arXiv:2301.11905v1 [cs.GT] 27 Jan 2023

Nisan-Ronen猜想的证明

George Christodoulou* Elias Koutsoupias † Annamária Kovács‡

摘要

NoamNisan 和 Amir Ronen 猜想，对于 n 无关机器上的最大完工时间最小化问题，确定性真实机制的最佳近似比为 n。本文验证了这一猜想。

1 引言

这项工作解决了算法机制设计领域中历史最悠久的公开问题，即 Nisan-Ronen猜想。Nisan 和 Ronen 的开创性工作 [28] 奠定了算法机制设计 领域的基础，探究了机制设计在计算和信息论方面的问题。机制设计是博弈论和微观经济学中一个备受关注的分支，研究在输入由自利参与者私下持有并提供的环境中如何设计算法（称为机制）。针对优化问题的机制，除了传统的算法目标（假设已知输入）外，还肩负着额外任务：为参与者提供激励，使其如实报告输入。

这一研究领域的主要方向之一，是界定真实性对算法施加的限制。与传统算法相比，机制的能力受到多大程度的限制？广受关注的调度问题 Nisan-Ronen猜想明确提出了这个问题：对于 n 台机器，不存在近似比优于 n的确定性机制。

该调度问题的目标是将 m个任务分配给 n 台无关机器，使最大完工时间最小化，其中每台机器 i 需要 t_{ij} 单位时间来处理任务 j。这个问题结合了多种有趣的性质。首先，它属于最具挑战性且尚未充分探索的多维 机制设计领域，因为私人信息（ t_{ij}的私人信息）是多维的。相比之下，相关 机器调度属于单维 机制设计，这一领域已得到充分研究；在该领域中，真实机制的能力与最佳非真实算法并无显著差异：不仅真实机制能够计算出精确的最优解（不考虑计算方面的问题 [1]），而且还存在真实的多项式时间近似方案 [13]。其次，该调度问题的目标是极大极小目标，从机制设计的角度来看，这比著名的VCG [30, 14, 22] 机制所能实现的极小和目标更具挑战性。VCG是真实的，也可以应用于该调度问题，但其近似比很差，等于机器的数量 n [28]。

是否存在比 VCG 更好的调度机制？ Nisan 和 Ronen [28] 曾猜想答案应该是否定的，但在过去二十年里，这个问题一直悬而未决。在这项工作中，我们证实了 Nisan-Ronen猜想。

*信息学院，塞萨洛尼基亚里士多德大学，希腊。电子邮箱： gichristo@csd.auth.gr

†英国牛津大学计算机科学系。电子邮箱： elias@cs.ox.ac.uk

‡德国法兰克福歌德大学信息学系。电子邮箱： panni@cs.uni-frankfurt.de

定理 1. 对于调度 n 无关机器的问题，不存在近似比优于 n的确定性真实机制。

这一结果解决了Nisan-Ronen猜想。多年来，研究人员进行了各种尝试，但成效有限，旨在改进Nisan和Ronen最初给出的2这一界。例如，该界在 [12], 被改进为2.41，随后在 [23], 被改进为2.61，并在十多年里一直保持最佳界。最近，Giannakopoulos、Hamerl和Poças [19], 将下界改进为2.75，之后Dobzinski和Shaulker [17]又将其改进为3。这些改进后的界代表了该领域的进展，但下界与上界之间仍存在巨大差距。真实调度问题的第一个非常数下界由 [9], 给出，其中证明了Ω($\sqrt{n}$)的下界。

