过程分解的 produoidal 代数

Matt Earnshaw、James Hefford 和 Mario Román

arXiv:2301.11867v1 [cs.LO] 27 Jan 2023

摘要——**我们引入了任意幺半范畴上的单体上下文正规 produoidal 范畴。正如幺半态射表示一个过程，单体上下文表示一个不完整的过程：它是分解的一部分，可能包含缺失部分。我们用泛性质刻画单体上下文。特别地，对称幺半群上下文与幺半群透镜相一致，并赋予其一种新的泛性质。我们将这一代数结构应用于任意过程理论中的多方交互协议分析。**

1 引言

过程理论（例如随机、部分或线性函数）是计算机科学的基础工具。它们帮助我们以坚实的数学基础来建模系统间的交互。任何包含串行复合和并行复合运算并满足合理公理的过程理论，都构成一个幺半范畴。

幺半范畴用途广泛：可用于描述量子电路 [AC09]，随机过程 [CJ19]，[Fri20],关系查询 [BSS18] 以及非终止过程 [CL02]，以及许多其他应用[CFS16]。

与此同时，幺半范畴有两种直观、可靠且完备的演算：第一种以字符串图 [JS91],表示，第二种则以它们的线性类型理论 [Shu16]表示。字符串图是一种二维语法，其中过程用方框表示，输入和输出则由线连接。对称幺半范畴的类型理论是更专门的箭头 *do* 记法的基础，该记法用于函数式编程语言 [Hug00]，[Pat01],，而在交换单子的 Kleisli 范畴中，它则成为*do* 记法 [Mog91]，[Gui80]。下面我们将展示幺半范畴、它们的字符串图，以及如何使用 do 记法描述协议。

1.1 协议描述

传输控制协议（TCP）是一种面向连接的通信协议。每个连接都以三次握手开始：双方交换消息，以同步彼此的状态。RFC793 将此握手定义为三个步骤：`SYN`、`SYN-ACK`和`ACK` [Pos81]。

客户端通过向服务器发送同步数据包（SYN）来发起通信。该同步数据包包含一个与会话关联的伪随机数，即客户端的初始序列号（CLI）。

服务器确认收到该数据包，并发送一条包含其自身序列号（服务器）以及客户端序列号加一（客户端+1）的消息（ACK）。这两者构成 SYN-ACK 消息。最后，客户端发送一条最终 ACK 消息，其中包含服务器序列号加一，即服务器 + 1。

当协议正常运行时，客户端和服务器最终都会得到这一对值（客户端 + 1,服务器 + 1）。

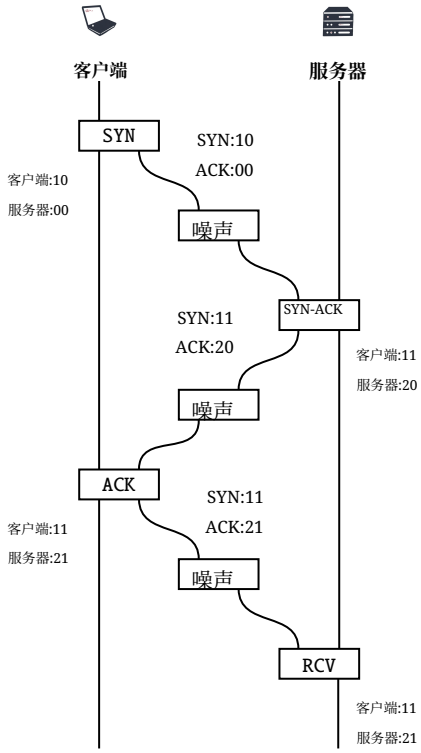


图 1：TCP 三次握手。

传统上，人们通过通信图（图 1）来描述此协议。可以将此图视为一个严谨的数学对象：它是描述某个 态射的字符串图，该态射位于一个幺半范畴中。

```
syn :: 客户端 ~> (客户端, Syn, ACK)
syn(客户端) =do 客户端 <- 随机数
return (客户端, 客户端, 0)
```

图 2：SYN 组件的实现 nt.

协议各组件的实现传统上以伪代码编写。这些伪代码也可以被严肃地视为同一个幺半范畴中的态射表达式，可能还带有额外结构：在本例中，是一个交换的*Freyd* 范畴（图2，见附录第A 节。1 [Mog91]）。也就是说，对称幺半范畴具有两种不同的内部语言，我们可以同时使用这两种语言，以字符串图和伪代码的形式，对协议的传统描述进行形式化解释。

1.2 消息传递的类型

用幺半范畴形式化描述多方协议的最后一步，是实际分离出协议中的各参与方。例如，三方握手可以分裂为客户端、服务器和一个信道。这正是现有幺半范畴文献似乎不足之处：幺半态射分解后得到的各部分不一定本身也是幺半态射（图3给出了图示表示）。我们称这些部分仅仅是幺半上下文。

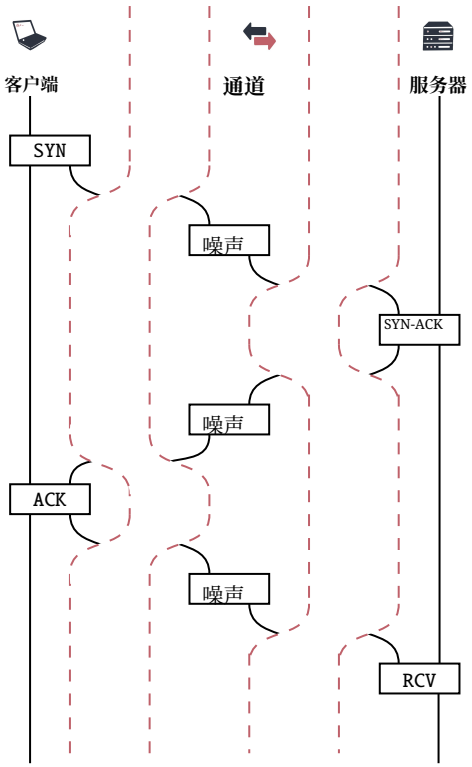


图 3：TCP 三次握手中的各方。

与幺半态射不同，幺半态射只需声明其输入和输出类型，而幺半上下文还需要行为类型 [PS93], [HLV+16]，用于指定沿其边界进行的信息交换的顺序和类型。

幺半上下文可以声明中间的发送 (!A) 和接收 (?A) 类型，并用序列化算子 (◃) 分隔。例如，通道是一个幺半态射，只声明它接收一条输入消息（**Msg**）并产生另一条输出消息；而客户端是一个幺半上下文，它在发送、接收并随后发送 消息的同时转换其内存类型**Client** →**Client**；服务器则在转换其类型**Server** → **Server** 的同时，与客户端相反，依次接收、发送 并接收 消息。

$$\in \mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}\text{Client}\\ \text{Client}\end{smallmatrix}\right);\ !\ \mathbf{Msg} \triangleleft ?\ \mathbf{Msg} \triangleleft !\ \mathbf{Msg} \triangleleft ?$$

$$\in \mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}\text{Server}\\ \text{Server}\end{smallmatrix}\right);\ ?\ \mathbf{Msg} \triangleleft !\ \mathbf{Msg} \triangleleft ?$$

$$\text{噪声} \in \mathbb{C}\ (\mathbf{Msg};\ \mathbf{Msg})\ ;$$

会话类型 [HYC08], 包括发送 （! A）和接收（? A）极化类型在消息传递逻辑中早已十分常见。Cockett 和 Pastro [CP09] 已经提出了消息传递的范畴语义，但这需要超越幺半范畴，进入线性 *Actegory*和 *Polyactegory*。

我们的观点是，或许出人意料的是，幺半范畴已经具备了定义幺半上下文及其发送-接收极化类型所需的代数结构。每个幺半范畴都蕴含着一个带极化类型(!/?) 以及并行/序列算子的上下文通用范畴(⊗/◃)。

1.3 使用上下文进行推理

本文稿介绍了单体上下文和对称单体上下文；并解释了二自然性如何使我们能够借助它们进行推理。正如我们使用字符串图对幺半态射进行推理一样，我们也可以使用幺半上下文，借助不完整的字符串图 [BDSPV15], [Rom21]。

例如，考虑关于 TCP 三次握手的以下事实：客户端无需存储服务器的起始 服务器 编号，因为真实编号一到达就会覆盖它。这个事实只涉及客户端的操作，与服务器和通道无关。我们希望在保留这种模块化的同时对其进行推理，而图4 中的不完整图实现了这一点。

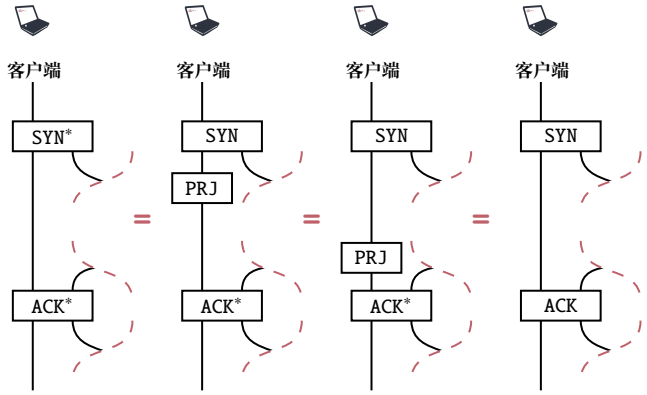


图 4：仅使用客户端进行推理。

这里，我们将 SYN* =SYN ⨟PRJ 定义为与 SYN 过程相同，但仅投影出客户端 CLI 编号。我们还定义了一个新的 ACK*，它忽略服务器 SRV 编号，因此 ACK = PRJ⨟ACK*。这两个方程足以完成我们的推理。

幺半上下文及其不完整图被定义为便于处理的态射元组，例如 (SYN|ACK) 在我们的示例中就是如此；使它们颇具意义的是我们施加在其上的等价关系：该等价关系使得 (SYN ⨟ PRJ|ACK*) 等于 (SYN|PRJ ⨟ ACK*)。 *Dinat-* 对偶性 是我们对这一关系的称呼，我们将看到，它如何从 预函子的代数中规范地产生。

1.4 单体上下文的 *Produoidal* 代数

尽管弦图及其他形式的正式二维语法相当流行，不完整幺半态射的代数却始终晦涩难懂。本手稿阐明了这一代数：我们展示了，幺半态射及其弦图构成 幺半范畴，而幺半上下文及其不完整弦图构成正规 产双幺半群范畴。正规产双幺半群范畴是一种人们知之甚少的范畴结构，我们将为其提供示例。下面分部分说明“正规产双幺半群范畴”的动机。

首先是“双幺半”部分。单体上下文可以顺序复合，也可以并行复合，还可以嵌套在一起以填补缺失的部分。嵌套由范畴复合来刻画，因此我们需要分别为顺序($\triangleleft$) 和并行($\otimes$) 复合提供特定的张量。这正是双幺半范畴所提供的。双幺半范畴是具有两种幺半结构的范畴，例如($\triangleleft$, N) 和($\otimes$, I)。原则上，这两种幺半结构彼此独立，但只要它们共享同一个单位($I \cong N$)，就很适合用来表达过程依赖 [SS22]：它们便成为“正规”。

最后是“产幺半”前缀。我们并非要在幺半结构之上强加这种结构，而是要刻画已经形成的结构态射。两个张量($\triangleleft$, $\otimes$) 在原范畴中不一定存在；用技术术语来说，它们不是可表的或函子性的，而是虚拟的或预函子性的。因此，我们转向 Booker 和 Street 的produoidal 范畴 [BS13]。

所有这些代数不仅存在于幺半上下文中。幺半上下文是这种代数的规范形式；其精确定义由泛性质给出。本文主要结果（定理6.6）的概括是：

> 幺半上下文是关于cofree产幺半范畴的自由正规化幺半范畴。

1.5 相关工作

幺半上下文并非又一种范式的提议，而是对一种广泛存在的范式进行全新的代数形式化。我们认为，幺半上下文的思想在相关文献中反复出现，只是从未被明确且形式化地表述出来。我们的主要贡献是将幺半上下文的代数形式化为一个正规产幺半范畴。

事实上，计算机科学逻辑研讨会最近出现了多项对幺半上下文的隐式应用。Kissinger 和 Uijlen [KU17] 在紧闭幺半范畴中使用带孔的上下文描述高阶量子过程。Ghani、Hedges、Winschel 和 Zahn [GHWZ18] 以笛卡尔幺半范畴中的透镜和不完整过程来描述经济博弈论。Bonchi、Piedeleu、Sobociński 和 Zanasi [BPSZ19]研究了其仿射信号流图幺半范畴中的上下文等价。Di Lavore、de Felice 和 Román[DLdFR22]通过对幺半上下文余代数地迭代，定义了幺半流。

语言理论。受语言理论和乔姆斯基-许岑伯格定理的启发，Melliès 和 Zeilberger[MZ22] 首次提出了多范畴的拼接-轮廓伴随。我们感谢他们的论述，并将其扩展到预幺半群和产幺半的情形。Earnshaw 和 Sobociński [ES22] 利用幺半上下文描述了字符串图形式语言上的一个同余。我们证明了幺半上下文如何从扩展的产幺半拼接-轮廓伴随中产生，从而统一了这两条脉络。

会话类型。会话类型 [Hon93], [HYC08]是通信协议的主要类型形式化工具，并已广泛应用于 π-演算 [SW01]。我们的方法并未设置为涵盖完整会话类型理论 [KPT96]的所有特性。这或许使其在功能上更加通用：对于由幺半范畴表示的任意过程理论，它始终为实现发送（!A）和接收（?A）操作提供一种泛化方法。例如，递归以及内部/外部选择对偶性 [GH99], [PS93]尚未讨论，尽管可以像将它们扩展到幺半范畴中那样，通过迹 [Has97] 和线性分配律 [CS97]来实现。

透镜与不完整图。透镜是一种双向变换 [FGM+07], 可以在任意幺半范畴中表达。最早将幺半范畴中的透镜与其经典数据库对应物[JRW12]区分开来的，是 Pastro 和 Street [PS07], ；他们将透镜视为预幺半范畴的一个例子。不过，直到采用另一种幺半结构 [Ril18] 后，透镜才在近年广受欢迎，并催生了多种应用，不仅用于双向变换 [FGM+07]，也用于函数式编程[PGW17], [CEG+20]、开放博弈 [GHWZ18]、多项式函子 [NS22] 和量子梳 [HC22]。如何将透镜的这一幺半范畴与先前的透镜预幺半范畴联系起来，曾是一个悬而未决的问题；而预幺半结构在应用中也基本遭到忽视。

我们解决了这一问题，证明透镜是一个泛正则对称产幺半范畴（其对称幺半上下文），由此赋予它们一种新颖的代数和一种新颖的泛性质。这也拓展了关于不完整图、梳形图与透镜 [Rom20], [Rom21]。

最后，Nester 等人近期提出了一种用于透镜和消息传递的语法 [Nes23], [BNR22] ，并且透镜本身已应用于协议规约 [VC22]。Spivak [Spi13] 也讨论了多范畴的接线图，后来该图被用于不完整图 [PSV21] ，并与透镜相关 [SSV20]。我们使用的预幺半范畴可以看作具有额外相干性性质的多范畴。从这个意义上说，我们为相对于幺半范畴的通用多范畴 接线图补上了缺失的代数结构。

1.6 贡献

我们的主要贡献是对以下对象给出的原创定义：单体上下文的前-双幺半范畴，其定义在单体上下文之上的单体范-

畴（定义6.1），以及用泛性质对其进行刻画（定理6.6）。

第 2 节介绍了有关预函子、二自然性和预幺半范畴的说明性材料；其余内容均为新的贡献。第 3 节将拼接箭头构造为一个范畴上的共自由预幺半群结构（定理 3.7）。在此基础上，第 4 节将拼接的幺半箭头构造为一个幺半范畴上的共自由产幺半结构（定理 4.9）。第 6 节明确地将幺半上下文的 produoidal 代数构造为自由规范化（命题 6.5）。第 7 节构造了幺半群透镜的对称 produoidal 代数（命题 7.2），对其进行了泛刻画（定理 7.3），并给出了发送/接收类型（！/？）的一种解释（命题 7.6）。第 5 节引入了一个新的自由规范化过程（定理 5.3 和 5.4），将其作为 produoidal 范畴上的幂等单子，并在第 6 节和第 7 节中加以使用。

2 预函子与虚结构

预函子描述了由一个范畴的输入和输出类型所索引的过程族。预函子为复合、二自然性和虚结构提供了规范的概念。这些概念不仅是规范的，而且借助余端演算 [Lor21]也易于推理。

定义 2.1。一个预函子 $P\colon \mathbb{B}_0\times\ldots\times\mathbb{B}_m \nrightarrow \mathbb{A}_0\times\ldots\times\mathbb{A}_n$是一个函子 $P\colon \mathbb{A}_0^{op}\ldots\times\mathbb{A}_n^{op}\times\mathbb{B}_0\times\ldots\times\mathbb{B}_m\to$ **集合**。

就我们的目的而言，一个预函子 $P(A_0,\ldots,A_n;B_0,\ldots,B_m)$ 是由逆变输入 A_0、…、A_n 和协变输出 B_0、…、B_m所索引的过程族。该预函子带有分别作用于 $\mathbb{A}_0$、…、$\mathbb{A}_n$ 以及 $\mathbb{B}_0$、…、$\mathbb{B}_m$ 中态射的、联合函子的左作用（$\succ_0$、…、$\succ_m$）和右作用（$\prec_0$、…、$\prec_n$） [Bén00], [Lor21]。[1]

2.1 二自然性

复合预函子是微妙的：相同的过程可能由不同的过程对复合而成，因此，我们需要施加一种严谨的等价关系。幸运的是，预函子自带一种规范的二自然等价，恰好能够实现这一点。

设想我们尝试连接两个不同的过程：$p\in P(A_0,\ldots,A_n;B_0,\ldots,B_m)$，以及 $q\in Q(C_0,\ldots,C_k;D_0,\ldots,D_h)$；并且有某个态射 $f\colon B_i\to C_j$，将 p 的第 i 个输出端口映射到 q 的第 j 个输入端口。我们将这一连接操作记作 $(_i|_j)$。请注意，我们可以通过两种不同的方式连接它们：

- 我们可以使用 f 更改第一个过程的输出$p\prec_i f$，然后再将二者连接起来，$(p\prec_i f)\ {}_i|_j\ q$；
- 并且我们可以使用 f 来更改第二个过程的输入 $f\succ_j q$，然后再将两者连接起来，$p\ {}_i|_j(f\succ_j q)$。

这些是不同的描述，由两个不同的组成部分构成。然而，它们本质上描述的是同一个过程：它们二自然相等 [DLdFR22]。事实上，预函子被赋予了一个规范的二自然等价 [Bén00], [Lor21]，它恰好将这两个描述等同起来。预函子及其元素因此在二自然等价下复合。

定义 2.2（二自然等价）。考虑两个预函子 $P\colon \mathbb{B}_0\times\ldots\times\mathbb{B}_m \nrightarrow \mathbb{A}_0\times\ldots\times\mathbb{A}_n$和 $Q\colon \mathbb{C}_0\times\ldots\times\mathbb{C}_k \nrightarrow \mathbb{D}_0\times\ldots\times\mathbb{D}_h$，满足 $\mathbb{B}_i=\mathbb{C}_j$；并令$\mathbf{S}^{i,j}_{P,,Q}(A;C)$为集合

$$\sum_{X\in\mathbb{B}_i} P(A_0\ldots A_n;B_0\ldots X\ldots B_m)\times Q(C_0\ldots X\ldots C_k;D_0\ldots D_h).$$

二自然等价（~）是集合$\mathbf{S}^{i,j}_{P,,Q}(A;C)$上满足（$p\prec_i f\ {}_i|_j\ q$）~（$p\ {}_i|_j\ f\succ_j q$）的最小等价关系。余端定义为将该余积按二自然性取商所得的对象，即$\mathbf{S}^{i,j}_{P,,Q}(A;C)/(\sim)$，并记作积分。

$$\int^{X\in\mathbb{C}} P(A_0\ldots A_n;B_0\ldots X\ldots B_m)\times Q(C_0\ldots X\ldots C_k;D_0\ldots D_h).$$

定义 2.3（预函子复合）。考虑两个预函子 $P\colon \mathbb{B}_0\times\ldots\times\mathbb{B}_m \nrightarrow \mathbb{A}_0\times\ldots\times\mathbb{A}_n$ 以及 $Q\colon \mathbb{C}_0\times\ldots\times\mathbb{C}_k \nrightarrow \mathbb{D}_0\times\ldots\times\mathbb{D}_h$，使得 $\mathbb{B}_i=\mathbb{C}_j$；它们沿端口 复合 连接$i$ 和 j 是一个预函子；我们通过标记这一连接将其记为

$$P(A_0\ldots A_n;B_0\ldots\bullet_x\ldots B_n)\diamond Q(C_0\ldots\bullet_x\ldots C_k;D_0\ldots D_h),$$

其定义为两个预函子乘积（按公共变量索引）的余积，并对 二自然等价取商，

$$\int^{X\in\mathbb{C}} P(A_0\ldots A_n;B_0\ldots X\ldots B_m)\times Q(C_0\ldots X\ldots C_k;D_0\ldots D_h).$$

注 2.4（可表性）。每个函子 $F\colon \mathbb{A}\to B$ 都会产生两个不同的 预函子：其可表的预函子 $\mathbb{A}(F\bullet,\bullet)\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$，以及其余可表的 预函子$\mathbb{A}(\bullet,F\bullet)\colon \mathbb{A}\nrightarrow\mathbb{B}$。如果一个预函子以这种方式产生，我们就称其为 可表的或 余可表的 。在这种解释下，函子是恰好可表的 预函子 。这表明，我们可以将基于函子的结构（例如 幺半范畴）用 预函子来重新构造。

我们在引言中论证了幺半范畴的重要性：它们是按顺序和并行方式组合过程、合并与分裂资源的代数。然而，有些理论只能处理分裂，而不一定是完整的过程理论：也就是说，我们或许能够讨论分裂，却无法讨论合并。这类“单侧的幺半范畴”是预幺半群范畴。

……之间的区别幺半范畴 与预幺半范畴 在于，张量不再是函子，而是预函子。[2] 换句话说，张量不再是可表的 ——这种结构称为虚拟的，如虚拟双范畴 和虚拟双幺半 范畴 [CS10], [Shu17]。

[1]当输入/输出唯一时，我们直接使用(</>)，无需使用下标。有关预函子的更多详细信息，请参见附录第B 节。

[2]更技术性地说，幺半范畴是范畴与函子所构成的幺半双范畴中的伪幺半群；而预幺半群范畴则是范畴与预函子所构成的幺半双范畴中的伪幺半群。

2.2 预幺半范畴

预幺半范畴是相干分解的代数。范畴 $\mathbb{C}$ 包含态射集合 $\mathbb{C}(X;Y)$。同理，预幺半范畴 $\mathbb{V}$ 包含分解方式集合 $\mathbb{V}(X;Y_0 \triangleleft Y_1)$、态射 $\mathbb{V}(X;Y)$ 和单位 $\mathbb{V}(X;N)$，其中 N 是虚拟张量单位。分解方式 $\mathbb{V}(X;Y_0 \triangleleft Y_1)$ 表示一种将类型为 X 的对象分解为类型为 Y_0 和 Y_1 的对象的方法。态射 $\mathbb{V}(X;Y)$ 与任何范畴中的态射一样，是从 X 到 Y 的变换。单位 $\mathbb{V}(X;N)$ 是类型为 X 的原子部分。

这些分解必须是相容的。例如，设想我们想将 X 分裂为 Y_0、Y_1 和 Y_2。先将 X 分裂为 Y_0 和某个对象（$\bullet$），再将该对象分裂为 Y_1 和 Y_2，其做法应当与将 X 分裂为某个对象（$\bullet$）和 Y_2，再将该对象分裂为 Y_0 和 Y_1 的做法在本质上相同。形式上，我们所说的是，

$$\mathbb{V}(X;Y_0 \triangleleft \bullet) \diamond \mathbb{V}(\bullet;Y_1 \triangleleft Y_2) \cong \mathbb{V}(X;\bullet \triangleleft Y_2) \diamond \mathbb{V}(\bullet;Y_0 \triangleleft Y_1),$$

实际上，我们只需将 $\mathbb{V}(X;Y_0 \triangleleft Y_1 \triangleleft Y_2)$ 记作这类分解的集合。

定义 2.5 (预幺半范畴)。一个预幺半范畴是一个范畴 $\mathbb{V}(\bullet;\bullet)$，配备了预函子

$$\mathbb{V}(\bullet;\bullet \triangleleft \bullet)\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V} \nrightarrow \mathbb{V}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet;N)\colon 1 \nrightarrow \mathbb{V}.$$

等价地说，这些是函子

$$\mathbb{V}(\bullet;\bullet \triangleleft \bullet)\colon \mathbb{V}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbf{Set}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet;N)\colon \mathbb{V}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

此外，预幺半范畴还必须配备以下自然同构，

$$\mathbb{V}(X;\bullet \triangleleft Y_2) \diamond \mathbb{V}(\bullet;Y_0 \triangleleft Y_1) \cong \mathbb{V}(X;\bullet \triangleleft Y_2) \diamond \mathbb{V}(\bullet;Y_0 \triangleleft Y_1),$$
$$\mathbb{V}(X;\bullet \triangleleft Y) \diamond \mathbb{V}(\bullet;N) \cong \mathbb{V}(X;Y),$$
$$\mathbb{V}(X;Y \triangleleft \bullet) \diamond \mathbb{V}(\bullet;N) \cong \mathbb{V}(X;Y),$$

分别称为 α、λ、ρ，并要求它们满足五边形相干方程和三角形相干方程，$\alpha \fatsemi \alpha = (\alpha \diamond 1) \fatsemi \alpha \fatsemi (1 \diamond \alpha)$，以及 $(\rho \diamond 1) = \alpha \fatsemi (\lambda \diamond 1)$。

定义 2.6 (预幺半函子)。设 $\mathbb{V}$ 和 $\mathbb{W}$ 是预幺半范畴。一个预幺半函子 $F\colon \mathbb{V}(\bullet,\bullet) \to \mathbb{W}(\bullet,\bullet)$ 是两个范畴之间的函子，并配有以下自然变换：

$$F_{\triangleleft}\colon \mathbb{V}(A;B \triangleleft C) \to \mathbb{W}(FA;FB \triangleleft FC), \text{ and}$$
$$F_N\colon \mathbb{V}(A;N) \to \mathbb{W}(FA;N),$$

它们满足 $\lambda \fatsemi F_{\mathrm{map}} = (F_{\triangleleft} \times F_N) \fatsemi \lambda$，$\rho \fatsemi F_{\mathrm{map}} = (F_{\triangleleft} \times F_N) \fatsemi \rho$，以及 $\alpha \fatsemi (F_{\triangleleft} \times F_{\triangleleft}) \fatsemi i = (F_{\triangleleft} \times F_{\triangleleft}) \fatsemi i \fatsemi \alpha$。我们用 **Promon** 表示预幺半范畴及预幺半群函子所构成的范畴。

备注2.7（预幺半群相容性）。与幺半范畴一样，五边形方程和三角形方程意味着，由相干同构写出的每个形式方程都成立。这意味着我们可以写出 $\mathbb{V}(\bullet;\bullet \triangleleft \bullet \triangleleft \bullet)$，而无需指定我们描述的是结合子的哪一侧。备注2.8（多范畴）。读者可能更熟悉不一定具有相干性的分解代数：多范畴。每个预幺半范畴 $\mathbb{V}$ 都会诱导出一个余-多范畴，其态射由下列集合中的元素给出 $\mathbb{V}(\bullet;\bullet \triangleleft {}^{n}\!\ldots\!\ldots \triangleleft \bullet)$。类似地，$\mathbb{V}^{\mathrm{op}}$ 是一个余-预幺半范畴，因而也诱导出一个多范畴。这些是（余-）多范畴的特殊类型；它们是相干的，因此每个 n-到-1 态射都可以以任意可能的形状分解为 2-到-1 态射和 0-到-1 态射；此外，这种分解在二自然性意义下唯一。附录B.2 详细说明了这种关系。

下一节将研究如何一致地分解范畴的态射。范畴是一种用于串行复合的代数结构：它们包含一个“串接”运算符 $(\fatsemi)$ 以及一个单位元 id。我们将介绍一种利用预幺半范畴来分解串行复合的代数。

3 顺序上下文

假设一个态射可分解如下：

$$f_0 \fatsemi g_0 \fatsemi h \fatsemi g_1 \fatsemi f_1 \fatsemi k \fatsemi f_2.$$

我们可以说，这个态射来自上下文 $f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2$，其左侧填入上下文 $g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1$，然后填入 h，最后在其右侧补上态射 k。图5 展示了这一分解。

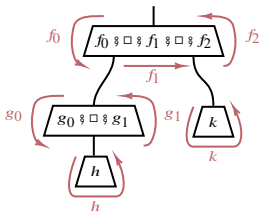


图 5：$f_0 \fatsemi g_0 \fatsemi h \fatsemi g_1 \fatsemi f_1 \fatsemi k \fatsemi f_2$ 的分解。

上下文以树状结构进行复合，并通过对该树进行轮廓化来提取由此产生的态射。本节介绍上下文和分解的代数。随后我们证明，它们其实是一体两面：即范畴伴随的两面。

3.1 预单体范畴的轮廓

任何预幺半范畴都会自由生成另一个范畴，即它的轮廓。这可以理解为跟踪该预幺半范畴所描述的分解过程的范畴。从几何观点来看，这一构造尤其优美：它之所以得名，是因为可以沿着分解形状的轮廓进行构造。

