群胚的薄跨笛卡尔闭双范畴

Pierre Clairambault Simon Forest 艾克斯-马赛大学、土伦大学、法国国家科学研究中心、LIS，马赛 艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，马赛，法国 电子邮箱：Pierre.Clairambault@cnrs.fr 电子邮箱：Simon.Forest@univ-amu.fr

arXiv:2301.11860v1 [cs.LO] 27 Jan 2023

摘要——近年来，人们对编程语言的双范畴模型日益感兴趣。这类模型具有“证明相关性”，即它们会明确区分导致相同可观测结果的执行轨迹，同时将规约路径作为同构赋予形式意义。

本文介绍一种新的模型，即称为群胚的薄跨的双范畴。从概念上说，它与 Fiore 等人的广义结构物种以及 Melliès 的同伦模板博弈较为接近，但在如何处理资源的复制及由此产生的对称性方面存在根本差异。在那些模型中，解释是饱和的——语义个体可能携带任意对称性这一事实使解释膨胀；而我们的模型是薄的，其灵感来自薄并发博弈：项的解释不携带任何对称性，但语义个体满足一个通过双正交性定义的微妙不变量，从而保证它们在对称性下保持不变。

我们首先构造群胚的薄跨双范畴 Thin。其对象是具有额外结构的某些群胚，态射是通过普通拉回进行复合的跨度，恒等态射为恒等跨度；其 2-胞腔是跨态射，它们使诱导的三角形仅在自然同构意义下交换。随后，我们为 Thin 配备一个伪余单子 !，最后证明 Kleisli 双范畴 Thin! 是笛卡尔闭的。

I. 引言

关系模型 [1] 是线性逻辑或 λ-演算中最基本、最初等的指称模型之一。从本质上说，它只是将公式／类型解释为集合，将证明／程序解释为关系，也就是说，将它们解释在范畴 Rel 中。尽管关系模型十分简单，却无处不在：它是线性逻辑一系列所谓基于网的模型的基本基础，其中包括相干空间或有限性空间 [2]。它能够忠实地预测归约时间[3]。它支持定量扩展，例如概率相干空间 [4], 中的加权关系模型 [5], , 甚至可扩展到量子计算 [6] ——这些定量扩展具有强有力的完全抽象结果 [7], [8]。从句法角度来看，关系模型恰好对应于非幂等交类型 [9], ; 后者本身也是当前活跃的研究课题（例如参见 [10], [11]），并为解决语义问题提供了一种句法方法。最后，它与博弈语义 [12]–[13], 紧密相关；关系模型似乎是博弈语义的一种去序列化形式（例如参见 [8], [14]–[16]）。简而言之，它处于指称语义领域过去与当前诸多主题的交汇处。

指称语义学中的另一个近期趋势是采用双范畴模型 [17] ，其中熟悉的范畴律仅在满足相容条件的某些 2-胞腔意义下成立——特别是，Fiore 和 Saville 最近对笛卡尔闭双范畴 [18] 进行了深入研究。在这类模型中，指称不再是归约的不变量：两个可转换项仅产生同构对象，而归约路径则作为具体的同构 [19] 获得了真正的解释——从而将归约带入范畴模型之中。具体的双范畴模型仍然不多，据我们所知，能够处理非线性计算的此类模型（族）只有三个，按时间顺序分别是：首先，Fiore、Gambino、Hyland 和 Winskel 关于广义结构物种的笛卡尔闭双范畴 [20]；其次，Castellan、Clairambault 和 Winskel 的薄并发博弈 [21] （由 Paquet [22]确立）；第三，Melli`es 的同伦模板博弈 [23]。在这三个模型中，第一个模型的研究远为最丰富，相关工作包括推广及其在语义学中的应用 [24]–[26], 、与交类型和 Taylor 展开之间的联系 [27], [28], , 以及对纯 λ-演算的应用 [29]。除了为归约路径提供非退化的解释之外，这些具体的双范畴模型还是“证明相关的”：它们为具有相同行为的、可能多条的求值轨迹保留不同的语义见证，从而对非确定性保持一种清晰的分支式描述。

这些模型还有另一个共同点：在其构造中，主要的微妙之处与复制有关，即线性逻辑的模态词 !。在关系模型中，$!A$ 是由 A中的元素构成的 $\mathcal{M}(A)$有限多重集的集合，或者也可以说，是商除以置换的自由幺半群 A^* 。在双范畴模型中，这被$\mathcal{M}(A)$的范畴化所替代：一个范畴（或群胚），其对象将各个独立的资源使用分别保留下来（例如 A^*）。其态射是显式的置换，在本文中通常称为对称性。模型中的个体必须指向特定的资源（例如 a_i 在 $a_1 \dots a_n \in A^*$中），但编程语言模型所预期的范畴律要求其行为仍应在对称性下保持不变。在广义结构物种和模板博弈中，这通过使见证相对于对称性饱和来实现：直观地说，一个个体的行为不能取决于资源的具体恒等性，因为这些资源是通过所有可能对称性的“噪声”来观察的——第二节将对此作较为温和的回顾。不过，这种饱和使模型及其构造变得复杂，尽管这是有充分理由的。但这与薄并发博弈形成对比，后者

采用了一种受 Abramsky-Jagadeesan-Malacaria 博弈 [12] 和 Melli`es 的轨道博弈[15]启发的机制来处理对称性：策略不是饱和的，但通过一种微妙的、类似于互模拟的结构来确保它们在“对手的对称性”下保持不变——我们称之为 Thin 方法。

我们认为，薄方法至少对于语义学中的应用是有帮助的：见证上不存在对称性，使其具有更加具体的风格，这或许有助于在对个体进行排序时进行连续推理[1]，，或简化诸如 [24] 这样的定量扩展。但更根本地说，这两个世界之间存在一种明显的张力，值得展开研究。证明相关关系模型是否具有内在的饱和性？薄方法是否只有在博弈中才成为可能，因为其中存在时间和因果关系？这些基本问题的意义可能超越指称语义学，因为此类模型中对称性的处理与代数组合学 [20] 和同伦论 [23]有着深刻联系。

a）贡献：我们引入了由群胚的薄跨构成的双范畴 Thin：其对象是带有额外结构的某些群胚，其态射是某些跨度，其 2-态射是某些弱跨态射，即使诱导出的三角形在选定的自然同构意义下交换。恒等态射是恒等跨度，而跨度的复合通过普通拉回进行。

当然，普通拉回过于弱小，无法支撑弱跨态射的水平复合。为此，我们首先通过双正交性构造定义一致跨度，从而确保复合拉回同样满足双拉回泛性质。这使我们能够对 2-胞腔进行水平复合，但这种水平复合仍未被规范地定义，因此无法形成双范畴。

下一步，我们从薄并发博弈和 Melli`es 的轨道博弈中引入对称性的分解：正对称（由程序引起）和负对称（由环境引起）。随后，我们通过第二个双正交性构造定义薄跨，从而确保只要考虑正弱跨态射，弱跨态射的水平复合就能被规范地定义，其中所选取的同构仅涉及正对称。我们证明，这将产生一个双范畴 Thin。此外，我们为 Thin 配备一个伪余单子 !，并证明 Kleisli 双范畴 $\mathbf{Thin}_!$ 是笛卡尔闭的。

b) 概述：在第二节中，我们首先温和地介绍关系模型及其与证明相关的扩展。在第三节中，我们介绍双范畴 Thin，先运用一致正交性，再运用薄正交性。在第四节中，我们介绍伪余单子 !，并证明 Kleisli 双范畴 $\mathbf{Thin}_!$ 是笛卡尔闭的。

II. 关系模型、跨度、物种

A. 关系模型

关系模型是 λ-演算、线性逻辑或简单编程语言的最简单指称模型之一

[1]例如，在 [29], 从有限计算推广到无限计算时，不能像指称语义中通常那样简单地通过连续性来实现，因为其中涉及管理饱和的商。

，例如 PCF。它的做法是将每种类型 A 简单地解释为一个集合 $[\![A]\!]$，并将程序 $\vdash M : A$ 解释为$[\![A]\!]$的一个子集。这个集合 $[\![A]\!]$ 通常称为网，因为它是所谓基于网的线性逻辑模型（如相干空间及其扩展）的第一个分量。可以把 $[\![A]\!]$ 中的元素看作已完成的执行（对于布尔值或自然数等基类型，这很直观；对于高阶类型，则可能更复杂），而把 $[\![M]\!] \subseteq [\![A]\!]$ 看作 M 可能实现的所有已完成执行的集合。

示例 1。布尔值的基础类型解释为$[\![\mathbb{B}]\!] = \{\mathsf{tt}, \mathsf{ff}\}$，常量 $\vdash \mathsf{tt} : \mathbb{B}$ 解释为 $[\![\mathsf{tt}]\!] = \{\mathsf{tt}\}$。

程序 M 的解释采用组合方式计算，遵循指称语义的方法论，并由集合与关系的范畴结构组织。

1) 基本的范畴结构：存在一个范畴 Rel，其对象是集合，态射是从 A到 B的关系，即 $R \subseteq A \times B$的子集。A 上的恒等态射是对角关系 $\{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$，而$R \subseteq A \times B$与 $S \subseteq B \times C$的复合由所有满足以下条件的有序对 $(a,c) \in A \times B$ 组成：对于某个 $b \in B$，有 $(a,b) \in R$且 $(b,c) \in S$。

此外，Rel 具有由对象上的笛卡尔积给出的幺半结构。对于 $R_i \in \mathbf{Rel}(A_i, B_i)$、$R_1 \times R_2 \in \mathbf{Rel}(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)$，其积由所有满足 $(a_i, b_i) \in R_i$的 $((a_1,a_2),(b_1,b_2))$ 组成——单位 I是一个固定的单元素集合，例如 $\{*\}$。此外，Rel 是紧闭的：每个集合 A 都有一个对偶 A^*，其定义就是 A 本身；并且存在关系 $\eta_A \in \mathbf{Rel}(I, A \times A)$ 和 $\epsilon_A \in \mathbf{Rel}(A \times A, I)$，二者都是对角关系，满足相容条件 [30]。特别地，Rel 是 $\star$-自主的，因此是乘法线性逻辑以及线性 λ-演算的一个模型：线性箭头类型解释为 $[\![A \multimap B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$。最后，Rel 具有有限积，集合 A 和B 的二元积由不交并 $A + B = \{1\} \times A \uplus \{2\} \times B$给出。

2）指数模态：Rel 的指数模态基于有限多重集。若 A 是一个集合，我们将 $\mathcal{M}(A)$ 写作 A 上有限多重集的集合。为了表示特定的多重集，我们使用类似列表的记法，例如 $[0,1,1] \in \mathcal{M}(\mathbb{N})$——对于空多重集，我们写作 $[] \in \mathcal{M}(A)$。

对于 A 一个集合，其 bang $!A$ 就是集合 $\mathcal{M}(A)$。这扩展为 Rel 上的一个余单子，满足构成所谓 Seely 范畴所需的条件——特别地，存在

$$\mathcal{M}(A + B) \cong \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$$

一个提供 Seely同构的双射。总的来说，这使 Rel 成为直觉主义线性逻辑的一个模型；同时，这使 Kleisli 范畴 $\mathbf{Rel}_!$ 笛卡尔闭，从而我们可以解释（除其他之外）简单类型的 λ-演算。

例 2。考虑 PCF 中的项 $\vdash M : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

$$\vdash \lambda x^{\mathbb{B}}.\, \mathtt{if}\ x\ \mathtt{then}\ x\ \mathtt{else}\ \mathtt{if}\ x\ \mathtt{then}\ \mathsf{ff}\ \mathtt{else}\ \mathsf{tt} : \mathbb{B} \to \mathbb{B},$$

我们有 $[\![M]\!] = \{([\mathsf{tt},\mathsf{tt}],\mathsf{tt}), ([\mathsf{tt},\mathsf{ff}],\mathsf{ff}) \text{ 和 } ([\mathsf{ff},\mathsf{ff}],\mathsf{tt})\}$。

在这里我们可以观察到，该模型是定量的，因为它记录了每次执行消耗了多少资源：一个

可以通过对 x 求值两次并得到 tt，或对 x 求值两次并得到 ff，来观察输出 tt。可以通过对 x 求值两次（一次得到 tt，一次得到 ff）来观察输出 ff。回想一下，在 [tt、ff] = [ff、tt], 中，顺序并不重要。

关系模型还支持对非确定性的解释：如果 $\vdash$ choice: $\mathbb{B}$ 是一个新的基本构造，以非确定方式求值为 tt 或 ff，那么我们只需设定

$$[\![\mathbf{choice}]\!] = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}\,.$$

3）关系模型的扩展：关系模型极其灵活，可以通过多种不同方式进行扩展。一种方向是为对象添加相容关系，并将范围限制为相容的态射——由此我们得到（基于多重集的）相容性语义。

另一种扩展是加权关系模型 [5], [31]，其中一个项 $\vdash M : A$ 不再表示 $[\![A]\!]$ 的子集——即一个函数 $[\![M]\!] : [\![A]\!] \to \{0,1\}$ ——而是表示一个函数

$$[\![M]\!] : [\![A]\!] \to \mathcal{R}$$

为 web $a \in [\![A]\!]$ 中的每个点分配一个权重 $[\![M]\!]_a \in \mathcal{R}$。该权重可用于记录有关执行的附加信息。例如，可以记录导致某个结果的不同非确定性分支的数量：比如，如果 $\mathcal{R} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$，那么 $[\![\text{if choice thentt else tt}]\!]_{\mathbf{tt}} = 2$。借助 $\mathcal{R} = \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$，我们可以跟踪某个结果发生的概率，从而得到一个对概率 PCF 完全抽象的模型 [7]。论文 [5] 还给出了其他示例：资源消耗、必然收敛等。

进一步将关系模型变为“证明相关的”是很自然的。这意味着不仅记录权重或计算非确定性分支的数量，还要为每个 $\vdash M:\ A$ 和 $a \in [\![A]\!]$，保留一个集合 $[\![M]\!]_a \in \mathbf{Set}$，记录从$M$ 到 a的执行过程的见证。实现这一点有一些完善的方法，我们稍后会回顾；但现在，先让我们以一种朴素的方式尝试一下。

B. 跨度的双范畴

第一个想法是简单地用跨度替换关系。

1）跨度：回顾一下，如果 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回的范畴，那么我们构造 Span($\mathcal{C}$)，其对象是 $\mathcal{C}$ 的对象，且从 A 到 B 的态射是由三元组 (S, ∂_A^S, ∂_B^S) 构成的图表

$$A \quad \overset{\partial_A^S}{\leftarrow} \quad S \quad \overset{\partial_B^S}{\rightarrow} \quad B\,,$$

直观地说，S 是一个内部见证的集合，通过映射 ∂_A^S 和 ∂_B^S投影到A 和 B。对于 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$，通过收集形如 $(\partial_A^S(s)\ \partial_B^S(s))$ 的对（其中 $s \in S$），可以得到一个关系；但我们拥有更多信息：对于每一对 $(a,\ b) \in A \times B$，我们有

$$\mathsf{wit}^S(a,b) = \{s \in S \mid \partial_A^S(s) = a\ \&\ \partial_B^S(s) = b\}\,,$$

一组见证，表明 a 与 b 相关——因此这确实提供了一种证明相关关系模型的概念。

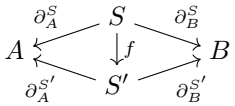
例 3. 记 $\mathbb{B} = \{\text{tt、ff}\}$ 和 $1 = \{*\}$，我们可以将程序 $\vdash$ if choice thentt else tt 表示为

$$1 \quad \overset{\partial_l}{\leftarrow} \quad \{a,b\} \quad \overset{\partial_r}{\rightarrow} \quad \mathbb{B}$$

一个跨度，其中 $\partial_l(a) = \partial_l(b) = *$, $\partial_r(a) = \partial_r(b) =$tt。

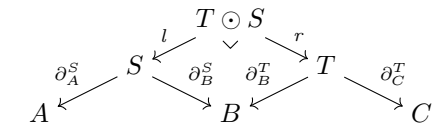
因此，程序求值为 tt 时有两个见证。

2) 一个双范畴：S 的具体恒等态射并不重要——上面的同一个跨度带有 $S' = \{a', b'\}$，不应被视为不同对象。跨度之间的态射是 f: $S \to S'$，使得



交换；跨度的同构是可逆态射。

在 A 上的恒等跨度就是 $A \leftarrow A \rightarrow A$，带有两个恒等映射。$A \leftarrow S \rightarrow B$ 与$B \leftarrow T \rightarrow C$ 的复合通过首先构造拉回得到



(1)

并令$\partial_A^{T\odot S} = \partial_A^S \circ \mathrm{l}$ 和 $\partial_C^{T\odot S} = \partial_C^T \circ \mathrm{r}$——对于 Span(Set)，这意味着 $T \odot S$ 的元素是所有满足$\partial_B^S(s) = \partial_B^T(t)$的有序对（$s$, t），并通过$\partial_A^{T\odot S}((s,t)) = \partial_A^S(s)$和 $\partial_C^{T\odot S}((s,t)) = \partial_C^T(t)$分别投影到 A和 C。

这种复合未必严格满足结合律，但拉回的泛性质意味着它在典范同构意义下满足结合律——从而构成一个双范畴：

定理 1. 若 $\mathcal{C}$ 存在拉回，则由以下内容定义的 Span($\mathcal{C}$)

objects: *objects of $\mathcal{C}$,*
morphisms: *spans $A \leftarrow S \rightarrow B$,*
2-cells: *morphisms of spans,*

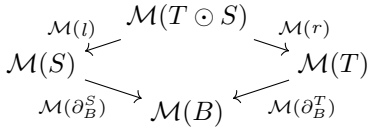
构成一个双范畴，记作 Span($\mathcal{C}$)。

事实上，Span($\mathcal{C}$) 是一个紧闭双范畴 [32], , 因而是线性 λ-演算的一个模型。特别地，Span(Set) 与 Rel 具有许多相同的结构：它们的对象相同，并且将一个跨度 $A \leftarrow S \rightarrow B$ 发送到配对 $(\partial_A^S(s)\ \partial_B^S(s))$（其中 $s \in S$）的运算是一个函子，因此 Span(Set) 是证明相关关系模型的一个自然候选。

3) 指数：然而，Rel 中的指数不能直接迁移到 Span。运算 $\mathcal{M}$ (–) 确实能给出 Set 上的一个函子，其定义方式是，对于 f: $A \to B$,

$$\mathcal{M}(f)([a_1,\ldots,a_n]) = [f(a_1),\ldots,f(a_n)]$$

定义 $\mathcal{M}(f)$: $\mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$。但 $\mathcal{M}(f)$ 无法提升到 Span(Set)，因为它不保持拉回。事实上，由复合的拉回得到的图表



不存在拉回：这需要 $\mathcal{M}(T \odot S)$ 与之之间存在一个双射

$$\{(\mu,\nu) \in \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(T) \mid \mathcal{M}(\partial_B^S)(\mu) = \mathcal{M}(\partial_B^T)(\nu)\}\,,$$

这通常并不成立。如果 $S = T = \mathbb{B}$ 和 $B = 1$，多重集对（[tt, ff], [tt, ff]）并不能唯一确定谁是

与谁同步：它可能对应于[(tt, tt), (ff , ff)] 和 [(tt, ff), (ff , tt)] 中的两个多重集 $\mathcal{M}(T \odot S)$。

这或许是意料之中的：有限多重集只记录元素的重数，却不追踪彼此不同的个体出现次数。这与证明相关关系语义的目标存在冲突；在这种语义中，特定的见证通常与各个资源出现次数相关联。

4）对象范畴化：如果指数要追踪个体资源出现次数，就意味着要避免对有限多重集取商：例如，$!A$ 的一个元素可以是一个列表，或一个词 $a_1 \dots a_n \in A^*$，其元素属于 A。当然，我们仍须考虑重新排序；这些重新排序使 A^* 成为一个群胚——事实上，它是范畴A之上的自由对称幺半范畴 Sym(A)这一构造的一个实例：其对象是有限词 $a_1 \dots a_n$，由 A中的对象组成；从 $a_1 \dots a_n$ 到 $a'_1 \dots a'_n$ 的态射由一个置换 $\pi \in \mathcal{S}_n$以及一个族$(f_i \in A(a_i, a_{\pi(i)}))_{1 \le i \le n}$构成。

因此，对象并不只是集合，而是范畴，这意味着我们从 Span(Set) 转向 Span(Cat)。事实上，Cat 也具有拉回，因此上述完全相同的构造会产生一个双范畴 Span(Cat)——不过现在函子 Sym : Cat $\to$Cat 保持拉回，因而提升为

$$\mathbf{Sym} : \mathbf{Span}(\mathbf{Cat}) \to \mathbf{Span}(\mathbf{Cat}) .$$

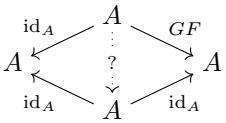
然而，在这种范畴化中，Seely同构$\mathcal{M}(A + B) \cong \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$ 丢失了。相反，我们只能得到

$$\mathbf{Sym}(A + B) \simeq \mathbf{Sym}(A) \times \mathbf{Sym}(B)$$

一个范畴等价。为了将其提升到跨度上，我们注意到，给定一个函子 $F\colon A \to B$ 我们得到一个跨度

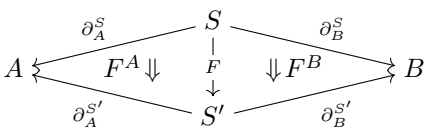
$$\hat{F} \quad = \quad A \xleftarrow{\mathrm{id}_A} A \xrightarrow{F} B \qquad \in \quad \mathbf{Span}(\mathbf{Cat})(A, B)$$

因此，将一个等价 $F\colon A \simeq B\colon G$ 提升到跨度上，需要我们提供一个2-胞腔族，即对于每个范畴 A:



然而，无论我们如何选择中介映射，其中一个三角形都无法严格交换，只能在同构意义下交换，而 Span(Cat) 的2-胞腔过于严格，无法容纳这一点。这促使我们将2-胞腔弱化为：

定义 1. 从 $A \leftarrow S \to B$ 到 $A \leftarrow S' \to B$的弱态射是一个三元组（F、F^A、F^B），其中



其中 $F^A\colon \partial_A^S \Rightarrow \partial_A^{S'} \circ F$以及 $F^B\colon \partial_B^S \Rightarrow \partial_B^{S'} \circ F$为自然同构。若 F^A 和 F^B 为恒等态射，我们称其为强态射。

采用弱态射似乎解决了上述问题，但却引出了一个更加微妙的问题：在

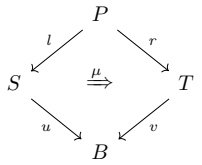


图 1. 一个双拉回

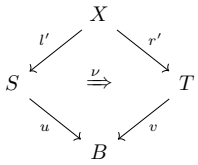
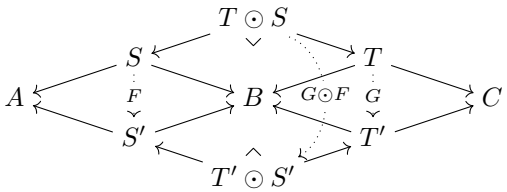


图 2. 替代方形

Span(Cat) 中，双范畴结构所要求的 2-胞腔 $F\colon S \Rightarrow S'$ 和 $G\colon T \Rightarrow T'$ 的水平复合，源于拉回 $T' \odot S'$ 的泛性质：



(2)

但这一泛性质无法复合水平排列的弱态射。我们无法既得其利又避其害：如果我们复合跨度的方法忽略了 Cat 的 2-范畴性质，那么就不能指望复合保持依赖于这一性质的跨度之间的等价，而这正是线性逻辑模型所要求的。因此，通向证明相关关系模型的这条道路似乎注定失败——然而，这恰恰是我们将在本文中要做的事情！

在深入讨论之前，我们先回顾现有的解决方案。

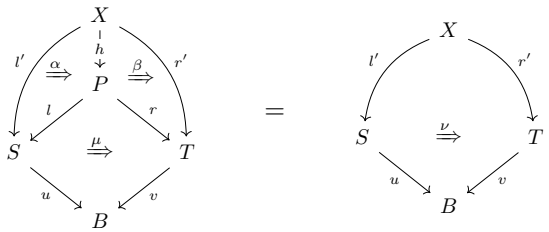
C. 证明相关的关系模型及其他相关工作

由于普通拉回“过于一维”，因此自然的做法是使用其二维版本来复合跨度。

1）双拉回：在 2-范畴中，拉回的弱化版本有多种变体。本文的一个核心概念将是双拉回：[2]

定义 2. 在 2-范畴 $\mathcal{C}$中，余跨度$S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$的双拉回是一个交换方形，该方形如图 1 所示，在一个可逆 2-胞元意义下交换，并满足对于任意如图 2 所示的方形：

（a）存在一个态射 $h\colon X \to P$ 以及 2-胞元 α 和 β，使得：



（b）h、α、β 在唯一 2-胞元意义下唯一——见附录 A。

重要的观察是，这个替代性的泛性质足以将 (2) 中的水平复合定义扩展到弱态射——但需注意，该定义的水平复合只在同构意义下确定；因为 (b) 并不能保证 h 严格唯一。

