi = -3$ 的结果。

在设计域右上角的1型单元与2型单元之间的界面消失，设计由1型单元主导。

Λ_Ξ	$\mathcal{J}_{\text{mer,opt}}$	$\mathcal{J}_{\text{reg,opt}}$	Φ_{opt}	Ψ_{opt}
0	21.34	11.5	21.57426	0.0765
0.01	21.65	0.0389	21.65041	0.0140
0.011	21.67	0.0484	21.66846	0.0142
0.015	21.99	0.0747	21.95892	0.0139
0.02	22.40	0.092	22.34912	0.0135
0.025	22.70	0.0712	22.66730	0.0136

表2：图19所示设计的性能（$\mathcal{J}_{\text{mer,opt}}(\Lambda_\Xi) = \mathcal{J}_{\text{reg,opt}}(\Lambda_\Xi) + \Phi_{\text{opt}} + \Lambda_\Psi \Psi_{\text{opt}}$

5 结论与展望

我们提出了一种基于均匀化的结构优化序贯全局规划（SGP）方法。该方法可视为一种受允许的几何材料参数集合约束的自由材料优化。

通过数值算例逐步向优化问题中加入更多要素，我们证明，所提出的 SGP 方法凭借其一阶近似，能够获得良好且合理的优化设计，而无需进行专门的设计初始化，也无需采用正则化策略来保证收敛性。此外，SGP 能够处理具有互不相交参数集的多个材料类别，无需额外的插值和惩罚策略。我们还观察到，优化微结构的局部取向可显著改善流体通量，最高可达 48%。我们并未专门探讨微结构内部的连通性问题，即如何确保流体饱和通道彼此连通。不过，第 4.3 节中提出的正则化方法可用于控制微结构局部旋转的变化程度。从所展示的数值算例中我们发现，即使采用轻微的正则化，也已能对设计产生相当大的影响。

尽管第 第 4 节中示例的有限元近似分辨率以及设计单元数量选择得相当粗略，但这足以展示 SGP 的相关特性。关于更高的分辨率：由于一阶近似具有块可分性，该算法可以针对设计单元进行良好的并行化。

子问题求解器中所述的蛮力方法算法2，还可以通过对设计网格 A_i^{grid} 进行分层扫描来进一步加快：先采用较粗的样本数，并从中确定最小值点。在下一级中，只考虑当前最小值点及其相邻点，并在这个子集 A_i^{grid} 中对所有$i \in I$执行相同的搜索。重复此步骤，直到达到所需的最大层数或达到一定精度。需要注意的是，采用这一策略时，设计质量取决于最粗网格层级上的样本数。另一种方法是对每个设计元素和类型应用 Lipschitz 优化求解器，以黑箱方式进行求解，参见 [27],。

未来的研究将着眼于把基于均匀化的优化所采用的 SGP 方法扩展至瞬态问题，尤其是动态超材料设计。另一项挑战是扩展所提出的优化方法，借助 [5] 中讨论的灵敏度分析，对均匀化系数依赖于宏观响应的非线性双尺度问题进行近似处理。

6 致谢

作者 B. N. Vu 和 M. Stingl 衷心感谢德国联邦经济与气候行动部（BMWK）在 FIONA（LuFo VI-1，FKZ：20W1913F）项目期间提供的资金支持。E. Rohan 和 V. Lukeˇs 开展的研究得到了捷克科学基金会项目 GACR 19-04956S 和 GACR 22-00863K 的支持。

7 声明

作者声明，他们不存在已知的、可能影响本文所报告工作的利益冲突或个人关系。

8 结果复现

所提出优化方法的算法见算法 1 和算法 2。其实现代码，以及用于复现第 4 节所呈现数值结果的示例问题设置和相应数据，均公开发布于 https://gitlab.com/bnvu/sgp-poroel。

参考文献

[1]Andreasen, C.S., Sigmund, O.：孔弹性中流固相互作用问题的拓扑优化。《计算机辅助应用力学与工程》**258**，55–62（2013年）