定义 3.1（轮廓）。设轮廓是预幺半范畴 $\mathbb{V}$，它是一个范畴 $C\mathbb{V}$，对于每个对象 X^L，都有两个对象：X^R（左手）和 $X \in \mathbb{V}_{\mathrm{obj}}$（右手）；其态射则是由轮廓化预幺半范畴的分解所产生的那些态射。

具体而言，它由以下数据自由呈示：*(i)* 一个态射 $a_0 \in C\mathbb{V}(A^L;A^R)$，对于每个单位 $a \in \mathbb{V}(A;N)$；*(ii)* 一对态射 $b_0 \in C\mathbb{V}(B^L;X^L)$，$b_1 \in C\mathbb{V}(X^R;B^R)$，对于每个

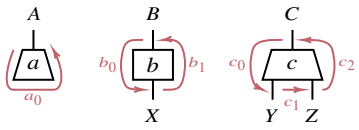


图 6：预幺半群的轮廓。

态射 $b \in \mathbb{V}(B;\ X)$；以及 (iii) 三个态射组成的三元组$c_0 \in \mathbb{CV}(C^L;\ Y^L)$、$c_1 \in \mathbb{CV}(Y^R;\ Z^L)$、$c_2 \in \mathbb{CV}(Z^R;\ C^R)$，对于每个分裂 $c \in \mathbb{V}(C;\ Y \triangleleft Z)$，见图 6。

对于每个等式 $\alpha(a\,|\,b) = (c\,|\,d)$，我们施加方程$a_0 = c_0 ⨟ d_0$；$a_1 ⨟ b_0 = d_1$以及 $b_1 = d_2 ⨟ c_1$；$a_2 ⨟ b_2 = c_2$。对于每个等式 $\rho(a\,|\,b) = c = \lambda(d\,|\,e)$，我们施加 $a_0 = c_0 = d_0 ⨟ e_0 ⨟ d_1$和 $a_1 ⨟ b_0 ⨟ a_2 = c_1 = d_2$。从图形上看，这些关系如图7所示。

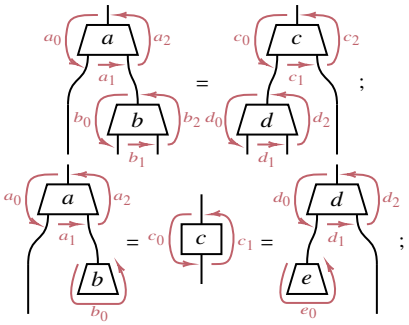


图 7： α、ρ和 λ 在 $\mathbb{V}$ 中产生的轮廓之间的方程。

命题 3.2。 轮廓给出一个函子 C： **Promon** → **Cat**。

证明。 见附录，命题C.1。 □

备注 3.3。 多范畴的轮廓 最初由 Melliès 和 Zeilberger 引入 [MZ22]。定义 3.1以及后续定理 3.7都紧随他们的工作；不过，我们引入的预幺半版本由于额外的相干性（备注 2.8），涉及的方程更少。

3.2 拼接箭头的预幺半范畴

我们描述了一个用于追踪在给定预幺半范畴中进行分解这一过程的范畴。然而，我们希望反过来：给定一个范畴，描述该范畴中分解的预幺半范畴 是什么？本小节为轮廓构造找到了一个右伴随：即拼接箭头预幺半范畴。拼接箭头已被用于描述句法分析中的上下文 [MZ22]。

定义 3.4 (拼接箭头)。 设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴。由预幺半范畴构成的拼接箭头， $\mathcal{S}\mathbb{C}$，其对象为 $\mathbb{C}$中对象对。它使用以下预函子来定义态射、分解方式 和 单位。

$$\mathcal{S}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) = \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(Y,B);$$
$$\mathcal{S}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}) = \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(Y;X') \times \mathbb{C}(Y';B);$$
$$\mathcal{S}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N) = \mathbb{C}(A;B).$$

换言之，态射是一对态射 $f\colon\ A \to X$以及 $g\colon\ Y \to B$。分解方式是由态射组成的三元组 $f\colon\ A \to X$， $g\colon\ Y \to X'$以及$h\colon\ Y' \to B$。单位只是态射 $f\colon\ A \to B$。我们使用以下记号表示

$$\begin{array}{lll} \text{morphisms,} & f ⨟ \square ⨟ g & \in \mathcal{S}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right); \\ \text{splits,} & f ⨟ \square ⨟ g ⨟ \square ⨟ h & \in \mathcal{S}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right); \\ \text{and units,} & f & \in \mathcal{S}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N\right). \end{array}$$

预幺半范畴的预函子作用、结合律和单位性都以一种直接的方式通过填充孔来定义。例如，

$$(f ⨟ \square ⨟ g ⨟ \square ⨟ h) \prec_1 (u ⨟ \square ⨟ v) = (f ⨟ u ⨟ \square ⨟ v ⨟ g ⨟ \square ⨟ h),$$
$$(f ⨟ \square ⨟ g ⨟ \square ⨟ h) \prec_2 (u ⨟ \square ⨟ v) = (f ⨟ \square ⨟ g ⨟ u ⨟ \square ⨟ v ⨟ h).$$

详情请参阅附录第C 节。

命题3.5。拼接箭头构成一个预幺半范畴，其具有相应的分解方式、单位和适当的相干态射。

Proof. See Appendix, Proposition C.2. □

因此，我们可以讨论具有任意多个孔的拼接箭头：例如，三路分裂可以由一个分解方式在任一位置填入另一个分解方式而得到。例如，

$$\langle f_0 ⨟ \square ⨟ f_1 ⨟ \square ⨟ f_2 ⨟ \square ⨟ f_3 \rangle$$

可以用两种不同的方式书写，

$$\langle f_0 ⨟ \square ⨟ f_2 ⨟ \square ⨟ f_3 \rangle \prec_1 \langle id ⨟ \square ⨟ f_1 ⨟ \square ⨟ id \rangle \quad \text{or}$$
$$\langle f_0 ⨟ \square ⨟ f_1 ⨟ \square ⨟ f_3 \rangle \prec_2 \langle id ⨟ \square ⨟ f_2 ⨟ \square ⨟ id \rangle.$$

命题3.6。拼接给出一个函子$\mathcal{S}$: **Cat** → **Promon**。

Proof. See Appendix, Proposition C.6. □

定理 3.7。范畴与预幺半范畴之间存在一个伴随，其中预幺半群的轮廓是左伴随，而拼接范畴是右伴随。

Proof. See Appendix, Theorem C.7. □

拼接箭头可针对任意范畴计算，包括幺半范畴。不过，我们期望幺半范畴的拼接箭头具有更丰富的代数结构。下一节将讨论这种额外结构。

4 并行—串行上下文

幺半范畴是用于顺序复合与并行复合的代数结构：除了通常的顺序运算（⨟）和恒等态射（id）外，它们还包含一个作用于态射的“张量化”运算（⊗）。

假设一个幺半态射可分解如下：

$$f_0 ⨟ (g \otimes (h ⨟ (k \otimes (l_0 ⨟ l_1)))) ⨟ f_1.$$

我们可以说，这个态射是通过用一个张量将 f_0 和 f_1 之间的所有内容分开而得到的。也就是说，它来自上下文 $f_0 ⨟ (\square \otimes \square) ⨟ f_1$。我们用一个 g 填充了该上下文的第一个孔，然后将第二部分分裂为 $h ⨟ (\square \otimes \square) ⨟ \mathrm{id}$。最后，我们用 k 填充第一部分，而第二部分则通过用 l_0、id_I 和 l_1 填充使其保持断开。

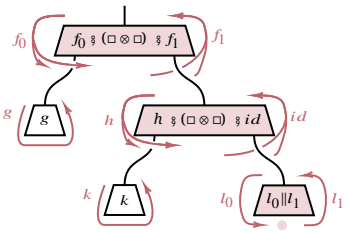


图8： $f_0 \fatsemi (g \otimes (h \fatsemi (k \otimes (l_0 \fatsemi l_1))))$ 的分解 $\fatsemi f_1$。

本节研究双幺半范畴中态射的分解，方式与我们之前研究范畴中态射的分解相同。我们提出一种用于分解顺序复合与并行复合的代数结构：*produoidal* 范畴。

4.1 Produoidal 范畴

Produoidal 范畴最初由 Booker 和 Street[BS13], 定义，为顺序分解与并行分解的交互提供了一种代数结构。produoidal 范畴$\mathbb{V}$不仅包含态射、 $\mathbb{V}(X;\, Y)$、串行拆分、$\mathbb{V}(X;\, Y_0 \triangleleft Y_1)$以及串行单位 $\mathbb{V}(X;\, N)$，如同预幺半范畴一样；还包含并行拆分 $\mathbb{V}(X; Y_0 \otimes Y_1)$和并行单位 $\mathbb{V}(X; I)$。

注 4.1（嵌套虚结构）。 嵌套函子结构（例如 $(\triangleleft)$ 和 $(\otimes)$）的记法很直接：我们不假思索地使用诸如 $(X_1 \otimes Y_1) \triangleleft (X_2 \otimes Y_2)$ 这样的表达式。嵌套虚结构（$(\triangleleft)$ 和 $(\otimes)$）则更为微妙：对于每一对对象 X 和 Y，定义 $\mathbb{V}(\bullet;\, X \otimes Y)$和 $\mathbb{V}(\bullet;\, X \triangleleft Y)$，并不能单独定义诸如$\mathbb{V}(\bullet;\, (X_1 \otimes Y_1) \triangleleft (X_2 \otimes Y_2))$这样的表达式的含义。回顾一下，在虚情形中， $X_1 \triangleleft Y_1$和 $X_1 \otimes Y_1$本身并不是对象：它们只是预函子 $\mathbb{V}(\bullet;\, X_1 \triangleleft Y_1)$ 和 $\mathbb{V}(\bullet;\, X_1 \otimes Y_1)$ 的名称。

相反，当我们写作 $\mathbb{V}(\bullet; (X_1 \otimes Y_1) \triangleleft (X_2 \otimes Y_2))$ 时，我们形式上指的是 $\mathbb{V}(\bullet; \bullet_1 \triangleleft \bullet_2) \diamond \mathbb{V}(\bullet_1;\, X_1 \otimes Y_1) \diamond \mathbb{V}(\bullet_2;\, X_2 \otimes Y_2)$。按照约定，在本文中，嵌套虚结构表示预函子的复合。

定义4.2 (produoidal 范畴)。 一个*produoidal* 范畴是一个范畴 $\mathbb{V}$ 配备了两种 预幺半群结构，

$$\mathbb{V}(\bullet; \bullet \otimes \bullet) \colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \nrightarrow \mathbb{V}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet; I) \colon 1 \nrightarrow \mathbb{V},$$
$$\mathbb{V}(\bullet; \bullet \triangleleft \bullet) \colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \nrightarrow \mathbb{V}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet; N) \colon 1 \nrightarrow \mathbb{V},$$

使得其中一种松弛地分配于另一种之上。也就是说，它配备了以下自然的松弛器，

$$\psi_2 \colon \mathbb{V}(\bullet; (X \triangleleft Y) \otimes (Z \triangleleft W)) \to \mathbb{V}(\bullet; (X \otimes Z) \triangleleft (Y \otimes W)),$$
$$\psi_0 \colon \mathbb{V}(\bullet; I) \to \mathbb{V}(\bullet; I \triangleleft I),$$
$$\varphi_2 \colon \mathbb{V}(\bullet; N \otimes N) \to \mathbb{V}(\bullet; N),$$
$$\varphi_0 \colon \mathbb{V}(\bullet; I) \to \mathbb{V}(\bullet; N).$$

松弛器连同单位子和结合子，必须满足相干性条件（见附录，定义I.5）。

定义 4.3 (产幺半函子)。 设 $\mathbb{V}_{\otimes,I,\triangleleft,N}$ 和$\mathbb{W}_{\oslash,J,\blacktriangleleft,M}$ 为 produoidal 范畴。一个产幺半函子 F 是两个范畴 $F\colon \mathbb{V}(\bullet,\bullet) \to \mathbb{W}(\bullet,\bullet)$ 之间的函子，并附带自然变换

$$F_\otimes : \mathbb{V}(A; B \otimes C) \to \mathbb{W}(FA; FB \oslash FC),$$
$$F_I : \mathbb{V}(A; I) \to \mathbb{W}(FA; J),$$
$$F_\triangleleft : \mathbb{V}(A; B \triangleleft C) \to \mathbb{W}(FA; FB \blacktriangleleft FC), \text{ and}$$
$$F_N : \mathbb{V}(A; N) \to \mathbb{W}(FA; M),$$

为每种 预幺半群结构保持相干性同构，并保持松弛器。记 **Produo** 为以下范畴：produoidal 范畴及其produoidal 函子。

4.2 产幺半范畴的幺半轮廓

任何 产幺半范畴 都会自由生成一个幺半范畴，即其幺半轮廓。同样地，这可以解释为一个幺半范畴，用于追踪由 产幺半范畴所描述的并行分解与顺序分解过程。该构造再次遵循一种简洁的几何模式：我们沿着分解的形状进行追踪，而现在同时考虑并行维度和顺序维度。

定义 4.4 （幺半轮廓）。 一个 轮廓 的产幺半范畴 $\mathbb{B}$是幺半范畴 $\mathbb{B}$，对于每个对象 X^L（左手）和 X^R（右手）各有两个对象；并且其态射是由对预幺半范畴的顺序分解和并行分解进行轮廓化 所产生的那些态射。

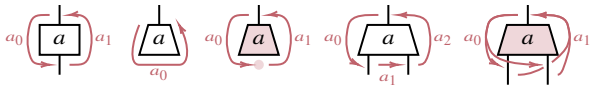


图 9：轮廓幺半范畴的生成元。

具体而言，它由以下内容自由呈示： （i）对于每个态射 $a \in \mathbb{B}(A;\, X)$， 一对态射$a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\, A^L;\, X^L)$、 $a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R;\, A^R)$；（ii）对于每个顺序单位 $a \in \mathbb{C}(A;\, N)$， 一个态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(A^L;\, A^R)$； （iii）对于每个并行单位 $a \in \mathbb{B}(A;\, I)$， 一对态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(A^L;\, I)$ 和 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(I;\, A^R)$； （iv）对于每个顺序拆分 $a \in \mathbb{B}(A;\, X \triangleleft Y)$， 三个态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\, A^L;\, X^L)$、 $a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R;\, Y^L)$、 $a_2 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(Y^R;\, A^R)$； 以及（v）对于每个并行拆分 $a \in \mathbb{B}(\, A;\, X \otimes Y)$， 一对态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\, A^L;\, X^L \otimes Y^L)$ 和 $a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R \otimes Y^R;\, A^R)$， 见图 9。

我们施加与范畴轮廓中由 $\triangleleft$ 结构的结合子和单位子所导出的相同方程；此外，我们还施加以下由 $\otimes$ 结构导出的新方程：对于每一次结合律的应用，$\alpha(a \fatsemi_1 b) = c \fatsemi_2 d$，我们施加方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes d_0)$ 以及$(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = (\mathrm{id} \otimes d_1) \fatsemi c_1$。 这些方程可由图10推出。

对于每一次单位性的应用， $\lambda(a \fatsemi_1 b) = c = \rho(d \fatsemi_2 e)$，我们施加方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 = d_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes e_0)$以及$(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = c_1 = (\mathrm{id} \otimes e_1) \fatsemi d_1$。 这些方程可由图11推出。

对于松弛子的每次应用， $\psi_2(a \mid b \mid c) = (d \mid e \mid f)$，我们施加方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes c_0) = d_0 \fatsemi e_0$，中间的

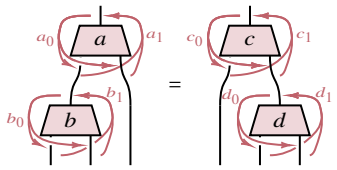


图 10： $\otimes$ 结合子所产生的轮廓方程。

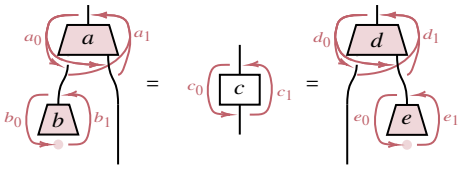


图 11： $\otimes$ 单位子所产生的方程。

方程 $b_1 \otimes c_1 = e_1 \fatsemi d_1 \fatsemi f_0$，以及$(b_2 \otimes c_2) \fatsemi a_1 = f_1 \fatsemi d_2$。这些见图 12。最后，我们对其余松弛器施加类似的方程，详见定义D.1。

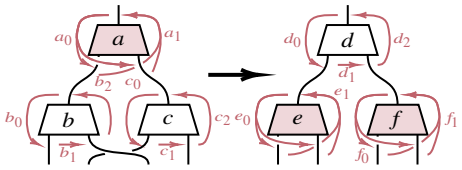


图 12：松弛子 ψ_2 所产生的方程。

命题 4.5。 幺半轮廓扩展为一个函子 $\mathcal{D}$ ： **Produo** $\to$**Mon**。

证明。 参见附录，命题D.2。 □

4.3 拼接幺半箭的产幺半范畴

再一次，我们希望反过来思考：给定一个幺半范畴，那么什么是产幺半范畴，能够跟踪该幺半范畴中态射的分解？本小节为幺半轮廓构造寻找一个右伴随：即由拼接的幺半箭头构成的产幺半范畴。

定义 4.6. 设 $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ 是一个幺半范畴。由拼接的幺半箭头构成的产幺半范畴 $\mathcal{T}\mathbb{C}$的对象是 $\mathbb{C}$中的对象对。它使用以下预函子来定义序列分裂、并行分裂、串行单位、并行单位和态射。

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(Y,B);\\
\mathcal{T}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}) &= \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(Y;X') \times \mathbb{C}(Y';B);\\
\mathcal{T}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}) &= \mathbb{C}(A;X \otimes X') \times \mathbb{C}(Y \otimes Y';B);\\
\mathcal{T}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N) &= \mathbb{C}(A;B);\\
\mathcal{T}\mathbb{C}(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};I) &= \mathbb{C}(A;I) \times \mathbb{C}(I;B).
\end{aligned}$$

换言之，态射是态射对 $f\colon A \to X$ 和$g\colon Y \to B$。 序列分裂是态射三元组 $f\colon A \to X$,$g\colon Y \to X'$和$h : Y' \to B$。 并行分裂是态射对$f\colon A \to X \otimes X'$和 $g\colon Y \otimes Y' \to B$。 串行单位是态射 $f\colon A \to B$。 并行单位是态射对 $f\colon A \to I$ 和$g\colon I \to B$。总之，我们有

morphisms,	$f \fatsemi \square \fatsemi g$	$\in \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right)$;
sequential splits,	$f \fatsemi \square \fatsemi g \fatsemi \square \fatsemi h$	$\in \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right)$;
parallel splits,	$f \fatsemi (\square \otimes \square) \fatsemi h$	$\in \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right)$;
sequential units,	f	$\in \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N\right)$.
and parallel units,	$f \parallel g$	$\in \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};I\right)$.

最后，松弛器将间隙之间两种不同的连接合并为一个。例如，最后一个松弛器将并行的孔序列

$$f_0 \fatsemi ((h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2) \otimes (k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2)) \fatsemi f_1$$

变为并行孔的序列，

$$f_0 \fatsemi (h_0 \otimes k_0) \fatsemi (\square \otimes \square) \fatsemi (h_1 \otimes k_1) \fatsemi (\square \otimes \square) \fatsemi (h_2 \otimes k_2) \fatsemi f_1.$$

详情请见附录第 D.2 节。

命题 4.7. 拼接的幺半箭头构成一个产幺半范畴，其配备了串行分裂、并行分裂和单位，以及恰当的相干态射和松弛器。

Proof. See Appendix, Proposition D.3. □

命题 4.8. 拼接的幺半箭头延拓为函子$\mathcal{T}$： **Mon** $\to$ **Produo**。

Proof. See Appendix, Proposition D.8. □

如同范畴情形，拼接的幺半箭头与幺半轮廓再次构成一个伴随。该伴随将拼接的幺半箭头刻画为非余自由构造。

定理 4.9. 存在一个伴随，介于幺半范畴与*produoidal* 范畴之间，其中幺半轮廓是左伴随，而*produoidal* 拼接范畴是右伴随。

证明。 参见附录定理 D.9。 □

4.4 可表示的并行结构

一个produoidal 范畴有两个张量，原则上二者都不可表示。然而，我们刚构造的范畴上的余自由 produoidal 范畴碰巧也具有一个可表示张量，$(\otimes)$。拼接的幺半箭头构成一个幺半范畴。

命题 4.10。 并行分解方式和并行单位 的拼接的幺单箭头是可表的 预函子。具体而言，

$\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) \cong \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X \otimes X'\\Y \otimes Y'\end{smallmatrix}\right)$, *and* $\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};I\right) \cong \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}I\\I\end{smallmatrix}\right)$.

事实上，根据定义，这些集合是相等的。然而，有充分理由在 produoidal 范畴的完全一般性下进行研究：每个 produoidal 范畴，无论是否可表，都有一个与之关联的正规 produoidal 范畴，它同样可能是可表的，也可能不是。正规化是一种将两个张量混合起来的规范过程，$(\otimes)$ 和 $(\triangleleft)$；这将使我们能够在第 *6*节中书写 幺半上下文，它们构成一个没有可表示结构的 produoidal 范畴。

注 4.11。 这意味着 $\mathcal{T}\mathbb{C}$ 具有虚拟双幺半群范畴 [Shu17] 或幺半群多范畴的结构，该结构由 Aguiar、Haim 和 López Franco [AHLF18] 定义为多范畴的笛卡尔单体 2-范畴中的伪幺半群。

5 间章：正规化

Produoidal 范畴似乎包含了过多结构：当然，我们希望以两种不同的方式分解事物，分别是顺序地 ($\triangleleft$) 和并行地 ($\otimes$)；但这并不一定意味着我们要分别追踪两种不同类型的单位：并行单位 (I) 和顺序单位 (N)。分解代数的原子组成部分应当相同，无须关心它们是串行复合的原子还是并行复合的原子。

幸运的是，存在一种抽象过程，它从任意一个 produoidal 范畴出发，构造一个新的 produoidal 范畴，在其中两个单位被视为相同。这个过程称为正规化，所得的 produoidal 范畴称为正规。

定义 5.1 (正规 produoidal 范畴)。 一个正规 *produoidal* 范畴是一个produoidal 范畴，其松弛子$\varphi_0\colon \mathbb{V}(\bullet; I) \to \mathbb{V}(\bullet; N)$ 是一个同构。

正规产双幺半群范畴构成一个范畴**nProduo**，其间的态射为 produoidal 函子，且配有全忠实遗忘函子 $\mathcal{U}\colon$ **nProduo** $\to$ **Produo**。

定理 5.2. 设 $\mathbb{V}_{\otimes,\ I,\ \triangleleft,\ N}$ 是一个 *produoidal* 范畴。预函子 $\mathcal{N}\mathbb{V}(\bullet; \bullet) = \mathbb{V}(\bullet;\ N \otimes \bullet \otimes N)$ 构成一个 预单子。此外，这个预单子的 *Kleisli* 范畴是一个正规 *produoidal* 范畴，具有以下分裂和单位。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B) &= \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N);\\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B \otimes_N C) &= \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N \otimes C \otimes N);\\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B \triangleleft_N C) &= \mathbb{V}(A; (N \otimes B \otimes N) \triangleleft (N \otimes C \otimes N));\\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;I_N) &= \mathbb{V}(A;N);\\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;N_N) &= \mathbb{V}(A;N).
\end{aligned}$$

证明。 参见附录，定理 E.1。 □

Garner 和 López Franco 提出了双幺半范畴的正规化过程 [GF16]；我们的贡献是给出了其产幺半对应物。这种新的产幺半正规化比双幺半范畴的正规化性质更好 [GF16]：后者并非总是存在，但我们证明产幺半正规化确实存在。事实上，我们证明产幺半正规化构成一个幂等单子。这一改进在技术上的原因是，原方法要求某些余等化子在 $\mathbb{V}$中存在；产幺半正规化则使用 **集合**中的余等化子。附录 E.3 概述了这两种过程之间的关系。

定理 5.3。 正规化扩展为一个幂等单子。

证明。 参见附录，定理E.3。 □

定理 5.4 (自由正规产幺半)。 正规化在 *produoidal* 范畴与正规产双幺半群范畴中，$\mathcal{N}\colon$ **Produo** $\rightleftharpoons$ **nProduo**$\colon \mathcal{U}$。也就是说，$\mathcal{N}\mathbb{V}$ 是基于 $\mathbb{V}$的自由 *produoidal* 范畴。

证明。 参见附录，定理E.5。 □

在前一节 4中，我们构造了 拼接的幺半箭头 所构成的 produoidal 范畴，该范畴区分了态射与在幺半单位中带有孔的态射。这是因为后者的孔将该态射分解为两部分。正规化将二者等同起来；它把这两部分缝合起来。在第 6 节中，我们明确构造了 幺半上下文，即 拼接的幺半箭头 的正规化。

5.1 对称正规化

正规化是一种适用于任何produoidal 范畴的通用过程，平行拆分($\otimes$) 是否对称并不重要。然而，当 $\otimes$ 恰好具有对称性时，我们还可以应用一种更为专门的正规化过程。

定义 5.5 (对称 produoidal 范畴)。 一个对称 *produoidal* 范畴是一个produoidal 范畴 $\mathbb{V}_{\triangleleft,\ N,\ \otimes,\ I}$并配备有一个自然同构 $\sigma\colon \mathbb{V}(A;\ B \otimes C) \cong \mathbb{V}(A;\ C \otimes B)$，满足对称性和六边形方程。

定理 5.6。 设 $\mathbb{V}_{\otimes、\ I、\ \triangleleft、\ N}$ 是一个 对称产幺半 范畴。预函子 $\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(\bullet;\ \bullet) = \mathbb{V}(\bullet;\ N \otimes \bullet)$ 构成一个预单子。此外，该 预单子的 *Kleisli* 范畴是一个正规 对称产幺半 范畴，具有以下分裂方式和单位。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B) &= \mathbb{V}(A; N \otimes B);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B \otimes_N C) &= \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes C);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B \triangleleft_N C) &= \mathbb{V}(A; (N \otimes B) \triangleleft (N \otimes C));\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;I_N) &= \mathbb{V}(A;N);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;N_N) &= \mathbb{V}(A;N).
\end{aligned}$$

证明。 参见附录，定理E.6。 □

定理 5.7。 正规化确定了 对称产幺半与正规对称产幺半范畴之间的伴随，$\mathcal{N}_\sigma\colon$ **SymProduo** $\rightleftharpoons$ **nSymProduo**$\colon \mathcal{U}$。也就是说，$\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 是自由的对称产幺半范畴，在 $\mathbb{V}$之上。

证明。 参见附录，定理E.11。 □

6 幺半上下文：通过正规化混合 $\triangleleft$ 和 $\otimes$

幺半上下文 形式化了幺半范畴中不完整态射的概念。幺半上下文范畴具有丰富的代数结构：我们仍然可以顺序和并行地复合上下文，同时还能够使用另一个幺半上下文来填充一个上下文。或许令人惊讶的是，幺半上下文范畴甚至不是幺半范畴。

我们从预函子结构的角度阐释这一表面上的矛盾：该范畴并非幺半范畴，但确实具有两个预幺半群结构，分别精确地表示顺序复合与并行复合。这些结构构成一个正规

产幺半范畴。事实上，我们证明它是产幺半范畴拼接的幺半箭头的正规化。

本节将明确构造正规 produoidal 范畴，其对象为幺半上下文。

6.1 幺半群上下文范畴

一个单体上下文，$\mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right)$表示一个从$A$ 到 B 的过程，其中的孔允许容纳一个从 X 到 Y的过程。从这个意义上说，幺半上下文类似于拼接的幺半箭头。与拼接的幺半箭头不同的是，幺半上下文允许在孔的左右两侧进行通信。

定义 6.1 (单体上下文)。设 $(\mathbb{C},\ \otimes,\ I)$ 是一个幺半范畴。幺半上下文是下列预函子中的元素，

$$\mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) = \mathbb{C}(A;\bullet_1 \otimes X \otimes \bullet_2) \diamond \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y \otimes \bullet_2; B).$$

换言之，一个从 A 到 B的带孔从 X 到 Y的单体上下文，由对象对 $M,\ N \in \mathbb{C}_{\text{obj}}$ 以及态射对 $f \in \mathbb{C}(A;\ M \otimes X \otimes N)$ 和 $g \in \mathbb{C}(M \otimes Y \otimes N;\ B)$ 构成的等价类，其中按照 M 和 N (图13)的二自然性取商。我们将单体上下文记作

$$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \in \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right).$$

在此记法中，二自然性明确意味着

$$\begin{aligned}&(f \fatsemi (m \otimes \mathrm{id}_X \otimes n) \fatsemi (\mathrm{id}_W \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_H) \fatsemi g) \quad =\\ &(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (m \otimes \mathrm{id}_Y \otimes n) \fatsemi g).\end{aligned}$$

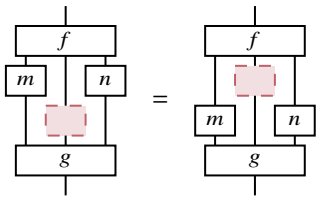


图 13：单体上下文的二自然性。

命题 6.2。 幺半上下文构成一个范畴。

证明。 我们按以下公式定义 单体上下文 的复合（见图 29，iii）。

$$\begin{aligned}&(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (h \fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi k) \quad =\\ &f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes h \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes M'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes N'})\\ &\quad \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes k \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g\end{aligned}$$