[2]根据 nLab，其正式名称是双同构逗号对象。

2）Hoffnung 的幺半三范畴：Hoffnung [33] 按照这一思路构造了 Span(Cat) 的范畴化。他利用了 Cat 实际上具有伪拉回[3], 这一事实；伪拉回是上述定义的特殊情形，其中要求 α 和 β 为恒等态射，并且 h 严格唯一——因此，一旦固定选择伪拉回，跨度的弱态射的水平复合就成为一个定义良好的函数。

具体而言，余跨度 $S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$ 的伪拉回可以构造为一个范畴，其对象是三元组（s，θ，t），其中 $\theta \in B(u(s)\ v(t))$。例如，如果 $S = T =$Sym（$\mathbb{B}$）且 $B =$Sym（1），那么该伪拉回将有两个对象，它们同步 [tt、ff] $\in S$ 和 [tt、ff] $\in T$：([tt、ff], id, [tt、ff]) 和 ([tt、ff、swap, [tt、ff])。通过添加携带所有可能对称性的新的见证，可以避免第二-B-3节中的问题。这是线性逻辑模型中的一个基本现象，我们将其称为饱和。

由于饱和会在每次复合时增加见证的数量，通过伪拉回复合得到的跨度不再构成双范畴。特别是，一个跨度 $A \leftarrow S \rightarrow B$ 与恒等跨度 $B \leftarrow B \rightarrow B$ 进行后复合，会产生一个膨胀后的 S'，远大于 S。因此，恒等态射的中性不再在同构意义下成立，而只能在将跨度映射之间的映射纳入考量后，在等价意义下成立。相应地，Hoff- nung 实际上构造了一个带有弱态射的范畴性跨度的幺半三范畴，也就是说，一个单对象四范畴！

3) Melli`es 的模板博弈：最近，Melli`es 引入了模板博弈 [34], ，试图统一各种博弈模型。这本质上是范畴性跨度的一种模型，其中范畴被视为博弈，并通过投影到一个称为模板的范畴来组织，从而刻画玩家之间的同步与调度机制。尽管 [34]是在纯线性设置下开发的，且跨度之间通过强态射关联，Melli`es 提出了一个非线性扩展，形成了微分线性逻辑的模型 [23]。

Melli`es 的贡献引入了同伦论中的概念：他并非从 Cat 出发，而是从任意带有 Quillen 模型结构（以及附加条件）的 2-范畴$\mathbb{S}$ 出发。跨度仅通过拉回进行复合，但一个跨度

$$A \xleftarrow{u} S \xrightarrow{v} B$$

必须满足纤维化性质，即 A 和 B 中的对称性可以在 S 中唯一提升 —— 用我们的术语来说，S 是饱和的。饱和确保这些跨度之间的拉回实际上是同伦拉回，因此可以用于弱态射的水平复合。Hoffnung [33] 中所见的高维结构，随后通过同伦论中的局部化运算加以处理，该运算在形式上将弱等价求逆。由此得到一个真正的双范畴，其对象由 $\mathbb{S}$ 构成，并通过同伦跨度彼此关联。

这一优雅的构造给出了微分线性逻辑的一个模型，表明线性逻辑中隐含的对称性可以借助同伦论的工具得到自然的处理。

[3]根据 nLab，其正式名称是等化逗号对象。

4）广义结构物种：最后但同样重要的是，Rel 中研究最为充分的证明相关扩展，无疑是 Fiore、Gambino、Hyland 和 Winskel 的广义结构物种的笛卡尔闭双范畴 [20]。从 A 到 B 的关系被分布子或预函子所取代：

$$F : A^{\mathrm{op}} \times B \to \mathbf{Set}$$

对于 A 和 B 范畴，这构成了一个由（小）范畴、分布子及其间的自然变换组成的（紧闭）双范畴Dist。自由对称幺半群构造 Sym(–) 在 Dist 上产生一个伪余单子，其 Kleisli 双范畴 Esp 是笛卡尔闭的。

至于上述基于跨度的方法，Dist 和 Esp 处理对称性的方式是饱和的。这首先可以从恒等分布子中看出，其定义为

$$A[-,-] : A^{\mathrm{op}} \times A \to \mathbf{Set}$$

Yoneda嵌入，它将一对 (a, a) 上的见证关联到同态集 $A[a, a]$，其中包括 a 上的所有对称性。分布子的复合通过余端公式给出

$$G \odot F = \int^{b \in B} F(-, b) \times G(b, -)$$

该公式将 $(G \odot F)(a, c)$ 中的见证取为对 $(s, t) \in F(a, b) \times G(b, C)$，再对以下关系取商：该关系确定了 B 中一个态射在 s 或 t 上的作用。

因此，在计算 Esp 中程序 $\vdash M : A$ 的解释时，对于每个 $a \in [\![A]\!]$，我们都会得到 $[\![M]\!](a)$：一组携带显式对称性的见证，并对其施加一种等价关系，使对称性能够流动——Olimpieri [28] 以优雅的语法方式描述了这一点。同样，Esp 中对称性的处理也是饱和的。

5）博弈语义：据我们所知，在线性逻辑模型中，这种饱和现象最早出现在 Baillot、Danos、Ehrhard 和 Regnier（BDER）提出的 Abramsky-Jagadeesan-Malacaria（AJM）博弈版本 [35] 中。

在 AJM博弈中，博弈!A 的着法定义为有序对（i，a），由 $i \in \mathbb{N}$ 一个副本索引和 $a \in A$ 博弈 A 中的一个着法构成——建立博弈模型时，一个根本难点在于如何保证一致性：确保策略的行为不依赖于所选副本索引的具体取值（这对应于博弈语义中复合保持弱态射的概念）。在 BDER 中，一致性通过要求策略是饱和的来保证：从本质上说，策略被模仿过程包裹，这些过程以非确定方式交换所有副本索引。这种“噪声”使策略无法看到具体的副本索引，更不用说依赖它们了——这与上文的饱和现象类似。

但在 AJM 博弈中，还有另一种选择：在原始 AJM 框架下，[12], 策略携带着确定性的复制索引选择。这里不采用饱和，而是通过要求策略满足一种类似互模拟的性质来保证一致性；该性质确保每当对手交换其复制索引时，玩家都能相应地交换自己的复制索引，从而使行为在“忽略复制索引”的意义下保持不变。与“饱和”式的一致性处理方法相反，我们将这种方法称为

“Thin”方法。其他基于复制索引的博弈模型中也有类似思想：例如 Melli`es 的轨道博弈 [15]，以及近来出现的 Thin 并发博弈[4] [21]。

薄并发博弈是一项尤为引人注目的相关工作，因为它们和 Esp 一样，也构成一个笛卡尔闭双范畴，这一点由 Paquet [22], 证明；它们还推广了关系模型 [37]。在薄并发博弈中，策略通过拉回复合。但有定理表明，这个拉回同时也是一个双拉回，因此即使策略并未饱和，也可以用它来复合水平弱态射。不过，这一双拉回性质源于策略之间一种微妙的交互式重索引机制，而该机制关键地依赖于我们能够利用时间这一事实——似乎很难像在关系模型中那样，纯粹以静态方式复现它。

III. 薄跨度双范畴

经过这番长篇讨论，我们可以提出本文的核心问题：能否构造范畴跨度的一个薄版本?

A. 群胚中的拉回与双拉回

为简单起见，我们关注群胚之间的跨度，而非范畴之间的跨度；前者已足以解释类型——我们用 Gpd 表示群胚构成的小 2-范畴。因此，我们的目标是构造一个双范畴，其对象为小群胚，态射为跨度 $A \leftarrow S \rightarrow B$，恒等态射为恒等跨度 $A \leftarrow A \rightarrow A$，复合为普通拉回，而其 2-胞腔则为弱态射。

1）记号与术语：一个跨度 $A \leftarrow S \rightarrow B$ 可以表示为函子 $S \rightarrow A \times B$，因此，与其关注跨度，不如关注 $S \rightarrow A$ 在一个群胚A上的函子。我们采用受博弈语义启发的术语来称呼这些对象。群胚 A 上的一个预策略是一对（S, ∂^F），其中 ∂^F：$S \rightarrow A$ 称为显示映射。我们经常只用 S来指代该预策略，并用 PreStrat(A) 表示 A上的预策略集合。从 A 到 B 的预策略是 $A \times B$ 上的一个预策略——于是，我们写作 ∂_A^F：$S \rightarrow A$ 和∂_B^F：$S \rightarrow B$ 来表示两个显示映射。如果 S 是从 A 到 B 的预策略，而 T是从 B 到 C的预策略，则我们用 $T \odot S$表示按照第 II-B2 节所得到的、从 A 到 C 的预策略。我们经常将群胚中的态射称为对称性，例如写作 $\varphi : s \cong_S s'$，而不是 $\varphi \in S(s, s')$。

我们用 $\mathbf{1}$ 表示只有一个对象 $*$ 且只有恒等态射的群胚；用 o 表示只有一个对象 $\bullet$ 且只有恒等态射的群胚。如果 A、B 是群胚，那么我们用 $A \vdash B$ 和 $A \multimap B$ 作为 $A \times B$ 的同义词，其对象分别记为 $a \vdash b$ 和 $a \multimap b$ ——同样，它们的态射具有如下形式：$\theta_A \vdash \theta_B \in (A \multimap B)(a \multimap b, a' \multimap b')$，其中 $\theta_A \in A(a, a')$ 和 $\theta_B \in B(b, b')$；$\theta_A \multimap \theta_B$ 的情形也同样如此。我们发现，这些纯粹的记号差异有助于理解示例，因为它们与熟悉的类型构造子相对应。

2）索引族：如前文所述，λ-演算的类型可以解释为群胚，但在线性语言中，这些群胚仍然是离散的：只有指数会引入非平凡的态射。由于这些对称性发挥着至关重要的作用，我们提前介绍指数构造的版本。如果 X 是一个集合，那么我们将由自然数有限集索引的族的集合记作 Fam(X)，即 $(x_i)_{i \in I}$，其中 $I \subseteq_f \mathbb{N}$，并且对于所有 $i \in I$、$x_i \in X$。

定义 3. 考虑 A 一个（小）群胚。群胚 Fam(A) 具有：对象，即集合 Fam(A)；态射，从 $(a_i)_{i \in I}$ 到 $(b_j)_{j \in J}$ 的态射是由一个双射 $\pi : I \simeq J$ 以及对每个 $i \in I$，$f_i \in A(a_i, b_{\pi(i)})$ 构成的对 $(\pi, (f_i)_{i \in I})$。

这以显然的方式得到一个函子 Fam : Gpd $\rightarrow$ Gpd。对于 $(A_i)_{i \in I} \in$ Fam(A)，我们将 I 的元素称为复制索引。族 $(a_i)_{i \in I} \in$ Fam(A) 比 A^* （后者又比 $\mathcal{M}(A)$）更具“内涵性”：它给出了 $\mathcal{M}(A)$ 中一个多重集的表示，不仅提供一个序列，还为每个元素分配一个不同的“地址”。

正如多重集与非幂等交类型相关联，族也与 Vial的序列类型[38] 相关联——因此我们常用 Vial 的记法表示族，例如：

$$[2 \cdot a_2, 4 \cdot a_4, 12 \cdot a_{12}] \in \mathrm{Fam}(A)$$

对于 $(a_i)_{i \in \{2,4,12\}}$ ——在 $A = o$ 的特定情形下，我们只写 $[i_1, \ldots, i_n]$ 来表示 $[i_1 \cdot \bullet, \ldots, i_n \cdot \bullet]$。

对于任意群胚 A，Fam(A) 与 Sym(A) 等价。然而，在我们的模型构造中，使用 Fam(A) 至关重要：它使程序的解释能够使用复制索引作为资源访问的标识符，且这些标识符独立于其他并发资源访问。下面给出几个例子：

例4. 对于群胚 A，断句跨距 der_A 为

$$\mathbf{Fam}(A) \xleftarrow{\mathrm{der}_A} A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A$$

其中 der_A：$A \rightarrow$ Fam(A) 将 a 映射到 $[0 \cdot a]$。

在线性逻辑的模型中，断句的作用是提取一个可复制资源的单个实例。在我们的模型中——如同 AJM博弈 [12] 和薄并发博弈 [21] 中一样——断句通过选取一个副本索引（此处为 0）来完成这一点，这个索引预先选定并固定不变。具体选取哪个索引并不重要；事实上，对于任意 n，使用 n 而非 0 的跨度都将与 der_A同构。不过，这个跨度必须包含一个选择。

例5. 例2中项 M 在薄跨中的解释，其头群胚应有四个对象

$$[0 \cdot \mathbf{tt}, 1 \cdot \mathbf{tt}] \multimap \mathbf{tt}, \qquad [0 \cdot \mathbf{ff}, 1 \cdot \mathbf{ff}] \multimap \mathbf{tt},$$
$$[0 \cdot \mathbf{tt}, 1 \cdot \mathbf{ff}] \multimap \mathbf{ff}, \qquad [0 \cdot \mathbf{ff}, 1 \cdot \mathbf{tt}] \multimap \mathbf{tt},$$

态射约化为恒等态射，显示映射为恒等态射。

使用特定的复制索引，可以观察到 x 的哪个出现求值为 tt 或 ff，从而将通向 ff 的两种求值分别关联到不同的点。

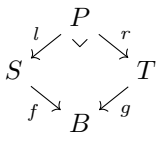
3）群胚的双拉回：如果通过拉回复合要能够让我们复合水平弱态射，就必须确保每个复合拉回也是一个双拉回。

更深入地了解 Gpd 中双拉回的形态是有益的。首先，一个有用的事实是，定义 2 的条件 (b)（同构意义下的唯一性）在 Gpd 的情形下自动成立；

[4]最初版本的带对称性的并发博弈是饱和的 [36]。

此外，我们还可以刻画那些同时也是双拉回的拉回（见附录 B）：

引理 1。在 Gpd 中，一个如下形式的拉回方形



是双拉回，当且仅当它满足以下性质：对于所有 $s \in S$、$t \in T$ 和 $\theta \in B$（fs、gt），存在 $\varphi \in S$（s、s'）和 $\psi \in T$（t'、t），使得 $fs' = gt'$ 和 $\theta = f\psi \circ g\varphi$。

我们对此作些说明。我们考虑如下形式的三元组

$$s \in S\,, \qquad \theta \in B(fs, gt)\,, \qquad t \in T$$

作为在对称意义下匹配的状态对（s，t）——我们称之为重新索引问题。上面的引理表明，给定一个重新索引问题，我们总能找到与 s 对称的 s' 以及与 t 对称的t'，使它们完全匹配，并且与 θ 相容——这称为重新索引问题的解。因此，上面的引理可以改述为：一个拉回是双拉回，当且仅当它的所有重新索引问题都有解。

我们通过一个具体例子展示这一重新索引过程：

例 6。取 B =Fam(o) $\multimap$ Fam(o)，其对象为

$$[i_1, \ldots, i_n] \multimap [j_1, \ldots, j_k]\,.$$

取 S B的子群胚，其对象为 $[i_1, \ldots, i_n] \multimap [i_1, \ldots, i_n]$，态射为所有 $\theta \multimap \theta$（其中 θ属于 Fam(o)）；并且T B的全子群胚，其对象为 $[j_1, \ldots, j_n] \multimap [0]$。

$S \to B \leftarrow T$ 的拉回是一个双拉回。例如，

$$\theta \in B([2] \multimap [2], [1] \multimap [0])$$

是一个可通过首先应用.....来解决的重新索引问题

$$\varphi \in S([2] \multimap [2], [0] \multimap [0])$$

在 S中。问题归结为寻找 S 和 T 中的态射，相对于

$$\theta' \in B([0] \multimap [0], [1] \multimap [0])$$

现在，在 T 中应用 $\psi \in T([0] \multimap [0], [1] \multimap [0])$，我们得到

$$\varphi \in S([2] \multimap [2], [0] \multimap [0])\,, \quad \psi \in T([0] \multimap [0], [1] \multimap [0])$$

重新索引问题的解，如引理 1 所示。

两个预策略的拉回构成双拉回，并非其中任何一个预策略自身的性质：在这个例子中，两个策略都不是 [23]，中所说的纤维化；要解决重新索引问题，必须在两个群胚中都进行重新索引。因此，这一性质源于两个预策略之间的和谐互动。在适当的博弈语义框架中 [21]，，可以证明，在合理的假设下，这种交互式重新索引总能成功。不过，这是一个随时间推进的渐进过程，而我们在这里无法观察到它。

B. 正交性与一致群胚

1) 定义：在线性逻辑模型的相关文献中，有一种协调模型的技巧：只复合满足某个给定交互性质（即双正交性）的态射对。第一步是通过正交关系来指定所需的交互性质：

定义 4. 取 B 上的预策略 (S, ∂^S) 和 (T, ∂^T)。

我们称它们一致正交，记作 $S \perp T$，当且仅当余跨度 $S \to B \leftarrow T$ 的拉回也是一个双拉回。

若 S $\subseteq$PreStrat(B)，则其一致正交定义为：

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{T \in \mathsf{PreStrat}(B) \mid \forall S \in \mathbf{S},\ S \perp T\}.$$

与正交性中的通常情况一样，这会自动带来若干性质：对于所有 S $\subseteq$ PreStrat(B)，都有 S $\subseteq$ S$^{\perp\perp}$，且 S$^{\perp}$ =S$^{\perp\perp\perp}$。我们尤其关注形如 S$^{\perp}$ 的集合，它们在双正交运算下保持不变：

定义 5. 一致群胚是一个二元组 (A, U$_A$)，其中A 是一个群胚，且 U$_A \subseteq$ PreStrat(A) 满足 U$_A^{\perp\perp}$ =U$_A$。

当上下文已明确其为一致群胚时，我们常将一致群胚 (A, U$_A$) 简记为 A。

2) 构造：一致群胚 1 是配备了 U$_1$ = PreStrat(1) 的终端群胚。若 A 和 B 是一致群胚，则它们的张量 $A \otimes B$ 是群胚 $A \times B$，配备集合 U$_{A\otimes B}$ = (U$_A \otimes$U$_B$)$^{\perp\perp}$，记作

$$\mathbf{U}_A \otimes \mathbf{U}_B = \{(S \times T, \partial^S \times \partial^T) \mid S \in \mathbf{U}_A,\ T \in \mathbf{U}_B\}$$

其中 $\partial^S \times \partial^T$： $S \times T \to A \times B$。 $A^{\perp}$ 的对偶是（A, U$_{A^{\perp}}$），其中 U$_{A^{\perp}}$ = U$_A^{\perp}$。 A和 B的par联结词具有

$$\mathbf{U}_{A \parr B} = (\mathbf{U}_A^{\perp} \otimes \mathbf{U}_B^{\perp})^{\perp}$$

从而得到德摩根对偶性（$A \otimes B$）$^{\perp} = A^{\perp} \parr B^{\perp}$。由此我们导出线性箭头 $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$。

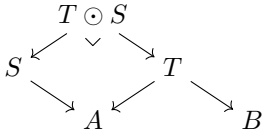
一致群胚 A 上的一致预策略就是任意一个 $S \in$ U$_A$。如果 A、B 是一致群胚，那么从 A 到 B 的一致预策略就是定义在 $A \multimap B$ 上的一致预策略。

3）一致复合：我们断言，只要将 $S \in$ U$_{A\multimap B}$ 与 $T \in$ U$_{B\multimap C}$进行复合，就有正交性

$$(S, \partial_B^S) \perp (T, \partial_B^T)$$

因此复合拉回是一个双拉回。

如果 S 是 A 上的预策略，且 T 是从 A 到B的预策略，我们将由以下方式得到的 B 上的预策略记为 T@S：



称为将 T 应用于 S。由此可表述如下：

命题 1。设 (A, U$_A$) 和 (B,U$_B$) 为一致群胚，且 T 是一个从 A 到 B 的预策略；进一步考虑一个类 S $\subseteq$ U$_A$，使得 (A, id$_A$) $\in$ S 且 U$_A$ = S$^{\perp\perp}$。

当且仅当以下两个条件成立时，$T \in$U$_{A\multimap B}$： (1) 对所有 $S \in$ S，T@$S \in$ U$_B$，

(2) $(T, \partial_A^T) \in \mathbf{U}_A^{\perp}$.

证明。展开定义后，会遇到一些关于拉回（同时也是双拉回）的图追逐引理——这些引理本身通过引理 1 证明。参见附录C。 □

这种表面上的不对称性颇耐人寻味：根据定义 $A^{\perp} \parr B = A^{\perp} \parr B^{\perp\perp}$，因此 $T \in \mathsf{U}_{A \multimap B}$ 当且仅当将两条腿对调后得到的跨度 $B \leftarrow T \rightarrow A$（记作 $T^{\star}$）属于 $\mathsf{U}_{B^{\perp} \multimap A^{\perp}}$。Ehrhard 在其外延坍缩 [39]中使用的正交性也呈现出类似现象。

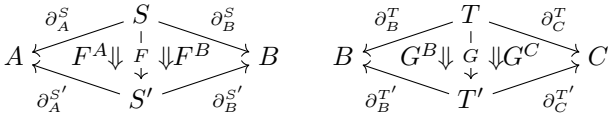
现在注意，$(A,\mathrm{id}_A) \in \mathsf{U}_A$ 总是成立——它不是恒等跨度，而是视为 A上的预策略的恒等函子。事实上，若 $S \in \mathsf{U}_A^{\perp}$，则 $A \rightarrow A \leftarrow S$ 的拉回显然是一个双拉回，因此 $(A,\mathrm{id}_A) \in \mathsf{U}_A^{\perp\perp} = \mathsf{U}_A$。不过，现在我们可以令 $\mathsf{S} = \mathsf{U}_A$，从而将命题 1 应用于此处。于是，给定$S \in \mathsf{U}_{A \multimap B}$，应用 $S@(A,\mathrm{id}_A)$（在同构意义下）就是右腿 (S, ∂_B^S)，根据 (1)，它必属于 U_B。同样，若$T \in \mathsf{U}_{B \multimap C}$，则左腿 (T, ∂_B^T) 属于 $\mathsf{U}_B^{\perp}$。因此，

$$(S, \partial_B^S) \quad \perp \quad (T, \partial_B^T)$$

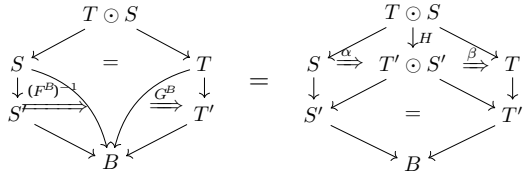
因此，S 和 T 的复合拉回是一个双拉回。

命题 1 还有更多推论，都可在 $\mathsf{S} = \mathsf{U}_A$这一特殊情形下得到：我们前面看到 $(A, \mathrm{id}_A) \in \mathsf{U}_A$，而同样的论证也表明 $(A,\mathrm{id}_A) \in \mathsf{U}_A^{\perp}$ ——因此，恒等跨度满足条件 (2)。由于它也满足条件 (1)，我们便如预期有 $(A \leftarrow A \rightarrow A) \in \mathsf{U}_{A \multimap A}$。同样，如果 $A \leftarrow S \rightarrow B$ 和 $B \leftarrow T \rightarrow C$ 是一致预策略，那么很容易推出复合$A \leftarrow T \odot S \rightarrow C$ 确实属于 $\mathsf{U}_{A \multimap C}$（见附录 C）。

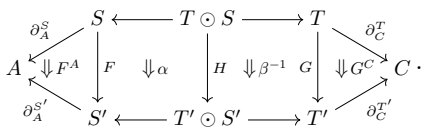
4) 2-胞腔的水平复合：我们在 $\mathsf{U}_{A \multimap A}$中有一个恒等一致预策略，并且 $S \in \mathsf{U}_{A \multimap B}$ 和 $T \in \mathsf{U}_{B \multimap C}$ 之间有定义良好的复合，使得复合拉回总是一个双拉回。因此，给定弱态射



根据 $T' \odot S'$ 的双拉回性质，存在函子 H以及自然同构 α 和 β，使得等式成立



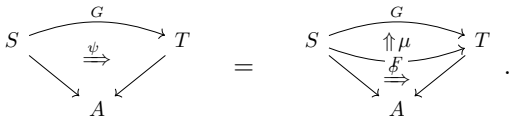
由此得到图表所示的弱态射：



然而，H、α、β并不唯一：尽管引理 1 保证所有重新索引问题都有解，但解可能并不唯一。根据定义 2 的条件 (b)，我们只能确定，不同的 H、α、β 选择会产生同构的一致预策略的弱态射，也就是说，2-范畴 Unif(A) 中同构的态射：

定义 6. 设 A 为一致群胚。

2-范畴 Unif(A) 包含：对象 U_A，即 A上的一致预策略；从 S 到 T 的态射，即弱态射，也就是有序对（$F\colon S \rightarrow T, \phi\colon \partial^S \Rightarrow \partial^T F$）；从（$F, \phi$）到（$G, \psi$）的 2-胞腔，即自然变换 $\mu\colon F \Rightarrow G$，满足：