1.1 进一步相关工作

一系列研究考察了具有略高近似保证的随机化机制。需要注意的是，随机化机制存在两种真实性概念：如果一个机制被定义为确定性真值机制上的概率分布，则称其为普遍真实；如果从期望意义上看，没有任何玩家能够通过说谎获益，则称其为期望真值。在 [28], 中，针对两台机器的情形提出了一种普遍真实机制，随后Mu'alem和Schapira [27]将其扩展到 n 台机器的情形，并给出了 $0.875n$的近似保证，之后又由 $0.837n$ 通过 [25]将其改进。Lu和Yu [26] 展示了一种期望真值机制，其近似保证为$(n+5)/2$。Mu'alem和Schapira [27], 证明，对于这两类随机化真值机制，下界均为 $2-1/n$。在 [7], 中，下界被扩展到分数机制，在这种机制中，每个任务都可以分数式地分配给多台机器。他们还展示了一种保证为$(n+1)/2$的分数机制。即使在只有两台机器的特殊情形下，上界和下界也并不紧 [26, 6]。

在贝叶斯设定下，Daskalakis 和 Weinberg [16] 证明了存在一种机制，其性能与最优真实机制相差至多 2 倍，但这并不适用于最优完工时间。 [5] 的工作给出了与先验无关机制的界（其中输入来自机制未知的概率分布）。Giannakopoulos 和 Kyropoulou [20] 证明，在一定的分布假设和对称性假设下，VCG机制实现了 $O(\log n/\log\log n)$ 的近似比。最后，在最近的一项工作中，[10] 针对图设定给出了积极结果，其中每个任务最多只能分配给两台机器。这项工作的下界构造使用了多团和多星。

此外，还有关于调度问题变体以及特殊情形的研究，并取得了重要成果。Ashlagi、Dobzinski 和 Lavi [2], 解决了 Nisan-Ronen猜想的一个受限版本，针对的是匿名机制这一特殊但自然的类别。Lavi 和 Swamy [24] 研究了一个受限的输入定义域，但该定义域仍保留了这一设定的多维特征。他们考虑了仅有"低"和"高"两种可能值的输入，并展示了一种近似因子为 2 的优雅确定性机制。他们还证明，即使在这一设定下，在真实性要求下实现最优完工时间也是不可能的，并给出了 $11/10$ 的下界。Yu [32] 将这些结果扩展到了一个值域，而 [3]研究了多维定义域，其中机器的私人信息是一个比特。

2 预备知识

在无关机器调度问题中，需要将集合 M 中的 m 个任务调度到集合 N中的 n 台机器上。每台机器 i 处理任务 j 所需的处理时间或值为 t_{ij}，并且

机器 i 处理任务子集 S 所需的完工时间等于各单项任务处理时间之和 $t_i(S) = \sum_{j \in S} t_{ij}$。目标是找到一种将任务分配给机器的方案，使最大完工时间最小，也就是使最大完工时间最小。

2.1 机制设计

我们假设每台机器 $i \in N$ 均由一个自利型代理人（玩家）控制，该代理人不愿意处理任务，而值 t_{ij} 是仅为其本人所知的私人信息（也称为代理人的类型 i）。代理人 i 的可能类型集合 T_i 由所有向量 $b_i = (b_{i1}、\ldots\ldots、b_{im}) \in \mathbb{R}_+^m$. 组成。另令 $\mathrm{T} = \times_{i \in N} \mathrm{T}_i$ 表示类型组合空间。

机制为每个玩家 i 定义一个可供其选择的策略集合 B_i。我们考虑直接揭示 机制，即对于所有 i，$\mathrm{B}_i = \mathrm{T}_i$，这意味着玩家的策略只是向机制报告其类型。每个玩家 i 提供一个报价 $b_i \in \mathrm{T}_i$；如果真实类型 t_i不符合其利益，也不一定会如实报告。一个机制（A，P）由两部分组成:

分配算法： 分配算法 A 根据参与者的输入（出价向量） $b = (b_1、\ldots\ldots、b_n)$将任务分配给机器。令 A 为将 m任务划分给 n 机器的所有可能划分构成的集合。分配函数 $A : \mathrm{T} \to \mathrm{A}$ 将任务划分给 n 机器；对于出价向量 $b = (b_1、\ldots\ldots、b_n)$，我们用 $A_i(b)$ 表示分配给机器 i 的任务子集。

支付方案： 支付方案 $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ 确定支付，支付还取决于出价向量 b。函数 $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ 表示机制向每个代理提供的支付，即 $\mathrm{P}_i : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$。