对于每一对对象，我们将恒等态射 单体上下文 定义为 $\mathrm{id}_A \fatsemi \blacksquare \fatsemi \mathrm{id}_B$（见图 29，ii）。我们在附录命题中验证此复合满足结合律和幺元性F.3。 □

注记 6.3。 即使我们引入 $(\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id})$ 作为一种启发性的记号，我们仍然可以明确地写作 $(g \otimes \blacksquare \otimes h)$，这是因为二自然性，

$$(g \otimes \mathrm{id} \otimes h) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (g \otimes \mathrm{id} \otimes h).$$

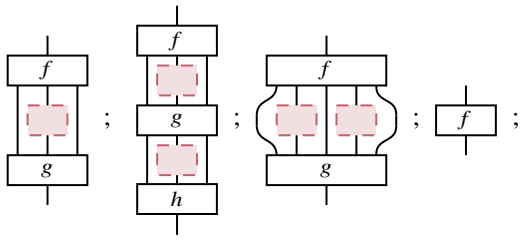


图 14：态射、顺序分解与并行分裂，以及拼接单体箭头产幺半范畴的单位。

6.2 单体上下文的正规 *produoidal* 代数

让我们为幺半上下文赋予其标准的 pro-双幺半结构。

定义 6.4。 单体上下文的范畴，$\mathcal{M}\mathbb{C}$，其对象是 $\mathbb{C}$ 的对象对。我们使用以下预函子 来定义串行拆分、并行拆分、单位和态射。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet_1 \otimes X \otimes \bullet_2) \diamond \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y \otimes \bullet_2; B);\\ \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X \triangleleft X'\\Y\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet_1 \otimes X \otimes \bullet_2) \diamond\\ &\quad \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y \otimes \bullet_2; \bullet_3 \otimes X' \otimes \bullet_4) \diamond\\ &\quad \mathbb{C}(\bullet_3 \otimes Y' \otimes \bullet_4; B);\\ \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X \otimes X'\\Y\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet_1 \otimes X \otimes \bullet_2 \otimes X' \otimes \bullet_3) \diamond\\ &\quad \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y \otimes \bullet_2 \otimes Y' \otimes \bullet_3; B);\\ \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N\right) &= \mathbb{C}(A;B).\end{aligned}$$

换句话说，串行拆分是态射三元组$f\colon A \to M \otimes X \otimes N$，$g\colon M \otimes Y \otimes N \to M' \otimes X' \otimes N'$和 $\mathrm{h}\colon M' \otimes Y' \otimes N' \to B$，并按$M, M', N, N'$的二自然性取商。并行拆分是态射对 $f\colon A \to M \otimes X \otimes N \otimes X' \otimes O$和 $g\colon M \otimes Y \otimes N \otimes Y' \otimes O \to B$，并按 M, N, O的二自然性取商。单位只是态射$f\colon A \to B$。总而言之，我们有

morphisms,	$f \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g$
sequential splits,	$f \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h;$
parallel splits,	$f \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g;$
sequential units,	$f.$

二自然性关于序列分裂和并行分裂展示于附录图30 和 31。

命题 6.5。幺半群上下文范畴构成一个正规的产幺半范畴，其单位、序列分裂和并行分裂亦包含在内。

Proof. See Appendix, Proposition F.4. □

定理 6.6。 幺半上下文 是范畴上余自由产幺半范畴 的自由正规化。换言之，幺半上下文 是以下内容的正规化：拼接的幺半箭头，$\mathcal{NT}\,\mathbb{C} \cong \mathcal{M}\mathbb{C}$。

Proof. See Appendix, Theorem F.12. □

7 幺半群透镜

幺半群透镜 是对称的幺半上下文。同样，幺半群透镜范畴具有丰富的代数结构；而且，这些结构大多只以预函子的形式虚拟地存在。不过在这种情况下，幺半群张量确实存在：不同于幺半上下文，幺半群透镜也构成一个幺半范畴。

这或许就是幺半群透镜近年来日益流行的原因 [Ril18]，，其应用包括决策理论 [GHWZ18]，监督学习 [CGG+22]、[FJ19]，最值得注意的是函数式数据访问 [Kme12]、[PGW17]，[BG18]，[CEG+20]。透镜的预幺半群结构一直被忽视；如今，我们首次明确了它与透镜的幺半结构之间的关系，并指出它在这些应用中可能很有用，例如多阶段决策问题或多阶段数据访问器。

本节明确构造了幺半群透镜的产幺半范畴。我们首次通过一个泛性质对其进行描述：它是余自由产幺半范畴的自由对称正规化。

7.1 幺半群透镜范畴

一个幺半群透镜类型为$\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X}_{Y}$表示对称幺半范畴中的一个过程，其中有一个孔，允许从 X 到 Y 的过程。

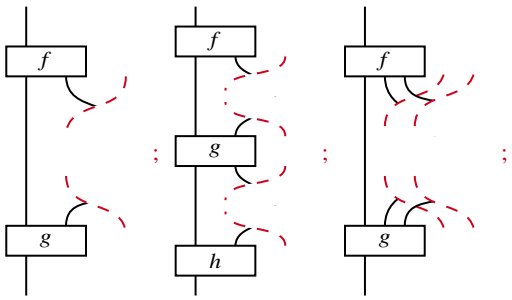


图 15：通用幺半群透镜、顺序拆分与并行拆分。

定义 7.1（幺半群透镜）。设 $(\mathbb{C},\ \otimes,\ I)$ 是一个对称幺半群范畴。 幺半群透镜 是以下预函子的元素：

$$\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X}_{Y} = \mathbb{C}(A; \bullet \otimes X) \diamond \mathbb{C}(\bullet \otimes Y; B).$$

换言之，一个幺半群透镜从 A 到 B，带有一个孔从 X 到 Y，是由一对对象 $M,\ N \in \mathbb{C}_{\text{obj}}$ 以及两对态射 $f \in \mathbb{C}(A;\ M \otimes X)$和 $g \in \mathbb{C}(M \otimes Y,\ B)$构成的等价类，按关于 M 的二自然性取商。我们将幺半群透镜记作

$$f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare) \fatsemi g \in \mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X}_{Y}.$$

命题 7.2。幺半群透镜构成一个正规对称产幺半范畴，其态射、单位、顺序与并行分裂如下所示。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X}_{Y} &= \mathbb{C}(A; \bullet \otimes X) \diamond \mathbb{C}(\bullet \otimes Y; B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{}_{} N &= \mathbb{C}(A; B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X \triangleleft X'}_{Y} &= \mathbb{C}(A; \bullet_1 \otimes X) \diamond \\
&\qquad \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y; \bullet_2 \otimes X') \diamond \mathbb{C}(\bullet_2 \otimes Y'; B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X \otimes X'}_{Y} &= \mathbb{C}(A; \bullet_1 \otimes X \otimes X') \diamond \mathbb{C}(\bullet_1 \otimes Y \otimes Y'; B).
\end{aligned}$$

证明。 见附录，命题 G.1。 □

定理 7.3。 幺半群透镜是幺半范畴上的余自由 *produoidal* 范畴的自由对称规范化。

Proof. See Appendix, Theorem G.9. □

备注 7.4（可表示的并行结构）。 幺半群透镜的并行拆分结构是可表示的，

$$\mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X}_{Y} \otimes \mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X'}_{Y'} = \mathcal{L}\mathbb{C}\binom{A}{B}{}^{X \otimes X'}_{Y \otimes Y'}.$$

对称幺半群范畴上的透镜已知是幺半的 [Ril18]，[Hed17]，但为何非对称透镜中不存在类似结构，仍未得到解释。注意到对称透镜和非对称透镜实际上都是 预幺半群，便可解决这一矛盾，即使只有对称光学提供可表示张量。

备注 7.5（透镜的会话记法）。 我们将记作 $!A = \binom{A}{I}$ 和 $?B = \binom{I}{B}$ 具有双幺半单位作为其对象之一的 透镜 produoidal 范畴的对象。这些记法足以表示所有对象，因为 $!A \otimes ?B = \binom{A}{B}$；此外，它们在定义上满足以下性质。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}(\bullet; ?A \triangleleft ?B) \cong \mathbb{C}(\bullet; ?A \otimes ?B); \quad !(A \otimes B) = !A \otimes !B;\\
&\mathbb{C}(\bullet; !A \triangleleft !B) \cong \mathbb{C}(\bullet; !A \otimes !B); \quad ?(A \otimes B) = ?A \otimes ?B;\\
&\mathbb{C}(\bullet; !A \triangleleft ?B) \cong \mathbb{C}(\bullet; !A \otimes ?B).
\end{aligned}$$

命题 7.6。 设 $(\mathbb{C},\ \otimes,\ I)$ 为一个对称 幺半范畴。存在幺半函子 $(!)\colon\ \mathbb{C} \to \mathcal{L}\mathbb{C}$ 和$(?)\colon\ \mathbb{C}^{op} \to \mathcal{L}\mathbb{C}$。

Proof. See Appendix, Proposition G.7. □

7.2 协议分析

回到我们的运行示例（图1）。现在我们可以声明，客户端和服务器具有以下类型，表示它们进行通信的顺序：

$$\begin{aligned}
&\in \mathcal{L}\mathbb{C}\binom{\text{Client}}{\text{Client}}{}^{!\text{Msg} \triangleleft ?\text{Msg} \triangleleft !\text{Msg}}_{};\\
&\in \mathcal{L}\mathbb{C}\binom{\text{Server}}{\text{Server}}{}^{?\text{Msg} \triangleleft !\text{Msg} \triangleleft ?\text{Msg}}_{}.
\end{aligned}$$

此外，我们可以使用双幺半群代数将它们组合起来。具体来说，对客户端和服务器进行张量化，我们得到以下余域类型，

$$(!\text{Msg} \triangleleft ?\text{Msg} \triangleleft !\text{Msg}) \otimes (?\text{Msg} \triangleleft !\text{Msg} \triangleleft ?\text{Msg}).$$

然后，我们应用松弛器来混合输入和输出，得到

$$(!\mathrm{Msg} \otimes ?\mathrm{Msg}) \lhd (?\mathrm{Msg} \otimes !\mathrm{Msg}) \lhd (!\mathrm{Msg} \otimes ?\mathrm{Msg}),$$

然后我们最终应用单位子，用噪声信道填补通信孔。

$$\psi_2 \left(\text{} \otimes \text{} \right) <^3_\lambda \mathtt{NOISE}^3 \in \mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{Client}\otimes\mathrm{Server}\\ \mathrm{Client}\otimes\mathrm{Server}\end{smallmatrix}\right).$$

最终，我们得到协议的单一态射：客户端 ⊗服务器 → 客户端⊗服务器。在我们用于编程的任意范畴中都是如此。假设采用有限随机映射范畴，这个单一态射表示协议可能结果的分布。最后，借助 二自然性，我们可以对协议中彼此独立的部分进行推理。

命题 7.7. 设 ( ) = (S id⊗■)⨟ACK⨟(id⊗■))。图 *1* 中的等式是幺半群透镜的二自然性的推论。

证明。 我们认出图 1 中的图表示了以下方程中的元素。

$$\begin{aligned}
&\mathtt{SYN} \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) \fatsemi \mathtt{ACK} \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) &&= \\
&\mathtt{SYN}^* \fatsemi (\mathtt{PRJ} \otimes \mathrm{id}) \fatsemi \blacksquare \fatsemi \mathtt{ACK} \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) &&= \\
&\mathtt{SYN}^* \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) \fatsemi (\mathtt{PRJ} \otimes \mathrm{id}) \fatsemi \mathtt{ACK} \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) &&= \\
&\mathtt{SYN}^* \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare) \fatsemi \mathtt{ACK}^* \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare).
\end{aligned}$$

与在完备态射中应用交换律 的方式相同，我们对 PRJ 应用了二自然性。□

7.3 笛卡尔透镜

我们一直在完全一般性的框架下开展研究，但笛卡尔透镜对于博弈论[GHWZ18] 和函数式编程 [Kme12], [PGW17]的应用尤其重要。我们介绍其新构造的产幺半结构。

命题 7.8 (笛卡尔透镜)。 设 $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$ 是一个笛卡尔幺半范畴。其透镜的产幺半范畴由以下预函子给出。

$$\begin{aligned}
\mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}A;X\\B;Y\end{smallmatrix}\right) &\cong \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(AY;B),\\
\mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}A;X \lhd X'\\B;Y\end{smallmatrix}\right) &\cong \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(AY;X') \times \mathbb{C}(AYY';B),\\
\mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}A;X \otimes X'\\B;Y\end{smallmatrix}\right) &\cong \mathbb{C}(A;XX') \times \mathbb{C}(AYY';B),\\
\mathcal{LC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right) &\cong \mathbb{C}(A;B).
\end{aligned}$$

证明。 见附录，命题G.8。 □

8 结论

幺半上下文是不完整过程的代数，通常是透镜的推广 [Ril18]和拼接箭头[MZ22]。正如 π-演算允许抽象计算模型具有输入/输出通道一样，幺半上下文允许在任意过程理论上进行输入/输出通信，例如随机函数或偏函数、量子过程或关系查询。

幺半上下文构成一个正规的产幺半范畴：一种结构高度严密且内容丰富的范畴代数。此外，它们还是定义在一个幺半范畴上的此类代数的泛对象。这对应用而言是个好消息：关于并发的文献中有丰富的框架；但缺乏典范性可能会让我们在选择、设计或比较这些框架时感到困惑，正如 Abramsky [Abr05]所指出的那样。精确刻画一个模型的泛性质，可以回应这一关切。这对范畴论学者而言同样是个好消息：这不仅是一个能够阐明某种相对晦涩结构的例子；它还是一个具有范式意义的此类结构。

我们依赖两个数学思想：幺半和双幺半范畴，以及二自然性和预函子结构。另一方面，幺半范畴可能会被误认为是笛卡尔范畴的玩具版本，但它们表明，弦图能够为我们理解新的基础过程结构提供概念上的起点，同时又能保持对其实现的抽象，而笛卡尔范畴无法做到这一点。双幺半范畴就是这样一个例子：它们开始在计算机科学中不断涌现 [SS22],[HS23],，能够捕捉过程依赖与通信的偏序结构。二自然性、虚结构和预函子即使有时被认为晦涩难懂，也再次表明它们能够以规范的方式捕捉诸如过程复合这样具体的概念。

8.1 后续工作

依赖。Shapiro 和 Spivak [SS22] 证明，具有某些极限的正规对称双幺半范畴还具有依赖范畴的结构：它们不仅能表示由(⊲)和(⊗)生成的依赖结构，还能表示由偏序集介导的任意依赖结构。产幺半范畴的性质更好：极限总是存在，而且我们只要求这些极限在余端下保持不变。

命题 8.1. 设 $\mathbb{V}$ 是正规且 ⊗-对称的 产幺半范畴，其上关于 $\mathbb{V}$ 的余端与有限连通极限可交换。那么， $[\mathbb{V}^{\mathrm{op}}$,**集合**] 是 *Shapiro* 和 *Spivak* 意义下的依赖范畴 *[SS22]*。

Proof sketch. See Appendix, Theorem H.1. □

以这种方式弱化依赖范畴，结合了 Shapiro 和 Spivak 的思想 [SS22] 以及 Hefford 和 Kissinger 的思想 [HK22], ; 后者采用虚对象来处理时空模型中张量积不存在的问题。

语言理论。 Melliès 和 Zeilberger [MZ22] 采用拼接-轮廓伴随的一种多范畴形式（注 3.3），为乔姆斯基-许岑伯格表示定理给出了一个新颖的证明，并将其推广到范畴中的上下文无关语言。我们的产幺半拼接-轮廓伴随（第 4 节）结合近期关于幺半范畴中态射语言的工作 [ES22] ，为乔姆斯基-许岑伯格定理的垂直范畴化开辟了道路，我们计划在未来的工作中进一步阐述这一方向。

并发的字符串图。Nester 等人 [Nes23],[BNR22] 最近引入了一种用前箭头装备描述透镜的替代方式，它具有良好的二维语法 [Mye16] 我们可以将其用于发送/接收类型(**!**/**?**)。我们已经证明，这种结构普遍存在于

对称幺半范畴中。后续工作仍需为带有迭代和内部分支/外部分支选择的并发程序确定一种良好的二维语法。

9 致谢

我们感谢 Pawel Sobocinski、Fosco Loregian、Chad Nester 和 DavidSpivakfordiscussion。

Matt Earnshaw 和 Mario Román 得到了欧洲社会基金爱沙尼亚 IT 学院研究项目的资助（项目编号 2014-2020.4.05.19-0001）。James Hefford 得到了伦敦大学学院和 EPSRC 的资助，[资助编号 EP/L015242/1]。

参考文献

[Abr05] Samson Abramsky。并发的基本结构是什么？我们仍然不知道！载于 Luca Aceto 和 Andrew D. Gordon（编），《代数过程演算论文集》研讨会论文集，APC 25，意大利贝尔蒂诺罗，2005 年 8 月 1—5 日，《理论计算机科学电子笔记》第 162 卷，第 37–41 页。Elsevier，2005 年。[AC09] Samson Abramsky 和 Bob Coecke。范畴量子力学。载于 Kurt Engesser、Dov M. Gabbay 和 Daniel Lehmann（编），《量子逻辑与量子结构手册》，第 261–323 页。Elsevier，阿姆斯特丹，2009 年。[AHLF18] Marcelo Aguiar、Mariana Haim 和 Ignacio López Franco。高阶幺半范畴上的单子。《应用范畴结构》26(3):413–458，2018 年 6 月。[AM10] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Arvind Mahajan。《幺半群函子、物种与 Hopf 代数》，第 29 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2010 年。[BDSPV15] Bruce Bartlett、Christopher L. Douglas、Christopher J. Schommer-Pries 和 Jamie Vicary。模范畴作为三维配边 2-范畴的表示，2015 年。[Bén00] Jean Bénabou。《分配子在实践中》。Thomas Streicher 撰写的讲义，11，2000 年。[BG18] Guillaume Boisseau 和 Jeremy Gibbons。关于 Yoneda，你需要了解什么：预函子光学与 Yoneda 引理（函数式珍珠）。《ACM 编程语言论文集》2(ICFP):1–27，2018 年。[BNR22] Guillaume Boisseau、Chad Nester 和 Mario Román。光学的角落化。第 abs/2205.00842 卷，2022 年。[BPSZ19] Filippo Bonchi、Robin Piedeleu、Pawel Sobocinski 和 Fabio Zanasi。图形仿射代数。载于第 34 届 ACM/IEEE 逻辑与计算机科学研讨会（LICS 2019）论文集，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，2019 年 6 月 24—27 日，第 1–12 页。IEEE，2019 年。[BS13] Thomas Booker 和 Ross Street。双幺半范畴的 Tannaka 对偶性与卷积。《范畴理论及其应用》28(6):166–205，2013 年。[BSS18] Filippo Bonchi、Jens Seeber 和 Pawel Sobocinski。图形合取查询。载于 Dan R. Ghica 和 Achim Jung（编），第 27 届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL 2018）论文集，英国伯明翰，2018 年 9 月 4—7 日，LIPIcs 第 119 卷，第 13:1–13:23 页。Schloss Dagstuhl—莱布尼茨信息学中心，2018 年。[CEG+20] Bryce Clarke、Derek Elkins、Jeremy Gibbons、Fosco Loregiàn、Bartosz Milewski、Emily Pillmore 和 Mario Román。预函子光学：范畴论的最新进展。CoRR，abs/2001.07488，2020 年。[CFS16] Bob Coecke、Tobias Fritz 和 Robert W. Spekkens。资源的数学理论。《信息与计算》250:59–86，2016 年。[CGG+22] Geoffrey S. H. Cruttwell、Bruno Gavranović、Neil Ghani、Paul Wilson 和 Fabio Zanasi。基于梯度学习的范畴基础。载于《欧洲编程研讨会》，第 1–28 页。Springer，瑞士沙姆，2022 年。[CJ19] Kenta Cho 和 Bart Jacobs。通过字符串图进行分解与贝叶斯反演。《计算机科学中的数学结构》，第 1–34 页，2019 年 3 月。[CL02] J. Robin B. Cockett 和 Stephen Lack。限制范畴 I：部分映射范畴。《理论计算机科学》270(1-2):223–259，2002 年。[CP09] J. Robin B. Cockett 和 Craig A. Pastro。消息传递的逻辑。《科学计算程序》，74(8)：498–533，2009年。[CS97] J. Robin B. Cockett 和 Robert A. G. Seely。弱分配范畴。《纯粹与应用代数杂志》，114(2)：133–173，1997年。[CS10] G.S.H. Cruttwell 和 Michael A. Shulman。广义多范畴的统一框架。《范畴理论及其应用》，24：580–655，2010年。[Day70a] Brian Day。《双闭范畴的构造》。博士论文，新南威尔士大学，1970年。[Day70b] Brian Day。关于函子的闭范畴。载于《中西部范畴研讨会报告 IV》，第137卷，第1–38页，柏林、海德堡，1970年。Springer Berlin Heidelberg。[DLdFR22] Elena Di Lavore、Giovanni de Felice 和 Mario Román。用于数据流编程的幺半流。载于第37届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS '22，美国纽约州纽约市，2022年。计算机协会。[ES22] Matthew Earnshaw 和 Pawel Sobociński。正则幺半语言。载于 Stefan Szeider、Robert Ganian 和 Alexandra Silva（编），第47届国际数学计算机科学基础研讨会（MFCS 2022），《Leibniz 国际信息学会议录》（LIPIcs）第241卷，第44:1–44:14页，德国达格施图尔，2022年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。[FGM+07] J. Nathan Foster、Michael B. Greenwald、Jonathan T. Moore、Benjamin C. Pierce 和 Alan Schmitt。双向树变换的组合子：一种解决视图更新问题的语言学方法。《ACM 编程语言与系统汇刊》（TOPLAS），29(3)：17–es，2007年。[FJ19] Brendan Fong 和 Michael Johnson。透镜与学习器。arXiv 预印本 arXiv:1903.03671，2019年。[Fri20] Tobias Fritz。马尔可夫核、条件独立性与充分统计量定理的综合方法。《数学进展》，370：107239，2020年。[GF16] Richard Garner 和 Ignacio López Franco。交换性。《纯粹与应用代数杂志》，220(5)：1707–1751，2016年。[GH99] Simon J. Gay 和 Malcolm Hole。客户端-服务器交互的类型与子类型。载于 S. Doaitse Swierstra（编），《编程语言与系统：第八届欧洲编程研讨会，ESOP'99，作为软件理论与实践欧洲联合会议 ETAPS'99 的一部分举行，荷兰阿姆斯特丹，1999年3月22–28日，论文集》，《计算机科学讲义》第1576卷，第74–90页。Springer，1999年。[GHWZ18] Neil Ghani、Jules Hedges、Viktor Winschel 和 Philipp Zahn。组合博弈论。载于 Anuj Dawar 和 Erich Grädel（编），第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS 2018，英国牛津，2018年7月9–12日，第472–481页。ACM，2018年。[Gui80] René Guitart。张量与机器。《范畴拓扑与微分几何笔记》，21(1)：5–62，1980年。[Has97] Masahito Hasegawa。共享图的模型：let 与 letrec 的范畴语义。博士论文，英国爱丁堡大学，1997年。[HC22] James Hefford 和 Cole Comfort。量子梳的余端光学。arXiv 预印本 arXiv:2205.09027，2022年。[Hed17] Jules Hedges。透镜与开放博弈的相干性。arXiv 预印本 arXiv:1704.02230，2017年。[HK22] James Hefford 和 Aleks Kissinger。时空的前幺半结构与促幺半结构。arXiv 预印本 arXiv.2206 09678，2022年。[HLV+16] Hans Hüttel、Ivan Lanese、Vasco T. Vasconcelos、Luís Caires、Marco Carbone、Pierre-Malo Deniélou、Dimitris Mostrous、Luca Padovani、António Ravara、Emilio Tuosto、Hugo Torres Vieira 和 Gianluigi Zavattaro。会话类型与行为契约基础。《ACM 计算调查》，49(3)：1–36，2016年。[Hon93] Kohei Honda。二元交互的类型。载于 Eike Best（编），《CONCUR '93：第4届国际并发理论会议》，德国希尔德斯海姆，1993年8月23–26日，论文集，《计算机科学讲义》第715卷，第509–523页。Springer，1993年。

[HS23] Chris Heunen 和 Jesse Sigal。双幺半富集的 Freyd 范畴。arXiv 预印本 arXiv:2301.05162，2023年。 [Hug00] John Hughes。将单子推广为态射。《计算机科学程序》，37(1-3)：67–111，2000年。 [HYC08] Kohei Honda、Nobuko Yoshida 和 Marco Carbone。多方异步会话类型。载于 George C. Necula 和 Philip Wadler（编），第35届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会论文集，POPL 2008，2008年1月7–12日，美国加利福尼亚州旧金山，第273–284页。ACM，2008年。 [JRW12] Michael Johnson、Robert Rosebrugh 和 Richard J. Wood。透镜、纤维化与泛译。《计算机科学中的数学结构》，22(1)：25–42，2012年。 [JS91] André Joyal 和 Ross Street。张量演算的几何学，I。《数学进展》，88(1)：55–112，1991年。 [Kme12] Edward Kmett。lens 库，4.16版。Hackage https://hackage. haskell. org/package/lens-4.16，2018年，2012年。 [KPT96] Naoki Kobayashi、Benjamin C. Pierce 和 David N. Turner。线性性与π演算。载于 Hans-Juergen Boehm 和 Guy L. Steele Jr.（编），《POPL' 96 会议记录：第23届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会》，研讨会论文，美国佛罗里达州圣彼得斯堡海滩，1996年1月21–24日，第358–371页。ACM Press，1996年。 [KU17] Aleks Kissinger 和 Sander Uijlen。因果结构的范畴语义。载于第32届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会，LICS 2017，冰岛雷克雅未克，2017年6月20–23日，第1–12页。IEEE Computer Society，2017年。 [Lor21] Fosco Loregian。《（余）端演算》。《伦敦数学学会讲义丛书》。剑桥大学出版社，2021年。 [Mac78] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。《数学研究生教材》。Springer New York，1978年。 [Mog91] Eugenio Moggi。计算概念与单子。《信息与计算》，93(1)：55–92，1991年。 [Mye16] David Jaz Myers。双范畴与装备的字符串图，2016年。 [MZ22] Paul-André Melliès 和 Noam Zeilberger。将句法分析视为提升问题与乔姆斯基-舒岑贝格表示定理。载于 MFPS 2022——第38届编程语义数学基础会议，2022年。 [Nes23] Chad Nester。并发过程历史与资源转换器。《计算机科学中的逻辑方法》，第19卷，第1期，2023年1月。 [NS22] Nelson Niu 和 David I. Spivak。多项式函子：交互的一般理论。准备中，2022年。 [Pat01] Ross Paterson。态射的新记法。载于 Benjamin C. Pierce（编），第六届 ACM SIGPLAN 函数式编程国际会议论文集（ICFP '01），意大利佛罗伦萨，2001年9月3–5日，第229–240页。ACM，2001年。 [PGW17] Matthew Pickering、Jeremy Gibbons 和 Nicolas Wu。函子光学：模块化数据访问器。《艺术、科学与工程编程》，1(2)：7，2017年。 [Pos81] J. Postel。传输控制协议。RFC 793，RFC Editor，1981年9月。 [PS93] Benjamin C. Pierce 和 Davide Sangiorgi。移动过程的类型与子类型。载于第八届年度计算机科学逻辑研讨会论文集（LICS '93），加拿大蒙特利尔，1993年6月19–23日，第376–385页。IEEE Computer Society，1993年。 [PS07] Craig Pastro 和 Ross Street。幺半范畴的双范畴。arXiv 预印本 arXiv:0711.1859，2007年。 [PSV21] Evan Patterson、David I. Spivak 和 Dmitry Vagner。作为对称幺半范畴中计算的规范形式的布线图。《理论计算机科学电子会议录》，第49–64页，2021年2月。 [Ril18] Mitchell Riley。光学范畴。arXiv 预印本 arXiv:1809.00738，2018年。 [Rom20] Mario Román。离散时间反馈的梳图。CoRR，abs/2003.06214，2020年。 [Rom21] Mario Román。通过余端演算构造开放图。《理论计算机科学电子会议录》，333：65–78，2021年2月。

[Rom22] Mario Román。关于效应范畴的预单子与弦图。载于 *ACT '22*：应用范畴论，格拉斯哥，英国，*18* 07664，202*22 2022*，2205- 7月，第 abs/ 卷。。

[Shu16] Michael Shulman。范畴视角下的范畴逻辑。可在网上获取，2016年。

[Shu17] Michael Shulman。双幺半范畴（nLab 条目），第 2 节，2017年。https://ncatlab.org/nlab/show/duoidal+范畴，最后访问于2022年12月14日。

[Spi13] David I. Spivak。布线图运算子：为数据库、递归和即插即用电路形式化图形语言。*CoRR*，abs/1305.0297，2013年。

[SS22] Brandon T. Shapiro 和 David I. Spivak。组合依赖的双幺半结构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2210 01962*，2022年。。

[SSV20] Patrick Schultz、David I. Spivak 和 Christina Vasilakopoulou。动力系统与层。应用范畴结构，28(1)：1–57，2020年。