因此，尽管双拉回保证了水平复合所需的弱态射存在，但原则上并不存在规范的选择。我们可以选定一种水平复合，但没有理由认为任意选择都满足双范畴的相容条件。

C. 群胚的薄跨

事实上，如果以适当的方式表述，由编程语言的解释所产生的重索引问题确实有唯一解——正如例 6 中的情况。但为了证明这一点，我们需要为一致群胚添加更多结构，首先从极化子群胚开始：

1）极化子群胚：考虑例 6 中的群胚

$$\mathbf{Fam}(o) \multimap \mathbf{Fam}(o)$$

，它解释了直觉主义线性逻辑中的公式 $!o \multimap !o$。这里，! 的两次出现从直觉上看有很大不同：在左侧，如例 4 中所示，程序执行复制操作——在博弈语义中，复制索引将由玩家着承载。相反，对于右侧的指数，环境执行复制操作——在博弈语义中，复制索引将由对手着承载。这为某些对称性赋予了极性，这在博弈语义中十分清楚：那些仅对处于协变位置（分别为逆变位置）的指数重新索引复制索引的对称性，是负的（分别为正的）。我们丰富解释类型的群胚，以记录这些特殊的对称性：

定义 7. 极化群胚是一个群胚 A，带有两个子群胚 A_- 和 A_+，它们与 A具有相同的对象。

自然地，我们会要求这一结构满足一些附加条件（特别是，参见引理 3 中的条件 (a) 和 (b)）。这里省略这些条件，因为一旦引入更完整的薄群胚概念，它们就会自动成立。

如果 $\theta \in A_-(a_1, a_2)$，我们记 $\theta\colon a_1 \cong_A^- a_2$，正对称也同理。群胚上的通常构造可逐分量地扩展到极化群胚。(A, A_-, A_+) 的对偶定义为 (A, A_+, A_-)，即交换两个子群胚。最后，我们定义集合 $(!A)_- = \mathrm{Fam}(A_-)$ 和 $(!A)_+ = \mathrm{Fam}^{\mathrm{id}}(A_+)$，它具有从 $(a_i)_{i \in I}$ 到 $(b_j)_{j \in J}$ 的态射，即那些 $(\pi, (\theta_i)_{i \in I})$，使得 $I = J$ 且 $\pi = \mathrm{id}_I$——因此我们确实看到，玩家不能从 $!A$ 中外层的 ! 重新索引复制索引，因为它处于协变位置。

2) 纤薄性：重新索引问题的解可以像例 6 中那样以交互方式计算。直观地说，解的唯一性依赖于这样一个事实：在每个阶段，都存在唯一的重新索引选择。这一点由下面从薄并发博弈中引入的 thin 定义所刻画：

定义 8. 设 A 为一个极化群胚， S 为 A上的一个预策略。我们称 S 是纤薄的，当且仅当对于所有 φ： $s \cong_S s'$，若 $\partial^S\varphi$ 为正，则 $s = s'$ 且 $\varphi = \mathrm{id}_s$。

直观地说，这表示正复制索引是由负复制索引确定性地选出的，因此，非平凡对称性 $\varphi : s \cong_S s'$ 无法在 A 上展示为纯正对称。与此相反，在饱和情形下，跨度必须能够到达所有正对称。

我们将说明纤薄性如何解决重新索引问题求解的唯一性问题。称重新索引问题 φ的一个解 ψ （如引理 1 中所述）为正的，若写作 $\partial^S\varphi = \varphi_A \vdash \varphi_B$ 和 $\partial^T\psi = \psi_B \vdash \psi_C$ 时，有 $\varphi_A \vdash \psi_C$ 为正。

引理 2. 设 A、B、C 为极化统一群胚，$S \in \mathrm{U}_{A \multimap B}$ 和 $T \in \mathrm{U}_{B \multimap C}$ 满足 $T \odot S \in \mathrm{U}_{A \multimap C}$ 为 Thin。

那么， S 与 T 的复合拉回中的任何重新索引问题至多有一个正解。

证明。考虑一个重新索引问题 $s \in S$、$t \in T$、θ: $\partial^S_B s \cong_B \partial^T_B t$，其解为 φ_1： $s \cong_S s'_1$ 和 ψ_1： $t'_1 \cong_T t$，其中 $\partial^S_B s'_1 = \partial^T_B t'_1$ 和 $\partial^T_B \psi_1 \circ \partial^S_B \varphi_1 = \theta$；以及 φ_2： $s \cong_S s'_2$和 ψ_2： $t'_2 \cong_T t$，其中 $\partial^S_B s'_2 = \partial^T_B t'_2$ 和 $\partial^T_B \psi_2 \circ \partial^S_B \varphi_1 = \theta$。

于是， $\partial^S(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = \partial^T(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$，因此我们有

$$\Omega = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \psi_2 \circ \psi_1^{-1}) : (s'_1, t'_1) \cong_{T \odot S} (s'_2, t'_2),$$

其在 $A \vdash C$上的显示为正，因为 φ_1、ψ_1和 φ_2、ψ_2都是正解。因此，根据纤薄性，Ω 是一个恒等映射，由此可得所需的 $\varphi_1 = \varphi_2$ 和 $\psi_1 = \psi_2$。 □

因此，纤薄性使我们能够通过坚持寻找正解，为重新索引问题找到典范解。

然而，这依赖的并非 S和 T的纤薄性，而是 $T \odot S$的纤薄性。同样，在薄并发博弈中，这可通过对因果结构进行归纳得出。若无法把握因果性，我们就必须像处理一致性那样，将 $T \odot S$ 是纤薄的这一事实视为一种交互性质，并再次通过双正交性来处理。

D. 薄跨

1) 薄正交性：我们注意到，对于一个极化群胚 A ，其在 A 上的预策略 S 是纤薄的，当且仅当拉回

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \vee & \searrow & \\ S & & & & A_+ \\ & \searrow & & \swarrow_{\mathrm{id}^+_A} & \\ & & A & & \end{array} \tag{3}$$

是离散的，即 P 中的所有态射都是恒等态射。我们将以此观察为基础定义正交性，并设：

定义 9. 对于 A 一个极化统一群胚， $S \in \mathrm{U}_A$，以及 $T \in \mathrm{U}^{\perp}_A$，我们称 S 和 T 薄正交，记作

$$S \perp\!\!\!\perp T$$

当且仅当拉回 $T \odot S$ 是离散的。

请注意，这已经假设 S 和 T 一致正交。如果 $\mathbf{S} \subseteq \mathrm{U}_A$，那么它的薄正交是

$$\mathbf{S}^{\perp\!\!\!\perp} = \{T \in \mathbf{U}^{\perp}_A \mid \forall S \in \mathbf{S},\ S \perp\!\!\!\perp T\},$$

并且和之前一样，我们有 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$ （注意，只有因为 $\mathrm{U}^{\perp\perp}_A = \mathrm{U}_A$，这才是类型正确的），并且对于所有 $\mathbf{S} \subseteq \mathrm{U}_A$，都有 $\mathbf{S}^{\perp} = \mathbf{S}^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp\perp}$。

2) 薄群胚：和之前一样，我们关注在双薄正交运算下封闭的一致预策略集合：

定义 10. 薄群胚是一个极化统一群胚，带有一个策略集合 $\mathbf{T}_A \subseteq \mathrm{U}_A$，使得 $\mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A = \mathbf{T}_A$，并且满足 $(A_-, \mathrm{id}_A) \in \mathbf{T}_A$ 以及 $(A_+, \mathrm{id}_A) \in \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A$。

如果 $S \in \mathbf{T}_A$，那么 S 在定义 8 的意义下自动是 Thin：因为 $(A_+, \mathrm{id}_A) \in \mathbf{T}^{\perp}_A$，拉回 (3) 是离散的。

这也蕴含了极化对称性的性质：

引理 3. 设 A 是一个薄群胚。那么我们有：(a) 若 $\theta : a \cong^-_A a'$ 且 $\theta : a \cong^+_A a'$，则 $a = a'$ 且 $\theta = \mathrm{id}_a$。(b) 若 θ： $a \cong_A a'$，则存在唯一的 a''，以及 θ_- :$a \cong^-_A a''$ 和 θ_+： $a'' \cong^+_A a'$，使得 $\theta = \theta_+ \circ \theta_-$。

证明。对于 (a)，这由 $A_- \perp\!\!\!\perp A_+$ 得出，因为此时余跨度 $A_- \hookrightarrow A \hookleftarrow A_+$ 的拉回是离散的。

对于 (b)， $A_- \in \mathbf{T}_A \subseteq \mathrm{U}_A$ 和 $A_+ \in \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A \subseteq \mathrm{U}^{\perp}_A$，我们也有 $A_- \perp A_+$。因此，余跨度 $A_- \hookrightarrow A \hookleftarrow A_+$ 的拉回是一个双拉回。但此时，任意 θ： $a \cong_A a'$ 都构成一个重新索引问题，其解恰好就是所需的重新索引。唯一性可由 (a) 立即推出。 □

因此，根据薄群胚的定义，我们得到了极化子群胚的一些预期性质：如果一个对称既是正的又是负的，那么它必定是一个恒等态射；而任意对称都可以先通过“重新索引对手行动”，再通过“重新索引玩家行动”得到。

3) 更多结构：一致群胚上的构造可按预期方式延伸到薄群胚。薄群胚 1 满足 $\mathbf{T}_1 = \mathrm{PreStrat}(1)$。若 A 和 B 是薄群胚，则它们的张量是将一致群胚 $A \otimes B$ 扩展为 $\mathbf{T}_{A \otimes B} = (\mathbf{T}_A \otimes \mathbf{T}_B)^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp}$。 A 的对偶满足 $\mathbf{T}_{A^\perp} = \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A$。 A和 B的 par 联结词满足 $\mathbf{T}_{A \parr B} = (\mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A \otimes \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_B)^{\perp}$，而线性箭头为 $A \multimap B = A^\perp \parr B$。

为确立策略的复合性质，我们依赖以下命题 1 的类似结果：

命题 2。设 $T \in \mathrm{U}_{A \multimap B}$ 是 A、B 薄群胚上的对象，并设有一类 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}_A$，满足 $\mathbf{S}^{\perp\!\!\!\perp\perp\!\!\!\perp} = \mathbf{T}_A$。
那么， $T \in \mathbf{T}_{A \multimap B}$ 当且仅当对所有 $S \in \mathbf{S}$，都有 $T @ S \in \mathbf{T}_B$。

这可由拉回为离散情形下的图表追踪引理推出，参见附录 C。有趣的是，这也等价于对所有 $S \in \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_B$，都有 $T^\star @ S \in \mathbf{T}^{\perp\!\!\!\perp}_A$。

由命题 2 可直接推出，对于任意薄群胚 A， A 上的恒等跨度属于 $\mathbf{T}_{A \multimap A}$；并且，如果 $S \in \mathbf{T}_{A \multimap B}$ 且 $T \in \mathbf{T}_{B \multimap C}$，那么 $T \odot S \in \mathbf{T}_{A \multimap C}$。结合引理 2，我们由此确定了一种复合情形：跨度的复合拉回是双拉回，并且如果坚持要求解为正解，则所有由此产生的重新索引问题都有唯一解。

4）正弱态射：坚持使用正解，意味着关联策略时不通过任意弱态射，而是使用正弱态射：

定义11. 设 A 为一个薄群胚，$S,T \in \mathrm{T}_A$，且 (F,ϕ) 是从 S 到 T 的弱态射，即 $F\colon S \to T$ 和 $\phi\colon \partial^S \Rightarrow \partial^T \circ F$。则，当 ϕ 为正时，(F,ϕ) 是正的；也就是说，当 $\forall s \in S,\ \phi_s\colon \partial^S s \cong^+_A \partial^T F(s)$ 是一个正对称时。

直观地说，使用正态射比较策略，意味着只通过不重新索引对手行动的映射来关联它们。这会使一切更加严格，并削减高维结构。更准确地说：

命题 3. 设 A 为一个薄群胚。考虑 PreThin(A)，即 Unif (A) 的子2-范畴，其对象为 T_A；另考虑 Thin(A)，其中态射还要求为正态射。

那么，Thin(A) 是局部离散的，即所有2-胞腔都是恒等式。此外，PreThin(A) 和 Thin(A) 双等价。

证明。第一点是纤薄性的直接推论：如果 $\mu : (F,\phi) \Rightarrow (G,\psi) : S \to T$ 对于 ϕ 和 ψ 为正，则根据 Unif(A) 的 2-胞腔定义，对于所有 $s \in S$，$\mu_s \in T(Fs, Gs)$ 满足 $\psi_s = \partial^T \mu_s \circ \phi_s$，即 $\partial^T \mu_s = \psi_s \circ \phi_s^{-1}$为正。因此，根据纤薄性，$\mu_s$ 是一个恒等态射。

对于双等价，关键在于：如果 $(F,\phi) : S \to T$ 是一个弱态射，那么存在唯一的 $(F_+,\phi_+) : S \to T$，它与 (F,ϕ) 正同构，并且存在它们之间唯一的 2-胞腔 μ。唯一性由纤薄性得出。对于存在性，注意如果 $s \in S$ 和 $\theta : \partial^S s \cong_A a$，那么存在唯一的 $\varphi : s \cong_S s'$ 和 $\theta_+ : \partial^S s \cong^+_A a$，使得 $\theta = \theta_+ \circ \partial^S \varphi$ ——这利用了纤薄性，以及由余跨度 $S \hookrightarrow A \hookleftarrow A_+$ 的拉回是双拉回这一事实所导致的重新索引问题。逐点应用此引理，我们得到 (F_+,ϕ_+)。 □

该命题很好地说明了这一情形：由于薄双正交性，2-范畴 PreThin(A) 在双等价意义下可表示为一个纯粹的范畴 Thin(A)。高维结构就这样简单地消失了。

5）双范畴 Thin：有了这些准备，我们终于可以定义双范畴 Thin 的组成部分。其对象是薄群胚。从 A 到 B 的态射是从 A 到 B 的策略，即 $\mathrm{T}_{A\multimap B}$ 的元素——回忆一下，它们是 $(S,\partial^S\colon S \to A \times B)$，特别地，是从 A 到 B 的跨度

$$A \xleftarrow{\partial^S_A} S \xrightarrow{\partial^S_B} B\,.$$

恒等态射是恒等跨度，复合通过拉回 (1) 给出。若 S 和 T 是从 A 到 B 的策略，则从 S 到 T 的 2- 胞腔是正态射 $(F,\phi) : S \to T$。由于 $\phi\colon \partial^S \Rightarrow \partial^T \circ F$ 是$A^\perp \parr B$ 上的正态射族，其底层普通群胚为 $A \times B$，因此也可以等价地将其表示为一对 $F^A\colon \partial^S_A \Rightarrow \partial^T_A \circ F$和 $F^B\colon \partial^S_B \Rightarrow \partial^T_B \circ F$，如定义 1 所示。对于正态射的水平复合，我们首先按照 III-B4 节中的方法进行，得到一个由（不一定为正的）水平复合构成的连通群胚——这些复合经命题 3 的双等价映射后必须都具有相同的像，从而给出唯一的正水平复合。总而言之，我们有：

定理 2. 这些分量构成 Thin，一个双范畴。

证明。详见附录 D。 □

接下来，我们将进一步构造 Thin 的结构。

IV. 笛卡尔闭结构

为了构造一个笛卡尔闭双范畴，我们打算遵循 [20]。我们首先将构造 Fam——此后记作 !——转化为一个伪余单子，然后赋予 Kleisli 双范畴 $\mathrm{Thin}_!$ 笛卡尔闭结构。

A. 伪余单子

我们首先给出 ! 在 Thin 的对象上的作用。

1) 薄群胚的 bang：首先，通过 $\mathrm{U}_{!A} = (!\mathrm{U}_A)^{\perp\perp}$ 在一致群胚上定义 !，其中我们使用了

$$!\mathbf{U}_A = \{(!S, !\partial^S) \mid S \in \mathbf{U}_A\}$$

利用函子作用 $!\partial^S : !S \to !A$。对于薄群胚，$!A$ 的正对称和负对称已在第 III-C1 节中定义。稀疏结构设为 $\mathrm{T}_{!A} = (!\mathrm{T}_A)^{\perp\perp}$——直接验证即可知，这是一个薄群胚。

2) 策略的 bang：若 $S \in \mathrm{T}_{A\multimap B}$，则对于 $\partial^S_A\colon S \to A$ 和 $\partial^S_B\colon S \to B$，有 $\partial^S = \langle \partial^S_A, \partial^S_B\rangle$ ——其 bang 为

$$!A \xleftarrow{!\partial^S_A} !S \xrightarrow{!\partial^S_B} !B$$

封装为 $(!S, \langle !\partial^S_A, !\partial^S_B\rangle)$。它属于 $\mathrm{T}_{!A\multimap !B}$ 这一事实依赖于：

引理 4. 考虑 A、B 薄群胚，以及 T一个从 $!A$ 到 B 的预策略。则以下两个性质成立：

(1) $T \in \mathbf{U}_{!A\multimap B}$ *iff* $(T, \partial^T_{!A}) \in \mathbf{U}^\perp_{!A}$ *and for all* $S \in \mathbf{U}_A$, $T@!S \in \mathbf{U}_B$,
(2) $T \in \mathbf{T}_{!A\multimap B}$ *iff for all* $S \in \mathbf{T}_A$, $T@!S \in \mathbf{T}_B$.

这是命题 1 和 2 的直接应用。由于 $\mathrm{U}_{!A} = (!\mathrm{U}_A)^{\perp\perp}$ 且 $\mathrm{T}_{!A} = (!\mathrm{T}_A)^{\perp\perp}$。由此引理可直接验证，对于任意 $S \in \mathrm{T}_{A\multimap B}$，我们有 $!S \in \mathrm{T}_{!A\multimap !B}$，如所需。

3) 一个伪函子：由于 ! 是一个函子，它严格保持恒等跨度。由于 ! 保持拉回，对于 $S \in \mathrm{T}_{A\multimap B}$ 和 $T \in \mathrm{T}_{B\multimap C}$，泛性质为我们提供了

$$m_{S,T} : !(T \odot S) \cong !T \odot !S$$

Thin 中的一个强可逆 2-胞元。正如预期，该 2-胞元关于 S 和 T 是自然的（相对于正态射）。总之，我们得到一个伪函子 !: Thin $\to$ Thin。详情请参见附录 F。

4）群胚上的伪单子：事实上，我们首先将 ! 转化为 Gpd 上的一个伪单子，并由此推导出其在 Thin 上的伪余单子结构。我们先前指出，我们有一个函子 Fam: Gpd $\to$Gpd——事实上，它扩展为小群胚这一 2-范畴上的一个 2-自函子，记作

$$! : \mathbf{Gpd} \to \mathbf{Gpd}\,,$$

定义在 2-胞腔 $\alpha : F \Rightarrow G : A \to B$ 上的自然变换 $!\alpha\colon !F \Rightarrow !G$，其分量均为有序对

$$(!\alpha)_{(A_i)_{i\in I}} = (\mathrm{id}_I, (\alpha_{A_i})_{i\in I}) \in !B((FA_i)_{i\in I}, (GA_i)_{i\in I})\,.$$

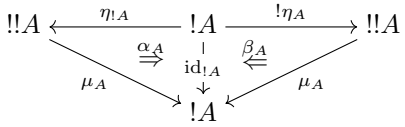


图 3. 单位自然同构

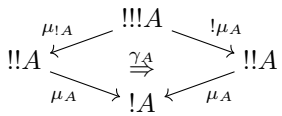


图 4. 结合律自然同构

要将其转化为伪单子，我们必须添加一个乘法和一个单位。单位的分量是函子

$$\begin{array}{rccl} \eta_A & : & A & \to & !A \\ & & a & \mapsto & (a)_{\{0\}} = [0 \cdot a] \end{array}$$

带有显然的函子作用。其直观含义是，单位将单个资源使用从 A 传送到 $!A$，从而得到一个单元素族。在此过程中，它必须选择一个副本索引。任何自然数都可以——本文其余部分不依赖于这一选择——但为明确起见，并与 AJM博弈中的传统约定保持一致，我们选取 0。

对于乘法 $\mu_A : !!A \to !A$，我们必须将族的族压平为一个族。为此，我们固定一个单射函数 $\langle -,- \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ —— 同样，本文的结果不依赖于这一选择。给定 $I \subseteq_f \mathbb{N}$ 以及一个族 $(J_i)_{i \in I}$，其中对所有 $i \in I$都有 $J_i \subseteq_f \mathbb{N}$，记作

$$\Sigma_{i \in I} J_i = \{\langle i, j \rangle \mid i \in I,\ j \in J_i\},$$

根据定义，这仍然是 $\mathbb{N}$ 的一个有限子集。于是我们令

$$\begin{array}{rccl} \mu_A & : & !!A & \to & !A \\ & & ((a_{i,j})_{j \in J_i})_{i \in I} & \mapsto & (a_{i,j})_{\langle i,j \rangle \in \Sigma_{i \in I} J_i} \end{array}$$

对于任意群胚 A，以及显然的函子作用。

总而言之，这给出了 $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Gpd}} \Rightarrow !$ 和 $\mu : !! \Rightarrow !$，两个（严格的 2-）自然变换。如果单子律能够严格成立，那么这意味着 $\langle 0, i \rangle = \langle i, 0 \rangle = i$以及 $\langle \langle i, j \rangle, k \rangle = \langle i, \langle j, k \rangle \rangle$ 对所有 $i, j, k \in \mathbb{N}$均成立；显然不存在满足这些定律的注入。然而，对于每个群胚 A，单子的相容性定律都在自然同构意义下成立：如图 3 和图 4 所示，我们有 α_A, β_A 以及 γ_A。例如，对于任意 $(a_j)_{j \in J} \in !A$:

$$(\alpha_A)_{(a_j)_{j \in J}} : (a_j)_{j \in J} \cong_{!A} (a_j)_{\langle 0, j \rangle \in \Sigma_{i \in \{0\}} J}$$

沿双射 $J \simeq \Sigma_{i \in \{0\}} J$ 进行重新索引。其他分量的作用类似——注意，它们全都是负对称。相关的族 $(\alpha_A)^{A \in \mathbf{Gpd}}$、$(\beta_A)^{A \in \mathbf{Gpd}}$以及 $(\gamma_A)^{A \in \mathbf{Gpd}}$ 满足修正的条件，以及伪单子的附加相容性定律：

命题4. 2-函子 $! : \mathbf{Gpd} \to \mathbf{Gpd}$ 与上述各分量共同构成 Gpd 上的一个伪单子。

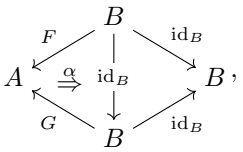
5) 将函子提升到跨度：我们将通过把上述各分量提升到跨度，将 ! 变成 Thin 上的一个伪余单子。$\check{}$ 一般而言，如果 $F : B \to A$ 是一个函子，那么就有一个跨度 F

$$A \xleftarrow{F} B \xrightarrow{\mathrm{id}_B} B,$$

称为 F 的提升——但我们需要对 F 施加充分条件，使该构造能够产生 Thin 中的态射。为此，若 A 和 B 是薄群胚，我们称函子 $F : A \to B$ 为重命名，当且仅当满足以下条件：

(1) for all $\theta : a \cong_A a'$, if θ is positive then so is $F\theta$,
(2) for all $(T, \partial^T) \in \mathbf{U}_B^{\perp}$, $(T, F \circ \partial^T) \in \mathbf{U}_A^{\perp}$,
(3) for all $(T, \partial^T) \in \mathbf{T}_B^{\perp\!\!\perp}$, $(T, F \circ \partial^T) \in \mathbf{T}_A^{\perp\!\!\perp}$.