玩家的效用 u_i（该玩家为 i）是其获得的支付减去其处理分配给自己的任务集合所需的实际时间，$u_i(b) = \mathrm{P}_i(b) - t_i(A_i(b))$，其中 $t_i(A_i(b)) = \sum_{j \in A_i(b)} t_{i,j}$。我们关注的是诚实机制。如果对每个玩家而言，报告其真实类型都是一种占优策略，则该机制是诚实的。形式化地，

$$u_i(t_i, b_{-i}) \geq u_i(t_i', b_{-i}), \qquad \forall i \in [n],\ t_i, t_i' \in \mathcal{T}_i,\ b_{-i} \in \mathcal{T}_{-i},$$

其中，记号 T_{-i} 表示 T 中除第 i 个部分以外的所有部分。

对于给定类型 t，机制的质量由其分配算法 A 所实现的最大完工时间 机制成本(t) 衡量，机制成本$(t) = \max_{i \in N} t_i(A_i(t))$，并将其与最优完工时间 最优成本$(t) = \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{i \in N} t_i(A_i)$ 进行比较。

众所周知，只有一部分算法可以成为真实机制的分配算法。特别地，对于每个 t，都不存在其分配算法处处最优的机制，因此自然应关注机制分配算法的近似比。如果一个机制的分配算法是 c-近似的，则称该机制为 c-近似的；也就是说，对于所有可能的输入 t，都有 $c \geq \frac{\text{机制成本}(t)}{\text{最优成本}(t)}$。

在这项工作中，我们不对计算机制的分配 A 和支付 P提出任何要求。换言之，该下界是信息论意义上的，不依赖任何计算假设。

2.2 弱单调性

一个机制由两个算法组成：分配算法和支付算法。然而，我们只关注分配算法的性能。因此，

自然会提出这样的问题：是否可以在不涉及支付算法的情况下，刻画那些作为真实机制组成部分的分配算法类。事实上，下面的定义给出了这样的刻画。

定义 2. 如果分配算法 A 满足以下性质，则称其为弱单调（WMON）：对于每个 $i \in N$ 以及两个输入 $t = (t_i, t_{-i})$ 和 $t' = (t'_i, t_{-i})$，相应的分配 A和 A' 满足

$$t_i(A_i) - t_i(A'_i) \leq t'_i(A_i) - t'_i(A'_i).$$

利用指示变量 $a_{ij}(t) \in \{0, 1\}$ 表示任务 j 是否分配给玩家 i，可得一个等价条件：

$$\sum_{j \in M} (a_{ij}(t') - a_{ij}(t))(t'_{ij} - t_{ij}) \leq 0.$$

众所周知，每个真实机制的分配函数都是弱单调的 [4]。尽管证明近似比下界时并不需要这一性质，但事实证明，在凸域中（调度定义域即属此类），这一性质也是机制具有真实性的充分条件 [29] 。

我们的证明中会用到弱单调性的一个直接推论（简单证明见 [8] ）。直观地说，该推论表明：固定所有参与者对某个任务子集的值后，将分配限制在其余任务上，仍然是弱单调的。

引理 3. 设 A 是弱单调分配，并令 (S, T) 为 M 的一个划分。当固定 T 中任务的值时，分配 A 在 S 上的限制也弱单调。

弱单调性的以下推论最早由 [28]，使用，是证明真值机制下界的标准工具（例如参见 [28, 12, 27, 2, 19, 17]）。

引理 4. 考虑一个真实机制 $(A, \mathcal{P})$ 及其对出价向量 t 的分配。设 S 是分配给玩家 i 的任务的一个子集，S' 是分配给其他玩家的任务的一个子集。考虑任意一个出价组合 $t' = (t'_i, t_{-i})$，它由 t 得到：降低玩家 i 在 S 中的值，即 $t'_{ij} < t_{ij}, j \in S$，并提高玩家 i 在 S' 中的值，即 $t'_{ij} > t_{ij}, j \in S'$。那么，对于 t 和 t'，玩家 i 的分配在 $S \cup S'$ 中的所有任务上都相同。