[SW01] Davide Sangiorgi 和 David Walker。*π*演算——移动进程理论。剑桥大学出版社，2001年。

[VC22] André Videla 和 Matteo Capucci。可组合服务器的透镜。*CoRR*，abs/2203.15633，2022年。

附录 A 介绍

A.1 三次握手实现

以下内容可以解释为使用对称幺半范畴的线性类型理论编写的伪代码 [Shu16]。对称幺半范畴的类型理论（第A.1节）使用诸如`(x , y) <- f(a, b, c)`之类的声明来表示诸如 $f\colon\ A \otimes B \otimes C \to X \otimes Y$

$$\textsc{Gen}\ \frac{f \in \mathcal{G}(A_1,\ldots,A_n;B) \qquad \Gamma_1 \vdash x_1 : A_1 \ldots \Gamma_n \vdash x_n : A_n}{\mathrm{Shuf}(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n) \vdash f(x_1,\ldots,x_n) : B}$$

$$\textsc{Pair}\ \frac{\Gamma_1 \vdash x_1 : A_1 \ \ldots\ \Gamma_n \vdash x_n : A_n}{\mathrm{Shuf}(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n) \vdash [x_1,...,x_n] : A_1 \otimes ... \otimes A_n} \qquad \textsc{Var}\ \frac{}{x : A \vdash x : A}$$

$$\textsc{Split}\ \frac{\Delta \vdash m : A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \qquad \Gamma, x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash z : C}{\mathrm{Shuf}(\Gamma,\Delta) \vdash [x_1,\ldots,x_n] \ \leftarrow\ m\ ;\ z : C}$$

图 16：对称幺半范畴的类型论 [Shu16]。

我们可以将伪代码理解为讨论幺半范畴的类型论。通常，我们需要一些额外的结构，例如 条件分支 或显式函数。在编程中，人们发现，对于幺半范畴而言，较为具体的层次由交换单子的 Kleisli 范畴给出，有时则通过 Freyd 范畴进行抽象 [Mog91], [Hug00],参见 [Rom22] ，其中比较了普通幺半范畴与弦图。为方便起见，下面的代码中我们假设采用这一设定，但请注意，这并非严格必要；幺半范畴的类型论实现也完全可以采用相同的方式运行。

下面的代码受 Haskell 的 do-表示法启发 [Hug00]，并已在 Glasgow Haskell 编译器 9.2.5 版本中通过测试。

```
syn :: 客户端 ~> (客户端, Syn, ACK)
syn(client) = 执行 客户端 <- 随机数 返
回 (client, client, 0)

synack :: (Syn, ACK, 服务器) ~> (Syn, ACK, 服务器) synack(syn, ack,
server) = 执行 服务器 <- 随机数 返回 (如果 syn == 0 则 (0,0,0) 否则
(server, ack+1, server))

noise :: 噪声 -> (Syn, ACK) ~> (Syn, ACK) noise
k (syn,ack) = 执行 噪声 <- 二项分布 k 返回 (如果
noise 则 (0,0) 否则 (syn,ack))

确认 :: (客户端, SYN, ACK) ~> (客户端, SYN, ACK) 确认(客户端, SYN, ACK) =执行返
回 (如果客户端+1 /= ACK 则 (0,0,0), 否则 (客户端+1, SYN+1, 客户端))
```

```
接收 :: (SYN, ACK, 服务器)  ~>  服务器 接收(SYN, ACK, 服务器)
  =  执行返回 ( 如果服务器 +1  /=  ACK 则 0，否则 服务器 )
```

我们可以使用透镜的 produoidal 范畴 来对该协议进行模块化描述。

程序员无需了解 produoidal 范畴：他们可以定义一个过程的 分解方式；可以根据协议的发送-接收步骤读取 分解方式 的类型；可以将它们组合起来，而每当二自然性未得到遵守时，类型检查器都应报错。事实上，在下面的代码中，以不保持二自然性的方式天真地组合客户端和服务器将产生类型错误，因为 GHC 无法匹配这些类型。下面给出该协议的描述，并对发送/接收类型进行编码。

```
protocol :: Split (Kleisli Distribution) Client Client (Syn, Ack) -- ! (Sy
n, Ack) -- ? (Syn, Ack) -- ! () -- ? ->Split (Kleisli Distribution) Server
Server () -- ! (Syn, Ack) -- ? (Syn, Ack) -- ! (Syn, Ack) -- ? ->
(Client,Server)  ~>  (Client, Server) protocol (Split(Kleisli client1)
(Kleisli client2) (Kleisli client3)) (Split(Kleisli server1) (Kleisli
server2) (Kleisli server3)) (client, server)  =  do (server, ()) <-
server1(server) (client, (s,a))  <- client1(client) (s,a)  <- NOISE 0.1 (
s,a) (server, (s,a))  <- server2(server, (s,a)) (s,a)  <- NOISE 0.1 (s,a)
(client, (s,a))  <- client2(client, (s,a)) (s,a)  <- NOISE 0.1 (s,a) (server) <-
server3(server, (s,a)) (client) <- client3(client, ()) return(client,
server)
```

下图 17 和图 18 展示了客户端和服务器模块各自独立的 Haskell 代码。

客户端 :: 分裂 (Kleisli 分布) 客户端 客户端 (Syn, Ack)-- ! (Syn, Ack)-- ? (Syn, Ack)-- ! () -- ? 客户端 = 分裂 { -- 部分 1：发送 SYN 消息。部分 1 =Kleisli $ \ 客户端 -> do 客户端 <- pure 10 return (客户端, (客户端, 0)) --部分2：接收 ACK，发送 ACK。 , 部分2 = Kleisli $ \(客户端, (syn, ack)) -> do return (if客户端+1 /= syn then (0,(0,0)) else (客户端, (客户端+1, ack+1))) --部分3：关闭协议。 , 部分3 = Kleisli $ \(客户端, ()) -> do return 客户端 }

图 17：客户端模块的 Haskell 代码。

服务器 :: 分裂 (Kleisli 分布) 服务器 服务器 () -- 发送 ==>(SYN, ACK) -- 接收 <==(SYN, ACK) -- 发送 ==>(SYN, ACK) -- 接收 <==服务器 = 分裂 -- 第 1 部分：打开协议。{ part1 = Kleisli $ \\服务器 -> do return (服务器, ()) -- 第 2 部分：接收 SYN 并发送 ACK。 , part2 = Kleisli $ \\(服务器, (syn, ack)) -> do 服务器 <- pure 20 return (if syn == 0 then (0,(0,0)) else (服务器,(syn+1, 服务器))) -- 第 3 部分：接收 ACK。 , part3 = Kleisli $ \\(服务器, (syn, ack)) -> do return (if 服务器+1 /= ack then 0 else 服务器) }

图 18：服务器模块的代码。

```
data 分裂 c a b x y s t where 分裂 :: { part1 ::
c a (m , x) , part2 :: c(m , y) (n , s) , part3 ::
c(n , t) b } ->  分裂 ca b x y s t


数据 单位 c a b where
    Unit :: { unit :: c a b } -> Unit c a b

数据 上下文 c a b x y where
     上下文 :: { partA :: c a (m          ,  x)
                  , partB :: c (m      , y) (m     ,  b)
                  } ->  上下文 c a b x y

类型 (a  ~>b)  =  (a ->  分布 b)
```

图 19：描述幺半群透镜预函子的代码。

附录 B
预函子与虚结构

定义 B.1. 两个范畴 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$之间的预函子 $(P, \prec, \succ)$，记作 $P(\bullet;\bullet)\colon \mathbb{A} \bullet\!\!\multimap \mathbb{B}$，是由对象 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$索引的一族集合 $P(B;A)$，并分别赋予 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$中态射的共同函子性左作用和右作用 [Bén00], [Lor21]。

明确地说，这些作用的类型为（$\succ$）：$\mathbb{B}(B', B) \times P(B, A) \to P(B', A)$，以及（$\prec$）：$P(B, A) \times \mathbb{A}(A, A') \to P(B, A')$。这些必须

- 满足相容性，即 $(f \succ p) \prec g = f \succ (p \prec g)$，
- 保持恒等态射，$id \succ p = p$，以及 $p \prec id = p$，
- 并保持复合，$(p \prec f) \prec g = p \prec (f \fatsemi g)$ 以及 $f \succ (g \succ p) = (f \fatsemi g) \succ p$。

备注 B.2。更简洁地说，一个预函子 $P\colon \mathbb{A} \bullet\!\!\multimap \mathbb{B}$ 是一个函子 $P\colon \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{A} \to \mathbf{Set}$。类似地，一个预函子 $P\colon \mathbb{A} \circ\!\!\bullet\, \mathbb{B}$ 是一个函子 $P\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{B} \to \mathbf{Set}$，或者一个预函子 $P\colon \mathbb{B} \bullet\!\!\multimap \mathbb{A}$。[3] 将预函子表示为带有一对作用的集合族时，它们有时也称为双模。

定理 B.3 (Yoneda 同构)。设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴。由余端定义的以下集合之间存在双射。这些双射关于余预层 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$、预层 $G\colon \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ 以及$A \in \mathbb{C}$是自然的，

$$\int^{X} \mathbb{C}(X;A) \times F(X) \overset{y_1}{\cong} F(A); \qquad \int^{X} \mathbb{C}(A;X) \times G(X) \overset{y_2}{\cong} G(A);$$

并且它们由 $y_1(f \mid \alpha) = F(f)(\alpha)$以及 $y_2(g \mid \beta) = G(g)(\beta)$定义。这些称为Yoneda 约化或Yoneda 同构，因为它们出现在 *Yoneda* 引理的证明中。此外，由这些约化、积、恒等态射和复合构成的任何形式图表都是可交换的。

B.1 预单子

定义 B.4. 范畴 $\mathbb{C}$ 上的预单子 $(P, \bigstar, \circ)$ 是一个预函子 $P\colon \mathbb{C} \circ\!\!\bullet\, \mathbb{C}$，并配有两个自然变换，分别表示包含 $(\circ)\colon \mathbb{C}(X;Y) \to P(X;Y)$和乘法 $(\bigstar)\colon P(X;Y) \times P(Y,Z) \to P(X;Z)$，且满足

- 左作用是左乘法，$f \circ \bigstar\ p = f \succ p$，
- 右作用是右乘法，$p \bigstar\ f \circ = p \prec f$，
- 乘法是二自然的，$p \bigstar (f \succ q) = (p \prec f) \bigstar q$，
- 并且乘法是结合的，$(p_1 \bigstar p_2) \bigstar p_3 = p_1 \bigstar (p_2 \bigstar p_3)$.

等价地，预单子是自预函子范畴中的幺半群。每个预单子都会导出一个范畴，即其 *Kleisli* 范畴，它与原范畴具有相同的对象 $\mathbb{C}$，但同态集由该预单子给出，$P(\bullet;\bullet)$。[Rom22]

B.2 多范畴

多范畴。我们可以通过它们更为人熟知的近亲来说明 预幺半群 范畴：多范畴。多范畴可用于描述（不一定相干的）分解。它们包含 多态射，$X \to Y_0, \ldots, Y_n$ 表示将对象 X 分解为对象列表 $Y_0, \ldots, Y_n$。

定义 B.5 (多范畴)。一个 多范畴 是一个范畴 $\mathbb{C}$，配备了一组多态射，$\mathbb{C}(X; Y_0, \ldots, Y_n)$，对每个对象列表 $X_0, \ldots, X_n$，Y在 $\mathbb{C}_{\mathrm{obj}}$中，以及一个复合操作（图 20）

$$(\fatsemi)^{n,m}_{Y_k}\colon \mathbb{C}(X;Y_0,\ldots,Y_n) \times \mathbb{C}(Y_i;Z_0,\ldots,Z_m) \to \mathbb{C}(Z;Y_0,\ldots,X_0,\ldots,X_m,\ldots,Y_m).$$

复合是幺元的，这意味着 $id_{X_i} \fatsemi f = f \fatsemi id_Y$ 对于任意 f，从而使该方程在形式上具有良定义性。复合也是 结合的，这意味着 $(h \fatsemi g) \fatsemi f = h \fatsemi (g \fatsemi f)$；并且只要形式上定义良好，$g \fatsemi (h \fatsemi f) = h \fatsemi (g \fatsemi f)$ 就成立。

[3] 关于从函子的记号 $(\circ\!\!\bullet)$ 和 $(\bullet\!\!\multimap)$，其中 $\circ$ 表示反变的（o p) 个论证。这个想法源自 Mike Shulman。 在文献中存在冲突。为避开这一问题，我们使用符号

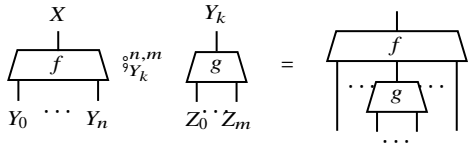


图 20：多范畴复合。

命题 B.6. 多范畴复合关于我们沿其进行复合的对象是二自然的。这就是说，复合 $(\fatsemi)^{n\ m}_{k}$，在变量 Y_k 上诱导出一个良定义且二自然的 复合运算，其中该变量是我们沿其进行复合的变量。

$$(\fatsemi)^{n,m}_{\bullet_k}\colon \left(\int^{Y_k\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(X;Y_0,\dots,Y_n)\times\mathbb{C}(Y_k;Z_0,\dots,Z_m)\right)\to\mathbb{C}(Z;Y_0,\dots,X_0,\dots,X_m,\dots,Y_m).$$

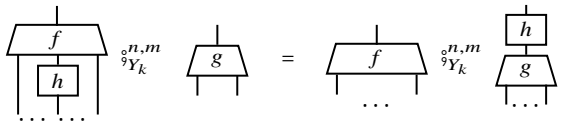


图 21：多范畴复合是二自然的。

证明。 这是多范畴中复合的结合律的直接结果，并由此诱导出一个同构。□

注记 B.7。 预幺半范畴是一个多范畴，其中二自然复合 可逆。

双多范畴 描述了两种分解方式之间的相互作用：一种是顺序 分解，另一种是并行 分解。我们可以将这两种分解方式结合起来：例如，可以将 X 顺序分解，然后并行分解其中的每个因子，最后再将这些因子中的最后一个顺序分解。

$$\mathbb{C}(X;(Y_0\cdot Y_1),(Y_2\cdot(Y_3,Y_4))).$$

定义 B.8（双多范畴）。 双多范畴 是一个范畴 $\mathbb{C}$，配备了一组多态射 $\mathbb{C}(X;\ E(Y_0,\ \dots\dots,\ Y_n))$，对于每个对象列表 $Y_0,\ \dots\dots,\ Y_n$，属于 $\mathbb{C}_{\text{obj}}$，以及两个幺半群上的每个表达式 E，均如此。此外，它还配备了一个二自然复合运算

$$(\fatsemi)^{n,m}_{Y_k}\colon \int^{Y_i}\mathbb{C}(X;E_1[Y_0,\dots,Y_n])\times\mathbb{C}(Y_i;E_2[Z_0,\dots,Z_m])\longrightarrow\mathbb{C}(X;E_1[Y_0,\dots,E_2[X_0,\dots,X_m],\dots,Y_m),$$

以及联系顺序复合与并行复合的松弛子，

$$\mathbb{C}(X;E_1[Y_0,\dots,((Z_0,Z_1)\cdot(Z_2,Z_3)),\dots,Y_n])\longrightarrow\mathbb{C}(X;E_1[Y_0,\dots,((Z_0\cdot Z_2),(Z_1\cdot Z_3)),\dots,Y_n]).$$

注记 B.9。 正如 预幺半范畴 是在特定意义下二自然复合可逆的范畴，produoidal 范畴 也可被猜想为一种双多范畴，其中二自然复合可逆并由此诱导出一个同构。

Appendix C
Sequential Context

命题 C.1（来自命题 3.2）。 轮廓给出一个函子 C： **Promon → Cat**。

证明。 定义 3.1 定义了其在 预幺半范畴上的作用。我们定义其在 promonoidal 函子上的作用。给定一个 promonoidal 函子 $F\colon\ \mathbb{V}\to\mathbb{W}$，定义函子 $CF\colon\ C\mathbb{V}\to C\mathbb{W}$ 如下所示的呈示之间的态射：

$$X^L\mapsto F(X)^L;\ X^R\mapsto F(X)^R$$
对每个 $a\in\mathbb{V}(A;\ N),\quad a_0\colon\ A^L\to A^R\mapsto F_N(a)_0$
对每个 $b\in\mathbb{V}(X;\ B),\quad b_0\colon\ B^L\to X^L\mapsto F(b)_0;\quad b_1\colon\ X^R\to B^R\mapsto F(b)_1$
对每个 $c\in\mathbb{V}(C;\ Y\triangleleft Z),\quad c_0\colon\ C^L\to Y^L\mapsto F_{\triangleleft}(c)_0;\quad c_1\colon\ Y^R\to Z^L\mapsto F_{\triangleleft}(c)_1;\quad c_2\colon\ Z^R\to C^R\mapsto F_{\triangleleft}(c)_2$.

由 $F\colon\ \mathbb{V}\to\mathbb{W}$ 是一个预幺半函子 可知，定义3.1 中的轮廓方程在生成元的像之间成立，因此这定义了一个函子。特别地，当 $\mathbf{Id}_{\mathbb{V}}\colon\ \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ 是恒等态射时，它是一个恒等函子。令 $G\colon\ \mathbb{U}\to\mathbb{V}$ 为另一个预幺半函子，则 $C(G\fatsemi F)=C(G)\fatsemi C(F)$由预幺半函子的复合得到。 □

命题 C.2（来自命题3.5）。 带有其序列分裂、单位和适当相干态射的预幺半群范畴中的态射拼接。

证明。 在引理 C.3中，我们利用Yoneda 同构构造结合子。在引理 C.4 和 C.5中，我们构造两个单位子。由于它们都是利用 Yoneda 同构构造的，因此必然满足相干方程。 □

引理 C.3（预幺半群拼接结合子）。 我们可以构造一个自然同构，

$$\alpha\colon\ \int^{U\ V\in\mathbb{SC}}\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A;&X\\B;&Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U;&X'\\V;&Y'\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\cong\int^{U\ V\in\mathbb{SC}}\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A;&U\\B;&V\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U;&X\\V;&Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right),$$

完全由 *Yoneda* 同构构造。该同构通过规定以下条件来定义：$\alpha\left(\langle f_0\fatsemi\square\fatsemi f_1\fatsemi\square\fatsemi f_2\rangle|\langle g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\rangle\right)=\left(\langle h_0\fatsemi\square\fatsemi h_1\fatsemi\square\fatsemi h_2\rangle|\langle k_0\fatsemi\square\fatsemi k_1\fatsemi\square\fatsemi k_2\rangle\right)$ 当且仅当

$$\langle f_0\fatsemi g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\fatsemi f_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\rangle=\langle h_0\fatsemi\square\fatsemi h_1\fatsemi k_0\fatsemi\square\fatsemi k_1\fatsemi\square\fatsemi k_2\fatsemi h_2\rangle.$$

证明。 我们将证明，方程两边都同构于 $\mathbb{C}(A;\ X)\times\mathbb{C}(Y;\ X')\times\mathbb{C}(Y';\ X'')\times\mathbb{C}(X'';\ B)$；也就是说，同构于态射四元组 $\langle p_0\fatsemi\square\fatsemi p_1\fatsemi\square\fatsemi p_2\fatsemi\square\fatsemi p_3\rangle$其中 $p_0\colon\ A\to X$、$p_1\colon\ Y\to X'$、 $p_2\colon\ Y'\to X'$以及 $p_3\colon\ Y''\to B$。

事实上，下面的余端演算计算构造了一个同构，

$$\begin{aligned}
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A;&X\\B;&Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U;&X'\\V;&Y'\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathbb{C}(A;X)\times\mathbb{C}(Y;U)\times\mathbb{C}(V;B)\times\mathbb{C}(U;X')\times\mathbb{C}(Y';X'')\times\mathbb{C}(Y'';V) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathbb{C}(A;X)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}Y;&U\\B;&V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(U;X')\times\mathbb{C}(Y';X'')\times\mathbb{C}(Y'';V) && \cong \text{ (by Yoneda reduction)}
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}(A;\ X)\times\mathbb{C}(Y;\ X')\times\mathbb{C}(Y';\ X'')\times\mathbb{C}(Y'';\ B)$,

将一对 $\langle f_0\fatsemi\square\fatsemi f_1\fatsemi\square\fatsemi f_2\rangle|\langle g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\rangle$ 映射到规范形式 $\langle f_0\fatsemi\square\fatsemi f_1\fatsemi g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\fatsemi f_2\rangle$，其中该对按由 $\langle f_0\fatsemi\square\fatsemi f_1\fatsemi n\fatsemi\square\fatsemi m\fatsemi f_2\rangle|\langle g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi g_2\rangle=\langle f_0\fatsemi\square\fatsemi f_1\fatsemi\square\fatsemi f_2\rangle|\langle n\fatsemi g_0\fatsemi\square\fatsemi g_1\fatsemi\square\fatsemi m\fatsemi g_2\rangle$ 生成的等价关系取商。

同样，下面的余端演算计算构造了第二个同构，

$$\begin{aligned}
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A;&U\\B;&V\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U;&X\\V;&Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathbb{C}(A;U)\times\mathbb{C}(V;X'')\times\mathbb{C}(Y'';B)\times\mathbb{C}(U;X)\times\mathbb{C}(Y;X')\times\mathbb{C}(Y';V) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{U\ V\in\mathcal{SC}}\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A;&U\\X'';&V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(Y'';B)\times\mathbb{C}(U;X)\times\mathbb{C}(Y;X')\times\mathbb{C}(Y';V) && \overset{y_1}{\cong}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{C}(A;\ X) \times \mathbb{C}(Y,\ X') \times \mathbb{C}(Y';\ X'') \times \mathbb{C}(Y'';\ B),$$

它将一对 $\langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2 \rangle | \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \rangle$（按由 $\langle h_0 \fatsemi n \fatsemi \square \fatsemi m \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2 \rangle | \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \rangle = \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2 \rangle | \langle n \fatsemi k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \fatsemi m \rangle$生成的等价关系取商）映射为规范形式 $\langle h_0 \fatsemi k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2 \rangle$。

总之，我们有：$\alpha(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2 \rangle | \langle g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2 \rangle) = (\langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2 \rangle | \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \rangle)$ 当且仅当

$$\langle f_0 \fatsemi g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2 \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2 \rangle = \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2 \fatsemi h_2 \rangle,$$

这正是我们想要证明的。 □

引理 C.4 (预单子拼接左单位子)。 我们可以构造一个自然同构，

$$\lambda \colon \int^{U \atop V \in \mathbb{SC}} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; U \\ B; V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; X \\ B; Y \end{smallmatrix}\right),$$

完全由 *Yoneda* 同构构造。该同构定义为 $\lambda(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2 \rangle | g) = \langle f_0 \fatsemi g \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2 \rangle$。

证明。 事实上，以下余端演算推导构造了该同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; U \\ B; V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && = \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathbb{C}(A; U) \times \mathbb{C}(V; X) \times \mathbb{C}(Y; B) \times \mathbb{C}(U; V) && = \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; U \\ X; V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(Y; B) \times \mathbb{C}(U; V) && \cong \quad \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\mathbb{C}(A; X) \times \mathbb{C}(Y; B).
\end{aligned}$$

因此，它是通过一个Yoneda 同构构造的。 □

引理 C.5 (预单子拼接右单位子)。 我们可以构造一个自然同构，

$$\rho \colon \int^{U \atop V \in \mathbb{SC}} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; X \\ B; Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; X \\ B; Y \end{smallmatrix}\right),$$

完全由 *Yoneda* 同构给出。该同构定义为 $\rho(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2 \rangle | g) = \langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi g \fatsemi f_2 \rangle$。

证明。 事实上，下面的余端演算推导构造出了该同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} A; X \\ B; Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && = \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathbb{C}(A; X) \times \mathbb{C}(Y; U) \times \mathbb{C}(V; B) \times \mathbb{C}(U; V) && = \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{U \atop V \in \mathcal{SC}} \mathbb{C}(A; X) \times \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix} Y; U \\ B; V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(U; V) && \cong \quad \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\mathbb{C}(A; X) \times \mathbb{C}(Y; B).
\end{aligned}$$

因此，它是通过一个Yoneda 同构构造的。 □

命题 C.6 (来自命题 3.6)。 拼接给出一个函子 $\mathcal{S} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Promon}$。

证明。 定义 3.4 定义了对范畴的作用。我们定义对函子的作用。给定一个函子$F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，定义预幺半函子 $\mathcal{S}F : \mathcal{S}\mathbb{C} \to \mathcal{S}\mathbb{D}$ 如下

$$\begin{aligned}
&\tbinom{A}{B} \mapsto \tbinom{FA}{FB},\\
&\mathcal{S}F := F_{A,X} \times F_{Y,B} : \mathcal{S}\mathbb{C}\tbinom{A}{B}{X}{Y} \to \mathcal{S}\mathbb{D}\tbinom{FA}{FB}{FX}{FY},\\
&\mathcal{S}F_{\lhd} := F_{A,X} \times F_{Y,X'} \times F_{Y',B} : \mathcal{S}\mathbb{C}\tbinom{A}{B}{X}{Y}{\lhd}{X'}{Y'} \to \mathcal{S}\mathbb{D}\tbinom{FA}{FB}{FX}{FY}{\lhd}{FX'}{FY'},\\
&\mathcal{S}F_N := F_{A,B} : \mathcal{S}\mathbb{C}(A, N) \to \mathcal{S}\mathbb{D}(FA, N).
\end{aligned}$$

由拼接箭头上的预幺半群结构（命题C.2）可知，这会保留相干映射。若 $\mathbf{Id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是恒等函子，则它定义了恒等态射 $\mathbf{Id}_{\mathcal{S}\mathbb{C}}$，其底层函子是恒等函子，且自然变换均为恒等自然变换。若 $G : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 是另一个函子，则 $\mathcal{S}(G \fatsemi F) = \mathcal{S}G \fatsemi \mathcal{S}F$由函子复合可知。 □

定理 C.7 (由定理 3.7)。 范畴与预幺半范畴之间存在一个伴随，其中预幺半群的轮廓是左伴随，而拼接范畴是右伴随。

证明。 设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴，并设 $\mathbb{B}$ 是一个预幺半范畴。我们将证明，预幺半函子 $\mathbb{B} \to \mathcal{S}\mathbb{C}$ 与函子$\mathcal{C}\mathbb{B} \to \mathbb{C}$自然对应。首先注意到，范畴$\mathcal{C}\mathbb{B}$ 是自由呈示的；因此，函子 $\mathcal{C}\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 相当于在 $\mathbb{C}$ 中选取一些对象和一些态射，并使其满足若干方程。具体而言，根据轮廓的定义，函子$\mathcal{C}\mathbb{B} \to \mathbb{C}$相当于

- 对于每个 $X \in \mathbb{B}_{\text{对象}}$，选择对象 $X^L,\ X^R \in \mathbb{C}_{\text{对象}}$；
- 对于每个元素 $a \in \mathbb{B}(X)$，选择态射 $a_0 \in \mathbb{C}(X^L,\ X^R)$；
- 对于每个态射 $a \in \mathbb{B}(A; X)$，选择态射 $a_0 \in \mathbb{C}(A^L; X^L)$ 和 $a_1 \in \mathbb{C}(X^R; A^R)$；
- 对于每个分裂 $a \in \mathbb{C}(A; X \lhd Y)$，选择态射 $a_0 \in \mathbb{C}(A^L; X^L)$、 $a_1 \in \mathbb{C}(X^R; Y^L)$ 和$a_2 \in \mathbb{C}(Y^R; A^R)$；
- 所选内容必须满足以下条件： $\alpha(a \mid b) = (c \mid d)$ 蕴含 $a_0 = c_0 \fatsemi d_0$； $a_1 \fatsemi b_0 = d_1$ 以及 $b_1 = d_2 \fatsemi c_1$； $a_2 \fatsemi b_2 = c_2$；
- 该选择必须满足： $\rho(a|b) = c = \lambda(d|e)$ 蕴含 $a_0 = c_0 = d_0 \fatsemi e_0 \fatsemi d_1$和 $a_1 \fatsemi b_0 \fatsemi a_2 = c_1 = d_2$。

另一方面，一个预幺半函子 $\mathbb{B} \to \mathcal{S}\mathbb{C}$，也相当于

- 对于每个 $X \in \mathbb{B}_{\text{对象}}$，一个对象 $FX = (X^L,\ X^R) \in \mathcal{S}\mathbb{C}_{\text{对象}}$，它是 $\mathbb{C}_{\text{对象}}$中的一对对象；
- 对于每个元素 $a \in \mathbb{B}(X)$，一个态射 $F(a) = a_0 \in \mathcal{S}\mathbb{C}(FX)$；
- 对于每个元素 $a \in \mathbb{B}(A;\ X)$，一个拼接 $F(a) = \langle a_0 \fatsemi \square \fatsemi a_1 \rangle \in \mathcal{S}\mathbb{C}(FA;\ FX)$；
- 对于每个元素 $a \in \mathbb{B}(A;\ X \lhd Y)$，一个拼接 $F(a) = \langle a_0 \fatsemi \square \fatsemi a_1 \fatsemi \square \fatsemi a_2 \rangle \in \mathcal{S}\mathbb{C}(FA;\ FX \lhd FY)$；
- 保持结合律，即 $\alpha(a \mid b) = (c \mid d)$ 蕴含 $\alpha(F(a) \mid F(b)) = F(c) \mid F(d)$；
- 保持单位性，即 $\rho(a \mid b) = c = \lambda(d \mid e)$ 蕴含 $\rho(F(a) \mid F(b)) = F(c) = \lambda(F(d) \mid F(e))$；

根据拼接的定义及其结合律和单位性，这些点中每一点上的结构都完全相同。□

C.1 拼接箭头多重范畴

作为前述讨论的推论，n-态射是 $\mathbb{C}$ 中由 n 间隙 分隔的箭头序列；该箭头序列从 A 到 B，其孔的类型由 $\{X_i,\ Y_i\}_{i \in [1,\ldots,n]}$ 给出。换言之，

$$\mathcal{S}\mathbb{C}\left(\tbinom{A}{B}; \tbinom{X_1}{Y_1} \otimes \ldots \otimes \tbinom{X_n}{Y_n}\right) = \mathbb{C}(A; X_1) \times \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{C}(Y_k, X_{k+1})\right) \times \mathbb{C}(Y_n, B).$$