显然，重命名可以复合——我们考虑 2-范畴 Ren，其对象是薄群胚，态射是重命名，2-胞腔是否定自然变换。正如预期，提升重命名会产生薄跨度（见附录 E）。提升可以扩展到 2-胞腔：若 $\alpha : F \Rightarrow G : A \to B$ 是一个否定自然变换，则 $\check{}\alpha$ 是由以下图表描述的正态射：



注意到，由于否定的 α 处于逆变位置，因此这是正的。总而言之，我们得到（详见附录 E）：

命题 5. 存在一个伪函子 $\check{}_ : \mathbf{Ren}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Thin}$。

这里，$\mathbf{Ren}^{\mathrm{op}}$ 是将 Ren 的态射反向、但保持 2-胞腔不变所得的范畴。可以验证，对于任意薄群胚 A，函子 $\eta_A : A \to !A$ 和 $\mu_A : !!A \to !A$ 都是重命名；特别地，对于每个薄群胚 A，我们得到

$$\check{\eta_A} \in \mathbf{Thin}(!A, A) \qquad \check{\mu_A} \in \mathbf{Thin}(!A, !!A)$$

这是将 ! 构造成伪余单子的主要组成部分。与 Gpd 中不同，族 $\check{}\eta$ 和 $\check{}\mu$ 并非严格 2-自然变换，而只是伪自然变换，其 2-胞腔为

$$\begin{array}{rccl} \eta_S & : & \check{\eta}_B \odot !S & \Rightarrow & S \odot \check{\eta}_A \\ \mu_S & : & \check{\mu}_B \odot !S & \Rightarrow & !!S \odot \check{\mu}_A, \end{array}$$

通过拉回的泛性质，并利用如下观察：$\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Gpd}} \Rightarrow !$ 和 $\mu : !! \Rightarrow !$ 是笛卡尔自然变换，从而得到 $S \in \mathbf{Thin}(A, B)$ 中的正同构。可以验证，η_S 和 μ_S 关于 S 是自然的，并满足伪自然变换的相容条件。最后，Gpd 上 ! 的伪单子结构中涉及的修正 α、β、γ，提升为 Thin 上 ! 的伪余单子结构所需的修正。

定理 3. Thin 上存在一个伪余单子 !。

证明。详见附录 G。 □

接下来我们研究 Kleisli 双范畴$\mathbf{Thin}_!$，其水平复合记作 $\odot_!$，并按预期定义。

B. 笛卡尔闭结构

1）有限积：首先，我们证明 $\mathbf{Thin}_!$ 具有有限积，即按照 Fiore 和 Saville [18] 的定义，它是一个有限积双范畴——不同于他们，我们使用二元积。

a）终对象：记 $\top$ 为由 $\mathsf{U}_\top = \mathsf{T}_\top = \{\mathrm{id}_\emptyset\}$ 构成的空群胚的薄群胚。对于任意薄群胚 A，$\mathbf{Thin}_!(A, \top)$ 恰好只有一个元素——空群胚。因此，$\mathbf{Thin}_!$ 具有一个（严格的）终对象。

b）二元积：如果 A 和 B 是薄群胚，那么带有 $A \,\&\, B$ 的群胚 $A + B$ 是不交并，其对象为 $(A+B)_- = A_- + B_-$ 和 $(A+B)_+ = A_+ + B_+$。我们添加 $\mathsf{U}_{A\&B} = (\mathsf{U}_A + \mathsf{U}_B)^{\perp\perp}$ 和 $\mathsf{T}_{A\&B} = (\mathsf{T}_A + \mathsf{T}_B)^{\perp\perp}$，其中按照通常的定义，$\mathsf{U}_A + \mathsf{U}_B$ 由所有这样的 $(S+T, \partial^S + \partial^T)$ 构成：对于 $(S, \partial^S) \in \mathsf{U}_A$ 和 $(T, \partial^T) \in \mathsf{U}_B$，使用 $+$ 的函子作用（$\mathsf{T}_A + \mathsf{T}_B$ 同理）。

c) 配对与投影：投影简单地设为 $\mathsf{L} = \overline{\ulcorner \mathsf{l} \circ \eta_{A+B} \urcorner^!} \in \mathsf{Thin}_!(A \,\&\, B, A)$ 和 $\mathsf{R} = \overline{\ulcorner \mathsf{r} \circ \eta_{A+B} \urcorner^!} \in \mathsf{Thin}_!(A \,\&\, B, B)$；其中 $\ulcorner \mathsf{l} : A \to A + B$ 和 $\ulcorner \mathsf{r} : B \to A + B$ 对应显然的余投影/重命名。$\mathbf{Thin}_!(\Gamma, A)$ 与 $\mathbf{Thin}_!(\Gamma, B)$ 的配对为

$$(S + T, \partial_{!\Gamma} : S + T \to !\Gamma, \partial_{A\&B} : S + T \to A + B)$$

其中 $\partial_{!\Gamma}$ 为余配对，$\partial_{A\&B} = \partial^S_A + \partial^T_B$。我们有：

命题 6. 对任意薄群胚 Γ、A 和 B，存在

$$\mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \,\&\, B) \underset{\langle -,- \rangle}{\overset{(L_! \odot_! -, R_! \odot_! -)}{\rightleftarrows}} \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A) \times \mathbf{Thin}_!(\Gamma, B) \quad (\perp)$$

一个伴随等价。

证明。若 $S \in \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A)$且 $T \in \mathbf{Thin}_!(\Gamma, B)$，则有

$$\omega^A_{S,T} : L_! \odot_! \langle S, T \rangle \cong S \qquad \omega^B_{S,T} : R_! \odot_! \langle S, T \rangle \cong T$$

正同构，并且对于 $U \in \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \,\&\, B)$，存在

$$\bar{\omega}_U : U \cong \langle L_! \odot_! U, R_! \odot_! T \rangle$$

一个正向同构，按显而易见的方式定义。它们都关于 S、T、U是自然的，并满足所需的三角恒等式。□

更多细节见附录 H。综上，这表明 $\mathbf{Thin}_!$ 按照 [18] 的定义是一个有限积双范畴。

2) 笛卡尔闭性：若 A 和 B 是薄群胚，则我们令 $A \Rightarrow B = !A \parr B$。在描述其他组成部分之前，我们先说明 Seely 等价：

$$!A \otimes !B \underset{\bar{s}_{A,B}}{\overset{s_{A,B}}{\rightleftarrows}} !(A \,\&\, B)$$

其中 $s_{A,B}$将 $(a_i)_{i \in I}$、$(b_j)_{j \in J}$映射到 $(c_k)_{k \in I \bowtie J}$，其中 $I \bowtie J = \varpi(I \sqcup J)$ 是某个选定的双射 $\varpi = [\varpi_l, \varpi_r]$，它介于$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}$之间；并且 $c_{\varpi_l(i)} = a_i$ 和 $c_{\varpi_r(j)} = b_j$；而$\bar{s}_{A,B}$将 $(c_k)_{k \in K}$ 映射到 $(a_i)_{i \in I}$、$(b_j)_{j \in J}$，其中 $I \subseteq K$是满足 $c_i = a_i \in A$的那些 $i \in K$ 构成的子集，对于 b_j也同样如此。这两个函子都是重命名，而见证该等价的同构是负向的。

借助 Seely 等价，我们首先将求值定义为一个跨度，其基本群胚为 $!A \times B$，左腿为函子

$$!A \times B \to (!A \times B) \times !A \to !(!A \times B) \times !A \xrightarrow{s_{A,\,B}} !((A \Rightarrow B) \,\&\, A),$$

右腿为投影 $!A \times B \to B$。由此得到一个薄跨度 $\mathsf{ev}_{A,B} \in \mathbf{Thin}_!((A \Rightarrow B) \,\&\, A, B)$。现在，我们需要

$$\Lambda(-) : \mathbf{Thin}_!(\Gamma \,\&\, A, B) \to \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \Rightarrow B)$$

柯里化函子：给定 $S \in \mathbf{Thin}_!(\Gamma \& A, B)$，其柯里化$\Lambda(S)$ 就是 S，其显示映射与.....复合

$$!(\Gamma + A) \times B \overset{\bar{s}_{\Gamma,A}}{\simeq} (!\Gamma \times !A) \times B \cong !\Gamma \times (!A \times B).$$

有了这些数据，我们终于可以证明：

命题 7。对于任意群胚 Γ、A、B，存在

$$\mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \Rightarrow B) \underset{\Lambda(-)}{\overset{\mathsf{ev}_{A,\,B} \odot_! (- \& A)}{\rightleftarrows}} \mathbf{Thin}_!(\Gamma \,\&\, A, B) \quad (\perp)$$

一个伴随等价。

证明。首先可以证明，柯里化运算 $\Lambda(-)$与对称的逆柯里化运算 $\Lambda(-)$之间存在伴随等价。该伴随的单位和余单位可以由 Seely（伴随）等价$\overline{\ulcorner}$的单位和余单位导出。随后可以证明，$\Lambda(-)$事实上与 $\mathsf{ev}_{A,\,B} \odot_! (- \& A)$ 同构，从而得到所需的等价。□

详情请参见附录 I。综上，我们有：

定理 4。我们有 $\mathbf{Thin}_!$，这是一个笛卡尔闭双范畴。

这意味着，我们可以将简单类型λ演算的类型解释为薄群胚，将态射解释为薄跨度，并将项之间的重写解释为某些正同构 [19]。

V. 结论

本文专注于 $\mathbf{Thin}_!$ 的构造，将其在 λ演算和编程语言语义中的应用留待日后研究。我们认为，这为进一步研究开辟了多个方向：首先，我们可以探究所获得的 λ演算的解释；从语法上看，它应当对应于 Vial [38] 的序列类型系统，以及 Melli`es [15]的非一致 λ演算。我们还应探究其与文献中其他模型的联系，尤其是与重新阐释了 [37], 思想的加权关系模型，以及与广义结构物种和模板博弈的联系。另一个相关方向，是将模板博弈的另一项特征——用于捕获调度与同步 [34], 的机制——纳入薄跨度之中。

在更具语义性的方向上，我们认为，对于广义结构物种而言，薄跨度上的运算不涉及商这一事实可能在两个方面有所帮助：(1) 个体可以按具体方式排序，且模型应支持连续推理，从而能够轻松处理无限计算；(2) 如 [24] 中所述，添加来自对称单闭范畴的“类型化”权重应当简单得多，因为这些权重本身不再需要是饱和的。

致谢

本研究得到 ANR 项目 DyVerSe（ANR-19-CE48-0010-01）和 PPS（ANR-19-CE48-0014）的支持；同时得到里昂大学 Labex MiLyon（ANR-10-LABX-0070）的支持，该项目属于“未来投资”计划（ANR- 11-I DEX-0007），由法国国家研究署（ANR）负责实施。

参考文献

[1] J. Girard，“线性逻辑”，《理论计算机科学》，第50卷，第1–102页，1987年。

[2] [ ] 10 1016 0304 3975 87 90045 4 在线获取。网址：https://doi.org/ 。 / - ( ) - T. Ehrhard，“有限性空间”，《数学结构与计算机科学》，第15卷，第4期，第615–646页，2005年。[在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 1017 0960129504004645 。 /S D. de Carvalho、M. Pagani和L. T.

[3] de Falco，“线性逻辑中执行时间的语义度量”，《理论计算机科学》，第412卷，第20期，第1884–1902页，2011年。 [在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 1016 2010 12 017 。 /j.tcs. . . V. Danos和T. Ehrhard，“作为高阶

[4] 概率计算模型的概率相干空间”，Inf. Comput.，第209卷，第6期，第966–991页，2011年。 [在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 1016 2011 02 001 。 /j.ic. . .

[5] J. Laird、G. Manzonetto、G. McCusker和M. Pagani，“类型化λ演算的加权关系模型”，载于《第28届ACM/IEEE计算机逻辑年会研讨会》，LICS 2013，美国路易斯安那州新奥尔良，2013年6月25日至28日。IEEE计算机学会，2013年，第 301 310 [ ] 10 1109 2013 36 –页。在线获取。网址：

[6] https://doi.org/ 。 /LICS. . M. Pagani、P. Selinger和B. Valiron，“将定量语义应用于高阶量子计算”，载于《第41届ACM SIGPLAN-SIGACT编程语言原理年会》，POPL ’14，美国加利福尼亚州圣迭戈，2014年1月20日至21日，S. Jagannathan和P. Sewell编。ACM，2014年，第647–658页。 [ ] 10 1145 2535838 2535879 在

[7] 线获取。网址：https://doi.org/ 。 / . T. Ehrhard、M. Pagani和C. Tasson，“概率PCF的完全抽象性”，J. ACM，第65卷，第4期，第23:1–23:44页，2018年。 [在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 1145 3164540 。 / P. Clairambault和M. de Visme，“

[8] 量子λ演算的完全抽象性”，《ACM程序设计语言会议录》，第4卷，POPL期，第 63 1 63 28, 2020 [ ] 10 1145 3371131 : – :页。在线获取。

[9] 网址：https://doi.org/ 。 / D. de Carvalho，“通过指称语义和交类型计算λ项的执行时间”，CoRR，第abs/0905.4251卷，2009年。 [ ] 0905 4251 在线获取。网址：

[10] http://arxiv.org/abs/ 。 B. Accattoli、S. Graham-Lengrand和D. Kesner，“紧类型与分割界：完整发展”，J. Funct. Program.，第 30, 14, 卷，p. e。在线获取。2020 [ ] 10 1017 095679682000012 网址：https://doi.org/ 。 /S X [11] A. Bucciarelli、D. Kesner和S. R. D. Rocca，“非幂等交类型的可 inhabitation 性”，《计算机科学中的逻辑方法》，第14卷，第3期，2018年。[在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 23638 14 3 7 2018 。 /

[12] LMCS- (:) S. Abramsky、R. Jagadeesan和P. Malacaria，“PCF的完全抽象性”，Inf. Comput.，第163卷，第2期，第409–470页，2000年。[13] J. M. E. Hyland和C. L. Ong，“关于PCF的完全抽象性：I、II和III”，Inf. Comput.，第163卷，第2期，第285–408页，2000年。 [在线]获取。网址：https://doi.org/ 10 1006 2000 2917 。 /inco. . P. Baillot、V. Danos、T.

[14] Ehrhard和L. Regnier，“无时游戏”，载于《计算机科学逻辑：第11届国际研讨会，CSL ’97，EACSL年会》，丹麦奥胡斯，1997年8月23日至29日，精选论文，丛书《计算机科学讲义》，M. Nielsen和W. Thomas编，第1414卷。Springer，1997年，第 56 77 [ ] 10 1007 0028007 –页。在线获取。网址：

[15] https://doi.org/ 。 /BFb P. Mellies，“异步游戏：纯真的真正并发性”，《理论计算机科学》，第358卷，第2–3期，第200–228页，2006年。[16] P. Boudes，“厚子树、游戏与实验”，载于《类型化λ演算及其应用：第9届国际会议，TLCA 2009》，巴西巴西利亚，2009年7月1日至3日。会议录，丛书《计算机科学讲义》，P. Curien编，第5608卷。Springer，2009年，第65–79页。 [ ] 10 1007 978 3 642 02273 9_7

[17] 在线获取。网址：https://doi.org/ 。 / - - - - T. Leinster，《高阶拟运算与高阶范畴》。剑桥大学出版社，2004年，第298号。

[18] M. Fiore 和 P. Saville，《双范畴笛卡尔闭结构的相干性》，《数学结构与计算机科学》，第 31, 7, 822 849, 卷，第 期，2021 [ ] 10 1017 0960129521000281 第 页。线上发布。可访问：https://doi.org/ 。 /S[19]——，《笛卡尔闭双范畴的类型论（扩展摘要）》，载于第34届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS 2019，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，2019年6月24日至27日。IEEE，2019年，第1–13页。 [线上]。可访问：https://doi.org/ 10 1109 2019 8785708 。 /LICS。M. Fiore、N.

[20] Gambino、M. Hyland 和 G. Winskel，《广义结构种类的笛卡尔闭双范畴》，《伦敦数学学会杂志》，第77卷，第1期，第203–220页，2008年。[21] S. Castellan、P. Clairambault 和 G. Winskel，《带对称性的薄博弈与并发 Hyland-Ong博弈》，《计算机科学中的逻辑方法》，第15卷，第1期，2019年。[22] H. Paquet，《概率并发博弈语义》，博士学位论文，2020年。[23] P. Melli`es，《模板博弈与微分线性逻辑》，载于LICS。IEEE，2019年，第1–13页。[24] T. Tsukada、K. Asada 和 C. L. Ong，《由SMCC加权的种类、预函子与泰勒展开：用于建模非确定性、概率性和量子程序的统一框架》，载于LICS。ACM，2018年，第889–898页。[25] Z. Galal，《预函子Scott语义》，载于第5届计算与演绎形式结构国际会议，FSCD 2020，2020年6月29日至7月6日，法国巴黎（线上会议），丛书：LIPIcs，Z. M. Ariola 编，第167卷。Schloss Dagstuhl - Leibniz- 信息学中心，2020年，第16:1–16:18页。 [线上]。可访问：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2020.16[26]——，《有限非确定性的双范畴模型》，载于第6届计算与演绎形式结构国际会议，FSCD 2021，2021年7月17日至24日，阿根廷布宜诺斯艾利斯（线上会议），丛书：LIPIcs，N. Kobayashi 编，第195卷。Schloss Dagstuhl - Leibniz-信息学中心，2021年，第10:1–10:17页。

[27] [ ] 10 4230 2021 10 线上。可访问：https://doi.org/ 。 /LIPIcs.FSCD。T. Tsukada、K. Asada 和 C. L. Ong，《刚性资源项的广义种类》，载于第32届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会，LICS *2017,* 2017, 1 12 [ ] *20 23,* 冰岛雷克雅 *2017* 未克，6月 - 。IEEE计算机学会，第 页。线上。可访问：https://doi.org/ 10 1109 2017 8005093 。 /LICS。F. Olimpieri，《交类型

[28] 分配子》，载于LICS。IEEE，2021年，第1–15页。[29] A. Kerinec、G. Manzonetto 和 F. Olimpieri，《为什么证明在证明相关模型中具有相关性？》，2023年，已被POPL 2023接收。[30] G. M. Kelly 和 M. L. Laplaza，《紧闭范畴的相干性》，《纯粹与应用代数杂志》，第19卷，第213页，1980年 193页。– 。[31] F. Lamarche，《定量域与无穷元代数》，《理论计算机科学》，第94卷，第1期，第37–62页，1992年。 [线上]。可访问：https://doi.org/ 10 1016 0304 3975 92 90323 8 。 / - ( ) - M. Stay，《紧闭双范

[32] 畴》，arXiv预印本 arXiv:1301.1053，2013年。[33] A. E. Hoffnung，《2-范畴中的Span：一个幺半三范畴》，arXiv预印本 arXiv:1112.0560，2011年。[34] P. Melli`es，《博弈语义中的调度与同步的范畴组合学》，《ACM程序设计语言会议录》，第3卷，POPL期，第23:1–23:30页，2019年。[35] P. Baillot、V. Danos、T. Ehrhard 和 L. Regnier，《信不信由你，AJM的博弈模型是经典线性逻辑的一个模型》，载于LICS。IEEE计算机学会，1997年，第68–75页。[36] S. Castellan、P. Clairambault 和 G. Winskel，《并发博弈中的对称性》，载于CSL-LICS。ACM，2014年，第28:1–28:10页。[37] P. Clairambault 和 H. Paquet，《带对称性的并发博弈的定量坍缩》，CoRR，第abs/2107.03155卷，2021年。[38] P. Vial，《无穷交类型作为序列：对Klop问题的新解答》，载于LICS。IEEE计算机学会，2017年，第1–12页。[39] T. Ehrhard，《线性逻辑的Scott模型是其关系模型的外延坍缩》，《理论计算机科学》，第424卷，第20–45页，2012年。[40] E. Cheng、M. Hyland 和 J. Power，《伪分配律》，《理论计算机科学电子笔记》，第83卷，第245页，2003年 227页。– 。

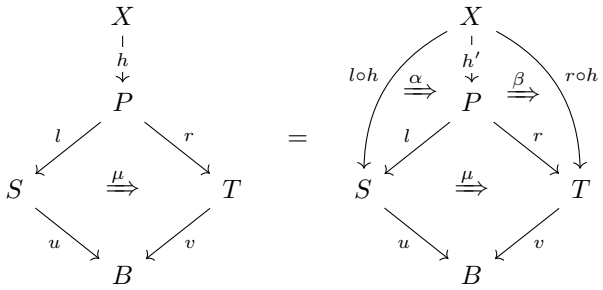
附录

在下文中，我们将 $A \xleftarrow{u} S \xrightarrow{v} B$ 群胚或薄群胚 A 之间的 B 跨度 S记作 $A \nrightarrow B$：$A \nrightarrow B$。

A. 双拉回

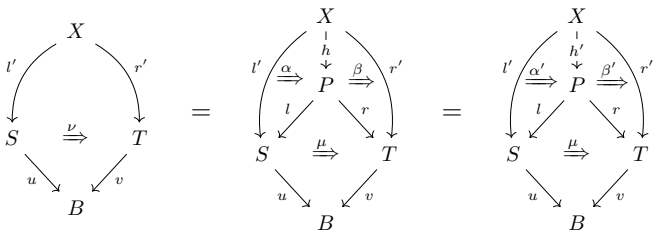
为了完成定义 2 中双拉回的等式定义，首先考虑内涵式定义是有益的：给定一个带有可逆 2-胞腔的 2-范畴 C（即一个 (2, 1)-范畴）以及 C中的一个余跨度 $S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$，双拉回是图 1 中所示的一个伪锥 (P, l, r, μ)，满足：对于每个 $X \in C$，用态射 $X \to P$ 对伪锥 (P, l, r, μ)进行前复合，会在 $C(X, P)$ 与余跨度 $S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$ 上的、顶点为 X 的伪锥范畴及其伪锥态射范畴之间诱导一个范畴等价。该前复合的本质满性恰好对应于定义 2 的条件 (a)。其全忠实性可表述为以下条件：

（b’）给定一个 2-胞等式



对于某些 h、h'：$X \to P$以及 2-胞腔 α：$l \circ h \Rightarrow l \circ h'$和 β：$r \circ h' \Rightarrow r \circ h$，存在唯一的 θ：$h \Rightarrow h'$，使得$\alpha = l\theta$ 以及 $\beta = r\theta^{-1}$。

不难证明，后一性质等价于如下断言：给定一个伪锥的两个分解 ν



存在唯一的 θ：$h \Rightarrow h'$，使得 $l\theta = \alpha' \circ \alpha^{-1}$和 $r\theta = \beta'^{-1} \circ \beta$，或等价地 $\alpha' = (l\theta) \circ \alpha$ 和 $\beta' = \beta \circ (r\theta^{-1})$，这就是条件（b）的完整形式。

B. Gpd 中的拉回

事实证明，Gpd 中的拉回关于 2-胞腔具有良好的性质：

命题 8。Gpd 中余跨度 $S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$ 的拉回是严格 2-拉回，也就是说，对于锥态射，它同样满足泛分解性质。

证明。令 I 为由两个对象 0 和 1 之间的一个行走同构 u 构成的群胚。给定两个群胚 C 和 D之间的两个函子 F和 G，一个 2- 胞腔

$$\alpha \colon F \Rightarrow G \colon C \to D \in \mathbf{Gpd}$$

恰好就是一个函子 $H \colon I \times C \to D$，使得 $H(0, -) = F$ 并且 $H(1, -) = G$。利用这一对应关系，余跨度上的拉回 (P, l, r) 是 2-拉回这一性质，很容易归结为 (P, l, r) 是 1-拉回这一性质。 □

注意，拉回是一个锥，特别是一个以内 2-胞腔为恒等态射的伪锥。于是可以进一步询问拉回何时是双拉回；在这种情况下，我们有如下刻画：

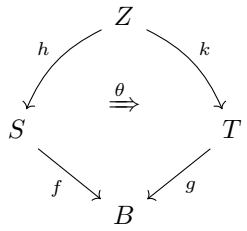
命题 9. 设 (P, l, r) 是 Gpd 中余跨度 $S \xrightarrow{u} B \xleftarrow{v} T$ 上的一个拉回。则由 (P, l, r) 诱导的伪锥是双拉回，当且仅当它满足定义 2 的条件 (a)。

证明。根据命题 8，(P, l, r) 是一个 2-拉回，因此它满足关于锥态射的泛性质。这个条件事实上正是 (b’)，而 (b’) 与 (b) 等价。因此，只需检验 (P, l, r) 满足条件 (a)，即可证明其为一个双拉回。 □

接着，我们可以将前面的命题进一步细化为一种“逐点”的刻画，其形式正是前面已经陈述的引理 1；下面给出其证明。

引理 1 的证明。该蕴含关系是显然的，因为一个同构 θ：$f(s) \to g(t)$ 的数据等价于在 $S \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} T$上以终端群胚为顶点的一个伪锥，而将其分解为命题 9 中条件的形式，恰好就是所需的性质。

现在我们证明其逆命题。因此，设



是一个伪锥。根据假设，对于每个 $z \in Z$，存在$s_z \in S$, ϕ_z：$h(z) \to s_z$, $t_z \in T$, ψ_z：$t_z \to k(z)$，使得 $f(s_z) = g(t_z)$ 且 $\theta_z = g(\psi_z) \circ f(\phi_z)$。同构的集合 $(\phi_z)_{z \in Z}$ 诱导出一个函子 h'，其定义为$h'(z) = s_z$（对于 $z \in Z$），以及 $h'(w) = \phi_{z'} \circ h(w) \circ \phi_z^{-1}$（对于 w：$z \to z' \in Z$）。类似地，我们得到一个函子 k'，其定义为 $h'(z) = t_z$（对于 $z \in Z$），以及 $k'(w) = \psi_{z'}^{-1} \circ k(w) \circ \psi_z$（对于 w：$z \to z' \in Z$）。给定 w：$z \to z' \in Z$，我们检验 $f \circ h'(w)$ 和 $g \circ k'(w)$ 相等。由于其中只涉及