请注意，该引理保证只有分配给玩家 i 的任务集合 S 保持不变。这并不妨碍改变其他玩家对集合 S' 中任务的分配，除非只有两名玩家。在多玩家设置中，这是一个主要障碍；本文通过聚焦于每项任务仅涉及两名玩家的图设置来避免这一问题。

3 主要论证

我们考虑多重图实例，其中边对应任务，节点对应机器 [10]。对于一条边 e，我们使用记号 $e = \{i, j\}$ 表示其顶点 i 和 j，尽管它们不能唯一确定 e。一条边 $e = \{i, j\}$ 对应一项对于除 i 和 j 之外的节点具有极高值的任务，这保证了任何近似比至多为 n 的算法都必须将其分配给机器 i 或机器 j （示意图见图 1）。

该论证处理的是具有非常高重数[1], 的多团，其中每条边都有一个端点的值为 0 （示例见图3）。目标是谨慎地选择该多团的一个子图

[1] 多重图的重数定义为其各条边重数中的最小值。

并更改其中一些边的值，以获得近似比的下界。每条边的两个值中有一个为 0，这一点非常方便：该子图近似比的下界也是整个多团近似比的下界，因为其他边不会影响最优分配的成本。

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

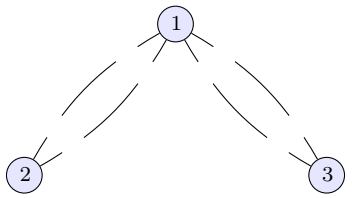

图1：一个包含三名参与者和四项任务的多星形实例，左侧为矩阵形式，右侧为图形式。符号 ∞ 表示相较于其他值极高的值。该实例是一个多星形结构，其中参与者1是根节点，参与者2和3是叶节点。

在本节和下一节中，我们讨论多重图。对于一个实例 v，我们使用记号v_i^e 表示节点 i 在边 $e = \{i, j\}$上的值。第5节只讨论多星形结构，因此我们会使用一种不同且更方便的记号。在大部分论证中，我们固定多团的值，并聚焦于边界函数。

定义5 (边界函数)。 固定一个机制，并考虑一个值为 v的多团。对于一条边 $e = \{i, j\}$，边界函数或临界值函数$\psi_{i,\ j}^e(z)$ 是将 e 分配给节点 i的阈值。更准确地说，如果保持其他所有值不变，并将节点 j 的 e 值改为 z，那么当$v_i^e < \psi_{i,\ j}^e(z)$ 时， e 会分配给 i；而当$v_i^e > \psi_{i,\ j}^e(z)$时， e 会分配给 j。

请注意，边界函数 $\psi_{i,\ j}^e(\cdot)$ 可能取决于 v 的其他值。更精确的记法应为 $\psi_{i,\ j}^e[v](z)$ 或 $\psi_{i,\ j}^e[v_{-e}](z)$，但在本节及下一节中，我们讨论的是一个固定的 v，因此在记号中将其省略。

边界函数是单调但不一定连续的实函数。一个令人困扰但并不严重的问题是，在间断点处很难处理边界函数，因此我们希望避开这些点。实现这一点的总体思路很明显：由于这些函数是单调的，根据 Froda 定理，它们至多只有可数个间断点；通过在连续值域中随机选取实例，我们几乎必然不会遇到间断点。这一点在引理17中得到了形式化。下面的定义对这一要求作出精确说明。

定义 6 （连续性要求）。 固定一个机制，并考虑一个实例 v。如果存在某条边 $e = \{i, j\}$，使得 v 在 $v_j^e \neq 0$ 处存在间断，且 $\psi_{i,\ j}^e(\cdot)$ 在 v_j^e 处不连续，则称v 存在间断。如果 对 v进行有理平移后均不存在间断，则称一个实例满足连续性要求。