多重范畴中的复合定义为将一个拼接箭头代入第二个箭头的某个间隙中；恒等态射就是 $\mathrm{id}_A - \mathrm{id}_B$，即只有一个间隙且其类型为 $(A,\ B)$ 的拼接箭头。

命题 C.8。 拼接箭头的多范畴 $\mathcal{S}\mathbb{C}$恰好是由对偶性 $\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \dashv \mathbb{C}$ 在预函子幺半双范畴中诱导出的预幺半范畴：一个位于 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathrm{op}}$之上的预幺半范畴。

D.1 幺半轮廓

定义 D.1（幺半轮廓，摘自定义 4.4）。 产幺半范畴 的轮廓 是 产幺半范畴 $\mathbb{B}$ 所对应的幺半范畴 $\mathcal{D}\mathbb{B}$，它对每个对象 X^L（左手）和 X^R（右手）各有两个对象$X \in \mathbb{B}_{obj}$；其态射是由对预幺半范畴的顺序分解和并行分解进行 轮廓化 所得的态射。

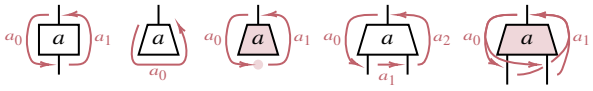


图 22：轮廓幺半范畴的生成元。

具体而言，它由以下内容自由呈示：(i) 对于每个态射 $a \in \mathbb{B}(A;\ X)$，一对态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\ A^L;\ X^L)$、$a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R;\ A^R)$；(ii) 对于每个顺序单位 $a \in \mathbb{C}(\ A;\ N)$，一个态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\ A^L;\ A^R)$；(iii) 对于每个并行单位 $a \in \mathbb{B}(\ A;\ I)$，一对态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(A^L;\ I)$ 和 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(I;\ A^R)$；(iv) 对于每个串行分裂$a \in \mathbb{B}(\ A;\ X \triangleleft Y)$，三个态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\ A^L;\ X^L)$、 $a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R;\ Y^L)$、 $a_2 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(Y^R;\ A^R)$；以及 (v) 对于每个并行拆分 $a \in \mathbb{B}(\ A;\ X \otimes Y)$，一对态射 $a_0 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(\ A^L;\ X^L \otimes Y^L)$ 和 $a_1 \in \mathrm{D}\mathbb{B}(X^R \otimes Y^R;\ A^R)$，见图 22。

对于每个等式 $a \fatsemi^2 b = c \fatsemi^1 d$，我们规定方程 $a_0 = c_0 \fatsemi d_0$； $a_1 \fatsemi b_0 = d_1$ 以及 $b_1 = d_2 \fatsemi c_1$； $a_2 \fatsemi b_2 = c_2$。对于每个等式 $a \fatsemi^2 b = c = d \fatsemi^1 e$，我们规定 $a_0 = c_0 = d_0 \fatsemi e_0 \fatsemi d_1$ 以及 $a_1 \fatsemi b_0 \fatsemi a_2 = c_1 = d_2$。这些由图 7 得出。

对于结合律的每次应用 $\alpha(a \fatsemi_1 b)$，我们规定方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes d_0)$ 以及 $(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = (\mathrm{id} \otimes d_1) \fatsemi c_1$。这些由图 23 得出。

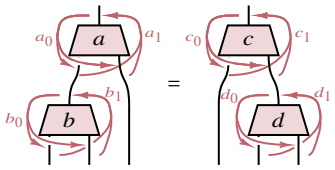


图 23：由结合律得到的方程。

对于每次应用单位性， $\lambda(a \fatsemi_1 b) = c = \rho(d \fatsemi_2 e)$，我们施加方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 = d_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes e_0)$ 和 $(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = c_1 = (\mathrm{id} \otimes e_1) \fatsemi d_1$。这些结论可由图 24得出。

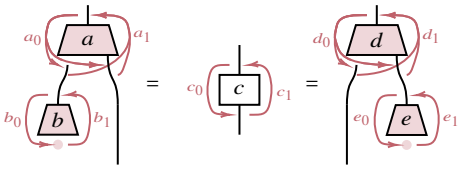


图 24：由单位性得到的方程。

对于每次应用松弛子， $\psi_2(a|b|c) = (d|e|f)$，我们施加方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes c_0) = d_0 \fatsemi e_0$、中间方程 $b_1 \otimes c_1 = e_1 \fatsemi d_1 \fatsemi f_0$以及 $(b_2 \otimes c_2) \fatsemi a_1 = f_1 \fatsemi d_2$。这些可由图 25得出。

对于松弛子的每次应用， $\psi_0(a) = (b\,|_1\,c\,|_2\,d)$，我们施加一个方程 $a_0 = b_0 \fatsemi c_0$、一个方程$\mathrm{id} = c_1 \fatsemi b_1 \fatsemi d_0$以及一个方程 $a_1 = d_1 \fatsemi b_2$。这对应图26。

对于松弛子的每次应用， $\varphi_2(a\,|_1\,b\,|_2\,c) = d$，我们施加一个方程 $a_0 \fatsemi (b_0 \otimes c_0) \fatsemi a_1 = d_0$。这对应图 27。

对于松弛子的每次应用， $\varphi_0(a) = b$，我们规定一个方程 $a_0 \fatsemi a_1 = b_0$。这与图 28一致。

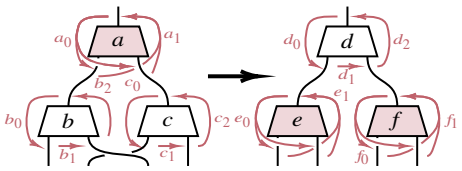


图 25：第一个松弛子的方程。

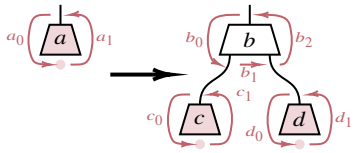


图 26：第二个松弛子的方程。

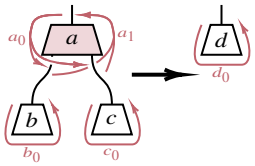


图 27：第三个松弛子的方程。

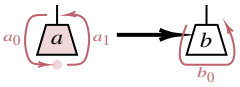


图 28：第四个松弛子的方程。

Prop命题 D.2 （由命题 4.5）。 幺半轮廓 给出一个函子 $\mathcal{D}$: **Produo** $\to$**Mon** .

证明。 定义 4.4 定义了对 produoidal 范畴的作用。我们定义对 produoidal 函子的作用。给定一个 produoidal 函子 $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$，定义严格幺半函子 $\mathcal{D}F\colon \mathcal{D}\mathbb{V} \to \mathcal{D}\mathbb{W}$如下所示，通过呈示之间的态射给出：

- 对象 X^L和 X^R映射到 $F(X)^L$和 $F(X)^R$;
- 对于每个 $a \in \mathbb{V}(A;\, N)$，态射 $a_0\colon A^L \to A$ 映射为 $F_N(a)_0$;
- 对于每个 $b \in \mathbb{V}(A;\, I)$，$b_0\colon A^L \to I$ 和 $b_1\colon I \to A^R$ 均映射为 $F_I(b)_0$和 $F_I(b)_1$;
- 对于每个 $c \in \mathbb{V}(X;\, B)$，态射 $c_0\colon B^L \to X^L, c_1\colon X^R \to B^R$ 映射为 $F(c)_0$和 $F(c)_1$;
- 对于每个 $d \in \mathbb{V}(C;\, Y \otimes Z)$，态射 $d_0\colon C^L \to Y^L$, $d_1\colon Y^R \to Z^L$ 和 $d_2\colon Z^R \to C^R$ 映射为 $F_\triangleleft(d)_0$, $F_\triangleleft(d)_1$ 和 $F_\triangleleft(d)_2$;
- 对于每个 $e \in \mathbb{V}(C;\, Y \triangleleft Z)$，态射 $e_0\colon C^L \to Y^L$, $e_1\colon Y^R \to Z^L$ 和 $e_2\colon Z^R \to C^R$ 映射为 $F_\triangleleft(e)_0$, $F_\triangleleft(e)_1$ 和 $F_\triangleleft(e)_2$。

由 $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ 是一个produoidal 函子可知，定义3.1的轮廓方程在生成元的像之间成立，因此该赋值可自由扩展为一个严格幺半函子。特别地，当$\mathbf{Id}_{\mathbb{V}}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 是恒等态射时，它就是一个恒等函子。设 $G\colon \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ 是另一个produoidal 函子，那么$\mathcal{C}(G \fatsemi F) = \mathcal{C}(G) \fatsemi \mathcal{C}(F)$ 由produoidal 函子的复合得到。□

D.2 拼接的幺半箭头

命题 D.3 (来自命题4.7)。拼接的幺半箭头构成一个*produoidal* 范畴，其具有顺序分裂与并行分裂、单位，以及适当的相干态射和松弛器。

证明。我们使用引理D.4 至D.7中构造的松弛器。由于这些松弛器由复合和 Yoneda 引理构造而成，它们确实满足所有形式相容方程。□

引理 D.4 (Produoidal 拼接，第一松弛子)。 我们可以构造一个自然变换，

$$\psi_2\colon \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\left(\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right)\right) \to \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\left(\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right) \triangleleft \left(\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right)\right),$$

完全由复合和 *Yoneda* 同构构成。这个松弛子定义如下

$\psi_2(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1\rangle \mid \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2\rangle \mid \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2\rangle) = \langle g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2\rangle | \langle p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1\rangle | \langle q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1\rangle$
当且仅当

$$\langle f_0 \fatsemi (h_0 \otimes k_0) \fatsemi \square \fatsemi h_1 \otimes k_1 \fatsemi \square \fatsemi (h_2 \otimes k_2) \fatsemi f_1\rangle = \langle g_0 \fatsemi p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1 \fatsemi g_1 \fatsemi q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1 \fatsemi g_2\rangle.$$

证明。 我们将证明，右侧与以下集合是同构的。接着，我们构造一个从左侧到该集合的映射，

$$\mathbb{C}(A; X \otimes X') \times \mathbb{C}(Y \otimes Y'; U \otimes U') \times \mathbb{C}(V \otimes V'; B).$$

事实上，下面的余端推导构造了一个同构。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \left(\tfrac{X}{Y} \otimes \tfrac{X'}{Y'}\right) \lhd \left(\tfrac{U}{V} \otimes \tfrac{U'}{V'}\right)\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{\tfrac{Z}{W}, \tfrac{Z'}{W'} \in \mathcal{T}\mathbb{C}} \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{Z}{W} \lhd \tfrac{Z'}{W'}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z}{W}; \tfrac{X}{Y} \otimes \tfrac{X'}{Y'}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z'}{W'}; \tfrac{U}{V} \otimes \tfrac{U'}{V'}\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{\tfrac{Z}{W}, \tfrac{Z'}{W'} \in \mathcal{T}\mathbb{C}} \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{Z}{W} \lhd \tfrac{Z'}{W'}\right) \times \mathbb{C}(Z; X \otimes X') \times \mathbb{C}(Y \otimes Y'; W) \times \mathbb{C}(Z'; U \otimes U') \times \mathbb{C}(V \otimes V'; W') && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{\tfrac{Z}{W}, \tfrac{Z'}{W'} \in \mathcal{T}\mathbb{C}} \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{Z}{W} \lhd \tfrac{Z'}{W'}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}(\tfrac{Z}{W}; \tfrac{X \otimes X'}{Y \otimes Y'}) \times \mathcal{T}\mathbb{C}(\tfrac{Z'}{W'}; \tfrac{U \otimes U'}{V \otimes V'}) && \overset{y_1}{\cong} \\
&\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{X \otimes X'}{Y \otimes Y'} \lhd \tfrac{U \otimes U'}{V \otimes V'}\right) && \overset{\text{def}}{=}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{C}(A; X \otimes X') \times \mathbb{C}(Y \otimes Y'; U \otimes U') \times \mathbb{C}(V \otimes V'; B).$$

该同构将三元组 $(\langle g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2\rangle | \langle p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1\rangle | \langle q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1\rangle)$ 映射为 $\langle g_0 \fatsemi p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1 \fatsemi g_1 \fatsemi q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1 \fatsemi g_2\rangle$。另一方面，我们定义一个从方程左侧到该集合的映射，如下所示

$$\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1\rangle \mid \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2\rangle \mid \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2\rangle \mapsto \langle f_0 \fatsemi (h_0 \otimes k_0) \fatsemi \square \fatsemi h_1 \otimes k_1 \fatsemi \square \fatsemi (h_2 \otimes k_2) \fatsemi f_1\rangle.$$

总之，将同构与映射复合， $\psi_2(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1\rangle \mid \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2\rangle \mid \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2\rangle)$
$= \langle g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2\rangle | \langle p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1\rangle | \langle q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1\rangle$ 当且仅当

$$\langle f_0 \fatsemi (h_0 \otimes k_0) \fatsemi \square \fatsemi (h_1 \otimes k_1) \fatsemi \square \fatsemi (h_2 \otimes k_2) \fatsemi f_1\rangle = \langle g_0 \fatsemi p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1 \fatsemi g_1 \fatsemi q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1 \fatsemi g_2\rangle,$$

这正是我们想要证明的。 □

引理 D.5 (产幺半拼接，第二个松弛子)。 我们可以构造一个自然变换，

$$\psi_0 \colon \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; I\right) \to \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; I \lhd I\right),$$

完全由复合与 *Yoneda* 同构构成。这个松弛子定义为 $\psi_0(\langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1\rangle \mid \langle h_0 \fatsemi \square \fatsemi h_1 \fatsemi \square \fatsemi h_2\rangle \mid \langle k_0 \fatsemi \square \fatsemi k_1 \fatsemi \square \fatsemi k_2\rangle) = \langle g_0 \fatsemi \square \fatsemi g_1 \fatsemi \square \fatsemi g_2\rangle | \langle p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1\rangle | \langle q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1\rangle$ 当且仅当

$$\langle f_0 \fatsemi (h_0 \otimes k_0) \fatsemi \square \fatsemi (h_1 \otimes k_1) \fatsemi \square \fatsemi (h_2 \otimes k_2) \fatsemi f_1\rangle = \langle g_0 \fatsemi p_0 \fatsemi \square \fatsemi p_1 \fatsemi g_1 \fatsemi q_0 \fatsemi \square \fatsemi q_1 \fatsemi g_2\rangle.$$

证明。 我们将证明，右侧与以下集合同构。接着，我们构造一个从左侧到同一集合的映射， $\mathbb{C}(A; I) \times \mathbb{C}(I; I) \times \mathbb{C}(I; B)$。事实上，下面的余端推导构造了一个同构。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; I \lhd I\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{\tfrac{Z}{W}, \tfrac{Z'}{W'} \in \mathcal{T}\mathbb{C}} \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{Z}{W} \lhd \tfrac{Z'}{W'}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z}{W}; I\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z'}{W'}; I\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{\tfrac{Z}{W}, \tfrac{Z'}{W'} \in \mathcal{T}\mathbb{C}} \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{A}{B}; \tfrac{Z}{W} \lhd \tfrac{Z'}{W'}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z}{W}; \tfrac{I}{I}\right) \times \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\tfrac{Z'}{W'}; \tfrac{I}{I}\right) && \overset{y_1}{\cong}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A; & I \\ B; & I \end{smallmatrix} \lhd I\right) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}(A;I) \times \mathbb{C}(I;I) \times \mathbb{C}(I;B).$$

该同构将三元组 $\langle b_0 ⨟ \square ⨟ b_1 ⨟ \square ⨟ b_2\rangle | \langle c_0 ⨟ \square ⨟ c_1\rangle | \langle d_0 ⨟ \square ⨟ d_1\rangle$ 映射到 $\langle b_0 ⨟ c_0 ⨟ \square ⨟ c_1 ⨟ b_1 ⨟ d_0 ⨟ \square ⨟ d_1 ⨟ b_2\rangle$。另一方面，我们定义一个从方程左侧到该集合的映射，其定义如下：

$$\langle a_0 ⨟ \square ⨟ a_1\rangle \mapsto \langle a_0 ⨟ \square ⨟ \mathrm{id}_I ⨟ \square ⨟ a_1\rangle.$$

综上，将该同构与此函数复合可得：$\psi_0\langle a_0 ⨟ \square ⨟ a_1\rangle = \langle b_0 ⨟ \square ⨟ b_1 ⨟ \square ⨟ b_2\rangle | \langle c_0 ⨟ \square ⨟ c_1\rangle | \langle d_0 ⨟ \square ⨟ d_1\rangle$ 当且仅当 $\langle a_0 ⨟ \square ⨟ \mathrm{id}_I ⨟ \square ⨟ a_1\rangle = \langle b_0 ⨟ c_0 ⨟ \square ⨟ c_1 ⨟ b_1 ⨟ d_0 ⨟ \square ⨟ d_1 ⨟ b_2\rangle$。□

引理 D.6 (产幺半拼接，第三个松弛子)。 我们可以仅由复合和 *Yoneda* 同构构造一个自然变换，

$$\varphi_2 : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A; \\ B; \end{smallmatrix} N \otimes N\right) \to \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A; \\ B; \end{smallmatrix} N\right),$$

仅由复合和 *Yoneda* 同构构成。该松弛子定义为 $\varphi_2(\langle f_0 ⨟ \square ⨟ f_1\rangle | h_0 | h_1) = f_0 ⨟ (h_0 \otimes h_1 ⨟ f_1)$。

引理 D.7 (产幺半拼接，第四个松弛子)。 我们可以仅由复合和 *Yoneda* 同构构造一个自然变换 ，

$$\varphi_0 : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A; \\ B; \end{smallmatrix} I\right) \to \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A; \\ B; \end{smallmatrix} N\right),$$

仅由复合和 *Yoneda* 同构构成。该松弛子定义为 $\varphi_0\langle a_0 ⨟ \square ⨟ a_1\rangle = a_0 ⨟ a_1$。

命题 D.8 (来自命题 4.8)。 幺半拼接给出一个函子 $\mathcal{T}$： **Mon** $\to$**Produo**。

证明。 定义 4.6定义了其在幺半范畴上的作用。我们定义其在幺半群函子上的作用。给定一个幺半群函子 F： $\mathbb{C} \to \mathbb{D}$，定义 produoidal 函子 $\mathcal{T}F$： $\mathcal{T}\mathbb{C} \to \mathcal{T}\mathbb{D}$ 如下：

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix} A; \\ B; \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} FA; \\ FB; \end{smallmatrix}\right) \\
&\mathcal{T}F := F_{A,X} \times F_{Y,B} : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A, & X \\ B, & Y \end{smallmatrix}\right) \to \mathcal{T}\mathbb{D}\left(\begin{smallmatrix} FA, & FX \\ FB, & FY \end{smallmatrix}\right) \\
&\mathcal{T}F_{\lhd} := F_{A,X} \times F_{Y,X'} \times F_{Y',B} : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A, & X \\ B, & Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \to \mathcal{T}\mathbb{D}\left(\begin{smallmatrix} FA, & FX \\ FB, & FY \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} FX' \\ FY' \end{smallmatrix}\right) \\
&\mathcal{T}F_{\otimes} := F_{A,X\otimes Y} \times F_{X'\otimes Y',B} : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A, & X \\ B, & Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \to \mathcal{T}\mathbb{D}\left(\begin{smallmatrix} FA, & FX \\ FB, & FY \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} FX' \\ FY' \end{smallmatrix}\right) \\
&\mathcal{T}F_N := F_{A,B} : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A, \\ B, \end{smallmatrix} N\right) \to \mathcal{T}\mathbb{D}\left(\begin{smallmatrix} FA, \\ FB, \end{smallmatrix} N\right) \\
&\mathcal{T}F_I := F_{A,I} \times F_{I,B} : \mathcal{T}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A, \\ B, \end{smallmatrix} I\right) \to \mathcal{T}\mathbb{D}\left(\begin{smallmatrix} FA, \\ FB, \end{smallmatrix} I\right).
\end{aligned}$$

由拼接的幺半箭头（命题D.3）上的产幺半结构可知，该结构保持相干映射。如果$\mathbf{Id}_{\mathbb{C}}$： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个恒等函子，那么它定义了恒等$\mathbf{Id}_{\mathcal{T}\mathbb{C}}$，其底层函子为恒等函子，且自然变换为恒等自然变换。如果 G： $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 是另一个幺半函子，那么$\mathcal{S}(G ⨟ F) = \mathcal{S}G ⨟ \mathcal{S}F$ 由幺半函子的复合得到。□

定理 D.9 （来自定理 4.9）。 幺半范畴（以及严格幺半函子）与*produoidal* 范畴（以及 *produoidal* 函子）之间存在一个伴随，其中幺半轮廓是左伴随，而*Produoidal* 拼接范畴是右伴随。

证明。 如定理C.7中所述，我们再次得到$\mathcal{D}\mathbb{B}$ 由生成元与方程给出；因此，要指定一个严格幺半函子$\mathcal{D}\mathbb{B} \to \mathbb{M}$，只需指定生成元的像并使其满足这些方程。设（$\mathbb{M}$， $\otimes_M$， I_M）是一个幺半范畴。那么，一个严格幺半函子$\mathcal{D}\mathbb{B} \to \mathbb{M}$ 相当于以下数据。

- 对于每个对象 $X \in \mathbb{B}_{\text{对象}}$，一对对象 X^L， $X^R \in \mathbb{M}_{\text{对象}}$；
- 对于每个元素 $f \in \mathbb{B}(X;\ N)$，一个态射 $f_0 \in \mathbb{M}(X^L;\ X^R)$；
- 对于每个单位 $f \in \mathbb{B}(X;\ I)$，选择态射 $f_0 \in \mathbb{M}(X^L;\ I_M)$、 $g_0 \in \mathbb{M}(I_M;\ X^R)$；
- 对于每个态射 $f \in \mathbb{B}(A;\ X)$，选择态射 $f_0 \in \mathbb{M}(A^L;\ X^L)$ 和 $f_1 \in \mathbb{M}(X^R;\ A^R)$；

- 对于每个串行拆分 $f \in \mathbb{B}(A; X \lhd Y)$，选择态射 $f_0 \in \mathbb{M}(A^L; X^L)$，$f_1 \in \mathbb{M}(X^L; X^R)$，以及 $f_2 \in \mathbb{M}(X^R, A^R)$；
- 对每个并行拆分 $f \in \mathbb{B}(A; X \otimes Y)$，选取态射 $f_0 \in \mathbb{M}(A^L; X^L \otimes Y^L)$ 和 $f_1 \in \mathbb{M}(X^R \otimes Y^R; A^R)$。

使得对于每个预幺半结构

- $\alpha(a \fatsemi_1 b) = (c \fatsemi_2 d)$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes d_0)$，且 $(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = (\mathrm{id} \otimes d_1) \fatsemi c_1$ 属于 $\mathbb{M}$；
- $\lambda(a \fatsemi_1 b) = c = \rho(d \fatsemi_2 e)$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 \fatsemi (b_0 \otimes \mathrm{id}) = c_0 = d_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes e_0)$，且 $(b_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi a_1 = c_1 = (\mathrm{id} \otimes e_1) \fatsemi d_1$ 属于 $\mathbb{M}$；

并且满足

- $\psi_2(a \mid b \mid c) = (d \mid e \mid f)$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 \fatsemi (b_0 \otimes c_0) = d_0 \fatsemi e_0$，$b_1 \otimes c_1 = e_1 \fatsemi d_1 \fatsemi f_0$ 且 $(b_2 \otimes c_2) \fatsemi a_1 = f_1 \fatsemi d_2$ 属于 $\mathbb{M}$；
- $\psi_0(a) = (b \mid c \mid d)$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 = b_0 \fatsemi c_0$，$\mathrm{id}$ 为 $= c_1 \fatsemi b_1 \fatsemi d_0$，且 $a_1 = d_1 \fatsemi b_2$ 属于 $\mathbb{M}$；
- $\varphi_2(a \mid b \mid c) = d$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 \fatsemi (b_0 \otimes c_0) \fatsemi a_1 = d_0$ 属于 $\mathbb{M}$；
- $\varphi_0(a) = b$ 属于 $\mathbb{B} \Rightarrow a_0 \fatsemi a_1 = b_0$ 属于 $\mathbb{M}$。

另一方面，一个 产幺半函子 $F : \mathbb{B} \to \mathcal{T}\mathbb{M}$，也相当于以下数据。对于每个

- $X \in \mathbb{B}$对象，一个对象 $F(X) = (X^L, X^R) \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}$对象；
- $f \in \mathbb{B}(X; N)$，一个元素 $F(f) = f_0 \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}\binom{X^L}{X^R}; N)$；
- $f \in \mathbb{B}(X; I)$，一个单位 $F(f) = \langle f \parallel g \rangle \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}\binom{X^L}{X^R}; I_M)$
- $f \in \mathbb{B}(A; X)$，一个拼接箭头 $F(f) = \langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \rangle \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}\left(\binom{A}{B}, X\right)$；
- $f \in \mathbb{B}(A; X \lhd Y)$，一个拼接箭头 $F(f) = \langle f_0 \fatsemi \square \fatsemi f_1 \fatsemi \square \fatsemi f_2 \rangle \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}\left(\binom{A^L}{A^R}, \binom{X^L}{X^R} \lhd \binom{Y^L}{Y^R}\right)$；
- $f \in \mathbb{B}(A; X \otimes Y)$，一个拼接幺半箭头 $F(f) = \langle f_0 \fatsemi \square \otimes \square \fatsemi f_1 \rangle \in \mathrm{T}\ \mathbb{M}\left(\binom{A^L}{A^R}, \binom{X^L}{X^R} \otimes \binom{Y^L}{Y^R}\right)$；

使得对于每个预幺半结构

- $\alpha(a \mid b) = (c \mid d)$ 中 $\mathbb{B} \Rightarrow \alpha(Fa \mid Fb) = (Fc \mid Fd)$ 中$\mathcal{T}\mathbb{M}$；
- $\lambda(a \mid b) = c = \rho(d \mid e)$ 中 $\mathbb{B} \Rightarrow \lambda(Fa \mid Fb) = Fc = \rho(Fd \mid Fe)$ 中$\mathcal{T}\mathbb{M}$；并且使得

- $\psi_2(a \mid b \mid c) = (d \mid e \mid f)$ 中 $\mathbb{B} \Rightarrow \psi_2(Fa \mid Fb \mid Fc) = (Fd \mid Fe \mid Ff)$ 中$\mathcal{T}\mathbb{M}$；
- $\psi_0(a) = (b \mid c \mid d)$ 中 $\mathbb{B} \Rightarrow \psi_0(Fa) = (Fa \mid Fc \mid Fd)$ 中$\mathcal{T}\mathbb{M}$；
- $\varphi_2(a \mid b \mid c) = d$ 中 $\mathbb{B} \Rightarrow \varphi_2(Fa \mid Fb \mid Fc) = Fd$ 中$\mathcal{T}\mathbb{M}$；
- $\varphi_0(a) = b$ 在 $\mathbb{B} \Rightarrow \varphi_0(Fa) = Fb$ 在 $\mathcal{T}\mathbb{M}$。

根据定义，这些等式中的每一项都完全相等，从而建立了所需的伴随 . □

附录 E 正规化

E.1 正规化

定理 E.1（由定理 5.2）。 设 $\mathbb{V}_{\otimes, I, \lhd, N}$ 是一个 *produoidal* 范畴。预函子 $\mathcal{N}\mathbb{V}(\bullet;\ \bullet) = \mathbb{V}(\bullet;\ N \otimes \bullet \otimes N)$ 构成一个 预单子。此外，该预单子的 *Kleisli* 范畴是一个标准的 *produoidal* 范畴，具有以下顺序分裂、并行分裂以及单位。

$$\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B) = \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N);$$
$$\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B \otimes C) = \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N \otimes C \otimes N);$$
$$\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B \lhd C) = \mathbb{V}(A; (N \otimes B \otimes N) \lhd (N \otimes C \otimes N));$$
$$\mathcal{N}\mathbb{V}(A;I) = \mathbb{V}(A;N);$$
$$\mathcal{N}\mathbb{V}(A;N) = \mathbb{V}(A;N).$$

证明。 我们为以下预单子定义如下乘法和单位： 预单子， $\mathcal{N}\mathbb{V}$。它们由 produoidal 范畴 $\mathbb{V}$ 的松弛器和 Yoneda 同构构造而成；因此，根据相干性，它们必定是结合的且幺元的。单位定义为

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{V}(A;B) & \cong & \text{(by unitality of } \mathbb{V}) \\
\mathbb{V}(A;I \otimes B \otimes I) & \to & \text{(by the laxators of } \mathbb{V}) \\
\mathbb{V}(A;N \otimes B \otimes N) & = & \text{(by definition)} \\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;B). &&
\end{array}$$

乘法定义如下：

$$\begin{array}{lcl}
\int^{B \in \mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A;B) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(B;C) & = & \text{(by definition)} \\
\int^{B \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N) \times \mathbb{V}(B; N \otimes C \otimes N) & \cong & \text{(by Yoneda reduction)} \\
\mathbb{V}(A; N \otimes N \otimes C \otimes N \otimes N) & \to & \text{(by laxators of } \mathbb{V}) \\
\mathbb{V}(A; N \otimes C \otimes N) & = & \text{(by definition)} \\
\mathcal{N}\mathbb{V}(A;C). &&
\end{array}$$