同构，只需检验在上下文 $g(\psi_{z'}) \circ (-) \circ f(\phi_z)$ 中等式成立：

$$\begin{aligned} g(\psi_{z'}) \circ f(h'(w)) \circ f(\phi_z) &= g(\psi_{z'}) \circ f(h'(w) \circ \phi_z) \\ &= g(\psi_{z'}) \circ f(\phi_{z'} \circ h(w)) \\ &= g(\psi_{z'}) \circ f(\phi_{z'}) \circ f(h(w)) \\ &= \theta_{z'} \circ f(h(w)) \\ &= g(k(w)) \circ \theta_z \\ &= g(k(w)) \circ g(\psi_z) \circ f(\phi_z) \\ &= g(\psi_{z'}) \circ g(k'(w)) \circ f(\phi_z). \end{aligned}$$

因此，(Z, h', k') 是 $S \overset{f}{\rightarrow} B \overset{g}{\leftarrow} T$ 上的一个锥，所以存在 $m\colon Z \to P$，它通过 l 和 r 分解 h' 和 k'。集合 $(\phi_z)_{z\in Z}$ 和 $(\psi_z)_{z\in Z}$ 定义了自然同构 $\phi\colon h \Rightarrow \mathrm{l} \circ m$ 和 $\psi\colon \mathrm{r} \circ m \Rightarrow k$，并满足 $(g\psi) \circ (f\phi) = \theta$。因此，命题 9 的条件得到满足，且 $(P, \mathrm{l}, \mathrm{r})$ 是一个双拉回。 □

我们还有以下关于双拉回矩形的判据：

引理 5. 给定一个由两个在 Gpd 中为拉回的方形图组成的矩形，如

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\pi_M^L} & M & \xrightarrow{\pi_R^M} & R \\ {\scriptstyle \pi_A^L}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_B^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B & \xrightarrow[g]{} & C \end{array},$$

以下结论成立：

(i) 若整个矩形是一个双拉回，则左方形图也是；
(ii) 若左方形图和右方形图都是双拉回，则整个矩形也是双拉回。

证明。我们首先证明 (i)。为此，我们使用命题 9。设 $a \in A$、$m \in M$ 和 $\theta\colon f(a) \to \pi_B^M(m)$。我们有，$g(\theta)$ 是从 $g \circ f(a)$ 到 $g \circ \pi_B^M(m) = h \circ \pi_R^M(m)$ 的态射。由于外部矩形被假设为双拉回，存在 $a' \in A$、$r' \in R$、$u^A\colon a \to a' \in A$、$v^R\colon r' \to \pi_R^M(m)$，使得 $g(\theta) = h(v^R) \circ (g \circ f)(u^A)$。因此，我们有 $g(\theta \circ (f(u^A))^{-1}) = h(v^R)$。由于右方形图是一个拉回，存在唯一的 w^M，使得 $\pi_B^M(w^M) = \theta \circ (f(u^A))^{-1}$，并且 $\pi_R^M(w^M) = v^R$。此外，再次利用右侧的拉回，w^M 的目标是 m；其源是某个 m'，使得 $\pi_B^M(m') = f(a')$。于是，我们有 $\theta = \pi_B^M(w^M) \circ f(u^A)$。由命题 9 可知，左侧的拉回是一个双拉回。

现在我们再次利用命题 9 证明 (ii)。因此，设 $a \in A, r \in R$ 和 $\theta\colon (g \circ f)(a) \to h(r)$。由于右方形图是双拉回，存在 $b' \in B$，$r' \in R$，$u^B\colon f(a) \to b'$ 和 $v^R\colon r' \to r$，使得 $\theta = h(v^R) \circ g(u^B)$。由于 b' 和 r' 通过 g 和 h 分别在 C 中具有相同的投影，因此存在 $m' \in M$，使得 $\pi_B^M(m') = b'$ 和 $\pi_R^M(m') = r'$。于是，我们有 $u^B\colon f(a) \to \pi_B^M(m')$。由于左方形图是双拉回，存在 $a'' \in A$, $m'' \in M$, $\tilde{u}^A\colon a \to a''$，$\tilde{v}^M\colon m'' \to m'$，使得 $u^B = \pi_B^M(\tilde{v}^M) \circ f(\tilde{u}^A)$。因此我们有

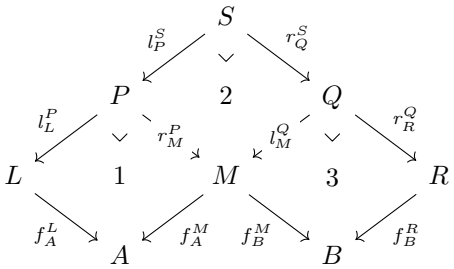
$$\begin{aligned} \theta &= h(v^R) \circ g(u^B) = h(v^R) \circ g(\pi_B^M(\tilde{v}^M) \circ f(\tilde{u}^A)) \\ &= h(v^R) \circ g(\pi_B^M(\tilde{v}^M)) \circ g(f(\tilde{u}^A)) \\ &= h(v^R) \circ h(\pi_R^M(\tilde{v}^M)) \circ g(f(\tilde{u}^A)) \\ &= h(v^R \circ \pi_R^M(\tilde{v}^M)) \circ (g \circ f)(\tilde{u}^A) \end{aligned}$$

这正是命题 9 所要求的分解，由此可得整个矩形是一个双拉回。 □

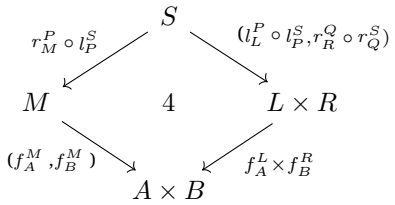
C. 一致性与纤薄性

关于一致性的若干论证需要针对双拉回进行某种形式的图表追踪。为此，下面给出一个重要引理：

引理 6。考虑 Gpd 中的图表



其中方块 1、2 和 3 是拉回，并利用乘积结构由此导出以下图表：



那么 4 是一个拉回。此外，以下结论成立：

(i) 如果 1 以及由 2 和 3 构成的矩形是双拉回，那么 4 是一个双拉回；(ii) 如果 3 以及由 1 和 2 构成的矩形是双拉回，那么 4 是一个双拉回；(iii) 如果 4 是一个双拉回，那么由 1 和 2 构成的矩形（分别地，由 2 和 3 构成的矩形）是一个双拉回。

证明。4 是一个拉回这一事实，是 1、2、3 是拉回这一事实的直接推论。

然后可以相当顺利地对不同的双拉回假设应用引理 1，从而推导出所需的拉回是双拉回。 □

借助上述工具，我们现在可以证明命题 1。

命题 1 的证明。我们先证明第一个蕴含，首先说明 (1)。设 $(S, \partial_A^S) \in \mathsf{S}$。给定 $(U, \partial_B^U) \in \mathsf{U}_{\overline{B}}^{\perp}$，我们必须证明 $T @ S \perp U$。根据假设，我们有 $T \perp S \times U$，也就是说，$\partial_{A\times B}^T$ 和 $\partial_A^S \times \partial_B^U$ 的拉回是一个双拉回。因此，由引理 6(iii)，我们得出

$\partial_B^{T@S}$和 ∂_B^U的拉回是一个双拉回，也就是说， $T@S \perp U$。因此， $T@S \in \mathbf{U}_B$。

现在证明（2）。由于 id_B 是等纤维化， ∂_B^T 与 id_B 的拉回是一个双拉回。因此，给定$U \in \mathbf{U}_A$，由引理 6 可知，$\partial_A^T \perp \partial_A^U$ 当且仅当$\partial_{A\times B}^T \perp \partial_A^U \times \mathrm{id}_B$。但后者成立，因为 $T \in \mathbf{U}_{A\multimap B}$。因此， $\partial_A^T \in \mathbf{U}_A^\perp$。

现在证明逆向蕴含。假设 T满足（1）和（2）。首先注意到，由于（A， id_A） $\in \mathbf{U}_A$，根据（1）可得 $\partial_B^T \in \mathbf{U}_B^\perp$。给定 $V \in \mathbf{U}_B$，我们必须证明，对于每个 $U \in \mathbf{U}_A$，都有 $T \perp U \times V$。由于已有 $\partial_B^T \perp \partial_B^V$，根据引理 6，这等价于对于每个 $U \in \mathbf{U}_A$，都有$U \perp T^\star@V$。根据假设，只需对 $U \in S$ 检查前述条件。再次由引理 6，这等价于证明对于每个$U \in S$都有 $T \perp U \times V$。由于 $U \perp \partial_A^T$，再次由引理 6，这等价于检查 $T@U \perp V$，但后者由（1）成立。因此，$T \in \mathbf{U}_{A\multimap B}$。 □

利用命题 1，我们可以证明一致性与复合的兼容性：

命题 10. 给定一致群胚 $(A, \mathbf{U}_A)$ 和 $(B, \mathbf{U}_B)$，以及预策略 $S \in \mathbf{U}_{A\multimap B}$和 $T \in \mathbf{U}_{B\multimap C}$，则有 $T \odot S \in \mathbf{U}_{A\multimap C}$。

证明. 回顾一下，两个跨度 S 和 T的复合按公式（1）构造。利用命题 1 证明 $T\odot S$的一致性，其中将 $\mathbf{U}_A$ 取作 $\mathbf{U}_A$的生成类。由 (1) 对 S 和 T均成立，可立即得出 (1) 对 $T \odot S$ 成立。由 (2) 在 T上可知 $\partial_B^T \in \mathbf{U}_B^\perp$，再结合命题 1 关于 S的对偶（特别指出， $S^\star$ 将 $\mathbf{U}_B^\perp$ 中的元素映射到 $\mathbf{U}_A^\perp$），即可推出 (2) 成立，即 $\partial_A^S \circ \mathrm{l} \in \mathbf{U}_A^\perp$。 □

我们以类似的方式处理纤薄性，并首先证明命题 2：

命题 2 的证明。设 $T \in \mathbf{T}_{A\multimap B}$，并令 $S \in \mathbf{S}$。由命题 1，我们已经有 $T@S \in \mathbf{U}_{A\multimap B}$。接下来，我们利用 $\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_B^{\perp\perp}$这一事实来证明 $T@S \in \mathbf{T}_B$。因此，设 $U \in \mathbf{T}_B^\perp$。由引理 6，我们有 $T@S \pitchfork U$ 当且仅当 $T \pitchfork S \times U$。后者成立，因为 $T \in \mathbf{T}_{A\multimap B}$，且 $S \in \mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}_A$。因此， $T@S \in \mathbf{T}_B$。

反过来，假设对每个 $S \in \mathbf{S}$，都有 $T@S \in \mathbf{T}_B$。首先注意到 $\mathbf{T}_{A\multimap B} = (\mathbf{T}_A \otimes \mathbf{T}_B^\perp)^\perp$。因此，我们必须证明，对于每个 $S \in \mathbf{T}_A$ 和 $U \in \mathbf{T}_B^\perp$，都有 $T \pitchfork S \times U$。由引理 6，对于给定的 U，后者等价于对每个 $S \in \mathbf{T}_A$ 都有 $S \pitchfork T^\star@U$，即 $T^\star@U \in \mathbf{T}_A^\perp$。但由于 $\mathbf{T}_A^\perp = \mathbf{S}^\perp$，对于给定的 U，这等价于对每个 $S \in \mathbf{S}$ 都有 $S \pitchfork T^\star@U$；这又等价于对每个 $S \in \mathbf{S}$ 都有 $T \pitchfork S \times U$，最终等价于对每个 $S \in \mathbf{S}$ 都有 $T@S \pitchfork U$，这正是我们最初的假设。 □

利用命题2，我们接着可以证明纤薄性与复合的相容性：

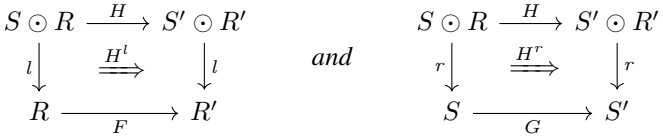
命题 11. 给定薄群胚 A 和 B 以及策略$S \in \mathbf{U}_{A\multimap B}$和 $T \in \mathbf{U}_{B\multimap C}$，我们有 $T \odot S \in \mathbf{T}_{A\multimap C}$。

证明。该证明与命题 10 的证明类似（事实上更为简单），并且由命题 2 给出的判据可得。 □

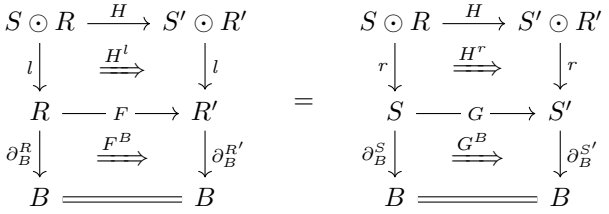
D. 关于 Thin 双范畴的细节

我们有如下关于 Thin 中 2-胞腔的 0-复合的便捷刻画：

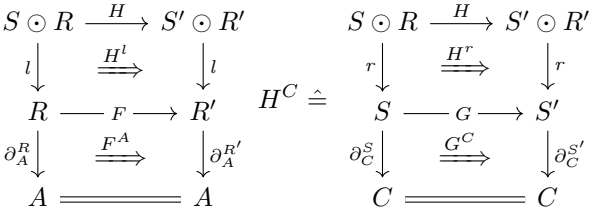
命题 12（复合的铺设刻画（PCC））。给定薄群胚 A、B、C，策略 R、R': $A \nrightarrow B$、 S、S': $B \nrightarrow C$，以及 Thin 中的弱态射 F: $R \Rightarrow R'$ 和G: $S \Rightarrow S'$，若存在函子 H: $S \odot R \to S' \odot R'$ 和两个自然变换 H^l 与 H^r，如



使得

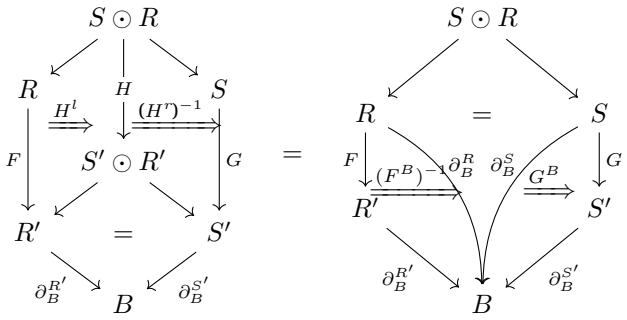


并且使得自然变换



分别在 $A^\perp$ 和 C 上为正，我们有 $H \hat{=} (H, H^A, H^C)$ 是 Thin 的一个正态射 $S \odot R \Rightarrow S' \odot R'$，并且 $H = G \odot F$。

证明。根据极性假设， H 是 Thin 的一个 2-胞腔 $S\odot R \Rightarrow S'\odot R'$，这是显然的。由假设给出的 2-胞腔等式可以改写为



使得 H^l 和 H^r 为右侧伪锥提供了一个分解，并定义了第 III-D5 节中提到的复合群胚的一个对象。实际的水平

复合是在应用命题 3 的双等价后得到的。但由于 $\langle H^A$、$H^C\rangle$ 已经是 $A \multimap C$上的正自然变换，因此该双等价在此对象和 $H = G \odot F$上不起作用。 □

引理 7. 给定薄群胚 A、B、C，我们有一个函子

$$(-) \odot (-) \colon \mathbf{Thin}(B,C) \times \mathbf{Thin}(A,B) \to \mathbf{Thin}(A,C).$$

证明. 根据我们对 Thin 的 2-胞腔复合所采用的定义，我们已经知道 (–) ⊙ (–) 保持弱态射的源和目标，因此只需验证函子性。

给定 $R \in \mathsf{Thin}(A,B)$ 和 $S \in \mathsf{Thin}(B,C)$，方程在 H、H^l 和 H^r 中的一个解为

$$\begin{array}{ccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S\odot R \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{H^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\ R & \xrightarrow{\mathrm{id}_R} & R \\ {\scriptstyle \partial_B^R}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^R} \\ B & = & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S\odot R \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \overset{H^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ S & \xrightarrow{\mathrm{id}_S} & S \\ {\scriptstyle \partial_B^S}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^S} \\ B & = & B \end{array}$$

由 $H = \mathrm{id}_{R\odot S}$、$H^l = \mathrm{id}_l$ 和 $H^r = \mathrm{id}_r$ 给出。因此，由于恒等态射是 A^- 和 C^+ 的成员，命题 12 的极性条件得到满足，从而

$$\mathrm{id}_S \odot \mathrm{id}_R \quad = \quad (\mathrm{id}_{S\odot R}, \mathrm{id}_{\partial_A^R \circ l}, \mathrm{id}_{\partial_C^S \circ r}) \quad = \quad \mathrm{id}_{S\odot R}.$$

现在，给定按如下方式组织的四个正态射

$$R \xrightarrow{F} R' \xrightarrow{F'} R'' \in \mathbf{Thin}(A,B)\,,$$
$$S \xrightarrow{G} S' \xrightarrow{G'} S'' \in \mathbf{Thin}(B,C)\,,$$

计算 $F \odot G$ 的过程给出 H、H^l 和 H^r，使得

$$\begin{array}{ccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{H^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\ R & \xrightarrow{F} & R' \\ {\scriptstyle \partial_B^R}\downarrow & \overset{F^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{R'}} \\ B & = & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \overset{H^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ S & \xrightarrow{G} & S' \\ {\scriptstyle \partial_B^S}\downarrow & \overset{G^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S'}} \\ B & = & B \end{array}$$

并且，$\partial_A^{R'} H^l$ 和 $\partial_C^{S'} H^r$ 分别在 A 上为负、在 C上为正；类似地，计算 $F' \odot G'$的过程得到 H'、H'^l 和 H'^r，使得

$$\begin{array}{ccc} S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{H'^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\ R' & \xrightarrow{F'} & R'' \\ {\scriptstyle \partial_B^{R'}}\downarrow & \overset{F'^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{R''}} \\ B & = & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \overset{H'^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ S' & \xrightarrow{G'} & S'' \\ {\scriptstyle \partial_B^{S'}}\downarrow & \overset{G'^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S''}} \\ B & = & B \end{array}$$

并且，$\partial_A^{R''} H'^l$ 和 $\partial_C^{S''} H'^r$ 分别在 A 上为负、在 C上为正。另一方面，因此我们有（$G' \odot F'$）∘（$G \odot F$）是跨态射 $K = (K,\ K^l,\ K^r)$，其带有 $K = H'H$ 和

$$K^l = \begin{array}{ccccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{H^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} & \overset{H'^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\ R & \xrightarrow{F} & R' & \xrightarrow{F'} & R'' \\ {\scriptstyle \partial_A^R}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_A^{R'}} & \overset{F'^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_A^{R''}} \\ A & = & A & = & A \end{array}$$

$$K^r = \begin{array}{ccccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \overset{H^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} & \overset{H'^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ S & \xrightarrow{G} & S' & \xrightarrow{G'} & S'' \\ {\scriptstyle \partial_C^S}\downarrow & \overset{G^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_C^{S'}} & \overset{G'^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_C^{S''}} \\ C & = & C & = & C \end{array}.$$

另一方面，我们有

$$\begin{array}{ccccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \overset{H^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} & \overset{H'^l}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\ R & \xrightarrow{F} & R' & \xrightarrow{F'} & R'' \\ {\scriptstyle \partial_B^R}\downarrow & \overset{F^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{R'}} & \overset{F'^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{R''}} \\ B & = & B & = & B \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc} S\odot R & \xrightarrow{H} & S'\odot R' & \xrightarrow{H'} & S''\odot R'' \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \overset{H^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} & \overset{H'^r}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\ S & \xrightarrow{G} & S' & \xrightarrow{G'} & S'' \\ {\scriptstyle \partial_B^S}\downarrow & \overset{G^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S'}} & \overset{G'^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S''}} \\ B & = & B & = & B \end{array}.$$

此外，沿 l 将 H^l 和 H'^l 进行水平粘贴所得的自然变换，以及沿 r 将 H^r 和 H'^r 进行水平粘贴所得的自然变换，满足 PCC 的极性条件。

因此，再次考虑K的图表定义，PCC 告诉我们，K 也是（$G' \circ G$）⊙（$F' \circ F$），由此得到函子性。 □

现在我们证明水平复合的单位性。给定一个薄群胚 A，我们将 cc^A 记为恒等跨度$A \xleftarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{\mathrm{id}} A$。我们有

引理 8。给定一个薄群胚 A，我们有 $\mathsf{cc}^A \in \mathbf{T}_{A\multimap A}$。

证明。这是命题 1 和命题 2 的一个直接推论。 □

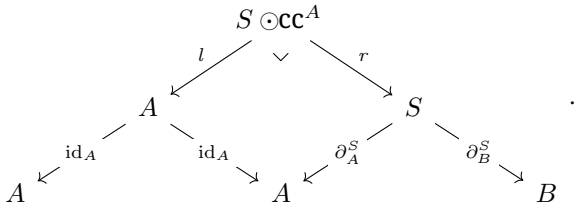
我们也将相应的函子 $1 \to \mathbf{Thin}(A,A)$ 记作 cc^A。给定另一个薄群胚 B，函子之间存在一个变换R

$$\mathbf{Thin}(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Thin}(A,B) \times 1 \to \cdots$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}\times \mathsf{cc}^A} \mathbf{Thin}(A,B) \times \mathbf{Thin}(A,A) \xrightarrow{(-)\odot(-)} \mathbf{Thin}(A,B)$$

and

$$\mathbf{Thin}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbf{Thin}(A,B)$$

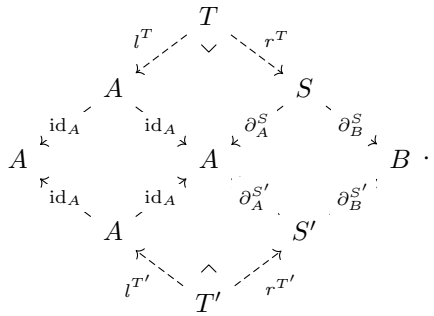
其在 $S \in \mathbf{Thin}(A,B)$ 处的分量定义如下。回顾一下，跨度 $S \odot \mathrm{cc}^A$ 由拉回定义



于是，R_S ˆ= r 是一个同构（因为它是一个同构的拉回），并且它还诱导策略之间的强同构 R_S: $S \odot \mathrm{cc}^A \Rightarrow S \in \mathbf{Thin}$。

引理 9. R ˆ=$(\mathrm{R}_S)_{S \in \mathbf{Thin}}$ 是一个自然同构。

证明。设 A, B, S, S': $A \nrightarrow B$，且 F: $S \to S'$，均属于 Thin(A, B)。我们先用图表表示这两个复合 T ˆ=$\mathrm{cc}^A \odot S$ 和 T' ˆ= $\mathrm{cc}^A \odot S'$。



现在我们计算复合 $F \odot \mathrm{id}_{\mathrm{cc}^A}$。根据 PCC，它是态射 $\tilde{F}$: $S \odot \mathrm{cc}^A \Rightarrow S' \odot \mathrm{cc}^A$，定义如下:

$$\tilde{F} \quad = \quad T \xrightarrow{r^T} S \xrightarrow{F} S' \xrightarrow{(r^{T'})^{-1}} T'$$

and

$$\tilde{F}^A = \begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{r^T} & S & \xrightarrow{F} & S' & \xrightarrow{(r^{T'})^{-1}} & T' \\ {\scriptstyle l^T}\downarrow & = & {\scriptstyle \partial_A^S}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle \partial_A^{S'}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle l^{T'}} \\ A & = & A & = & A & = & A \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} \\ A & = & A & = & A & = & A \end{array}$$

$$\tilde{F}^B = \begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{r^T} & S & \xrightarrow{F} & S' & \xrightarrow{(r^{T'})^{-1}} & T' \\ {\scriptstyle r^T}\downarrow & & & = & & & \downarrow{\scriptstyle r^{T'}} \\ S & & & \xrightarrow{\quad F \quad} & & & S' \\ {\scriptstyle \partial_B^S}\downarrow & & & \overset{F^B}{\Longrightarrow} & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S'}} \\ B & = & B & = & B & = & B \end{array} .$$

R 的自然性可由下列方程表示:

$$\mathrm{R}_{S'} \circ (F \odot \mathrm{id}_{\mathrm{cc}^A}) = F \circ \mathrm{R}_S$$

现在来验证这一点。首先有

$$\mathrm{R}_{S'} \circ (F \odot \mathrm{id}_{\mathrm{cc}^A}) \quad = \quad T \xrightarrow{r^T} S \xrightarrow{F} S' \quad = \quad F \circ \mathrm{R}_S \,.$$