[2] Biot, M.A., Willis, D.G.: 固结理论的弹性系数。《应用力学杂志》**79**，594–601（1957年）

[3]Burridge, R., Keller, J.B.: 通过均匀化得到的 Biot 孔弹性方程。载于：Burridge, R., Childress, S., Papanicolaou, G.（编）《无序介质的宏观性质》，第 51–57 页。Springer, 柏林，海德堡（1982年）[4] Rohan, E., Naili, S.: 黏性流体渗流多孔介质声学中的流固耦合均匀化。《应用数学与物理学杂志》**71(137)**（2020年）[5]Rohan, E., Lukeˇs, V.: 运用均匀化与灵敏度分析方法对变形流体饱和多孔介质中的非线性现象进行建模。《应用数学与计算》**267**，583–595（2015年）[6]Andreasen, C.S., Sigmund, O.: 多孔弹性致动器的多尺度建模与拓扑优化。《智能材料与结构》**21(6)**, 065005（2012年）[7] Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: 使用均匀化方法生成结构设计中的最优拓扑。《应用力学与工程中的计算机方法》**71(2)**，197–224（1988年）[8] Sigmund, O.: 用 MATLAB 编写的 99 行拓扑优化代码。《结构与多学科优化》**21(2)**，120–127（2001年）[9] Svanberg, K.: 移动渐近线法——一种新的结构优化方法。《国际工程数值方法杂志》**24(2)**，359–373（1987年）

[10]Gill, P.E.、Murray, W.、Saunders, M.A.: SNOPT：大规模约束优化的序列二次规划算法。SIAM 优化杂志 **12(4)**，979–1006（2002年）

[11] Das, S.、Sutradhar, A.: 功能梯度材料的多物理场拓扑优化

可控多孔结构：在散热问题中的应用。《材料与设计》**193**，108775（2020年）[12] Zhou, M., Geng, D.: 用于热力学行为的通道冷却胞状结构的多尺度、多材料拓扑优化。《应用力学与工程中的计算机方法》**383**，113896（2021年）[13]Chen, W., Zheng, Y., Wang, Y.: 填充多种微结构的多目标拓扑优化。《复合材料结构》**304**, 116322（2023年）[14] Hvejsel, C.F., Lund, E.: 用于统一拓扑优化和多材料优化的材料插值方案。《结构与多学科优化》**43(6)**，811–825（2011年）[15]Ypsilantis, K.-I., Faes, M.G., Ivens, J., Lagaros, N.D., Moens, D.: 一种针对基于均匀化的微结构类型与拓扑并行优化问题的方法。计算机与结构**272**，106859（2022年）[16]Liu, H., Chen, L., Jiang, H., Duan, S., Luo, S., Wang, X.: 采用多种微结构原型和材料的梯度复合晶格结构数据驱动设计。《复合材料结构》**305**, 116485（2023年）[17]Pizzolato, A., Sharma, A., Maute, K., Sciacovelli, A., Verda, V.: 具有可控几何复杂度的多材料结构多尺度拓扑优化——在传热问题中的应用。《应用力学与工程中的计算机方法》**357**，112552（2019年）[18] Semmler, J., Pflug, L., Stingl, M.: 横向电磁散射应用中的材料优化。《SIAM科学计算杂志》**40(1)**，85–109（2018年）[19]Stingl, M., Koˇcvara, M., Leugering, G.: 一种序贯凸半定规划

算法及其在多载荷自由材料优化中的应用。《SIAM优化杂志》**20**(1)，130–155（2009年）

[20]H¨ubner, D., Rohan, E., Lukeˇs, V., Stingl, M.：Biot模型所描述的多孔材料优化。《固体与结构国际期刊》**156-157**，216–233（2019年）[21]Brown, D.L., Popov, P., Efendiev, Y.：关于缓慢变化介质中的 Stokes 流均匀化及其在流固耦合中的应用。GEM-国际地数学期刊**2**（2），281–305（2011年）[22]Rohan, E., Naili, S., Lemaire, T.：流体饱和弹性介质中的双重孔隙率：通过静态问题的层次均质化推导有效参数。《连续介质力学与热力学》**28**（5），1263–1293（2016年）[23] Bourdin, B.：拓扑优化中的滤波器。《工程数值方法国际期刊》**50**（9），2143–2158（2001年）[24]Pedersen, P.：关于正交各向异性材料的最优取向。《结构优化》**1**（2），101–106（1989年）[25]Norris, A.N.：各向异性固体的最优取向。《力学与应用数学季刊》**59**（1），29–53（2005年）[26] Bruns, T.E., Tortorelli, D.A.：非线性弹性结构和柔顺机构的拓扑优化。《计算方法与工程中的应用力学》**190**（26），3443–3459（2001年）[27] Hansen, P., Jaumard, B.：载于：Horst, R., Pardalos, P.M.（编）：Lipschitz 优化，第407–493页。Springer，波士顿，马萨诸塞州（1995年）