现在让我们构造单位子和结合子。再次说明，它们由以下各项构造而成： 产幺半范畴 $\mathbb{V}$、结合子和单位子 $\mathbb{V}$以及 Yoneda 同构。我们先考虑右单位子。

$$\begin{array}{lcl}
\int^{X \in \mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; B \otimes X) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) & = & \text{(by definition)} \\
\int^{X \in \mathcal{N}\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N \otimes X \otimes N) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) & \cong & \text{(by associativity of } \mathbb{V}) \\
\int^{X \in \mathcal{N}\mathbb{V}, P \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes P) \times \mathbb{V}(P; N \otimes X \otimes N) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) & = & \text{(by definition)} \\
\int^{X \in \mathcal{N}\mathbb{V}, P \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes P) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(P;X) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) & \cong & \text{(by Yoneda reduction)} \\
\int^{P \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes P) \times \mathcal{N}\mathbb{V}(P;N) & = & \text{(by definition)} \\
\int^{P \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes P) \times \mathbb{V}(P;N) & \cong & \text{(by unitality)} \\
\int^{P \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N). &&
\end{array}$$

现在我们考虑左单位子。

$$\begin{aligned}
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; X\otimes B)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes X\otimes N\otimes B\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) && \cong \text{ (by associativity of } \mathbb{V})\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes B\otimes N)\times\mathbb{V}(P; N\otimes X\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes B\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P;X)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X;N) && \cong \text{ (by Yoneda reduction)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes B\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P;N) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes B\otimes N)\times\mathbb{V}(P;N) && \cong \text{ (by unitality)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes N).
\end{aligned}$$

最后，我们考察结合子。我们可以分两步来说明方程两边

$$\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; B\otimes X)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; C\otimes D) \cong \int^{Y\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; Y\otimes D)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(Y; B\otimes C)$$

都同构于 $\mathbb{V}(A;\ N\otimes B\otimes N\otimes C\otimes N\otimes D\otimes N)$。第一边通过

$$\begin{aligned}
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; B\otimes X)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; C\otimes D) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes N\otimes X\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; C\otimes D) && \cong \text{ (by associativity)}\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes P)\times\mathbb{V}(P; N\otimes X\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; C\otimes D) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{X\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes P)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P;X)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; C\otimes D) && \cong \text{ (by Yoneda reduction)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes P)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P; C\otimes D) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes P)\times\mathbb{V}(P; N\otimes C\otimes N\otimes D\otimes N) && \cong \text{ (by associativity)}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(A; N\otimes B\otimes N\otimes C\otimes N\otimes D\otimes N),$$

而第二侧为

$$\begin{aligned}
&\int^{Y\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; Y\otimes D)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(Y; B\otimes C) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{Y\in\mathcal{N}\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; N\otimes Y\otimes N\otimes D\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(Y; B\otimes C) && \cong \text{ (by associativity)}\\
&\int^{Y\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes D\otimes N)\times\mathbb{V}(P; N\otimes Y\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(Y; B\otimes C) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{Y\in\mathcal{N}\mathbb{V},P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes D\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P;X)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(X; B\otimes C) && \cong \text{ (by Yoneda reduction)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes D\otimes N)\times\mathcal{N}\mathbb{V}(P; B\otimes C) && = \text{ (by definition)}\\
&\int^{P\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A; P\otimes D\otimes N)\times\mathbb{V}(P; N\otimes B\otimes N\otimes C\otimes N) && \cong \text{ (by associativity)}
\end{aligned}$$

$\mathbb{V}(A;\ N \otimes B \otimes N \otimes C \otimes N \otimes D \otimes N)$。

正是因为它们由基础 produoidal 范畴的相干态射构成 $\mathbb{V}$，我们知道它们满足五边形方程和三角形方程，并定义了一个预幺半范畴。序列预幺半结构的单位子和结合子以类似方式定义。最后，我们定义 $\mathcal{N}\mathbb{V}$ 的松弛子，使其成为一个 produoidal 范畴。

第一个松弛子，

$$\psi_2 : \mathcal{N}\mathbb{V}(A; (B_1 \lhd C_1) \otimes (B_2 \lhd C_2)) \longrightarrow \mathcal{N}\mathbb{V}(A; (B_1 \otimes B_2) \lhd (C_1 \otimes C_2)),$$

由以下推理定义。

$\mathrm{N}\mathbb{V}(\ A; (B_1 \lhd C_1)\ \otimes (B_2 \lhd C_2))=$ (按定义)$\mathbb{V}(A;\ N \otimes ((N \otimes B_1 \otimes N)\ \lhd (N \otimes C_1 \otimes N))\ \otimes N \otimes ((N \otimes B_2 \otimes N)\ \lhd (N \otimes C_2 \otimes N))\ \otimes N) \to$ (依据 ψ_2 的 $\mathbb{V}$)$\mathbb{V}(A; ((N \otimes N \otimes B_1 \otimes N)\ \lhd (N \otimes N \otimes B_2 \otimes N))\ \otimes ((N \otimes N \otimes B_2 \otimes N \otimes N)\ \lhd (N \otimes C_2 \otimes N \otimes N))) \to$ (依据 ψ_2 的 $\mathbb{V}$)$\mathbb{V}(A; (N \otimes N \otimes B_1 \otimes N \otimes N \otimes N \otimes B_2 \otimes N \otimes N)\ \lhd (N \otimes N \otimes C_1 \otimes N \otimes N \otimes N \otimes C_2 \otimes N \otimes N)) \to$ (依据 φ_2 的 $\mathbb{V}$)$\mathbb{V}(A; (N \otimes N \otimes B_1 \otimes N \otimes B_2 \otimes N \otimes N)\ \lhd (N \otimes N \otimes C_1 \otimes N \otimes C_2 \otimes N \otimes N))=$ (按定义) $\mathrm{N}\mathbb{V}(\ A; (B_1 \otimes B_2)\ \lhd (C_1 \otimes C_2))$。

其余松弛器是由单位性应用产生的同构，或者本身就是恒等态射。

$$\psi_0 : \mathcal{N}\mathbb{V}(A, I) \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; I \lhd I)$$
$$\varphi_2 : \mathcal{N}\mathbb{V}(A; N \otimes N) \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; N)$$
$$\varphi_0 : \mathcal{N}\mathbb{V}(A; I) \xrightarrow{id} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; N)$$

这表明所得的范畴也是一个正规 produoidal 范畴。 □

命题 E.2。 正规化扩展为 *produoidal* 范畴 $\mathcal{N}$： **Produo** $\to$ **Produo**。

证明。设 $\mathbb{V}_{\otimes}$、$_I$、$_{\lhd}$、$_N$ 和 $\mathbb{W}_{\oslash}$、$_J$、$_{\blacktriangleleft}$、$_M$ 是 produoidal 范畴。N 将 $\mathbb{V}$ 映射到其正规化 $\mathrm{N}\,\mathbb{V}$。设 $(F,\ F_{\otimes},\ F_I,\ F_{\lhd},\ F_N) : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ 是一个 produoidal 函子。那么，$\mathrm{N}\,F : \mathrm{N}\,\mathbb{V} \to \mathrm{N}\mathbb{W}$ 的底层函子在对象上由 F 定义，在态射上则由下式定义

$$\begin{aligned}
&\mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N) && = && \text{(by definition)}\\
&\int^{X,Y \in \mathbb{V}} \mathbb{V}(A; X \otimes B \otimes Y) \times \mathbb{V}(X; N) \times \mathbb{V}(Y; N) && \to && \text{(induced by } F_{\otimes}, F_N)\\
&\int^{X,Y \in \mathbb{V}} \mathbb{W}(FA; FX \oslash FB \oslash FY) \times \mathbb{W}(FX; M) \times \mathbb{W}(FY; M) && \to && \text{(inclusion, universal prop. of coend)}\\
&\int^{P,Q \in \mathbb{W}} \mathbb{W}(FA; P \oslash FB \oslash Q) \times \mathbb{W}(P; M) \times \mathbb{W}(Q; M) && = && \text{(by definition)}
\end{aligned}$$

$\mathbb{W}(FA;\ M \oslash FB \oslash M)$。

$\mathcal{N}F_{\otimes}$和 $\mathcal{N}F_{\lhd}$的定义类似，并且 $\mathcal{N}F_N$是 F_N。我们有 $\mathcal{N}\mathbf{Id}_{\mathbb{V}} = \mathbf{Id}_{\mathcal{N}\mathbb{V}}$，因为左侧的所有数据都由 $\mathcal{N}\mathbb{V}$上的恒等态射给出；如果 $G :\ \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ 是另一个产幺半函子，那么$\mathcal{N}(G \fatsemi F) = \mathcal{N}G \fatsemi \mathcal{N}F$由 F和 G的分量的自然性可得。 □

定理 E.3（定理 5.3）。 函子 $\mathcal{N}$ ： **Produo** $\to$ **Produo** 由命题*E.2* 给出，是一个幂等单子。

证明。 设 $\mathbb{V}_{\otimes}$、I、$\triangleleft$、N是一个 produoidal 范畴，并设 $\triangleleft_N$、 $\otimes_N$、 N分别表示其正规化 $\mathcal{N}\mathbb{V}$中的串行拆分、并行拆分和单位。

该单子具有单位 η ，其在 $\mathbb{V}$ 处的分量为以下 produoidal 函子 $\eta_{\mathbb{V}}$ ： $\mathbb{V} \to \mathcal{N}\mathbb{V}$。其底层函子是由 预单子 [Rom22（引理 3）诱导的函子：它在对象上是恒等态射，并通过预单子的单位作用于态射。由于以下 produoidal 函子的各分量仅由松弛器和相干映射构造而成，因此它们保持松弛器和相干映射。

$$
\begin{aligned}
&\eta_{\otimes} : \mathbb{V}(A; B \otimes C) \xrightarrow{\lambda,\rho} \mathbb{V}(A; I \otimes B \otimes I \otimes C \otimes I) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{V}(A; N \otimes B \otimes N \otimes C \otimes N),\\
&\eta_I : \mathbb{V}(A; I) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{V}(A; N),\\
&\eta_{\triangleleft} : \mathbb{V}(A; B \triangleleft C) \xrightarrow{\lambda,\rho} \mathbb{V}(A; (I \otimes B \otimes I) \triangleleft (I \otimes C \otimes I)) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{V}(A; (N \otimes B \otimes N) \triangleleft (N \otimes C \otimes N)),\\
&\eta_N : \mathbb{V}(A; N) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{V}(A; N).
\end{aligned}
$$

该单子具有乘法 μ，其在 $\mathbb{V}$处的分量是以下 同构 $\mu_{\mathbb{V}}$： $\mathcal{N}\mathcal{N}\mathbb{V} \cong \mathcal{N}\mathbb{V}$，这是 produoidal 范畴的同构（说明该单子是幂等的）。其底层函子在对象上是恒等态射，并通过以下方式作用于态射：

$$
\mathcal{N}\mathcal{N}\mathbb{V}(A; B) = \mathcal{N}\mathbb{V}(A; N \otimes_N B \otimes_N N) \overset{\lambda,\rho}{\cong} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; B).
$$

以下自然变换使其成为一个 produoidal 函子：

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\otimes} : \mathcal{N}\mathcal{N}\mathbb{V}(A;\ B \otimes_{NN} C) = \mathcal{N}\mathbb{V}(A;\ N \otimes_N B \otimes_N N \otimes_N C \otimes_N N) \overset{\lambda,\rho}{\cong} \mathcal{N}\mathbb{V}(A;\ B \otimes_N C),\ ,\\
&\mu_N = \mu_I : \mathcal{N}\mathcal{N}\mathbb{V}(A; N) = \mathcal{N}\mathbb{V}(A; N),\\
&\mu_{\triangleleft} : \mathcal{N}\mathcal{N}\mathbb{V}(A; B \triangleleft_{NN} C) = \mathcal{N}\mathbb{V}(A; (N \otimes_N B \otimes_N N) \triangleleft_N (N \otimes_N C \otimes_N N)) \overset{\lambda,\rho}{\cong} \mathcal{N}\mathbb{V}(A; B \triangleleft_N C).
\end{aligned}
$$

.

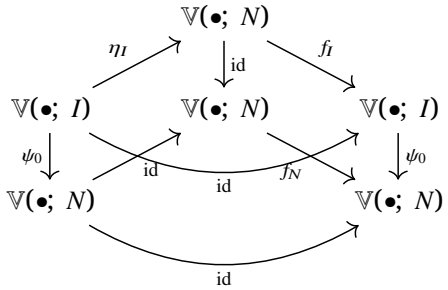
最后，我们验证单子定律。 $\eta_{\mathcal{N}\mathbb{V}} \fatsemi \mu_{\mathbb{V}}$ 在对象上是恒等态射；在态射上，它先应用左、右单位子，再应用它们的逆，因此其底层函子等于恒等函子。自然变换的分量也都是恒等态射，因为松弛子 φ_0 对于 $\mathcal{N}\mathbb{V}$ 是恒等态射；其他分量则由单位子及其逆复合而成。另一条单位律的证明也类似（使用图 36 中的幺元性相干方程）。 $\mu_{\mathcal{N}\mathbb{V}} \fatsemi \mu_{\mathbb{V}}$ 和 $\mathcal{N}\mu_{\mathbb{V}} \fatsemi \mu_{\mathbb{V}}$ 在对象上是恒等态射；在态射上，它们相当于将左、右单位子各应用两次，其分量也类似。 □

引理 E.4。 一个产幺半范畴 $\mathbb{V}$ 在其为正规时，对于规范化单子恰好具有一个代数结构；否则不具有任何代数结构。

证明。 设 $(f_{\mathrm{map}}, f_{\otimes}, f_I, f_{\triangleleft}, f_N)$： $\mathcal{N}\mathbb{V} \to \mathbb{V}$是一个代数。这意味着，以下带有规范化单子的单位和乘法的交换图必须交换。



现在，考虑松弛子 ψ_0: $\mathbb{V}(\bullet;\ I) \to \mathbb{V}(\bullet;\ N)$ 如何通过这些映射传递。



我们得出 t　帽子 $\eta_I = \psi_0$，而且还满足 f_N =id。因此， ψ_0 是可逆的，而 f_I 必定是它的逆。我们已 已经证明，产幺半范畴 $\mathbb{V}$ 必须是正规的。

现在我们将证明，这已经确定了函子 f 的全部内容。我们知道 $\eta_\otimes$， $\eta_\triangleleft$， η_{map} 是同构，因为它们由单位子、结合子和松弛子 ψ_0 构造而成，而在此情形下， ψ_0 是一个同构。这意味着 $f_\otimes$， $f_\triangleleft$， f_{map} 必须是它们的逆。根据构造，这些态射满足所有相干态射。□

定理 E.5 (由定理 5.4)**.** 正规化确定了 *produoidal* 范畴与正规产双幺半群范畴之间的一个伴随，

$$\mathcal{N} : \mathbf{Produo} \rightleftharpoons \mathbf{nProduo} : \mathcal{U}$$

也就是说，$\mathcal{N}\mathbb{V}$ 是位于 $\mathbb{V}$之上的自由正规 *produoidal* 范畴。

证明。 我们知道，规范化单子的代数恰好是正规产双幺半群范畴（引理 E.4）。我们还知道，规范化单子是幂等的（定理 5.3）。这意味着其代数范畴的遗忘函子是完全忠实的，因此，代数态射恰好是 produoidal 函子。由此，单子代数范畴的典范伴随恰好是到正规产双幺半群范畴的伴随。□

E.2 对称正规化

定理 E.6 （定理 5.6）。 设 $\mathbb{V}_{\otimes,\ I,\ \triangleleft,\ N}$ 是一个 对称 *produoidal* 范畴。预函子$\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$（$\bullet;\ \bullet$）$= \mathbb{V}$（$\bullet;\ N \otimes \bullet$）构成一个 预单子。此外，该预单子的 *Kleisli* 范畴是一个正规对称 *produoidal* 范畴，具有以下顺序拆分、并行分裂和单位。

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B) &= \mathbb{V}(A;N\otimes B);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B\otimes_N C) &= \mathbb{V}(A;N\otimes B\otimes C);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B\triangleleft_N C) &= \mathbb{V}(A;(N\otimes B)\triangleleft(N\otimes C));\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;N) &= \mathbb{V}(A;N);\\
\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;I) &= \mathbb{V}(A;N).
\end{aligned}$$

证明。 该 预单子 的单位和乘法基本上以与定理 E.1 的证明相同的方式给出。同样，$\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 的结合子、单位子和松弛器也以基本相同的方式给出，不过需要利用 $\mathbb{V}$ 具有对称性这一事实。此外，我们还需要为 $\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 定义一个对称自然同构。其分量定义如下，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A;B\otimes C) && = \quad \text{(根据定义)}\\
&\mathbb{V}(A;N\otimes B\otimes C) && \cong \quad \text{(根据结合律)}\\
&\int^{X\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A;N\otimes X)\times\mathbb{V}(X;B\otimes C) && \cong \text{(根据 } \mathbb{V}\text{的对称性)}\\
&\int^{X\in\mathbb{V}} \mathbb{V}(A;N\otimes X)\times\mathbb{V}(X;C\otimes B) && \cong \quad \text{(根据结合律)}\\
&\mathbb{V}(A;N\otimes C\otimes B) && = \quad \text{(根据定义)}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}(A; C \otimes B).$$

这些满足六边形恒等式和对称性恒等式，因为 $\mathbb{V}$满足这些恒等式，而我们只使用 $\mathbb{V}$的对称性和相干性。因此，我们得到一个正规对称 produoidal 范畴 $\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$。 □

定义 E.7（对称 produoidal 函子）。 对称 produoidal 函子 是一个 produoidal 函子F： $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ 并且还保持对称性，即 $F_\otimes \fatsemi \sigma_\mathbb{V} = \sigma_\mathbb{W} \fatsemi F_\otimes$。我们将 **SymProduo**记作由对称 produoidal范畴和对称 produoidal 函子组成的范畴。

命题 E.8。 对称正规化扩展为 对称 *produoidal*范畴$\mathcal{N}\sigma$ 上的一个自函子： **SymProduo** $\to$ **SymProduo**。

证明。 该构造与命题 E.2中的基本相同。唯一需要检查的是，$\mathcal{N}_\sigma F$ 在那里构造的，在 F保持对称性时也保持对称性（见定理 E.6）。这是因为 $\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 的对称性由 $\mathbb{V}$的结合律和对称性构造而成，而 $\mathcal{N}_\sigma F_\otimes$自身由 $F_\otimes$、结合律以及 $\mathbb{V}$的对称性构造，因此必然保持这些结构。 □

定理 E.9。 函子 $\mathcal{N}\sigma$ ： **SymProduo** $\to$ **SymProduo** 来自命题 *E.2* 是一个幂等单子。

证明。 该构造本质上与定理 E.3 中的构造相同。只需检查以这种方式构造的单位和乘法保持对称性。事实上， η_σ： $\mathbb{V} \to \mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 是对称产幺半 的，因为 $\eta_\otimes$ 由与对称性可交换的自然结合子和松弛器构造而成。 □

引理 E.10。 一个 对称产幺半 范畴 $\mathbb{V}$ 在正规时对于对称正规化单子恰好具有一个代数结构，否则不具有任何代数结构。

证明。 证明基本沿用引理 E.4中的相同推理，将该构造替换为对称版本，并使用前面的引理。 □

定理 E.11（定理 5.7）。 对称正规化确定了以下范畴之间的一个伴随：对称产幺半范畴与正规对称产幺半 范畴，

$$\mathcal{N}_\sigma\colon \ \mathbf{SymProduo} \rightleftharpoons \mathbf{nSymProduo}\colon \ \mathcal{U}$$

我们在此定义正规对称 *produoidal* 范畴 **nSymProduo**，以对称 *produoidal* 函子作为函子，并得到一个满遗忘函子 $\mathcal{U}$。

也就是说，$\mathcal{N}_\sigma\mathbb{V}$ 是建立在对称 *produoidal* 范畴$\mathbb{V}$之上的自由对称正规 *produoidal* 范畴。

证明。 证明基本上遵循定理 E.5，现在使用前述引理和引理 E.10。 □

E.3 双幺半范畴与产幺半范畴的正规化

我们推测，produoidal 范畴 的正规化仍可看作源自 Garner 和 López Franco [GF16]所概述的双幺半范畴正规化过程。每个produoidal 范畴 $\mathbb{V}$ 都会在其预层范畴 $\hat{\mathbb{V}} := [\mathbb{V}^{\mathrm{op}}, \mathbf{集合}]$上诱导出一个闭双幺半结构$\hat{}$[Day70b], [Day70a]；事实上，根据 Day 的结果，任何预幺半结构都会在预层范畴上诱导出一个闭幺半结构；此外，还可以确认， $\mathbb{V}$ 上的两个闭幺半结构以使该范畴成为双幺半范畴的方式相互作用（定理 I.6）。

将双幺半范畴 $\hat{\mathbb{V}}$正规化后，得到预单子 $\mathrm{N}\,\mathbb{V}$（或等价地，由 $\mathrm{N}\,\mathbb{V}$在 $\hat{\mathbb{V}}$上诱导的余连续单子）的代数范畴 $\mathrm{EM}(\mathrm{N}\mathbb{V})$。$\mathrm{EM}(\mathrm{N}\mathbb{V})$ 现在是正规双幺半的；此外，$\hat{\mathbb{V}}$ 上张量的闭性也随之传递，使 $\mathrm{EM}(\mathrm{N}\mathbb{V})$ 同样具有闭性。现在注意到，我们有如下同构：$\mathrm{EM}(\mathrm{N}\,\mathbb{V}) \cong [\mathrm{N}\mathbb{V}^{\mathrm{op}}, \text{集合}],$；也就是说，代数范畴就是预单子 $\mathrm{N}\mathbb{V}$ 在 Prof 中的 Kleisli对象的预层范畴。因此，$\mathrm{EM}(\mathrm{N}\mathbb{V})$ 的闭幺半结构必定对应于 $\mathrm{N}\,\mathbb{V}$的预幺半结构，并且这些结构相互作用，使 $\mathrm{N}\mathbb{V}$ 成为产幺半的。

附录 F
单体上下文

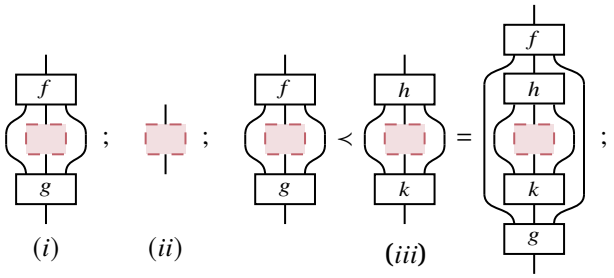


图 29：一般的单体上下文 (i)、恒等态射 (ii) 和复合 (iii)。

备注 F.1（幺半上下文代数）。 我们明确列出构成 幺半上下文正规 produoidal 代数的所有运算。为简洁起见，我们采用一维记法，但我们认为，将其转换为二维弦图后，概念图景会更加清晰。

(恒等态射) $(\mathrm{id}_A \fatsemi \blacksquare \fatsemi \mathrm{id}_B)$ (复合) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (h \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi k) = (f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes h \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes k \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g)$,

(单位作用)
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec \mathrm{h} = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{h} \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g$, (顺序拆分第一作用) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi \mathrm{h}) \prec_1 (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes v \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi \mathrm{h}$, (顺序拆分第二作用)

$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h) \prec_2 (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes u \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi (\mathrm{id}_{K\otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q\otimes L}) \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes v \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h$,

(顺序拆分第三作用) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v \fatsemi (\mathrm{id}_R \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_S) \fatsemi w) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes v \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes R} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{S\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes w \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g$,

(Seq. 左结合律)
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h) \prec_1^{\alpha} (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v \fatsemi (\mathrm{id}_R \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_S) \fatsemi w) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes v \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes R} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{S\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes w \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h$,

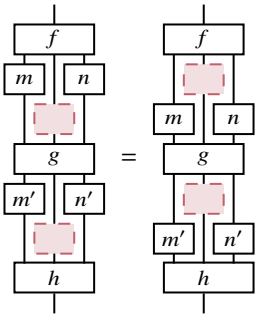


图 30：单体上下文的串行拆分的二自然性。

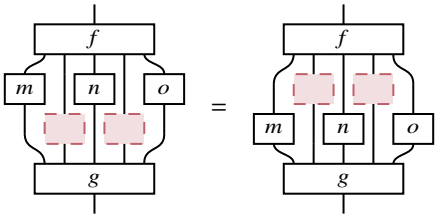


图 31：单体上下文的并行拆分。

(序列的右结合律) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h) \prec_2^{\alpha} (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v \fatsemi (\mathrm{id}_R \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_S) \fatsemi w) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes u \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi (\mathrm{id}_{K \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes L}) \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes v \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi (\mathrm{id}_{K \otimes R} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{S \otimes L}) \fatsemi (\mathrm{id}_L \otimes w \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h,$

（串行左单位子）$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h) \prec^{\lambda} u = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h,$

（串行右单位子）$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h) \prec^{\rho} u = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes u \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi h,$

(Par. 分裂第一个作用) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec_1 (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_{N \otimes X' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q \otimes N} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes v \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y' \otimes O}) \fatsemi g,$

(Par. 分裂第二动作) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec_2 (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q) \fatsemi v) = f \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes X \otimes N} \otimes u \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{O \otimes Q}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes Y \otimes N} \otimes v \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g,$

(Par. 分裂第三动作) $(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_R) \fatsemi v) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes w \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g,$

(Par. 左结合律)
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec_1^{\alpha} (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_R) \fatsemi v)$
$= f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_{N \otimes X \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes N} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi$
$(\mathrm{id}_M \otimes v \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y \otimes O}) \fatsemi g,$

（并行组合的右结合律）
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec_2^{\alpha} (u \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_R) \fatsemi v)$
$= f \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes X \otimes N} \otimes u \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes O}) \fatsemi$
$(\mathrm{id}_{M \otimes Y \otimes N} \otimes v \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g,$

（旁注：左单位子）
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec^{\lambda} u = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes$
$\mathrm{id}_{N \otimes X' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes Y \otimes N} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g = f \fatsemi (\mathrm{id}$
$_{M \otimes Y \otimes N} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes u \otimes \mathrm{id}_{N \otimes X' \otimes O}) \fatsemi g,$

（旁注：右单位子）
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec^{\rho} v = f \fatsemi (\mathrm{id}$
$_{M \otimes X \otimes N} \otimes v \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y' \otimes O}) \fatsemi g = f \fatsemi (\mathrm{id}$
$_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes X \otimes N} \otimes v \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g,$

（松弛子，左侧）
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g) \prec_1^{\psi} (j_0 \fatsemi (\mathrm{id}_U \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_V) \fatsemi j_1 \fatsemi (\mathrm{id}$
$_{U'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{V'}) \fatsemi j_2) \prec_2^{\psi} (k_0 \fatsemi (\mathrm{id}_W \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_T) \fatsemi k_1 \fatsemi (\mathrm{id}_{W'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{T'}) \fatsemi k_2) =$
$f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes j_0 \otimes \mathrm{id}_N \otimes k_0 \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes U} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{V \otimes N \otimes U'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{V' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{i}$
$\mathrm{d}_M \otimes j_1 \otimes \mathrm{id}_N \otimes k_1 \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes W} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{T \otimes N \otimes W'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{T' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}$
$_M \otimes j_2 \otimes \mathrm{id}_N \otimes k_2 \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi g,$

(松弛子，右侧)
$(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi \mathrm{h}) \prec_1^{\psi} (j_0 \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes$
$\mathrm{id}_R) \fatsemi j_1) \prec_2^{\psi} (k_0 \fatsemi (\mathrm{id}_{P'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R'}) \fatsemi k_1) = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes j_0 \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}$
$_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes j_1 \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes k_0 \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi (\mathrm{id}$
$_{K \otimes P'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{Q'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R' \otimes L}) \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes k_1 \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi \mathrm{h}.$

注记 F.2： 在以下推导中，我们约定，孤立的 (■) 实际上表示 $(\mathrm{id}_I \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_I)$。

命题 F.3（来自命题 6.2）。 幺元上下文 构成一个范畴。幺元上下文的复合 是结合的且幺元的。

证明。 我们首先验证幺半上下文的复合是结合的。

$((f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (f' \fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi g')) \prec (f'' \fatsemi (\mathrm{id}_{M''} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N''}) \fatsemi g'') \quad =$

$$
\begin{aligned}
&(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes f' \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes M'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N'\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g' \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (f'' \fatsemi (\mathrm{id}_{M''} \otimes \blacksquare \otimes \\
&\mathrm{id}_{N''}) \fatsemi g'') = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes f' \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes M'} \otimes f'' \otimes \mathrm{id}_{N\otimes N'}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes M'\otimes M''} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N''\otimes N'\otimes N}) \fatsemi \\
&(\mathrm{id}_{M\otimes M'} \otimes g'' \otimes \mathrm{id}_{N'\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_N \otimes g' \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g \qquad = f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes (f' \fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes f'' \otimes \mathrm{id}_{N'})) \otimes \\
&\mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_{M\otimes M'\otimes M''} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N''\otimes N'\otimes N}) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes ((\mathrm{id}_{M'} \otimes g'' \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi g') \otimes \mathrm{id}_N) \\
&\fatsemi g \qquad = (f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (f' \fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes f'' \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M'\otimes M''} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N''\otimes N'}) \\
&\fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes g'' \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi g') = (f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec ((f' \fatsemi (\mathrm{id}_{M'} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N'}) \fatsemi g') \prec (f'' \fatsemi \\
&(\mathrm{id}_{M''} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N''}) \fatsemi g''))
\end{aligned}
$$