此外，

$$(\mathrm{R}_{S'} \circ (F \odot \mathrm{id}_{\mathrm{cc}^A}))^A \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{r^T} & S & \xrightarrow{F} & S' \\ {\scriptstyle l^T}\downarrow & = & {\scriptstyle \partial_A^S}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial_A^{S'}} \\ A & = & A & = & A \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} \\ A & = & A & = & A \end{array}$$

$$= \quad (F \circ \mathrm{R}_S)^A$$

and

$$(\mathrm{R}_{S'} \circ (F \odot \mathrm{id}_{\mathrm{cc}^A}))^B \quad = \quad \begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{r^T} & S & \xrightarrow{F} & S' \\ {\scriptstyle r^T}\downarrow & & = & & \| \\ S & & \xrightarrow{\quad F \quad} & & S' \\ {\scriptstyle \partial_B^S}\downarrow & & \overset{F^B}{\Longrightarrow} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_B^{S'}} \\ B & = & B & = & B \end{array}$$

$$= \quad (F \circ \mathrm{R}_S)^B .$$

由此证明 R 定义了一个自然同构。 □

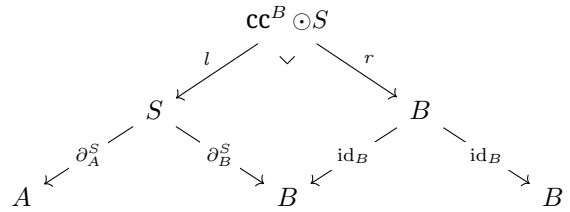
类似地，在以下对象之间存在一个变换 L

$$\mathbf{Thin}(A,B) \xrightarrow{\sim} 1 \times \mathbf{Thin}(A,B) \to \cdots$$
$$\xrightarrow{\mathrm{cc}^B \times \mathrm{id}} \mathbf{Thin}(B,B) \times \mathbf{Thin}(A,B) \xrightarrow{(-)\odot(-)} \mathbf{Thin}(A,B)$$

and

$$\mathbf{Thin}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbf{Thin}(A,B)$$

其在策略 $S \in \mathbf{Thin}(A,B)$ 处的分量定义如下。回忆一下，跨度 $\mathrm{cc}^B \odot S$ 由拉回定义



于是，L_S ˆ= l 是一个同构（因为它是一个同构的拉回），并且还诱导出薄跨的一个强同构 L_S: $\mathrm{cc}^B \odot S \Rightarrow S \in \mathbf{Thin}$。与之前一样，我们有

引理 10. L ˆ=$(\mathrm{L}_S)_{S \in \mathbf{Thin}}$ 是一个自然同构。

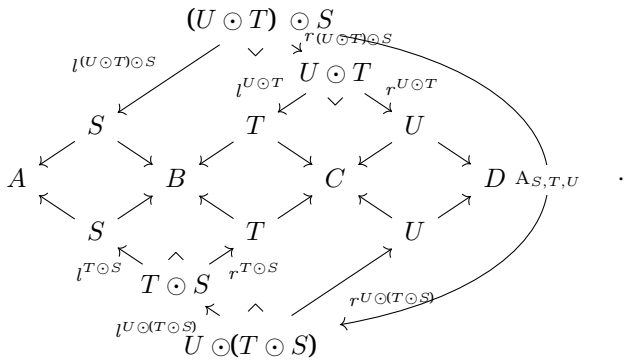
给定薄群胚 A、B、C、D，存在一个变换

$$\mathrm{A} : ((-) \odot (-)) \odot (-) \Rightarrow (-) \odot ((-) \odot (-))$$
$$: \mathbf{Thin}(C,D) \times \mathbf{Thin}(B,C) \times \mathbf{Thin}(A,B)$$
$$\to \mathbf{Thin}(A,D)$$

其在 $S \in \mathbf{Thin}(A,B)$、$T \in \mathbf{Thin}(B,C)$ 和 $U \in \mathbf{Thin}(C,D)$ 处的分量由一个强态射给出

$$\mathrm{A}_{S,T,U} : (U \odot T) \odot S \to U \odot (T \odot S)$$

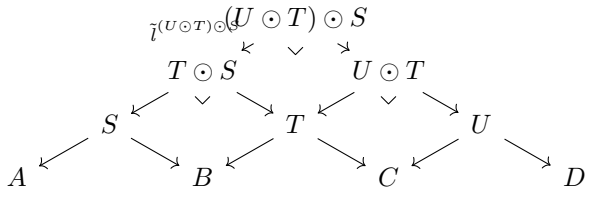
按照预期，在使用所涉及的不同拉回得到的两个复合之间定义，如下所示



$\mathsf{A}_{S,T,U}$ 的逆以对称方式定义，因此 A 是一个同构变换。

引理 11. 变换 A 是一个自然同构。

证明. 设 $F\colon S \Rightarrow S'\colon A \nrightarrow B$, $G\colon T \Rightarrow T'\colon B \nrightarrow C$ 和 $H\colon U \Rightarrow U'\colon C \nrightarrow D$ 是 Thin 中的弱态射。我们照常计算 $(U \odot T) \odot S$，此外还将投影 $\mathsf{l}^{(U\odot T)\odot S}$ 通过唯一态射 $\tilde{\mathsf{l}}^{\odot S}_{(U\odot T)}$，规范地分解到 $T \odot S$，从而得到一个图表



并且得到 $(U \odot T) \odot S$ 的类似图表。对称地，投影 $\mathsf{r}^{U\odot(T\odot S)}$ 可通过态射 $\tilde{\mathsf{r}}^{U\odot}_{(T\odot S)}$，规范地分解到 $U \odot T$；而投影 $\mathsf{r}^{U'\odot(T'\odot S')}$ 则可通过态射 $\tilde{\mathsf{r}}^{U'\odot}_{(T'\odot S')}$，分解到 $U' \odot T'$。

注意到 $\mathsf{l}^{U\odot(T\odot S)}\circ \mathsf{A}_{S,\ T,\ U} = \tilde{\mathsf{l}}^{\ (U\odot T)}_{\odot S}$ 以及其他类似的等式均成立。通过计算 $K \hat{=} G \odot F$，我们得到自然变换 $\tilde{K}^A$ 和 $\tilde{K}^C$，使得

$$K^A = \begin{array}{ccc} T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\ {\scriptstyle l^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l^{T'\odot S'}} \\ S & \xrightarrow{F} & S' \\ {\scriptstyle \partial^S_A}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{S'}_A} \\ A & = & A \end{array}$$

and

$$K^C = \begin{array}{ccc} T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\ {\scriptstyle r^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{T'\odot S'}} \\ T & \xrightarrow{G} & T' \\ {\scriptstyle \partial^T_C}\downarrow & \overset{G^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{T'}_C} \\ C & = & C \end{array}$$

此外，它们还满足

$$\begin{array}{ccc} T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\ {\scriptstyle l^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l^{T'\odot S'}} \\ S & \xrightarrow{F} & S' \\ {\scriptstyle \partial^S_B}\downarrow & \overset{F^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{S'}_B} \\ B & = & B \end{array} = \begin{array}{ccc} T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\ {\scriptstyle r^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{T'\odot S'}} \\ T & \xrightarrow{G} & T' \\ {\scriptstyle \partial^T_B}\downarrow & \overset{G^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{T'}_B} \\ B & = & B \end{array}.$$

同样，通过计算 $L \hat{=} H \odot G$，我们得到自然的变换 $\tilde{L}^B$ 和 $\tilde{L}^D$，使得

$$L^B = \begin{array}{ccc} U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\ {\scriptstyle l^{U\odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l^{U'\odot T'}} \\ T & \xrightarrow{G} & T' \\ {\scriptstyle \partial^T_B}\downarrow & \overset{G^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{T'}_B} \\ B & = & B \end{array}$$

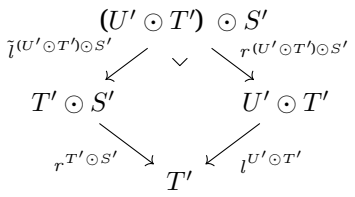
and

$$L^D = \begin{array}{ccc} U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\ {\scriptstyle r^{U\odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{U'\odot T'}} \\ U & \xrightarrow{H} & U' \\ {\scriptstyle \partial^U_D}\downarrow & \overset{H^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{U'}_D} \\ D & = & D \end{array}$$

它们还满足

$$\begin{array}{ccc} U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\ {\scriptstyle l^{U\odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l^{U'\odot T'}} \\ T & \xrightarrow{G} & T' \\ {\scriptstyle \partial^T_C}\downarrow & \overset{G^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{T'}_C} \\ C & = & C \end{array} = \begin{array}{ccc} U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\ {\scriptstyle r^{U\odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{U'\odot T'}} \\ U & \xrightarrow{H} & U' \\ {\scriptstyle \partial^U_C}\downarrow & \overset{H^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{U'}_C} \\ C & = & C \end{array}.$$

由于



根据引理 5，这是一个双拉回，并且自然的变换 $\tilde{K}^C$ 和 $\tilde{L}^B$ 定义了一个顶点为 $(U \odot T) \odot S$ 的伪锥

对于相关的余跨度，我们得到 M、 $\tilde{M}^A$ 和 $\tilde{M}^D$，使得

$$
\begin{array}{ccc}
(U\odot T)\odot S & \xrightarrow{M} & (U'\odot T')\odot S' \\
{\scriptstyle \tilde{l}^{(U\odot T)\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{l}^{(U'\odot T')\odot S'}} \\
T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\
{\scriptstyle r^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{T'\odot S'}} \\
T & \xrightarrow{G} & T'
\end{array}
=
\begin{array}{ccc}
(U\odot T)\odot S & \xrightarrow{M} & (U'\odot T')\odot S' \\
{\scriptstyle r^{(U\odot T)\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{(U'\odot T')\odot S'}} \\
U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\
{\scriptstyle r^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^B}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{T'\odot S'}} \\
T & \xrightarrow{G} & T'
\end{array}
.
$$

由此，我们得到 Span 中 $(U\odot T)\odot S$ 与 $(U'\odot T')\odot S'$ 之间的一个弱态射 $M=(M, M^A, M^D)$，其中

$$
M^A=
\begin{array}{ccc}
(U\odot T)\odot S & \xrightarrow{M} & (U'\odot T')\odot S' \\
{\scriptstyle \tilde{l}^{(U\odot T)\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{l}^{(U'\odot T')\odot S'}} \\
T\odot S & \xrightarrow{K} & T'\odot S' \\
{\scriptstyle l^{T\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l^{T'\odot S'}} \\
S & \xrightarrow{F} & S' \\
{\scriptstyle \partial_A^S}\uparrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & \uparrow{\scriptstyle \partial_A^{S'}} \\
A & = & A
\end{array}
$$

and

$$
M^D=
\begin{array}{ccc}
(U\odot T)\odot S & \xrightarrow{M} & (U'\odot T')\odot S' \\
{\scriptstyle r^{(U\odot T)\odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{(U'\odot T')\odot S'}} \\
U\odot T & \xrightarrow{L} & U'\odot T' \\
{\scriptstyle r^{U\odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^D}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r^{U'\odot T'}} \\
U & \xrightarrow{H} & U' \\
{\scriptstyle \partial_D^U}\uparrow & \overset{H^D}{\Longrightarrow} & \uparrow{\scriptstyle \partial_D^{U'}} \\
D & = & D
\end{array}
.
$$

利用命题 3 中的双等价，我们可以假设 $\tilde{M}^A$和 $\tilde{M}^B$的选取使得 M^A和 M^D分别在 A 上为负、在 D上为正。由 PCC，我们便可直接验证 $M=(H\odot G)\odot F$。

¯现在考虑正弱态射 $\bar{M}=\mathrm{A}_{S',T',U'}\circ M\circ \mathrm{A}_{S,T,U}^{-1}$：其中 $\bar{M}^A$和 $\bar{M}^D$如图 5 和图 6 所示。利用 PCC 刻画 $G\odot F$与 H的¯复合，可得 $H\odot(G\odot F)=M$，从而

$$
\mathrm{A}_{S',T',U'}\circ((H\odot G)\odot F)=(H\odot(G\odot F))\circ \mathrm{A}_{S,T,U}
$$

这就是所需的自然性。 □

现在我们可以证明定理 2：

定理 2 的证明。根据引理 10 至 11，0-复合具有自然的左单位性、右单位性和结合性。此外，双范畴定义所要求的自然同构的相容条件，直接由其拉回定义得出。 □

E. 重命名

ˇ 命题 13。给定 $F\colon\ A\to B\in$ Ren，$F\in$Thin。

ˇ 证明。我们首先证明 $F\in \mathsf{U}_{B\multimap A}$，并为此使用命题 1 的对偶版本。我们已经知道 $\mathrm{id}_A\in \mathsf{U}_A$，因为它是一个同构。剩下要证明的是，对于每个 $S\in \mathsf{U}_A$，都有ˇ $F^\star@S\in \mathsf{U}_{B^\perp}$。在定义域同构的意义下，ˇ$F^\star@S$是 $F\circ\partial^S$ 的复合；根据关于 F 的假设，后者属于 $\mathsf{U}_{B^\perp}$。因此，根据命题 1，$F\in \mathsf{U}_{B\multimap A}$。

ˇ 我们还需证明 $F\in \mathsf{T}_{B\multimap A}$。但根据命题 2，采用与一致性相同的论证即可得出。 □

给定 $F\colon\ A\to B$ 和 $G\colon\ B\to C$ 属于 Ren，则存在

$$
m_{F,G}\colon (\check{G}\check{F})\Rightarrow \check{F}\odot\check{G}
$$

一个由拉回的泛性质定义的 Thin 的强态射，形式为

$$
m_{F,G}=\langle F,\mathrm{id}_A\rangle\colon A\to \check{F}\odot\check{G}.
$$

引理 12. 设 A、B、C 为薄群胚，且 $\phi\colon\ F\Rightarrow F'\colon\ A\to B$ 和 $\psi\colon\ G\Rightarrow G'\colon\ B\to C$ 是 Ren 中的两个 2-胞腔。复合 $\phi\odot\psi\colon F\odot G\Rightarrow F'\odot G'$ 由 $(H,\ \chi^C,\ \chi^A)$ 给出，其中 χ^C 和 χ^A 分别为

$$
\begin{array}{ccc}
\check{F}\odot\check{G} & \xrightarrow{H} & \check{F}'\odot\check{G}' \\
{\scriptstyle l}\downarrow & \overset{\bar{\phi}}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\
B & = & B \\
{\scriptstyle G}\downarrow & \overset{\psi}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle G'} \\
C & = & C
\end{array}
\quad \textit{and} \quad
\begin{array}{ccc}
\check{F}\odot\check{G} & \xrightarrow{H} & \check{F}'\odot\check{G}' \\
{\scriptstyle r}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle r} \\
A & = & A \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} \\
A & = & A
\end{array}
$$

with

$$
\bar{\phi}=
\begin{array}{ccccccc}
\check{F}\odot\check{G} & \xrightarrow{r} & A & = & A & \xrightarrow{r^{-1}} & \check{F}'\odot\check{G}' \\
{\scriptstyle l}\downarrow & = & {\scriptstyle F}\downarrow & \overset{\phi}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle F'}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle l} \\
B & = & B & = & B & = & B
\end{array}
$$

¯和 H，如 ϕ 顶部所示。

Proof. This is a consequence of the PCC. □

命题 14. 给定薄群胚 A、B、C，对于 $F\colon\ A\to B$ 和 $G\colon\ B\to C$ 属于 Thin，2-胞腔 $m_{F,\,G}$ 定义了一个类型为 m 的自然同构

$$
\begin{aligned}
&((-)_{(2)}\mathbin{\check{\circ}}(-)_{(1)})\Rightarrow(\check{(-)})_{(1)}\odot(\check{(-)})_{(2)} \\
&:\mathbf{Ren}(A,B)\times\mathbf{Ren}(B,C)\to\mathbf{Thin}(C,A)
\end{aligned}
.
$$

证明. 设 $\phi\colon\ F\Rightarrow F'\colon\ A\to B$ 和 $\psi\colon\ G\Rightarrow G'\colon\ B\to C$ 是 Ren 中的两个 2-胞腔。

我们必须证明

$$
\begin{array}{ccc}
(\check{G}\check{F}) & \xrightarrow{(\check{\psi}\check{\phi})} & (\check{G}'\check{F}') \\
{\scriptstyle m_{F,G}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle m_{F',G'}} \\
\check{F}\odot\check{G} & \xrightarrow[\check{\phi}\odot\check{\psi}]{} & \check{F}'\odot\check{G}'
\end{array}
$$

$$
\bar{M}^A = \begin{array}{ccccccc}
U \odot (T \odot S) & \xrightarrow{\mathrm{A}^{-1}_{S,T,U}} & (U \odot T) \odot S & \xrightarrow{M} & (U' \odot T') \odot S' & \xrightarrow{\mathrm{A}_{S',T',U'}} & U' \odot (T' \odot S') \\
{\scriptstyle l^{U \odot (T \odot S)}}\downarrow & = & {\scriptstyle \tilde{l}^{\,(U \odot T) \odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^A}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle \tilde{l}^{\,(U' \odot T') \odot S'}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle l^{U' \odot (T' \odot S')}} \\
T \odot S & = & T \odot S & \xrightarrow{K} & T' \odot S' & = & T' \odot S' \\
{\scriptstyle l^{T \odot S}}\downarrow & = & {\scriptstyle l^{T \odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{K}^A}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle l^{T' \odot S'}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle l^{T' \odot S'}} \\
S & = & S & \xrightarrow{F} & S' & = & S' \\
{\scriptstyle \partial^S_A}\downarrow & = & {\scriptstyle \partial^S_A}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle \partial^{S'}_A}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \partial^{S'}_A} \\
A & = & A & = & A & = & A
\end{array}
$$

图5. 该自然变换 $\bar{M}^A$

$$
\bar{M}^D = \begin{array}{ccccccc}
U \odot (T \odot S) & \xrightarrow{\mathrm{A}^{-1}_{S,T,U}} & (U \odot T) \odot S & \xrightarrow{M} & (U' \odot T') \odot S' & \xrightarrow{\mathrm{A}_{S',T',U'}} & U' \odot (T' \odot S') \\
{\scriptstyle \tilde{r}^{U \odot (T \odot S)}}\downarrow & = & {\scriptstyle r^{(U \odot T) \odot S}}\downarrow & \overset{\tilde{M}^D}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle r^{(U' \odot T') \odot S'}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \tilde{r}^{U' \odot (T' \odot S')}} \\
U \odot T & = & U \odot T & \xrightarrow{L} & U' \odot T' & = & U' \odot T' \\
{\scriptstyle r^{U \odot T}}\downarrow & = & {\scriptstyle r^{U \odot T}}\downarrow & \overset{\tilde{L}^D}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle r^{U' \odot T'}}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle r^{U' \odot T'}} \\
U & = & U & \xrightarrow{H} & U' & = & U' \\
{\scriptstyle \partial^U_D}\downarrow & = & {\scriptstyle \partial^U_D}\downarrow & \overset{H^D}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle \partial^{U'}_D}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle \partial^{U'}_D} \\
D & = & D & = & D & = & D
\end{array}
$$

图6。自然变换 $\bar{M}^D$

在 Thin(C, A) 中。但这个等式可以很容易地由引理 12 推出，其陈述意味着

$$\check{\phi} \odot \check{\psi} = m_{F',G'} \circ (\check{\psi}\check{\phi}) \circ m^{-1}_{F,G} \qquad \square$$

现在我们可以完成命题 5 的证明：

ˇ 证明。对于每个 A 和 B，容易看出 $(-)$ 定义了一个 ˇ函子 $(-)_{A,\ B}$: Ren$(A, B) \to$ Thin(B, A)。我们只需证明通常的伪函子相容条件由 m 满足。但所需的相容条件直接由拉回的泛性质推出。 $\square$

F. !函子及其结构

现在我们完成伪函子 !: Thin $\to$ Thin 的定义。首先，尽管我们将两个跨度 S, S': $A \nrightarrow B$ 之间的弱态射描述为三元组 (F, F^A, F^B)，并且通常将 F 视为整个三元组，但为避免混淆，接下来我们常用$\underline{F}$来指代三元组的第一个元素 F 。现在我们先证明相干 m的自然性。

引理13。设 $F = (\underline{F}, F^A, F^B)$: $S \Rightarrow S'$: $A \nrightarrow B$ 和 $G = (\underline{G}, G^B, G^C)$: $T \Rightarrow T'$: $B \nrightarrow C$。设 χ^S 和 χ^T 为根据水平复合的定义给出的两个 2-胞腔，使得 $G \odot F$ 由这两个 2-胞腔给出

$$
\begin{array}{ccc}
T \odot S & \xrightarrow{G \odot F} & T' \odot S' \\
{\scriptstyle l}\downarrow & \overset{\chi^S}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle l} \\
S & \xrightarrow{\underline{F}} & S' \\
{\scriptstyle \partial^S_A}\downarrow & \overset{F^A}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{S'}_A} \\
A & \xrightarrow[\mathrm{id}_A]{} & A
\end{array}
\qquad \textit{and} \qquad
\begin{array}{ccc}
T \odot S & \xrightarrow{G \odot F} & T' \odot S' \\
{\scriptstyle r}\downarrow & \overset{\chi^T}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle r} \\
T & \xrightarrow{\underline{G}} & T' \\
{\scriptstyle \partial^T_C}\downarrow & \overset{G^C}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \partial^{T'}_C} \\
C & \xrightarrow[\mathrm{id}_C]{} & C
\end{array}
.
$$

复合 $!G \odot !F$ 随后由以下两个 2-胞腔给出

$$
\begin{array}{ccccccc}
!T \odot !S & \xrightarrow{m^{-1}_{S,T}} & !(T \odot S) & \xrightarrow{!(G \odot F)} & !(T' \odot S') & \xrightarrow{m_{S',T'}} & !T' \odot !S' \\
{\scriptstyle l}\downarrow & = & {\scriptstyle !\,l}\downarrow & \overset{!\chi^S}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle !\,l}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle l} \\
!S & \xrightarrow{\mathrm{id}_{!S}} & !S & \xrightarrow{!\underline{F}} & !S' & \xrightarrow{\mathrm{id}_{!S'}} & !S' \\
{\scriptstyle !\partial^S_A}\downarrow & = & {\scriptstyle !\partial^S_A}\downarrow & \overset{!F^A}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle !\partial^{S'}_A}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle !\partial^{S'}_A} \\
!A & \xrightarrow[!\mathrm{id}_A]{} & !A & \xrightarrow[!\mathrm{id}_A]{} & !A & \xrightarrow[!\mathrm{id}_A]{} & !A
\end{array}
$$

and

$$
\begin{array}{ccccccc}
!T \odot !S & \xrightarrow{m^{-1}_{S,T}} & !(T \odot S) & \xrightarrow{!(G \odot F)} & !(T' \odot S') & \xrightarrow{m_{S',T'}} & !T' \odot !S' \\
{\scriptstyle r}\downarrow & = & {\scriptstyle !\,r}\downarrow & \overset{!\chi^T}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle !\,r}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle r} \\
!T & \xrightarrow{\mathrm{id}_{!T}} & !T & \xrightarrow{!\underline{G}} & !T' & \xrightarrow{\mathrm{id}_{!T'}} & !T' \\
{\scriptstyle !\partial^T_C}\downarrow & = & {\scriptstyle !\partial^T_C}\downarrow & \overset{!G^C}{\Longrightarrow} & {\scriptstyle !\partial^{T'}_C}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle !\partial^{T'}_C} \\
!C & \xrightarrow[!\mathrm{id}_C]{} & !C & \xrightarrow[!\mathrm{id}_C]{} & !C & \xrightarrow[!\mathrm{id}_C]{} & !C
\end{array}
.
$$

证明。我们使用 PCC。所提出的 2-胞腔的正性和负性分别源于 χ^S 与 F^A 的垂直复合的正性，以及 χ^T 与 G^C的垂直复合的负性。剩下需要证明的是，所提出的两个 2-胞腔的顶行满足 PCC 所要求的等式；但这由 χ^S 与 χ^T所满足的等式，以及 ! : Gpd $\to$ Gpd 在 2-胞腔上的函子性即可推出。 □

现在我们可以得出自然性：

引理14。态射 $m^A_{S\,T}{}^{B\,C}$、、定义了一个自然同构

$$m^{A,B,C}\colon !((-)\odot(-)) \Rightarrow !(-)\odot!(-)$$
$$:\mathbf{Thin}(A,B)\times\mathbf{Thin}(B,C)\to\mathbf{Thin}(A,C).$$

证明。令 $F\colon\ S\Rightarrow S'\colon\ A\nrightarrow B$以及 $G\colon\ T\Rightarrow T'\colon\ B\nrightarrow C$。我们必须证明

$$m^{A,B,C}_{S',T'}\circ!(G\odot F)=(!G\odot!F)\circ m^{A,B,C}_{S,T}.$$

但这直接由引理13得出，该引理的结论特别指出

$$m^{A,B,C}_{S',T'}\circ!(G\odot F)\circ(m^{A,B,C}_{S,T})^{-1}=!G\odot!F.$$ □

因此我们可以得出 ! 是一个伪函子：

命题15。函子 !: Gpd $\to$ Gpd 诱导出一个伪函子 !: Thin $\to$ Thin。

证明。根据引理14，我们有一个适当的自然同构，用以表达 ! 在 Thin 上的函子性。伪函子的相容律可以通过出现在这些律中的水平复合所涉及的拉回的泛性质直接验证。 □

G. ! 伪余单子

我们将通过函子性，从 Gpd 上的 ! 伪单子推导出 Thin 上的 ! 伪余单子。在使用这一函性论证之前，我们需要描述将要应用它的（高阶）范畴。定义域（双）范畴将是 Gpd 上具有类似于 ! 的性质的自函子所构成的（双）范畴：Gpd $\to$ Gpd；而陪域（双）范畴将是 Thin 上的自伪函子所构成的（双）范畴。我们首先讨论如何将 Gpd 上的一些函子与 Thin 上的伪函子联系起来。