现在检验恒等态射的左单位性,

$$
\begin{aligned}
(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) \prec (\mathrm{id}_X \fatsemi (\mathrm{id}_I \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_I) \fatsemi \mathrm{id}_Y) &= \\
(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) &= \\
(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g), &
\end{aligned}
$$

以及右单位性,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}_A \fatsemi (\mathrm{id}_I \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_I) \fatsemi \mathrm{id}_B) \prec (f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g) &= \\
(\mathrm{id}_A \fatsemi (\mathrm{id}_I \otimes f \otimes \mathrm{id}_I) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi (\mathrm{id}_I \otimes g \otimes \mathrm{id}_I) \fatsemi \mathrm{id}_B) &= \\
(f \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi g). &
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

命题 F.4 （来自命题 6.5）。 幺半上下文构成一个正规 产幺半范畴，其单位、顺序分解方式和并行分解方式为。

证明。 引理 F.5至 F.7 为序列前幺半结构构造结合子和单位子，而引理 F.8 至 F.10 定义并行前幺半结构的结合子和单位子。由于它们全部由 Yoneda 同构构造而成，因此必然满足相干方程。引理 F.11定义松弛器，同样仅使用 Yoneda 同构 以及 $\mathbb{C}$中的复合。为简洁起见，我们在证明中省略对象的张量积，将 XY写作 $X \otimes Y$。 □

引理 F.5 （幺半上下文序列结合子）。 我们构造一个自然同构

$$
(\prec_2^{\alpha}) : \int^{U}_{V \in \mathcal{MC}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \cong \int^{U}_{V \in \mathcal{MC}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) : (\prec_1^{\alpha}),
$$

满足*produoidal* 范畴的相干方程。该同构在等价类的代表元上定义如下

$$
\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_2) \prec_2^{\alpha} (g_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_2) = \\
&((h_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_2) \mid (k_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_2))
\end{aligned}
$$

当且仅当

$$
\begin{aligned}
&f_0 \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi f_1 \fatsemi (\text{标识} \otimes g_0 \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes g_1 \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes g_2 \otimes \text{标识}) \fatsemi f_2 = \\
&h_0 \fatsemi (\text{标识} \otimes k_0 \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes k_1 \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi (\text{标识} \otimes k_2 \otimes \text{标识}) \fatsemi h_1 \fatsemi (\text{标识} \otimes \blacksquare \otimes \text{标识}) \fatsemi h_2。
\end{aligned}
$$

证明。首先，我们在左侧与态射四元组的集合之间构造一个同构。该同构将这一对

$$
\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_2) \mid (g_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_2) \\
\text{to} \quad &(f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes g_0 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes g_2 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_2).
\end{aligned}
$$

该同构通过以下余端推导构造。

$$\begin{aligned}
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O,P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; MXN) \times \mathbb{C}(MYN; OUP) \times \mathbb{C}(OVP; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O,P,Q,R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; MXN) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} MYN \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(U; OX'P) \times \mathbb{C}(OY'P; QX''R) \times \mathbb{C}(QY''R; V) && \stackrel{y_2}{\cong} \\
&\int^{M,N,O,P,Q,R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; MXN) \times \mathbb{C}(MYN; OX'P) \times \mathbb{C}(OY'P; QX''R) \times \mathbb{C}(QY''R; B).
\end{aligned}$$

现在我们构造右侧与同一组态射四元组之间的一个同构。该同构将这一对

$$(h_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_2) \mid (k_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_2))$$

至（$h_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes k_0 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes k_2 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_2$）。

$$\begin{aligned}
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O,P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; MUN) \times \mathbb{C}(MVN; OX''P) \times \mathbb{C}(OY''P; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O,P,Q,R \in \mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ OX''P \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(OY''P; B) \times \mathbb{C}(U; MXN) \times \mathbb{C}(MYN; QX'R) \times \mathbb{C}(QY'R; V) && \stackrel{y_2}{\cong} \\
&\int^{M,N,O,P,Q,R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; MXN) \times \mathbb{C}(MYN; QX'R) \times \mathbb{C}(QY'R; OX''P) \times \mathbb{C}(OY''P; B).
\end{aligned}$$

复合这两个同构，我们得到所需的结合子。由于它完全由Yoneda 同构复合而成，因此它必定满足 produoidal 范畴（定义I.5）中的相干方程。□

引理 F.6（幺半上下文序贯左单位子）。我们构造一个自然同构

$$(\prec^{\lambda}) : \int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right),$$

满足产幺半范畴的相干方程。该同构在等价类的代表元上定义为

$$\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi f_2) \prec^{\lambda} g && = \\
&f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi f_2.
\end{aligned}$$

证明。 我们需要证明该函数是良定义的，并且在取商后确实诱导出一个同构。我们通过余端演算构造该同构来证明这一点。

$$\begin{aligned}
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, P,Q,R,S \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; PUQ) \times \mathbb{C}(PVQ; RXS) \times \mathbb{C}(RYS; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}, R,S \in \mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ RXS \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(RYS; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \stackrel{y_2}{\cong} \\
&\int^{R,S \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; RXS) \times \mathbb{C}(RYS; B) && \stackrel{\text{def}}{=} \\
&\mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

由于它完全由 Yoneda 同构构成，因此必然满足produoidal 范畴（定义I.5）的相干方程。 □

引理 F.7 (单体上下文顺序右单位子)。 我们构造一个自然同构

$$(\prec^{\rho}) : \int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$$

满足 *produoidal* 范畴的一致性方程。此同构在等价类的代表元上定义如下

$$\begin{aligned} &(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi f_2) \prec^{\rho} g \qquad = \\ &f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_K \otimes g \otimes \mathrm{id}_L) \fatsemi f_2. \end{aligned}$$

证明。 如上所述，我们通过余端演算来完成：

$$\begin{aligned} &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \triangleleft \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \overset{\text{def}}{=} \\ &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}, P,Q,R,S \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; PXQ) \times \mathbb{C}(PYQ; RUS) \times \mathbb{C}(RVS; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \overset{\text{def}}{=} \\ &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}, P,Q,R,S \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; PXQ) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} PYQ \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; N\right) && \overset{y_2}{\cong} \\ &\int^{R,S \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; RXS) \times \mathbb{C}(RYS; B) && \overset{\text{def}}{=} \\ &\mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

由于它完全由 Yoneda 同构构成，因此必定满足produoidal 范畴（定义I.5）的一致性方程。 □

引理 F.8 (单体上下文并行结合子)。 我们构造一个自然同构

$$(\prec_2^{\alpha}) : \int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \cong \int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) : (\prec_1^{\alpha})$$

完全由 *Yoneda* 同构构成。此同构在等价类的代表元上定义如下

$$\begin{aligned} &(f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1) \prec_1^{\alpha} (g_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_1) \qquad = \\ &(h_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_1) \mid (j_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi j_1) \end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned} &f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g_0 \otimes \mathrm{id}_{N \otimes X \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes N} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g_1 \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y \otimes O}) \\ &\fatsemi f_1 = h_0 \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes X \otimes N} \otimes j_0 \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{R \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes Y \otimes N} \otimes j_1 \otimes \mathrm{id}_O) \\ &\fatsemi h_1, \text{证明。 左侧与以下集合同构，} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=} \\ &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; M \otimes X \otimes N \otimes U \otimes O) \times \mathbb{C}(M \otimes Y \otimes N \otimes V \otimes O; B) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \overset{y_2}{\cong} \\ &\int^{U \in \mathcal{M}\mathbb{C}, M,N,O,P,Q \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; M \otimes X \otimes P) \times \mathbb{C}(P; N \otimes U \otimes O) \times \mathbb{C}(M \otimes Y \otimes Q; B) \\ &\qquad \times \mathbb{C}(N \otimes V \otimes O; Q) \times \mathcal{M}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=} \end{aligned}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},M,M',N',O',P,Q\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;M\otimes X\otimes P)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(M\otimes Y\otimes Q;B)\times\mathbb{C}(U;M'\otimes X'\otimes N'\otimes X''\otimes O')$$

$$\times\mathbb{C}(M'\otimes Y'\otimes N'\otimes Y''\otimes O';V) \overset{y_2}{\cong}$$

$$\int^{M,M',N',O'\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;M\otimes X\otimes M'\otimes X'\otimes N'\otimes X''\otimes O')\times\mathbb{C}(M\otimes Y\otimes M'\otimes Y'\otimes N'\otimes Y''\otimes O';B).$$

同理，右侧与以下集合同构，

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},M,N,O\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;M\otimes U\otimes N\otimes X''\otimes O)\times\mathbb{C}(M\otimes V\otimes N\otimes Y''\otimes O;B)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},M,N,O,P,Q\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(P;M\otimes U\otimes N)\times\mathbb{C}(A;P\otimes X''\otimes O)\times\mathbb{C}(M\otimes V\otimes N;Q) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\times\mathbb{C}(Q\otimes Y''\otimes O;B)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},M',N',O',O,P,Q\in\mathbb{C}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(A;P\otimes X''\otimes O)\times\mathbb{C}(Q\otimes Y''\otimes O;B) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\times\mathbb{C}(U;M'\otimes X\otimes N'\otimes X'\otimes O')\times\mathbb{C}(M'\otimes Y\otimes N'\otimes Y'\otimes O';V) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int^{M',N',O',O,P,Q\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;P\otimes X''\otimes O)\times\mathbb{C}(Q\otimes Y''\otimes O;B)$$

$$\times\mathbb{C}(P;M'\otimes X\otimes N'\otimes X'\otimes O')\times\mathbb{C}(M'\otimes Y\otimes N'\otimes Y'\otimes O';Q) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int^{M',N',O',O\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;M'\otimes X\otimes N'\otimes X'\otimes O'\otimes X''\otimes O)\times\mathbb{C}(M'\otimes Y\otimes N'\otimes Y'\otimes O'\otimes Y''\otimes O;B).$$

复合这两个同构，我们得到所需的结合子。 □

引理 F.9（幺半上下文中的并行左单位子）。 我们构造一个自然同构

$$(\prec^{\lambda}):\int_{V}^{U\in\mathcal{MC}}\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};N\right)\cong\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right)$$

完全由*Yoneda* 同构构成。该同构定义为

$$(f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}_N\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}_H)\fatsemi f_1)\prec^{\lambda}g=f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes g\otimes\mathrm{id}_{N\otimes X'\otimes O})\fatsemi(\mathrm{id}_{M\otimes Y\otimes N}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}_O)\fatsemi f_1.$$

证明。

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC}}\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};N\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},P,Q,R\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;P\otimes U\otimes Q\otimes X\otimes R)\times\mathbb{C}(P\otimes V\otimes Q\otimes Y\otimes R;B)\times\mathbb{C}(U;V) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},P,Q,R,S,T\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;S\otimes X\otimes R)\times\mathbb{C}(S;P\otimes U\otimes Q)\times\mathbb{C}(P\otimes V\otimes Q;T)$$

$$\times\mathbb{C}(T\otimes Y\otimes R;B)\times\mathbb{C}(U;V) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int_{V}^{U\in\mathcal{MC},R,S,T\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;S\otimes X\otimes R)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}S\\T\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(T\otimes Y\otimes R;B)\times\mathbb{C}(U;V) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int^{S,R\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;S\otimes X\otimes R)\times\mathbb{C}(S\otimes Y\otimes R;B) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right).$$

□

引理 F.10 (幺半上下文并行右单位子)。 我们构造一个自然同构 m

$$(\prec^{\rho}) : \int^{U \in \mathcal{MC}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} ; N\right) \cong \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$$

完全由*Yoneda* 同构定义。该同构定义为

$$(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_N \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_H) \fatsemi f_1) \prec^{\rho} g = f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}_{N \otimes Y' \otimes O}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes X \otimes N} \otimes g \otimes \mathrm{id}_O) \fatsemi f_1$$

证明。 我们通过以下余端推导构造该同构,

$$\begin{aligned}
&\int^{U \in \mathcal{MC}} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} ; N\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{U \in \mathcal{MC}, P, Q, R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X \otimes Q \otimes U \otimes R) \times \mathbb{C}(P \otimes Y \otimes Q \otimes V \otimes R; B) \times \mathbb{C}(U; V) && \overset{y_1}{\cong} \\
&\int^{U \in \mathcal{MC}, P, Q, R, S, T \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X \otimes S) \times \mathbb{C}(S; Q \otimes U \otimes R) \times \mathbb{C}(Q \otimes V \otimes R; T) \\
&\qquad \times \mathbb{C}(P \otimes Y \otimes T; B) \times \mathbb{C}(U; V) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{U \in \mathcal{MC}, P, S, T \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X \otimes S) \times \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} S \\ T \end{smallmatrix} ; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(P \otimes Y \otimes T; B) \times \mathbb{C}(U; V) && \overset{y_1}{\cong} \\
&\int^{P, T \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X \otimes T) \times \mathbb{C}(P \otimes Y \otimes T; B) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

证明结束。 □

引理 F.11 （幺半上下文松弛子）。 我们构造以下态射

$$\begin{aligned}
&\psi_2 : \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} U' \\ V' \end{smallmatrix}\right)\right) \to \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \lhd \left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U' \\ V' \end{smallmatrix}\right)\right) \\
&\psi_0 : \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; I\right) \to \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; I \lhd I\right) \\
&\varphi_2 : \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; N \otimes N\right) \to \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; N\right) \\
&\varphi_0 : \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; I\right) \to \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} ; N\right).
\end{aligned}$$

完全由 $\mathbb{C}$ 中的复合以及 *Yoneda* 同构定义。松弛子 ψ_2 定义为满足以下方程

$$\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1) \\
&\quad \prec_1^{\psi} (g_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi g_2) \\
&\quad \prec_2^{\psi} (h_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi h_2) = \\
&(j_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi j_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi j_2) \mid \\
&\quad (k_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi k_1) \mid \\
&\quad (l_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi l_1)
\end{aligned}$$

当且仅当

$$\begin{aligned}
&f_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes g_0 \otimes \mathrm{id} \otimes h_0 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes g_1 \otimes \mathrm{id} \otimes h_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi \\
&\quad (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes g_2 \otimes \mathrm{id} \otimes h_2 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi f_1 = \\
&j_0 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes k_0 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes k_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi j_1 \fatsemi (\mathrm{id} \otimes l_0 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi \\
&\quad (\mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id} \otimes \blacksquare \otimes \mathrm{id}) \fatsemi (\mathrm{id} \otimes l_1 \otimes \mathrm{id}) \fatsemi j_2.
\end{aligned}$$

此外，由于 $\mathcal{MC}$ 是正规的， ψ_0、 φ_2以及 φ_0 都是同构。

证明。 考虑 ψ_2 的右侧。它同构于以下对象

$$\int^{P,P'\in\mathcal{MC}}_{Q,Q'} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}P'\\Q'\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P'\\Q'\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{P,P'\in\mathcal{MC},M,N,O\in\mathbb{C}}_{Q,Q'} \mathbb{C}(A;M\otimes P\otimes N)\times\mathbb{C}(M\otimes Q\otimes N;M'\otimes P'\otimes N')\times\mathbb{C}(M'\otimes Q'\otimes N';B)$$
$$\times\,\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P'\\Q'\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{P,P'\in\mathcal{MC},M,N,O\in\mathbb{C}}_{Q,Q'} \mathbb{C}(A;M\otimes P\otimes N)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}M\otimes Q\otimes N\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}P'\\Q'\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}P'\\Q'\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int^{P\in\mathcal{MC},M,N,O,C,D,E,F,G,H\in\mathbb{C}}_{Q} \mathbb{C}(A;M\otimes P\otimes N)\times\mathbb{C}(P;C\otimes X\otimes D\otimes U\otimes E)\times\mathbb{C}(C\otimes Y\otimes D\otimes V\otimes E;Q)\times$$
$$\mathbb{C}(M\otimes Q\otimes N;F\otimes X'\otimes G\otimes U'\otimes H)\times\mathbb{C}(F\otimes Y'\otimes G\otimes V'\otimes H;B) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{P,\in\mathcal{MC},C,D,E,F,G,H\in\mathbb{C}}_{Q} \mathcal{MC}\left(\begin{smallmatrix}A\\F\otimes X'\otimes G\otimes U''\otimes H\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(P;C\otimes X\otimes D\otimes U\otimes E)$$
$$\times\,\mathbb{C}(C\otimes Y\otimes D\otimes V\otimes E;Q)\times\mathbb{C}(F\otimes Y'\otimes G\otimes V'\otimes H;B) \overset{y_1}{\cong}$$

$$\int^{C,D,E,F,G,H\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;C\otimes X\otimes D\otimes U\otimes E)\times\mathbb{C}(C\otimes Y\otimes D\otimes V\otimes E;F\otimes X'\otimes G\otimes U'\otimes H)$$
$$\times\,\mathbb{C}(F\otimes Y'\otimes G\otimes V'\otimes H;B).$$

该同构将一个元素 $(\ j_0\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi j_1\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi j_2\mid k_0\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi k_1\mid l_0\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi l_1)$ 映射为 $\langle j_0\fatsemi(\mathrm{id}\otimes k_0\otimes\mathrm{id})\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi(\mathrm{id}\otimes k_1\otimes\mathrm{id})\fatsemi j_1\fatsemi(\mathrm{id}\otimes l_0\otimes\mathrm{id})\fatsemi(\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id}\otimes\blacksquare\otimes\mathrm{id})\fatsemi(\mathrm{id}\otimes l_1\otimes\mathrm{id})\fatsemi j_2\rangle$。定义一个从 ψ_2 的左侧到该集合的映射，将一个三元组

$$(f_0\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi f_1\mid g_0\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi g_1\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi g_2\mid \mathrm{h}_0\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi \mathrm{h}_1\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi \mathrm{h}_2)\mapsto f_0\fatsemi(\text{恒等}\otimes g_0\otimes\text{恒等}\otimes \mathrm{h}_0\otimes\text{恒等})\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi(\text{恒等}\otimes g_1\otimes\text{恒等}\otimes \mathrm{h}_1\otimes\text{恒等})\fatsemi(\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等}\otimes\blacksquare\otimes\text{恒等})\fatsemi(\text{恒等}\otimes g_2\otimes\text{恒等}\otimes \mathrm{h}_2\otimes\text{恒等})\fatsemi f_1。$$

现在将此映射与该同构复合，即可得到所需的态射 ψ_2。其余松弛器ψ_0，φ_2、以及 φ_0 是由单位性应用产生的同构，或者本身就是恒等态射。□

定理 F.12 （来自定理 6.6）。么半上下文 是范畴上的余自由 *produoidal* 范畴 的自由规范化。

证明。 我们已经知道，正规化过程给出了 produoidal 范畴上的自由规范化。只需注意，这正是我们在本节中明确构造的范畴。

这相当于证明单体上下文的产幺半范畴恰好是拼接箭头的产幺半范畴的正规化。我们对态射进行证明，其余部分的证明类似。

$$\mathcal{NSC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N\otimes\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes N\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{U,U'\in\mathcal{SC}}_{V,V'} \mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};N\right)\times\mathcal{SC}\left(\begin{smallmatrix}U'\\V'\end{smallmatrix};N\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{U,U'\in\mathcal{SC}}_{V,V'} \mathbb{C}(A;U\otimes X\otimes U')\times\mathbb{C}(V\otimes Y\otimes V';B)\times\mathbb{C}\left(U;V\right)\times\mathbb{C}\left(U';V'\right) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\int^{U,V,U',V'\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;U\otimes X\otimes U')\times\mathbb{C}(V\otimes Y\otimes V';B)\times\mathbb{C}(U;V)\times\mathbb{C}(U';V') \overset{y_1}{\cong}$$
$$\int^{U,U'\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(A;U\otimes X\otimes U')\times\mathbb{C}(U\otimes Y\otimes U';B) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\mathcal{M}\mathbb{C}\binom{A}{B};\binom{X}{Y}$$

其余预函子的证明也遵循类似的推理。 □

透镜

命题 G.1 (来自命题 7.2)。 幺半群透镜 构成一个正规的对称产幺半范畴，具有以下态射、单位、顺序拆分和并行拆分。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet\otimes X)\diamond\mathbb{C}(\bullet\otimes Y;B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};N\right) &= \mathbb{C}(A;B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet^1\otimes X)\ \diamond\mathbb{C}(\bullet^1\otimes Y;\bullet^2\otimes X')\diamond\mathbb{C}(\bullet^2\otimes Y';B);\\
\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\otimes\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) &= \mathbb{C}(A;\bullet^1\otimes X\otimes X')\diamond\mathbb{C}(\bullet^1\otimes Y\otimes Y';B).
\end{aligned}$$

证明。引理 G.2 和 G.3 构造结合子，而引理 G.4 和 G.5 定义单位子。引理 G.6 构造对称性。由于它们都是通过 Yoneda 同构 和对称性构造的，因此必然满足相干方程。最后，松弛器的构造与引理 F.11中的构造大致相同。 □

引理 G.2 (幺半群透镜串行结合子)。 我们构造一个自然同构

$$(\prec_2^\alpha):\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C}}\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\cong\int^{V\in\mathcal{M}\mathbb{C}}\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right):(\prec_1^\alpha)$$

仅由*Yoneda* 同构构造。

证明。 通过 Yoneda 约化，我们在左侧与一个由态射四元组组成的集合之间构造一个同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C}}\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C},P,Q\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;P\otimes X)\times\mathbb{C}(P\otimes Y;Q\otimes U)\times\mathbb{C}(Q\otimes V;B)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C},P,Q,R\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;P\otimes X)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}P\otimes Y\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(U;Q\otimes X')\times\mathbb{C}(Q\otimes Y';R\otimes X'')\times\mathbb{C}(R\otimes Y'';V) && \overset{y_2}{\cong}\\
&\int^{P,Q,R\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;P\otimes X)\times\mathbb{C}(P\otimes Y;Q\otimes X')\times\mathbb{C}(Q\otimes Y';R\otimes X'')\times\mathbb{C}(R\otimes Y'';B).
\end{aligned}$$

通过 Yoneda 约化，我们在右侧与同样的态射四元组集合之间构造一个同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C}}\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X''\\Y''\end{smallmatrix}\right)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C},P,Q\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;Q\otimes U)\times\mathbb{C}(Q\otimes V;P\otimes X'')\times\mathbb{C}(P\otimes Y'';B)\times\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\triangleleft\begin{smallmatrix}X'\\Y'\end{smallmatrix}\right) && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{V\in\mathcal{L}\mathbb{C},P,Q,R\in\mathbb{C}}\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix}A\\P\otimes X''\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}U\\V\end{smallmatrix}\right)\times\mathbb{C}(P\otimes Y'';B)\times\mathbb{C}(U;Q\otimes X)\times\mathbb{C}(Q\otimes Y;R\otimes X')\times\mathbb{C}(R\otimes Y';V) && \overset{y_2}{\cong}\\
&\int^{P,Q,R\in\mathbb{C}}\mathbb{C}(A;Q\otimes X)\times\mathbb{C}(Q\otimes Y;R\otimes X')\times\mathbb{C}(R\otimes Y';P\otimes X'')\times\mathbb{C}(P\otimes Y'';B).
\end{aligned}$$

复合两　　个同构后，我们得到所需的结合子。它由以下运算定义：

$$\begin{aligned}
&(\ f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes\blacksquare)\ \fatsemi f_1\fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes\blacksquare)\ \fatsemi f_2)\ \prec_1^\alpha(g_0\fatsemi(\mathrm{id}_P\otimes\blacksquare)\ \fatsemi g_1\fatsemi(\mathrm{id}_Q\otimes\blacksquare)\ \fatsemi g_2) &&=\\
&f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes g_0)\ \fatsemi(\mathrm{id}_{M\otimes P}\otimes\blacksquare)\ \fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes g_1)\ \fatsemi(\mathrm{id}_{M\otimes Q}\otimes\blacksquare)\ \fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes g_2)\ \fatsemi f_1\fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes\blacksquare)\\
&\fatsemi f_2.(\ f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes\blacksquare)\ \fatsemi f_1\fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes\blacksquare)\ \fatsemi f_2)\ \prec_2^\alpha(h_0\fatsemi(\mathrm{id}_P\otimes\blacksquare)\ \fatsemi h_1\fatsemi(\mathrm{id}_Q\otimes\blacksquare)\ \fatsemi h_2) &&=\\
&f_0\fatsemi(\mathrm{id}_M\otimes\blacksquare)\ \fatsemi f_1\fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes h_0)\ \fatsemi(\mathrm{id}_{N\otimes P}\fatsemi\blacksquare)\ \fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes h_1)\ \fatsemi(\mathrm{id}_{N\otimes Q}\otimes\blacksquare)\ \fatsemi(\mathrm{id}_N\otimes h_2)\ \fatsemi f_2.
\end{aligned}$$

□

引理 G.3 (幺半群透镜的并行结合子)。我们构造一个自然同构

$$(\prec_2^{\alpha}) : \int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \cong \int^{U_V \in \mathcal{M}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) : (\prec_1^{\alpha})$$

完全由*Yoneda* 同构得出。

证明。 左侧同构于:

$$\begin{aligned}
&\int^{U_V \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && = && \text{(by representability)} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \otimes X'' \\ Y' \otimes Y'' \end{smallmatrix}\right) && \cong && \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \otimes X'' \\ Y' \otimes Y'' \end{smallmatrix}\right) && \cong && \text{(by representability)} \\
&\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \otimes X' \otimes X'' \\ Y \otimes Y' \otimes Y'' \end{smallmatrix}\right), &&
\end{aligned}$$

右侧也同构于同一个对象:

$$\begin{aligned}
&\int^{U_V \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) && = && \text{(by representability)} \\
&\int^{U_V \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \otimes X' \\ Y \otimes Y' \end{smallmatrix}\right) && \cong && \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \otimes X' \\ Y \otimes Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X'' \\ Y'' \end{smallmatrix}\right) && \cong && \text{(by representability)} \\
&\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \otimes X' \otimes X'' \\ Y \otimes Y' \otimes Y'' \end{smallmatrix}\right). &&
\end{aligned}$$

将这两个同构复合，即得到所需的结合子,

$$\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1) \prec_1^{\alpha} (g_0 \fatsemi (\mathrm{id}_P \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi g_1) && = \\
&f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g_0 \otimes \mathrm{id}_{X''}) \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes g_1 \otimes \mathrm{id}_{Y''}) \fatsemi f_1. && \\
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1) \prec_2^{\alpha} (h_0 \fatsemi (\mathrm{id}_Q \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi h_1) && = \\
&f_0 \fatsemi \sigma \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes h_0 \otimes \mathrm{id}_X) \fatsemi \sigma \fatsemi (\mathrm{id}_{M \otimes P} \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi \sigma \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes h_1 \otimes \mathrm{id}_Y) \fatsemi \ \sigma \fatsemi f_1. &&
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

引理 G.4 （幺半群透镜的顺序右单位子）。 我们构造一个自然同构

$$(\prec^{\rho}) : \int^{X'_{Y'} \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$$

完全来自*Yoneda* 同构。

证明。 我们通过以下余端演算推导来构造该同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{X'_{Y'} \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \lhd \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}; N\right) && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{X'_{Y'} \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P, Q \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X) \times \mathbb{C}(P \otimes Y; Q \otimes X') \times \mathbb{C}(Q \otimes Y'; B) \times \mathbb{C}(X'; Y') && \overset{\text{def}}{=} \\
&\int^{X'_{Y'} \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} P \otimes Y \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(X'; Y') && \overset{y_2}{\cong} \\
&\int^{P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X) \times \mathbb{C}(P \otimes Y; B). &&
\end{aligned}$$

我们得到以下右单位子。

$$(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_N \otimes \blacksquare) \fatsemi f_2) \prec^{\rho} g = f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1 \fatsemi (\mathrm{id}_N \otimes g) \fatsemi f_2.$$

左单位子也以类似方式定义。 □

引理 G.5 （幺半群透镜的并行右单位子）。 我们构造一个自然同构

$$(\prec^{\rho}) : \int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}; N\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$$

完全由*Yoneda* 同构 以及 $\mathbb{C}$ 的对称性构造。

证明。 我们通过以下余端演算推导构造该同构。

$$\begin{aligned}
&\int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}} \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}; N\right) \\
&= \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X \otimes X') \times \mathbb{C}(P \otimes Y \otimes Y'; B) \times \mathbb{C}(X'; Y') \\
&\cong \quad \text{(by symmetry of } \mathbb{C}) \\
&\int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; P \otimes X' \otimes X) \times \mathbb{C}(P \otimes Y' \otimes Y; B) \times \mathbb{C}(X'; Y') \\
&\cong \quad \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P, Q, R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; Q \otimes X) \times \mathbb{C}(Q; P \otimes X') \times \mathbb{C}(P \otimes Y'; R) \times \mathbb{C}(R \otimes Y; B) \times C(X'; Y') \\
&= \quad \text{(by definition)} \\
&\int^{X' \in \mathcal{L}\mathbb{C}, P, Q, R \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; Q \otimes X) \times \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} Q \\ R \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \times \mathbb{C}(R \otimes Y; B) \times C(X'; Y') \\
&\cong \quad \text{(by Yoneda reduction)} \\
&\int^{Q \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; Q \otimes X) \times \mathbb{C}(Q \otimes Y; B).
\end{aligned}$$

我们得到以下右单位子。

$$\begin{aligned}
&(f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1) \prec^{\rho} g = \\
&f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes (\sigma \fatsemi (g \otimes \mathrm{id}_X) \fatsemi \sigma)) \fatsemi f_1 = \\
&f_0 \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes (\sigma \fatsemi (g \otimes \mathrm{id}_X) \fatsemi \sigma)) \fatsemi (\mathrm{id}_M \otimes \blacksquare \otimes \blacksquare) \fatsemi f_1.
\end{aligned}$$