给定一个函子 H: Gpd $\to$ Gpd，对于任意一致群胚 A，都有一个与之关联的典范一致群胚 $\mathrm{H}A = (\mathrm{H}A, \mathrm{U}_{\mathbf{H}A})$，其中 $\mathrm{U}_{\mathbf{H}A} = \{\mathrm{H}S \mid S \in \mathrm{U}_A\}^{\perp\perp}$。

命题16. 如果 H 保持拉回以及作为双拉回的拉回，那么对于给定的一致群胚 A 和B，以及 $S\in\mathrm{U}_{A\multimap B}$，我们有 $\mathrm{H}S\in\mathrm{U}_{\mathbf{H}A\multimap\mathbf{H}B}$。

证明。这是命题 1 的直接推论。 □

我们将满足上述性质之假设的函子 H 称为双笛卡尔函子。

一个 $\pm$-函子是一个元组 (H, H^+, ι)，其中 H、H^+ 都是 Gpd $\to$ Gpd 的函子，并且 H 和 H^+ 是双笛卡尔的，且保持（群胚之间）在（群胚的）对象上双射的函子，同时 H^+ 保持离散群胚，并且 $\iota\colon \mathrm{H}^+ \Rightarrow \mathrm{H}$ 是一个自然变换，它逐点（即每个 ι_X 都是）单态的，并且在（群胚的）对象上满射；此外，它还是双笛卡尔的，也就是说，其自然性方块既是拉回又是双拉回。直观地说，$\pm$-函子的定义抽象了 !: Gpd $\to$ Gpd 的情形，由此我们得到一个函子 Thin $\to$Thin。在 ! 的情形下，给定一个薄群胚 A，正子群胚 $(!A)_+$ 是通过一种无法仅由 ! 的定义以及 A 和 A_+ 的数据推导出的构造来定义的，因此我们必须在 $\pm$-函子的定义中，以一个函子 H^+ 和一个自然变换 $\iota\colon \mathrm{H}^+ \Rightarrow \mathrm{H}$ 的形式将其纳入考虑。我们本应先验地也要求负侧具有类似的数据，但事实证明，在 ! 的情形下，$(!A)_- = !(A_-)$，所以实际上没有必要这样做。为了证明 ! 在 Thin 上诱导出一个伪余单子，我们将考虑的 $\pm$-函子将仅是 ! 的迭代复合。

给定一个 $\pm$-函子 (H, H^+, ι) 和一个薄群胚 A，存在一个典范薄群胚 $\mathrm{H}A$，其底层一致群胚如前所定义，其薄前策略类为 $\mathrm{T}_{\mathbf{H}A} = \{\mathrm{H}S \mid S \in \mathrm{T}_A\}^{\perp\perp}$，其负子群胚和正子群胚分别为 $(\mathrm{H}A)_- = \mathrm{H}A_-$ 和 $(\mathrm{H}A)_+ = \mathrm{H}^+A_+$，嵌入由以下复合给出

$$\mathbf{H}A_- \xrightarrow{\mathbf{H}(\mathrm{id}_A^-)} \mathbf{H}A \quad\text{and}\quad \mathbf{H}^+A_+ \xrightarrow{\mathbf{H}^+(\mathrm{id}_A^+)} \mathbf{H}^+A \xrightarrow{\iota_A} \mathbf{H}A.$$

根据 $\pm$-函子的条件，它们是所需的 $\mathrm{T}_{\mathbf{H}A}$和 $\mathrm{T}^{\perp\!\!\perp}_{\mathbf{H}A}$ 中的元素（留给读者练习）。

命题 17。给定一个 $\pm$-函子 (H, H^+, ι)、薄群胚 A 和 B，以及 $S\in\mathrm{T}_{A\multimap B}$，则 $\mathrm{H}S\in\mathrm{T}_{\mathbf{H}A\multimap\mathbf{H}B}$。

证明。这是关于$\pm$-函子和命题 1 和命题 2的假设的直接推论。 □

命题 18。给定一个 $\pm$-函子 (H, H^+, ι) 和一个薄群胚 A，H 保持负（分别为正）2-胞腔。

证明。给定一个负2-胞 $\phi\colon\ F\Rightarrow F'\colon\ X\to A$，记$X_{(0)}$ 为与 X具有相同对象的离散群胚，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X_{(0)} & \xhookrightarrow{e} & X \\ {\scriptstyle \bar{F}}\Big(\overset{\phi^-}{\Rightarrow}\Big){\scriptstyle \bar{F}'} & & {\scriptstyle F}\Big(\overset{\phi}{\Rightarrow}\Big){\scriptstyle F'} \\ A_- & \xrightarrow[\mathrm{id}_A^-]{} & A \end{array}$$

$^-$ $^-$对于某个 2-胞腔 $\phi^-\colon\ F\Rightarrow F'$，其中顶部箭头 e是典范嵌入。根据关于 H 的假设，H 对 e 的像在 X 的对象上双射。此外，由函子性可得 $\mathrm{H}(\mathrm{id}_A^-)\circ\mathrm{H}(\phi^-) = \mathrm{H}(\phi)\circ\mathrm{H}(e)$。因此，自然变换 $\mathrm{H}(\phi)$ 的所有分量都在 $\mathrm{H}(\mathrm{id}_A^-)$ 的像中。因此，它是负的。

现在，给定一个正的 2-胞腔 $\phi\colon\ F \Rightarrow F'\colon\ X \to A$，我们有一个类似的交换图表

$$\begin{array}{ccc} X_{(0)} & \xhookrightarrow{e} & X \\ {\scriptstyle \bar{F}}\Big(\overset{\phi^+}{\Longrightarrow}\Big){\scriptstyle \bar{F}'} & & {\scriptstyle F}\Big(\overset{\phi}{\Longrightarrow}\Big){\scriptstyle F'} \\ A_+ & \xrightarrow[\mathrm{id}_A^+]{} & A \end{array}$$

对于某个 2-胞腔 $\phi^+\colon\ \bar{F} \Rightarrow \bar{F}'$。于是我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}^+X_{(0)} & \xrightarrow{\mathbf{H}^+(e)} & \mathbf{H}^+X & \xrightarrow{\iota_X} & \mathbf{H}X \\ {\scriptstyle \mathbf{H}^+(\bar{F})}\Big(\overset{\mathbf{H}^+(\phi^+)}{\Longrightarrow}\Big){\scriptstyle \mathbf{H}^+(\bar{F}')} & & {\scriptstyle \mathbf{H}^+(F)}\Big(\overset{\mathbf{H}^+(\phi)}{\Longrightarrow}\Big){\scriptstyle \mathbf{H}^+(F')} & & {\scriptstyle \mathbf{H}(F)}\Big(\overset{\mathbf{H}(\phi)}{\Longrightarrow}\Big){\scriptstyle \mathbf{H}(F')} \\ \mathbf{H}^+A_+ & \xrightarrow[\mathbf{H}^+(\mathrm{id}_A^+)]{} & \mathbf{H}^+A & \xrightarrow[\iota_A]{} & \mathbf{H}A \end{array}$$

根据假设，顶部箭头在对象上双射。因此，H(ϕ) 的所有分量都在 $\iota_A \circ$H$^+$(id$_A^+$) 的像中，所以 H(ϕ) 是正的。 □

给定两个 $\pm$-函子 H = (H, H$^+$, ι) 和 K =(K, K$^+$, κ)，一个 $\pm$-变换是由一对 (α, α^+) 组成的双笛卡尔自然变换，其中 α: H $\Rightarrow$ K 和 α^+: H$^+ \Rightarrow$ K$^+$ 满足

$$\kappa \circ \alpha^+ = \alpha \circ \iota.$$

现在，两个这样的 $\pm$-变换 (α, α^+) 和 (β, β^+) 之间的 $\pm$-修正，是 2-范畴的 3-范畴中的一个修正 $m\colon\ \alpha \Rrightarrow \beta$。

命题 19. 给定一个薄修正 $m\colon\ \alpha \Rrightarrow \beta$: H $\Rightarrow$K 和一个薄群胚 A，2-胞腔

$$m_A\colon \alpha_A \Rightarrow \beta_A\colon \mathbf{H}A \to \mathbf{K}A$$

在 KA 上作为一个 2-胞腔是负的。

证明。由于 m 是一个修正，我们有 $m_A \circ$H(id$_A^-$) =K(id$_A^-$) $\circ\ m_{A-}$。根据关于 H 和 id$_A^-$ 的假设，H(id$_A^-$) 在对象上双射，因此m_A 的所有分量都属于 K(id$_A^-$) 的像，所以它们是负的。 □

$\pm$-函子、 $\pm$-变换和 $\pm$-修正可以配备显然的运算，从而形成一个带有一个对象的严格 3-范畴 $\pm$-Funct（从道德上说，该对象是 Gpd，即每个 $\pm$-函子的定义域与陪域）。这里需要注意的重要一点是，!，η, μ, α, β和 γ 的数据以预期的方式在 $\pm$-Funct上诱导出一个伪单子。

现在我们将描述一个运算 $\check{}$: Funct 和 Thin。$\check{}$ 首先，一个 $\pm$-函子 (H, H$^+$, ι) 诱导出一个端函子 H: Thin $\to$ Thin，将一个薄群胚 A 映射到如前所定义的薄群胚 HA ，并将跨度及其弱态射映射为它们在 H 下的像；根据命题 17 和 18，这一定义是良定的。

现在，给定一个 $\pm$-变换 (α, α^+): (H, H$^+$, ι) $\Rightarrow$(K, K$^+$, κ)，我们定义一个伪自然变换 $\check{}\alpha$: $\check{}$K $\Rightarrow$ $\check{}$H，其在薄群胚 A 处的分量为 $\check{}(\alpha_A)$，也就是说，它是由伪函子 $\check{}(-)$: Ren$^{\mathrm{op}} \to$ Thin 将 α_A: H$A \to$ KA 映射得到的像。

接下来，我们可以将伪函子 $\check{}-$: Ren$^{\mathrm{op}} \to$ Thin 扩展为某种三维函子

$$(\check{-})\colon \pm\text{-}\mathbf{Funct}^{\mathrm{co}} \to \mathbf{Bicat}$$

将唯一的 0-胞腔映射到 Thin，并将同态双范畴 Bicat(Thin,Thin) 中的高阶胞腔映射到其中（这里， $\pm$-Funct$^{\mathrm{co}}$表示 $\pm$-Funct，但 2-胞腔的方向相反）。

虽然这很可能是一个三函子，但证明它会非常繁琐。相反，我们只依赖于以下更简单的命题:

命题20. 将 $\pm$-Funct视为一个严格2-范畴 $\check{}$，即遗忘 0 维后，(–) 诱导出一个伪函子

$$(\check{-})\colon \pm\text{-}\mathbf{Funct}^{\mathrm{co}} \to \mathbf{Bicat}(\mathbf{Thin}, \mathbf{Thin})$$

在双范畴之间。

Proof. By checking the axioms of pseudofunctors. □

现在我们可以简要描述定理 3 的证明:

定理 3 的证明。这个陈述最令人满意的证明将依赖于以下事实:

$$(\check{-})\colon \pm\text{-}\mathbf{Funct}^{\mathrm{co}} \to \mathbf{Bicat}(\mathbf{Thin}, \mathbf{Thin})$$

是一个三函子，并且三函子会将任意伪余单子映射为伪余单子，但我们不知道后一个事实的证明（尽管它很可能是真的），并且认为前一个事实的完整证明十分繁琐。

相反，我们可以依靠较弱的命题20来证明所需的相容性条件。根据 [40], , 我们需要证明图7中的修正方程均成立。其思路是将这些方程分别与伪单子 !: Gpd $\to$ Gpd 所满足的方程联系起来，而这是通过铺设实现的。例如，对于图7第一个方程左侧的前两个修正，我们采用以下铺设:

$$\begin{array}{ccc} !!\check{\mu} \odot (!\check{\mu} \odot \check{\mu}) & \Longrightarrow & (!!\check{\mu} \odot !\check{\mu}) \odot \check{\mu} \\ \| & = & \| \\ \widetilde{(!!\mu)} \odot (\widetilde{(!\mu)} \odot \check{\mu}) & \Longrightarrow & (\widetilde{(!!\mu)} \odot \widetilde{(!\mu)}) \odot \check{\mu} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \widetilde{(!!\mu)} \odot \widetilde{(\mu \circ !\mu)} & = & \widetilde{(!\mu \circ !!\mu)} \odot \check{\mu} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \widetilde{((\mu \circ !\mu) \circ (!!\mu))} & = & \widetilde{(\mu \circ (!\mu \circ (!!\mu)))} \end{array}$$

$!!\check{}\mu \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (!!\check{}\mu \odot !\check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow !(!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow !(\check{}\mu! \odot \check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow (!\check{}\mu! \odot !\check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow !\check{}\mu! \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow !\check{}\mu! \odot (\check{}\mu! \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (!\check{}\mu! \odot \check{}\mu!) \odot \check{}\mu = (!\check{}\mu \odot \check{}\mu)! \odot \check{}\mu \Rrightarrow (\check{}\mu! \odot \check{}\mu)! \odot \check{}\mu = (\check{}\mu!! \odot \check{}\mu!) \odot \check{}\mu =$ 等 $!!\check{}\mu \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow !!\check{}\mu \odot (\check{}\mu! \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (!!\check{}\mu \odot \check{}\mu!) \odot \check{}\mu \Longrightarrow (\check{}\mu!! \odot !\check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow \check{}\mu!! \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow \check{}\mu!! \odot (\check{}\mu! \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (\check{}\mu!! \odot \check{}\mu!) \odot \check{}\mu$ 和 $!\check{}\eta! \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow !\check{}\eta! \odot (\check{}\mu! \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (!\check{}\eta! \odot \check{}\mu!) \odot \check{}\mu = (!\check{}\eta \odot \check{}\mu)! \odot \check{}\mu \Rrightarrow \mathsf{cc}^! ! \odot \check{}\mu = \mathsf{cc}^{!!} \odot \check{}\mu \Rrightarrow \check{}\mu =$ $!\check{}\eta! \odot (!\check{}\mu \odot \check{}\mu) \Rrightarrow (!\check{}\eta! \odot !\check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow !(\check{}\eta! \odot \check{}\mu) \odot \check{}\mu \Rrightarrow ! \mathsf{cc}^! \odot \check{}\mu = \mathsf{cc}^{!!} \odot \check{}\mu \Rrightarrow \check{}\mu$

图7。! 成为伪余单子所需的两个方程

and

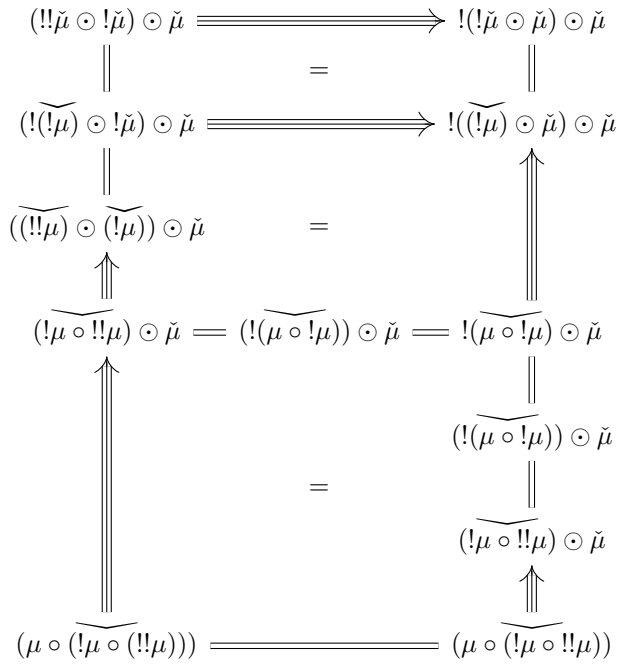


图7中的其他基本修正也以类似方式铺设，因此图7的第一个方程归结为方程

$$\begin{aligned}&(\mu \circ \widetilde{!\mu \circ !!\mu}) \Rrightarrow (\mu \circ \widetilde{!\mu \circ !\mu!})\\ \Rrightarrow\ &(\mu \circ \widetilde{\mu! \circ !\mu!}) \Rrightarrow (\mu \circ \widetilde{\mu! \circ \mu!!})\\ =\ &\\ &(\mu \circ \widetilde{!\mu \circ !!\mu}) \Rrightarrow (\mu \circ \widetilde{\mu! \circ !!\mu})\\ =\ &(\mu \circ \widetilde{!\mu \circ \mu!!}) \Rrightarrow (\mu \circ \widetilde{\mu! \circ \mu!!})\end{aligned}$$

$\check{}$ 是伪单子 $(!\ \eta, \mu)$ 在 Gpd 上所满足的一个方程经 $(-)$ 映射后的像，而图 7 中的第二个方程则对应于方程

$$\begin{aligned}&((\mu \circ \widetilde{!\mu}) \circ !\eta!) \Rrightarrow ((\mu \circ \widetilde{\mu!}) \circ !\eta!)\\ =\ &(\mu \circ \widetilde{(\mu! \circ !\eta!)}) \Rrightarrow (\widetilde{\mu \circ \mathrm{id}_{!!}}) = \check{\mu}\\ =\ &\end{aligned}$$

$$((\mu \circ \widetilde{!\mu}) \circ !\eta!) = (\mu \circ \widetilde{(!\mu \circ !\eta!)}) \Rrightarrow (\widetilde{\mu \circ \mathrm{id}_{!!}}) = \check{\mu}$$

这同样是伪单子 $(!\ \eta, \mu)$ 在 Gpd 上所满足的一个方程的像。因此，$(!, \check{}\eta, \check{}\mu)$ 确实是 Thin 上的一个伪余单子。 □

H. 笛卡尔积

给定薄群胚 A、B，对于余投影，我们记 $\bar{l}_{A,\ B}$ 和 $\bar{r}^{\ A,}_{\ B}$；当 A、B 可由上下文推知时，如前所述，简记为 $\bar{l}$ 和 $\bar{r}$

$$\bar{l}\colon A \hookrightarrow A + B \qquad \text{and} \qquad \bar{r}\colon B \hookrightarrow A + B.$$

$\check{}$ 通过应用函子 $(-)$，我们得到薄跨度 $l\colon\ A \,\&\, B \nrightarrow A$ 以及 $\check{}\bar{r}\colon\ A \,\&\, B \nrightarrow B$。给定薄群胚 Γ、A、B，我们定义一个函子

$$\langle -, - \rangle_{\Gamma,A,B}\colon \mathbf{Thin}(\Gamma, A) \times \mathbf{Thin}(\Gamma, B) \to \mathbf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B),$$

通常简写为 $\langle -, - \rangle$，如下所示。给定 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A)$ 和 $T \in \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$，我们将 $\langle S, T \rangle$ 定义为如下跨度

$$\langle S, T \rangle \quad = \quad \begin{array}{ccc} & S + T & \\ {\scriptstyle [\partial_\Gamma^S, \partial_\Gamma^T]}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \partial_A^S + \partial_B^T} \\ \Gamma & & A + B \end{array} .$$

命题 21. 给定 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A)$ 和 $T \in \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$，我们有 $\langle S, T \rangle \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B)$。

证明. 通过适当地使用命题 1 和命题 2。 □

给定态射 $F\colon\ S \to S' \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A)$ 和 $G\colon\ T \to T' \in \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$，$\langle F, G \rangle$ 被定义为态射 H，满足 $\underline{H} = \underline{F} + \underline{G}$ 且

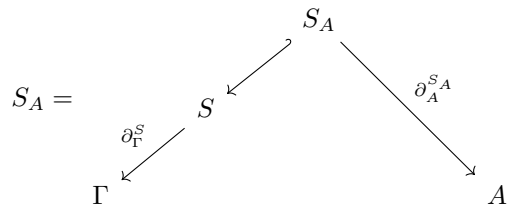
$$H^\Gamma = \begin{array}{ccc} S + T & \xrightarrow{\underline{F}+\underline{G}} & S' + T' \\ {\scriptstyle [\partial_\Gamma^S, \partial_\Gamma^T]}\downarrow & \xrightarrow{[F^\Gamma, G^\Gamma]} & \downarrow{\scriptstyle [\partial_\Gamma^{S'}, \partial_\Gamma^{T'}]} \\ \Gamma & = & \Gamma \end{array}$$

and

$$H^{A+B} = \begin{array}{ccc} S + T & \xrightarrow{\underline{F}+\underline{G}} & S' + T' \\ {\scriptstyle \partial_A^S + \partial_B^T}\downarrow & \xrightarrow{F^A + G^B} & \downarrow{\scriptstyle \partial_A^{S'} + \partial_B^{T'}} \\ A + B & = & A + B \end{array} .$$

可以立即验证，这两个 2-胞腔具有适当的极性，因此 $\langle F, G\rangle \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B)$。此外，$\langle -,-\rangle_{\Gamma,A,B}$ 的函子性也可以立即验证。

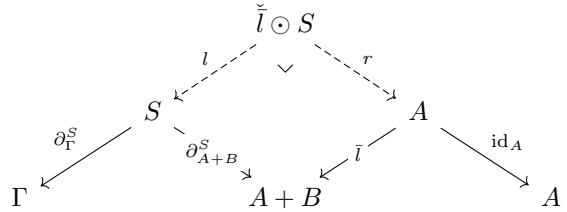
给定 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B)$，我们将跨度写作 S_A



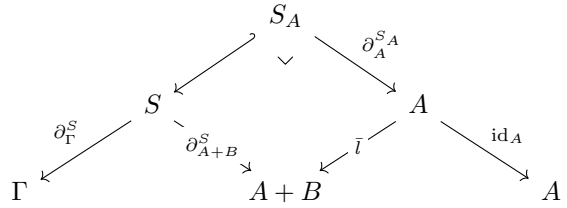
其中，S_A 是 S 的子幺半群，其在 ∂_{A+B}^S 下的像属于 A；$\partial_A^{S_A}$ 是从 ∂_{A+B}^S 到 $S_A \to A$ 的诱导映射。类似地，我们定义跨度 S_B。

命题 22. 给定 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B)$，则有 $S_A \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A)$ 且 $S_B \in \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$。

证明. 由两个薄跨度的复合可知，$l \odot S$ 属于 $\mathsf{Thin}(\Gamma, A)$。它是如下跨度：



它通过拉回的一个同构而同构于



这恰好就是 S_A。因此，后者属于 $\mathsf{Thin}(\Gamma, A)$。对 S_B 也有类似的论证。 □

映射 $S \mapsto S_A$ 扩展为一个函子

$$(-)_A \colon \mathbf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B) \to \mathbf{Thin}(\Gamma, A)$$

以预期的方式。类似地，我们得到一个函子 $(-)_B \colon \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B) \to \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$.