左单位子也以类似方式定义。 □

引理 G.6 (幺半群透镜的对称性)。 我们构造对称性 $\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$。证明。 这些结论来自 $\mathbb{C}$ 的对称性，以及 幺半群透镜的 $\otimes$ 可表性。

$$\mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X \otimes X' \\ Y \otimes Y' \end{smallmatrix}\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \otimes X \\ Y' \otimes Y \end{smallmatrix}\right) \cong \mathcal{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right).$$

证明至此完成。 □

命题 G.7 (由命题 7.6得出)。 设 $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ 是一个对称 幺半范畴。存在幺半群函子 $(!) \colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}\mathbb{C}$和 $(?) \colon \mathbb{C}^{op} \to \mathcal{L}\mathbb{C}$。

证明。 Riley 的著作中以不同表述出现了这一证明 [Ril18，命题 2.0。14]。事实上，在那里，组合后的对象恒等函子 $(!\times?)$: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{op} \to \mathcal{L}\mathbb{C}$ 被证明是幺半群函子。就我们的情形而言，可以定义 $!f = (f \fatsemi \blacksquare \fatsemi$恒等态射$_I)$ 以及 $?g =$(恒等态射$_I \fatsemi \blacksquare \fatsemi g)$，然后检查复合与张量化

态射的复合与张量化操作，与 幺半群透镜的复合与张量化相兼容，这一点显而易见。此外，正如我们在正文中所述，根据定义，我们可以看到，$!(A \otimes B) = \binom{A \otimes B}{I} = \binom{A}{I} \otimes \binom{B}{I} = !A \otimes !B$以及 $?(A \otimes B) = \binom{I}{A \otimes B} = \binom{I}{A} \otimes \binom{I}{B} = ?A \otimes ?B$。 □

命题 G.8 （源自命题 7.8）。 设 $(\mathbb{C}, \times, 1)$ 是一个笛卡尔幺半群范畴。其 透镜的产幺半范畴 由以下 预函子给出。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Lens}\binom{A}{B}\binom{X}{Y} &= \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(A \times Y; B).\\
\mathbf{Lens}\binom{A}{B}\binom{X}{Y} \triangleleft \binom{X'}{Y'} &= \mathbb{C}(A;X) \times \mathbb{C}(A \times Y; X') \times \mathbb{C}(A \times Y \times Y'; B).\\
\mathbf{Lens}\binom{A}{B}\binom{X}{Y} \otimes \binom{X'}{Y'} &= \mathbb{C}(A;X \times X') \times \mathbb{C}(A \times Y \times Y'; B).\\
\mathbf{Lens}\binom{A}{B} &= \mathbb{C}(A;B).
\end{aligned}$$

证明。 我们运用余端演算。笛卡尔透镜的态射的推导已广为人知[Ril18], [CEG+20]；我们推导顺序拆分和并行拆分。具体而言，顺序拆分可化简为

$$\begin{aligned}
&\int^{M,N} \mathbb{C}(A; M \times X) \times \mathbb{C}(M \times Y; N \times X') \times \mathbb{C}(N \times Y'; B)\\
\cong\ & \text{(Universal property of the product)}\\
&\int^{M,N} \mathbb{C}(A; M) \times \mathbb{C}(A; X) \times \mathbb{C}(M \times Y; N) \times \mathbb{C}(M \times Y; X') \times \mathbb{C}(N \times Y'; B)\\
\cong\ & \text{(by Yoneda reduction)}\\
&\mathbb{C}(A; X) \times \mathbb{C}(A \times Y; X') \times \mathbb{C}(A \times Y \times Y'; B).
\end{aligned}$$

并行拆分可化简为

$$\begin{aligned}
&\int^{M} \mathbb{C}(A; M \times X \times X') \times \mathbb{C}(M \times Y \times Y'; B)\\
\cong\ & \text{(Universal property of the product)}\\
&\int^{M} \mathbb{C}(A; M) \times \mathbb{C}(A; X \times X') \times \mathbb{C}(M \times Y \times Y'; B)\\
\cong\ & \text{(by Yoneda reduction)}\\
&\mathbb{C}(A; X \times X') \times \mathbb{C}(A \times Y \times Y'; B).
\end{aligned}$$

单位与一般幺半范畴情形中的完全相同。 □

定理 G.9 （源自定理7.3）。 幺半群透镜是余自由对称产幺半范畴在一个幺半范畴上的自由对称正规化。

证明。 我们已经证明，对称规范化过程会产生对称产幺半范畴在一个对称产幺半范畴上的自由对称正规化（定理 5.7）。

证明的其余部分旨在说明，幺半群透镜的对称产幺半范畴 恰好是拼接箭头的 produoidal 范畴的对称正规化。我们对态射进行证明，证明的其余部分类似。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_\sigma \mathcal{SC}\binom{A}{B}\binom{X}{Y} && \overset{\text{def}}{=}\\
&\mathcal{SC}\binom{A}{B}\binom{N \otimes X}{Y} && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{V \in \mathcal{SC}} \mathcal{SC}\binom{A}{B}\binom{U \otimes X}{V \otimes Y} \times \mathcal{SC}\binom{U}{V}\binom{N}{I} && \overset{\text{def}}{=}\\
&\int^{U,V \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; U \otimes X) \times \mathbb{C}(V \otimes Y; B) \times \mathbb{C}(U; V) && \overset{y_1}{\cong}\\
&\int^{U \in \mathbb{C}} \mathbb{C}(A; U \otimes X) \times \mathbb{C}(U \otimes Y; B) && \overset{\text{def}}{=}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{L}\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix};\ \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$$

其余预函子也可用类似的推理得出。 □

定理 H.1 (根据命题 8.1)。 设 $\mathbb{V}$ 是一个正规且 $\otimes$-对称的产幺半范畴，其在 $\mathbb{V}$ 上的余端与有限连通极限交换。那么， $[\mathbb{V}^{\mathrm{op}}, \mathbf{集合}]$ 是 *Shapiro* 和 *Spivak* 意义下的依赖范畴 *[SS22]*。

证明。 只要 $\mathbb{V}$ 是产幺半的， $[\mathbb{V}^{\mathrm{op}}, \mathbf{集合}]$, 其预层范畴便是双幺半的，其结构由卷积给出（定理 I.6）。

与此同时， $[\mathbb{V}^{\mathrm{op}}, \mathbf{集合}]$ 是一个局部笛卡尔闭范畴，并且具有所有极限，因为它是一个预层范畴。只要有限连通极限在 $\otimes$上得到保持， $\triangleleft$我们就得到一个依赖范畴 [SS22，定理 4。8]这意味着我们只需要以下同构：

$$
\begin{aligned}
& \int^{U,V} \mathbb{V}(X; U \otimes V) \times \lim_i P_i(U) \times \lim_j Q_j(V) \\
\cong \quad & \text{(Commutation of limits)} \\
& \int^{U,V} \lim_{i,j} \mathbb{V}(X; U \otimes V) \times P_i(U) \times Q_j(V) \\
\cong \quad & \text{(Coends commute with finite connected limits)} \\
& \lim_{i,j} \int^{U,V} \mathbb{V}(X; U \otimes V) \times P_i(U) \times Q_j(V)
\end{aligned}
$$

最后一步使用了我们的假设。我们推测，在满足少量约束的情况下，这可以扩展到任意 $\mathbb{V}$ 。□

附录 I 双幺半与产幺半范畴

根据Eckmann-Hilton论证，每当我们有两个幺半群（$*$，$\circ$），其中一个是另一个之上的幺半群同态时，即（$a \circ b$）$*$（$c \circ d$）$=$（$a * c$）$\circ$（$b * d$），我们就知道这两个幺半群合并为一个交换幺半群。

然而，增加一个维度有助于避开 Eckmann-Hilton论证。我们不使用等式或同构，而是使用有向态射，这样两个幺半群（现在可能变为 2-幺半群）不一定重合，由此得到的结构就是双幺半范畴。

定义 I.1（双幺半范畴）。双幺半范畴 [AM10]是一个范畴 $\mathbb{C}$，具有两个幺半结构（$\mathbb{C}$、$\otimes$、I、α、λ、ρ）和（$\mathbb{C}$、$\triangleleft$、N、β、κ、ν），其中后者在前者上分配。换言之，它带有一个双幺半张量（$\triangleleft$）：$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，以及自然分配子

$$\psi_2 \colon (X \triangleleft Z) \otimes (Y \triangleleft W) \to (X \otimes Y) \triangleleft (Z \otimes W), \qquad \psi_0 \colon I \to I \triangleleft I, \qquad \varphi_2 \colon N \otimes N \to N, \quad \text{and} \quad \varphi_0 \colon I \to N,$$

满足以下相干方程（图 32 至 36）。

注记 I.2. 换言之，双幺半张量和单位是关于第一种幺半结构的松弛幺半函子，这意味着松弛器必须满足以下方程。

1) $(\psi_2 \otimes id) \fatsemi \psi_2 \fatsemi (\alpha \triangleleft \alpha) = \alpha \fatsemi (id \otimes \psi_2) \fatsemi \psi_2$，对应结合子；
2) $(\psi_0 \otimes id) \fatsemi \psi_2 \fatsemi (\lambda \triangleleft \lambda) = \lambda$，对应左单位子；以及 3) $(id \otimes \psi_0) \fatsemi \psi_2 \fatsemi (\rho \triangleleft \rho) = \rho$，对应右单位子；4) $\alpha \fatsemi (id \otimes \varphi_2) \fatsemi \varphi_2 = (\varphi_2 \otimes id) \fatsemi \varphi_2$，对应结合子；5) $(\varphi_0 \otimes id) \fatsemi \varphi_2 = \lambda$，对应左单位子；以及 6) $(id \otimes \varphi_0) \fatsemi \varphi_2 = \rho$，对应右单位子。

定理 I.3（相干性，[AM10]）。由一个双幺半范畴的相干同构和松弛器构造出的任意两个并行态射都相同。

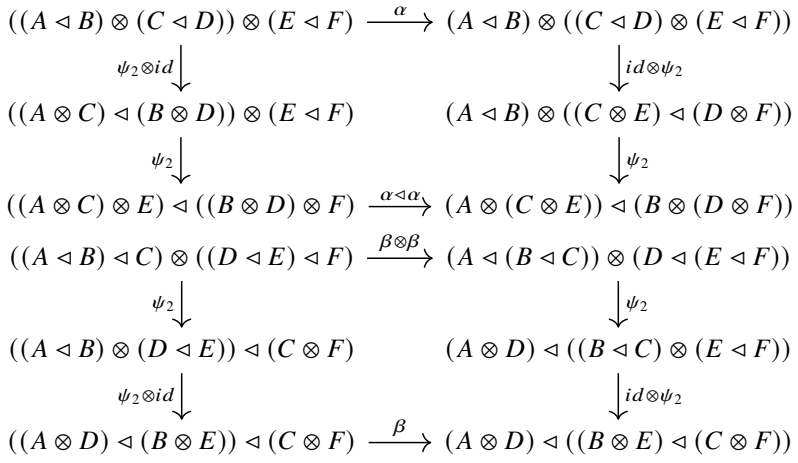


图32：双幺半范畴结合律的相容性图。

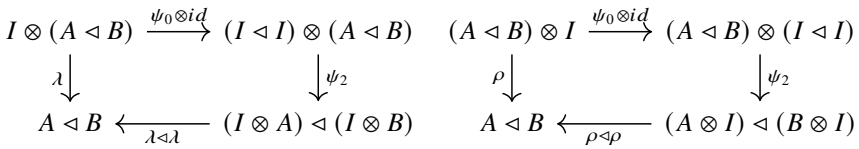


图33：双幺半范畴的 $\otimes$-单位性相容性图。

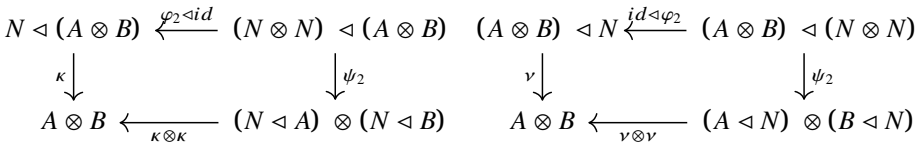


图34：双幺半范畴的 $\triangleleft$-单位性相干性图。

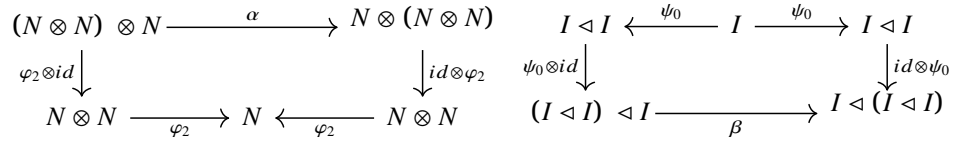


图 35：双幺半范畴中 N 与 I 的结合律和余结合律。

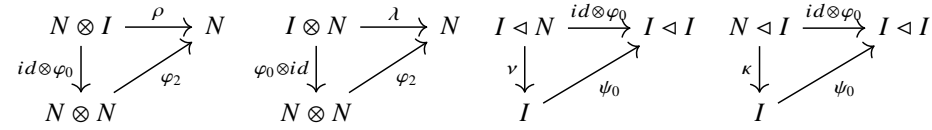


图 36：双幺半范畴中 N 和 I 的单位性与余幺元性。

I.1 双幺半范畴的正规化

Garner 和 López Franco [GF16] 介绍了一种用于正规化具有足够良好性质的双幺半范畴的过程，该过程基于构造一个由双模组成的新双幺半范畴。本文介绍了一种适用于任意产幺半范畴的正规化过程。为完整起见，我们先回顾一下原始过程 [GF16]。

设 M 是双幺半范畴 $(\mathbb{V}, \otimes, I, \triangleleft, N)$ 中的一个双幺半体，其映射为 $e\colon I \to M$ 和 $m\colon M \otimes M \to M$；以及映射 $u\colon M \to N$ 和 $d\colon M \to M \triangleleft M$。现在考虑 $M^{\otimes}$-双模范畴。该范畴具有从 $(\mathbb{V}, \triangleleft, N)$ 提升而来的幺半结构：

1) 单位 N 具有双模结构，其中

$$M \otimes N \otimes M \xrightarrow{u\otimes \mathrm{id} \otimes u} N \otimes N \otimes N \longrightarrow N;$$

2) 两个 $M^{\otimes}$-双模的复合是一个 $M^{\otimes}$-双模，其中

$$\begin{aligned} & M \otimes (A \triangleleft B) \otimes M \\ & \to (M \triangleleft M) \otimes (A \triangleleft B) \otimes (M \triangleleft M) \\ & \to (M \otimes A \otimes M) \triangleleft (M \otimes B \otimes M) \to A \triangleleft B. \end{aligned}$$

此外，只要 $\mathbb{V}$ 具有由 $(\otimes)$ 保持的自反余等化子，$M^{\otimes}$-双模范畴便具有双模张量积所定义的幺半结构：该余等化子

$$A \otimes M \otimes B \rightrightarrows A \otimes B \twoheadrightarrow A \otimes_M B.$$

在此情形下，$(\textbf{双模}^{\otimes}_M,\ \otimes_M,\ M,\ \triangleleft,\ N)$ 是一个双幺半范畴。

定理 I.4 (双幺半范畴的正规化)。 设 $(\mathbb{V}, \otimes, I, \triangleleft, N)$ 是一个 双幺半范畴，其自反余等化子在 $(\otimes)$ 的作用下保持。于是，N-双模范畴是一个正规双幺半范畴，

$$\mathcal{N}(\mathbb{V}) = (\mathbf{Bimod}^{\otimes}_N, \otimes_N, N, \triangleleft, N).$$

我们将这个范畴称为双幺半范畴 的正规化 *[GF16]* 。 $\mathbb{V}$。

I.2 Produoidal 范畴

定义 I.5 (产幺半范畴，源自定义4.2)。 一个 *produoidal* 范畴 是一个范畴 $\mathbb{V}$，配备了两种 预幺半群结构，

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bullet; \bullet \otimes \bullet)\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \bullet\!\!-\!\!\circ \mathbb{V}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet; I)\colon 1 \bullet\!\!-\!\!\circ \mathbb{V}, \\ \mathbb{V}(\bullet; \bullet \triangleleft \bullet)\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \bullet\!\!-\!\!\circ \mathbb{V}, \text{ and } \mathbb{V}(\bullet; N)\colon 1 \bullet\!\!-\!\!\circ \mathbb{V}, \end{aligned}$$

其中一种以松弛方式分配于另一种之上。也就是说，它配备了以下自然的松弛器，

$$\begin{aligned} \psi_2\colon \mathbb{V}(\bullet; (X \triangleleft Y) \otimes (Z \triangleleft W)) \to \mathbb{V}(\bullet; (X \otimes Z) \triangleleft (Y \otimes W)), \\ \psi_0\colon \mathbb{V}(\bullet; I) \to \mathbb{V}(\bullet; I \triangleleft I), \\ \varphi_2\colon \mathbb{V}(\bullet; N \otimes N) \to \mathbb{V}(\bullet; N), \\ \varphi_0\colon \mathbb{V}(\bullet; I) \to \mathbb{V}(\bullet; N). \end{aligned}$$

松弛器与单位子和结合子必须满足以下图（图 37 至 41）中的相容条件。

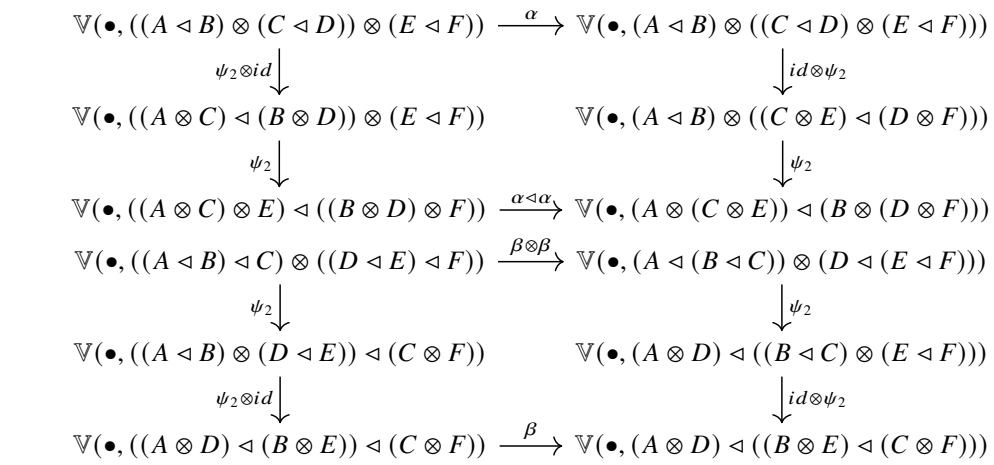


图 37：产幺半范畴结合律的相容性图。

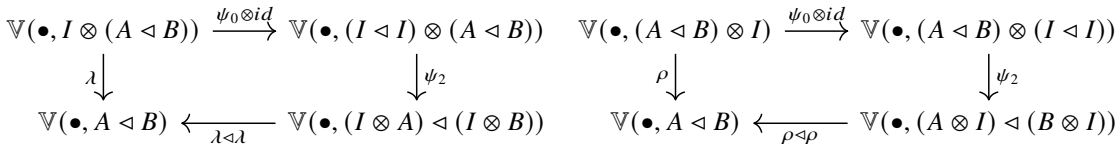


图 38：产幺半范畴的 $\otimes$-单位性相容性图。

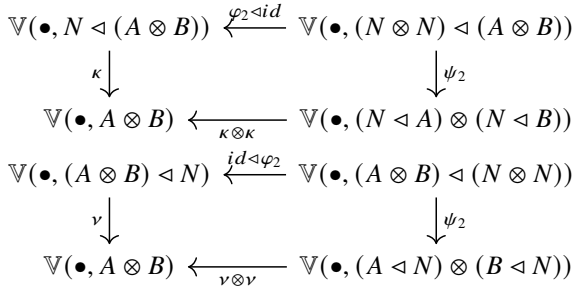


图 39：产幺半范畴的 $\lhd$-幺元性相容性图。

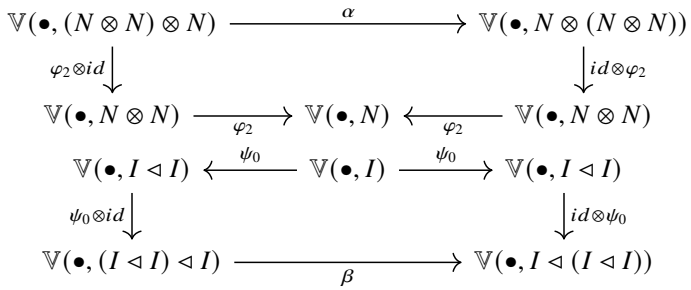


图 40：产幺半范畴中 N 和 I 的结合律与余结合律。

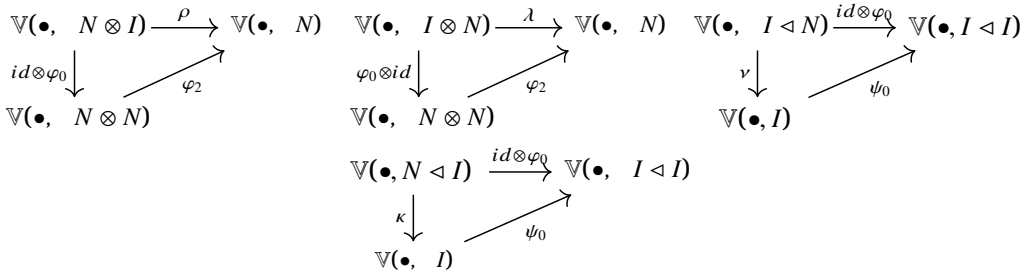


图 41：产幺半范畴中 N 和 I 的单位性与余幺元性。

I.3 产幺半范畴诱导双幺半范畴

定理 I.6. 设 $\mathbb{V}$ 是一个 *produoidal* 范畴，则其预层范畴 $[\mathbb{V}^{\mathrm{op}},\mathbf{集合}]$, 在由卷积给出的结构下是双幺半的 *[BS13]*。

证明。令 P 和 Q 为 $\mathbb{V}$ 中的预层。我们通过对 $\mathbb{V}$ 中张量积进行卷积，在预层上定义如下张量积。

$$(P \otimes Q)(A) = \int^{U,V} \hom(A, U \otimes V) \times P(U) \times Q(V),$$

$$(P \triangleleft Q)(A) = \int^{U,V} \hom(A, U \triangleleft V) \times P(U) \times Q(V).$$

可以直接证明，这些张量积构成一个双幺半范畴，并继承 $\mathbb{V}$ 的松弛器。□

Appendix J
Tambara modules

定义 J.1（Tambara 模，[PS07]）。令 $(\mathbb{A},\ \otimes,\ I)$ 为一个严格幺半范畴。一个 *Tambara* 模是一个预函子 $T\colon\ \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{A} \to \mathbf{集合}$，其带有自然变换

$$t_l^M : T(X;Y) \to T(M \otimes X, M \otimes Y),$$

$$t_r^M : T(X;Y) \to T(X \otimes M, Y \otimes M),$$

这些变换对 X 和 Y都是自然的，同时在 M 上还是二自然的。此外，它们还必须满足以下公理：

- $t_l^I = id$ 和 $t_r^I = id$，单位性；
- $t_l^M \fatsemi t_l^N = t_l^{N \otimes M}$ 和 $t_r^M \fatsemi t_r^N = t_l^{M \otimes N}$，乘法性；
- $t_l^M \fatsemi t_r^N = t_r^N \fatsemi t_l^M$，以及相容性。

Tambara 模是一个单子的代数。我们首先注意到，hom 预函子关于 Day 卷积构成一个幺半群。这使得以下函子成为自预函子上的一个单子，即所谓的 Pastro-Street 单子 [PS07],

$$\Phi(P) = hom \circledast P \circledast hom;$$

其中 $\Phi\colon\ [\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, \mathbf{集合}] \to [\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, \mathbf{集合}]$。

定理 J.2。*Pastro-Street* 单子的代数，即 Φ-代数，恰好是 *Tambara* 模*[PS07]*。因此，关于一个预函子 $H\colon\ \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{集合}$ 的 $\Phi(H)$自由 *Tambara* 模是。

例 J.3。考虑预函子 $よ(A;\ B)\colon\ \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{A} \to$集合，它产生一个类型为 A和 B的孔。也就是说，令 $よ(A;\ B)\ = \hom(\bullet, A)\ \times \hom(B, \bullet)$。其上的自由 Tambara 模是带有一个类型为 A 和 B的孔的单体上下文，

$$\Phi(よ^A_B) = \int^{M,N} \hom(\bullet, M \otimes A \otimes N) \times \hom(M \otimes B \otimes N, \bullet).$$

J.1 预函子的正规化

设 $(\mathbb{C},\ \otimes,\ I)$ 是一个幺半范畴。于是，内函子预层范畴 $\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbf{集合}$ 在复合 $(\triangleleft)$ 和 Day 卷积 $(\circledast)$ 下构成双幺半范畴。

$$(\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, \mathbf{Set}, \circledast, I, \triangleleft, \hom).$$

此外，我们也可以构造其正规化：内函子预层范畴，$[\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C},\mathbf{集合}]$, 具有自反余等化子；因此，我们满足定理 I.4 的条件。由$\hom^{\circledast}$-双模构成的正规双幺半范畴传统上称为*Tambara* 模。

$$\mathcal{N}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, \mathbf{Set}, \circledast, I, \triangleleft, \hom) = (\mathbf{Tamb}, \circledast_{\hom}, \hom, \triangleleft, \hom).$$

定理 J.4. *Tambara* 模范畴是一个正规双幺半范畴；事实上，它是自预函子双幺半范畴的正规化。

附录 K 幺半范畴

K.1 幺半范畴。

引入同构的概念后，我们现在可以通过用同构替代严格相等来放宽过程理论的定义。

定义 K.1. 一个{对称}幺半范畴 [Mac78] $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ 是一个元组

$$(\mathbb{C}_{\text{obj}}, \mathbb{C}_{\text{mor}}, (⨟), \text{id}, (\otimes)_{\text{obj}}, (\otimes)_{\text{mor}}, I, \alpha, \lambda, \rho, \{\sigma\}),$$

它指定一组对象（即资源类型） $\mathbb{C}_{\text{obj}}$；一组态射（即过程） $\mathbb{C}_{\text{mor}}$；一个复合运算；一族恒等态射；对象和态射上的张量运算；一个单位对象；以及结合子、左单位子、右单位子{和交换态射}族。

结合子、左单位子和右单位子态射族具有以下类型。

$$\alpha_{A,B,C} \colon (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$
$$\lambda_A \colon I \otimes A \to A,$$
$$\rho_A \colon A \otimes I \to A.$$

它们必须满足以下非严格版本的公理。

$$A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C, \tag{1}$$
$$A \otimes I \cong A \cong I \otimes A, \tag{2}$$
$$(f ⨟ g) ⨟ h = f ⨟ (g ⨟ h), \tag{3}$$
$$\text{id}_B ⨟ f = f = f ⨟ \text{id}_B, \tag{4}$$
$$(f \otimes (g \otimes h)) ⨟ \alpha = \alpha ⨟ ((f \otimes g) \otimes h), \tag{5}$$
$$(f \otimes \text{id}_I) ⨟ \rho = \rho ⨟ f, \tag{6}$$
$$(f \otimes g) ⨟ (h \otimes k) = (f ⨟ h) \otimes (g ⨟ k), \tag{7}$$
$$\sigma_{A,B\otimes C} ⨟ \alpha = \alpha ⨟ (\sigma_{A,B} ⨟ \text{id}_C) ⨟ (\text{id}_B \otimes \sigma_{A,C}), \tag{8}$$
$$\sigma_{A,B\otimes C} ⨟ \alpha = \alpha ⨟ (\sigma_{A,B} ⨟ \text{id}_C) ⨟ (\text{id}_B \otimes \sigma_{A,C}), \tag{9}$$
$$\sigma_{A,A'} ⨟ (g \otimes f) = (f \otimes g) ⨟ \sigma_{B,B'}, \tag{10}$$
$$\sigma_{A,B} ⨟ \sigma_{B,A} = \text{id}_{A\otimes B}. \tag{11}$$

{此外}，只要在形式上类型正确，它们就必须满足以下公理。

$$\alpha ⨟ \alpha = (\alpha \otimes \text{id}) ⨟ \alpha ⨟ (\text{id} \otimes \alpha), \tag{12}$$
$$\rho = \alpha ⨟ (\text{id} \otimes \lambda), \tag{13}$$
$$\alpha ⨟ \sigma ⨟ \alpha = (\sigma \otimes \text{id}) ⨟ \alpha ⨟ (\text{id} \otimes \sigma). \tag{14}$$

字符串图 [JS91]是幺半范畴的一种可靠且完备的语法。

构造 K.2。 设 $\mathbb{C}$ 是一个幺半范畴。其严格化 **Strict**($\mathbb{C}$) 是一个幺半范畴，其中

- 对象是团：对于 $\mathbb{C}$ 的每个对象列表，例如 $[A_0, \ldots\ldots A_n] \in$ **List**($\mathbb{C}$)，我们构造一个团，其中包含所有可能的括号化方式以及它们之间的一致性同构；
- 态射是团态射：团中任意两个分量之间的一个态射，该态射确定它们所有分量之间的态射。

张量积是拼接，这使其成为一个严格幺半范畴。

注记 K.3。 存在一个强幺半函子 $\mathbb{C} \to$ **严格化**($\mathbb{C}$)，它将对象 A 变为对象$[A]$；该函子是完全忠实的，而且还是本质满的，从而给出一个幺半等价。

定理 K.4。 每个幺半范畴都与其严格化幺半等价。