命题 23。函子 $(-)_A$ 和 $(-)_B$ 分别同构于函子 $l \odot (-)$ 和 $\breve{r} \odot (-)$。

证明。利用 PCC，可以证明命题 22 的证明中所述薄跨 $l \odot S \cong S_A$ 的 $\breve{}$ 同构族的自然性，从而得到一个 $\breve{}$ 函子的同构。对于 $(-)_B$ 和 $l \odot (-)$，也有类似的论证。 □

命题 24。给定薄群胚 Γ、A、B，存在一个伴随等价

$$\mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B) \quad \underset{\langle -,\,-\rangle}{\overset{((-)_A,(-)_B)}{\rightleftarrows}} \quad \mathsf{Thin}(\Gamma, A) \times \mathsf{Thin}(\Gamma, B) \quad .$$

证明。给定 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma,\ A \,\&\, B)$，记 $\iota_A^S \colon S_A \hookrightarrow S$ 和 $\iota_B^S \colon S_B \hookrightarrow S$ 为 Gpd 的典范包含。存在一个典范 $\gamma_S \colon S \to \langle S_A, S_B\rangle$，其定义为下式的逆

$$S_A + S_B \xrightarrow{[\iota_A^S, \iota_B^S]} S$$

并且它诱导出薄跨度的一个强态射 $\gamma_S \colon S \Rightarrow \langle S_A,\ S_B\rangle \in \mathsf{Thin}(\Gamma,\ A \& B)$。利用 PCC 可以证明 γ 的自然性，从而得到一个自然同构

$$\gamma \colon \mathrm{id}_{\mathbf{Thin}(\Gamma, A\&B)} \Rightarrow \langle (-)_A, (-)_B\rangle.$$

给定 $(R,\ T) \in \mathsf{Thin}(\Gamma,\ A) \times \mathsf{Thin}(\Gamma,\ B)$，我们有一个典范同构 $\delta^A_{R,\ T} \colon \langle R,\ T\rangle_A \to R$，其定义为下述对象之间的拉回同构

$$\begin{array}{ccc} \langle R,T\rangle_A & \xrightarrow{\iota_A^{\langle R,T\rangle}} & \langle R,T\rangle \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{A+B}^{\langle R,T\rangle}} \\ A & \xrightarrow[\bar{l}]{} & A+B \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\bar{l}} & \langle R,T\rangle \\ {\scriptstyle \partial_A^R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{A+B}^{\langle R,T\rangle}} \\ A & \xrightarrow[\bar{l}]{} & A+B \end{array} .$$

它扩展为一个态射 $\delta^A_{R,\ T} \colon \langle R,\ T\rangle_A \to R \in \mathsf{Thin}(\Gamma,\ A)$。类似地，我们定义一个态射 $\delta^B_{R,\ T} \colon \langle R,\ T\rangle_B \to T \in \mathsf{Thin}(\Gamma, B)$。记 $\delta_{R,\ T} = \langle \delta^A_{R,\ T},\ \delta^B_{R,\ T}\rangle$，相对于 R 和 T 的 $\delta_{R,\ T}$ 的自然性可以利用 PCC 加以验证，从而得到一个自然同构

$$\begin{gathered} \delta \colon (\langle (-)_{(1)}, (-)_{(2)}\rangle_A, \langle (-)_{(1)}, (-)_{(2)}\rangle_B) \\ \Rightarrow \\ \mathrm{id}_{\mathbf{Thin}(\Gamma,A)\times\mathbf{Thin}(\Gamma,B)}. \end{gathered}$$

因此我们得到一个等价，并验证它是伴随的。我们检查第一条之字形方程，即

$$(\delta((-)_A, (-)_B)) \circ (((-)_A, (-)_B)\gamma) = \mathrm{id}_{((-)_A,(-)_B)}. \quad (4)$$

为了验证上述等式，由对称性可知，只需检查它在 $\mathsf{Thin}(\Gamma, A)$ 上的投影。令 $S \in \mathsf{Thin}(\Gamma, A \,\&\, B)$。式 (4) 左侧在 S 处的分量为

$$S_A \xrightarrow{(\gamma_S)_A} (\langle S_A, S_B\rangle)_A \xrightarrow{\delta^A_{\langle S_A, S_B\rangle}} S_A.$$

展开 γ 和 δ 的定义后，我们计算得

$$S_A \xrightarrow{(\delta^A_{\langle S_A,S_B\rangle})^{-1}} (S_A + S_B)_A \xrightarrow{((\gamma_S)_A)^{-1}} S_A \xrightarrow{\iota_A^S} S$$

恰好是 ι_A^S，它恰好是一个单态射，因此 $((\gamma_S)_A)^{-1} \circ (\delta^A_{\langle S_A,\ S_B\rangle})^{-1} = \mathrm{id}_{S_A}$，这在逆的意义下正是我们要证明的内容。因此，第一条之字形方程成立。

现在我们来验证第二条之字形方程，即

$$(\langle -,-\rangle\delta)\circ(\gamma\langle -,-\rangle)=\mathrm{id}_{\langle -,-\rangle}. \tag{5}$$

因此，$(R,T)\in \mathsf{Thin}(\Gamma,A)\times\mathsf{Thin}(\Gamma,B)$。式 (5) 左侧在 (R,T) 处的分量为

$$\langle R,T\rangle \xrightarrow{\gamma_{\langle R,T\rangle}} \langle\langle R,T\rangle_A,\langle R,T\rangle_B\rangle \xrightarrow{\langle\delta^A_{R,T},\delta^B_{R,T}\rangle} \langle R,T\rangle$$

展开 γ 和 δ的定义，我们计算得

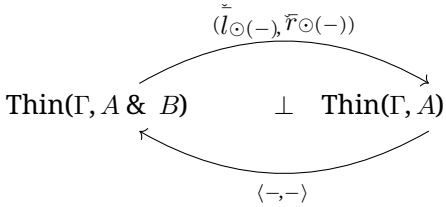
$$R \xrightarrow{\bar{l}} \langle R,T\rangle \xrightarrow{\langle\delta^A_{R,T},\delta^B_{R,T}\rangle^{-1}} \langle\langle R,T\rangle_A,\langle R,T\rangle_B\rangle \xrightarrow{\gamma^{-1}_{\langle R,T\rangle}} \langle R,T\rangle$$

化简为 $R\xrightarrow{\bar{l}}\langle R,T\rangle$，类似地，

$$T \xrightarrow{\bar{r}} \langle R,T\rangle \xrightarrow{\langle\delta^A_{R,T},\delta^B_{R,T}\rangle^{-1}} \langle\langle R,T\rangle_A,\langle R,T\rangle_B\rangle \xrightarrow{\gamma^{-1}_{\langle R,T\rangle}} \langle R,T\rangle$$

化简为 $T\xrightarrow{\bar{r}}\langle R,T\rangle$。由于 $\urcorner$l 和 $\urcorner$r 是联合满射，因此有 $\gamma^{-1}_{\langle R,\ T\rangle}\circ\langle\delta^A_{R,\ T},\delta^B_{R,\ T}\rangle^{-1}=\mathrm{id}_{\langle R,\ T\rangle}$，这在取逆的意义下正是我们所要的结果。因此，第二个之字形恒等式成立。 □

命题 25。给定薄群胚 Γ、A、B，存在一个伴随等价



证明。这是命题 23 和命题 24 的推论。 □

注意，给定 $(R,T)\in\mathsf{Thin}(\Gamma,A)\times\mathsf{Thin}(\Gamma,B)$，与命题 25 的伴随等价相关联的余单位在 (R,T) 处的分量是以下复合：

$$(\check{l}\odot\langle R,T\rangle,\check{r}\odot\langle R,T\rangle)\xrightarrow{\cong}(\langle R,T\rangle_A,\langle R,T\rangle_B)\xrightarrow{\delta}(R,T).$$

现在，我们可以得出命题 6 的证明：

命题 6 的证明。我们有等式 $\mathsf{Thin}_!(\Gamma,A\&B)=\mathsf{Thin}(!\Gamma,A\,\&\,B)$ 以及 $\mathsf{Thin}_!(\Gamma,A)\times\mathsf{Thin}_!(\Gamma,B)=\mathsf{Thin}(!\Gamma,A)\times\mathsf{Thin}(!\Gamma,B)$。此外，很容易看出，在这些识别下，存在一个 $\check{}$函子 $(\mathrm{L}_!\odot_!(-),\mathrm{R}_!\odot_!(-))\cong(l\odot(-),\check{r}\odot(-))$ 的同构。因此，可以调整命题 25 中伴随等价的单位/余单位对，从而得到一个单位/余单位对，证明我们具有陈述中所述的伴随等价。

□

I. 求值伴随

这里我们为命题 7 的证明补充一些细节，说明柯里化运算与求值运算之间存在伴随等价。这个伴随等价将由前文介绍的 Seely 等价导出。

1）Seely 等价的性质：

命题 26。对于群胚$s_{A,B}$ A,B，这些函子族构成一个 2-自然变换

$$s\colon !(-)\times!(-)\Rightarrow !((-)+(-))\colon \mathbf{Gpd}\times\mathbf{Gpd}\to\mathbf{Gpd}.$$

证明。关于 2-胞腔的自然性可通过逐点直接计算得到验证。 □

命题 27。自然变换 s 是双笛卡尔的。

证明。直接运用拉回的逐点刻画和引理 1，即可得到关于 s 的自然性方块。 □

类似地，对于 $\bar{s}$，我们有同类性质：

命题 28。群胚A、B 上的函子族 $\bar{s}_{A,\ B}$ 构成一个 2-自然变换

$$\bar{s}\colon !((-)+(-))\Rightarrow !(-)\times!(-)\colon \mathbf{Gpd}\times\mathbf{Gpd}\to\mathbf{Gpd}.$$

命题 29。自然变换 $\bar{s}$ 是双笛卡尔的。

2）Seely 相容性 2-胞腔：在线性逻辑的一范畴模型中，Seely 同构必须满足等式；而在我们的二范畴背景下，我们只有以下 2-胞腔

$$\begin{array}{ccc}
!!A\times!!B & = & !!A\times!!B\\
\downarrow{\scriptstyle s_{!A,!B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A\times\mu_B}\\
!(!A+!B) & & !A\times!B\\
\downarrow{\scriptstyle ![!(\bar{l}),!(\bar{r})]} & \overset{\mathrm{See}_{A,B}}{\Longrightarrow} & \\
!!(A+B) & & \downarrow{\scriptstyle s_{A,B}}\\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{A+B}} & & \\
!(A+B) & = & !(A+B)
\end{array}$$

我们首先计算两个垂直态射对 $!!A\times!!B$ 的对象的作用。因此，设 $a=((a_{i,j})_{j\in J_i^A})_{i\in I^A}\in!!A$ 以及 $b=((b_{i,j})_{j\in J_i^B})_{i\in I^B}\in!!B$。与左侧垂直态射相关联的映射为

$$\begin{aligned}
&(a,b)\\
\mapsto&(\bar{l}((a_{i,j})_{j\in J_i^A}))_{\varpi_l(i)\in\varpi_l(I^A)}\cup(\bar{r}((b_{i,j})_{j\in J_i^B}))_{\varpi_r(i)\in\varpi_r(I^B)}\\
\mapsto&((\bar{l}(a_{i,j}))_{j\in J_i^A})_{\varpi_l(i)\in\varpi_l(I^A)}\cup((\bar{r}(b_{i,j}))_{j\in J_i^B})_{\varpi_r(i)\in\varpi_r(I^B)}\\
\mapsto&(\bar{l}(a_{i,j}))_{\langle\varpi_l(i),j\rangle\in\sum_{i\in\varpi_l(I^A)}J_i^A}\cup(\bar{r}(b_{i,j}))_{\langle\varpi_r(i),j\rangle\in\sum_{i\in\varpi_r(I^B)}J_i^B}
\end{aligned}$$

与右侧垂直态射相关联的映射为

$$\begin{aligned}
(a,b)&\mapsto((a_{i,j})_{\langle i,j\rangle\in\sum_{i\in I^A}J_i^A},(b_{i,j})_{\langle i,j\rangle\in\sum_{i\in I^B}J_i^B})\\
&\mapsto(\bar{l}(a_{i,j}))_{\varpi_l(\langle i,j\rangle)\in\varpi_l(\sum_{i\in I^A}J_i^A)}\\
&\quad\cup(\bar{l}(b_{i,j}))_{\varpi_r(\langle i,j\rangle)\in\varpi_r(\sum_{i\in I^B}J_i^B)}
\end{aligned}$$

其中，给定 $D\in$ $d_{i\ i\in I}$ $d'_{j\ j\in J}\in D$ $I\cap$Gpd 以 $J=\emptyset$ $d_{i\ i\in I}\cup$ $d'_{j\ j\in J}$ 及 ( )、( )! 和，我们将 ( ) ( ) 写作由 $I\cup J$ 索引的显然族。因此，我们将其定义为（参见$_{A,\ B)\ a,\ b}$ 映射 $(\pi,(\mathrm{id})_{k\in K})$，其中 π 是双射 $K\to K'$，具有

$$K=\textstyle\sum_{i\in\varpi_l(I^A)}J_i^A\cup\sum_{i\in\varpi_r(I^B)}J_i^B$$

and

$$K' = \varpi_l(\sum_{i\in I^A} J_i^A) \cup \varpi_r(\sum_{i\in I^B} J_i^B)$$

使得 π 将 $[\varpi_l(i)\ j] \in K$ 映射到 $\varpi_l([i,j]) \in K'$，并将$[\varpi_r(i)\ j] \in K$ 映射到 $\varpi_r([i,j]) \in K'$。$\mathsf{See}_{A,\ B}$相对于态射 $(a,b) \to (a',b')$ of $!!A \times !!B$的自然性很容易验证。因此，$\mathsf{See}_{A,\ B}$ 确实是 Gpd 的一个 2-胞腔。

此外，我们验证了

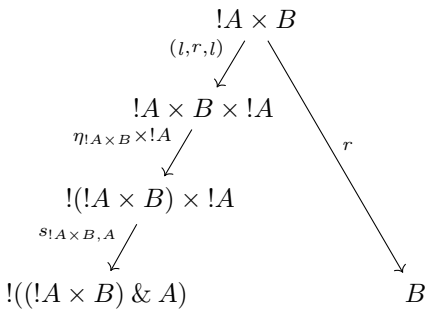
命题 30。2-胞腔族 $\mathsf{See}_{A,\ B}$ 对于 $A, B \in$Gpd 关于函子 $F\colon\ A \to A'$和 $G\colon\ B \to B'$ 的 Gpd 是自然的。换句话说，$\mathsf{See} =(\mathsf{See}_{A,\ B})_{A,\ B\in\mathbf{Gpd}}$ 是一个修正。

证明。对自然性进行逐点直接计算即可。 □

3）求值跨度的性质：给定薄群胚A、B，回顾一下，我们引入了一个跨度

$$\mathbf{ev}_{A,B}\colon (A \Rightarrow B)\ \&\ A \nrightarrow B$$

定义为

$\mathbf{ev}_{A,B}$ = 

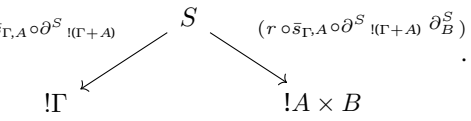
.

我们有

命题 31。我们有 $\mathsf{ev}_{A,\ B} \in$T$^{!((A\Rightarrow B)\&A)\multimap B}$。

证明。通过恰当地运用命题 1 和命题 2，并利用命题 27、η 的双笛卡尔性以及引理 5，得到所需的双拉回。 □

4) 柯里化运算：回顾一下，给定薄群胚 Γ、A、B 和 $S \in$ Thin$_!$（Γ 和 A，B），我们将 Λ（S）定义为如下跨度

$\Lambda(S)$ = 

.

命题 32。给定薄群胚 Γ、A、B 和 $S \in$Thin$(\Gamma\ \&\ A, B)$，我们有 $\Lambda(S) \in$ T$^{!\Gamma\multimap(A\Rightarrow B)}$。

证明。虽然比其他情形更复杂，但这仍依赖命题 1 和命题 2，并利用命题 29 和引理 5 得到所需的中间双拉回。 □

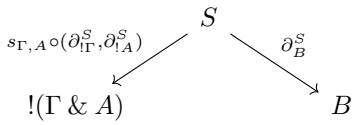
运算 $\Lambda(-)$ 可以按预期的方式扩展到弱态射，并且与极性兼容；此外，我们还有

命题 33. 给定薄群胚 Γ、A、B，运算

$$\Lambda(-)\colon \mathbf{Thin}_!(\Gamma\ \&\ A, B) \to \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \Rightarrow B)$$

是函子性的。

5）反柯里化运算：反过来，我们可以定义一个反柯里化运算。给定 $S \in$ Thin$_!(\Gamma, A \Rightarrow B)$，我们定义 $\bar{\Lambda}(S)$ 为如下跨度

$\bar{\Lambda}(S)$ = 

.

和之前一样，利用类似的方法，我们可以验证

命题 34。给定薄群胚 Γ、A、B 和 $\sigma \in$Thin$_!(\Gamma, A \Rightarrow B)$，我们有 $\Lambda(\sigma) \in$ T$^{!(\Gamma\&A)\multimap B}$。

此外，我们可以按照预期的方式将这一反柯里化运算扩展到弱态射上，并且这一运算与极性相容；此外我们还有

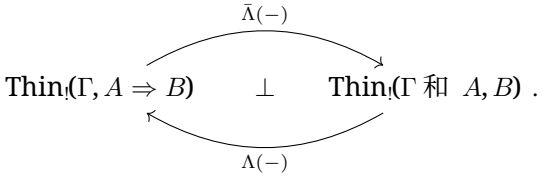
命题 35. 给定薄群胚 Γ、A、B，该运算

$$\bar{\Lambda}(-)\colon \mathbf{Thin}_!(\Gamma, A \Rightarrow B) \to \mathbf{Thin}_!(\Gamma\ \&\ A, B)$$

是函子性的。

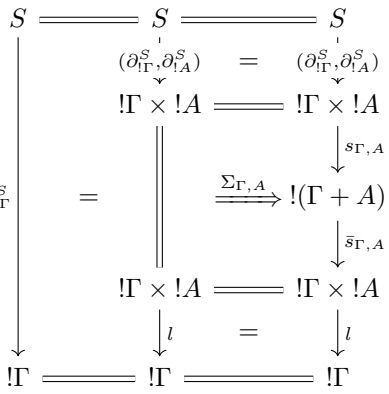
6) 伴随等价：柯里化与反柯里化运算之间存在第一个伴随等价：

命题 36. 存在一个伴随等价

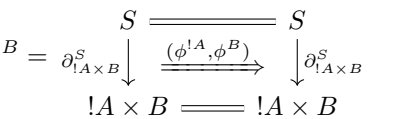


.

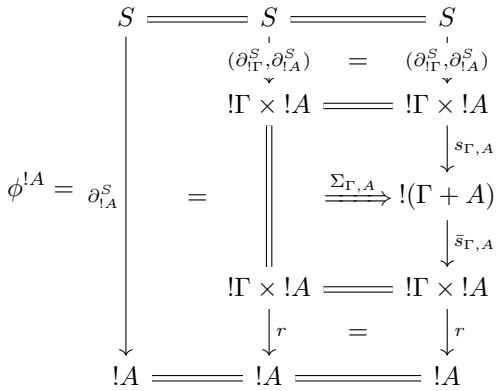
证明。将 $\Lambda(-)$ 和 $\bar{\Lambda}(-)$ 应用于跨度，本质上就是适当地用 $s_{\Gamma,A}$ 和 $\bar{s}_{\Gamma,A}$ 后复合这些跨度的显示映射。见证该伴随等价的单位/余单位对，可以很容易地从见证伴随等价 $s_{\Gamma,A} \dashv \bar{s}_{\Gamma,A}$ 的单位 / 余单位对 $\bar{}(\Sigma_{\Gamma,A}, \Sigma_{\Gamma,A})$ 推导出来。例如，给定 $S \in$ Thin$_!(\Gamma, A \Rightarrow B)$，$\Lambda(-) \dashv \bar{\Lambda}(-)$ 的单位在 S 处的分量是弱态射 (id_S, ϕ)，其

$\phi^{!\Gamma} = \partial^S_{!\Gamma}$ = 

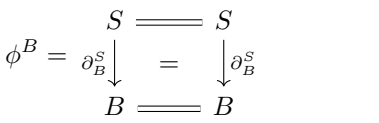
and

$\phi^{!A\times B} = \partial^S_{!A\times B}$ = 

其中



and

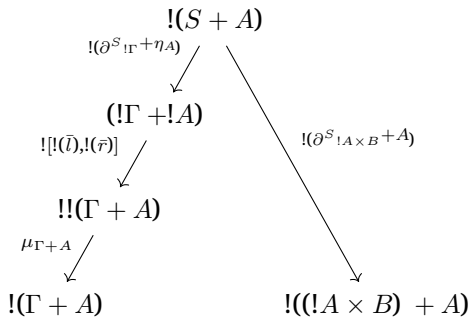


这里我们分别用 ∂_A^S 和 ∂_B^S 表示 $\mathsf{l}\circ\partial^S_{!A\times B}$ 和 $\mathsf{r}\circ\partial^S_{!A\times B}$（$\partial_A^S$ 和 ∂_B^S 的情形也类似）。余单位的定义类似。该单位/余单位对满足锯齿方程这一事实，是由 $(\Sigma_{\Gamma,A},\Sigma_{\Gamma,A})$ 满足相同方程这一事实，以及 2-胞腔的垂直拼接所推出的。□

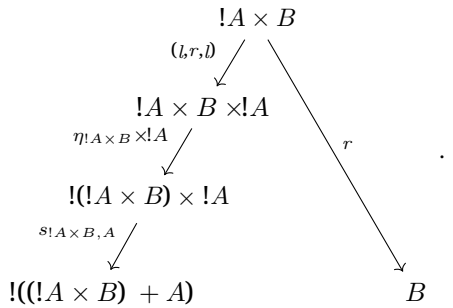
为了得到另一个伴随等价，我们证明非柯里化函子与通过求值进行的非柯里化运算同构：

命题 37。函子 $\mathsf{ev}\odot_!(-\,\&\,A)\colon \mathsf{Thin}_!(\Gamma, A\Rightarrow B)\to \mathsf{Thin}_!(\Gamma\,\&\,A, B)$ 与非柯里化$^{\bar{}}$函子 $\Lambda(-)$ 同构。

证明。令 $S\in\mathsf{Thin}_!(\Gamma, A\Rightarrow B)$。我们计算 $\mathsf{ev}\odot_!(S\&A)$。它是以下跨度的复合



and



我们将该复合的内部拉回计算为图8所示的拉回矩形。因此，除去拉回的一个$^{\bar{}}$典范同构外，$\mathsf{ev}\odot_!(S\,\&\,A)$ 是 $S\in{}^{\bar{}}\mathsf{Thin}_!(\Gamma\,\&\,A, B)$，其中 S 是 S 的支撑，并且

$$\partial^{\bar{S}}_{!(\Gamma+A)} =$$
$$S \xrightarrow{\langle S,\partial^S_{!A}\rangle} S\times !A \xrightarrow{\eta_S\times !A} !S\times !A \xrightarrow{s_{S,A}} !(S+A)$$
$$\xrightarrow{!(\partial^S_{!\Gamma}+\eta_A)} !(!\Gamma+!A) \xrightarrow{![!(\bar{l}),!(\bar{r})]} !!(\Gamma+A) \xrightarrow{\mu_{\Gamma+A}} !(\Gamma+A)$$

and

$$\partial^{\bar{S}}_{\bar{B}} \quad = \quad S \xrightarrow{\partial^S_{!A\times B}} !A\times B \xrightarrow{r} B.$$

$^{\bar{}}$该运算 $S\mapsto S$ 可以证明能够自然地扩展到弱态射，从而得到一个函子$^{\bar{}}(-)\colon \mathsf{Thin}_!(\Gamma, A\Rightarrow B)\to\mathsf{Thin}_!(\Gamma\,\&\,A, B)$，它与 $\mathsf{ev}\odot_!(-\&A)$ 自然同构。因此，我们只需证明 $\bar{}(-)\cong\Lambda(-)$。为此，对于 $S\in\mathsf{Thin}_!(\Gamma, A\Rightarrow B)$，我们定义一个同构 $\theta_S=(\underline{\theta}_S, \theta_S^{!(\Gamma+A)}, \theta_S^B)\colon \bar{S}\Rightarrow\bar{\Lambda}(S)$。我们取 $\underline{\theta}_S=\mathrm{id}_S$ 和 $\theta_S^B=\mathrm{id}_{\partial_B^S}$，并将 $\theta_S^{!(\Gamma+A)}$ 定义为图9中（垂直表示的）2-胞腔。我们直接观察到 $\theta_S^{!(\Gamma+A)}$ 和 θ_S^B 具有适当的极性，因此 $\theta_S\in\mathsf{Thin}_!(\Gamma\,\&\,A, B)$，且它是一个同构。$\theta_S$ 关于 S 的自然性可以通过图表粘合作图验证。因此，θ 定义了一个同构 $(-)\cong\Lambda(-)$，于是我们有

$$\mathbf{ev}\odot_!((-)\,\&\,A)\xRightarrow{\cong}(\bar{-})\xRightarrow{\theta}\bar{\Lambda}(-).$$ □

现在我们可以完成命题 7 的证明：

命题 7 的证明。根据命题 36，柯里化运算与反柯里化运算之间存在伴随等价。根据命题 37，我们可以用 $\mathsf{ev}\odot_!((-)\&A)$ 替换反柯里化运算：通过以预期的方式调整单位和余单位，我们仍然保持伴随等价。 □

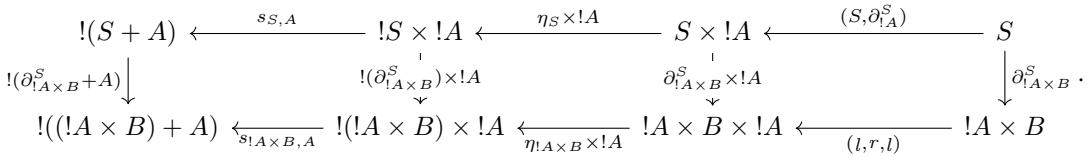


图 8. 两个跨度复合的内部矩形

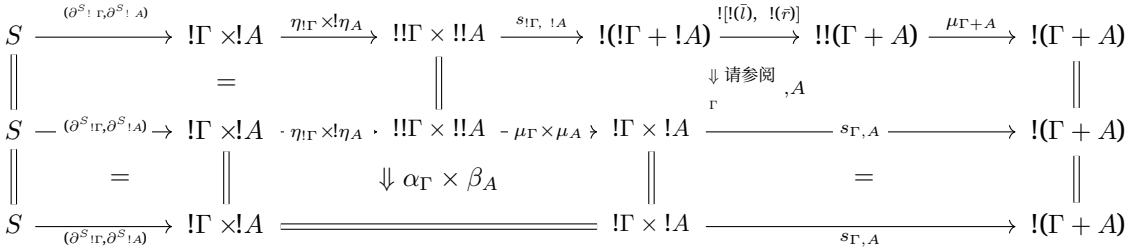


图 9. $\theta_S^{!(\Gamma+A)}$ 2-胞

回忆一下图 3 中 α 和 β 的定义。