论证的实例将被随机选取，从而几乎必然满足连续性要求。

定理 1 的证明旨在通过概率方法证明：存在一个重数足够高的多团，其中包含一个近似比至少为 n的星，同时保持所有其他边的值不变。实际上，该论证旨在证明，星的近似比下界可以任意接近 $n - 1$。只需在星的根节点上添加一个自环，或者等价地，在根节点与另一个节点之间添加一条边 j，并使其 j的值非常高，就几乎可以免费获得近似比上的额外+1 。

为了证明存在一个近似比为 $n-1$ 的星 S，我们的大致目标是证明存在一个以某个节点 i 为根的星，并满足以下性质：

1. 每条边 $e=(i,\ j)$ 对于 S 的值均为 0，而对于叶节点，其值均为 z，且相同的，其中 $z>0$。
2. 所有边 $\sum_{e\in S}\psi^e_{i,\ j}(z)$ 的边界函数值之和至少为 $(n-1)z$。

3. 当我们将其值改为 $\psi^e_{i,\ j}(z)$（对所有$j\neq i$）时，机制会将所有边分配给根节点。

由此立即可知，这样的星的近似比为 $n-1$：机制将所有任务分配给根节点，最大完工时间为 $\sum_{e\in S}\psi^e_{i,\ j}(z)\ \geq(n-1)z$；而更优的分配是将所有任务分配给叶节点，最大完工时间为 z。

满足第二个性质的星称为良好星形，而满足第三个性质的星称为盒子。实际上，出于技术原因，我们需要使用良好性和盒子性的近似概念。

定义7（良好星形和多星）。对于给定的 $\varepsilon>0$ 和一个实例 v，若一个星 S 的根节点为i，所有其余（$n-1$）节点均为叶节点，则称其为 ε-良好星形，或简称良好星形；如果存在 $z>0$使得，首先，S 的每条边 $e=\{i,j\}$ 对于根节点的值为 $v^e_i=0$，对于叶节点的值为 $v^e_j\in$（z,（$1+\varepsilon$）z）j，其次，

$$\sum_{e\in S}\psi^e_{i,j}(v^e_j)\geq(1-3\varepsilon)(n-1)z. \tag{1}$$

如果一个多星中的所有含有 $n-1$ 个叶节点的星都是良好星形，且具有相同的 z，则称该多星为良好星形。

令 ε 趋近于 0，$1-3\varepsilon$ 可以任意接近 1，而 v^e_i 可以任意接近 z。表达式 $1-3\varepsilon$ 中的因子 3 是为了方便；第4节将证明这样的性质。

定义 8 (盒子)。对于给定的 $\delta>0$ 和实例 v，如果星 S 的根节点为 i，且当我们将根节点值改为 $\psi^e_{i,j(v^e_j)}-\delta$（对 S 的每个叶节点 j 都如此）时，S 的每条边 e 对于 i 的值均为 *0*，且机制将所有边都分配给根节点，则称该星为 δ-盒子，或简称盒子。

图2 给出了示意图。请注意，虽然良好星形有 $n-1$ 个叶节点，但盒子星形的叶节点可能更少。这有助于在第5节中进行归纳法，该性质将在那里得到证明。

现在我们已经给出了漂亮多星和盒星的定义，可以陈述两个几乎立即确立主要结果的核心命题。

首先，下面的定理（证明见第4节）表明，存在重数任意高的漂亮多星（见图3）。

定理9（漂亮多星）。对于每个具有有界近似比的机制以及每个q，都存在一个满足连续性要求的多团，其中包含一个重数为 q的漂亮多星。

其次，下面的定理表明，具有足够高重数的漂亮多星——由上述定理保证其存在——包含一个生成盒，即一个具有 $n-1$ 个叶节点的盒星（见图4）。

定理10 (盒子)。固定 δ、$\varepsilon>0$ 以及一个近似比至多为 n 的机制。考虑一个满足连续性要求且包含一个重数足够高的多星的实例，其中根节点 i 的所有值均为 *0*，叶节点的所有值均属于 $(z$,$(1+\varepsilon)$ $z)$。那么，该多星包含一个有 $n-1$ 个叶节点的星，它是一个 δ-盒子。

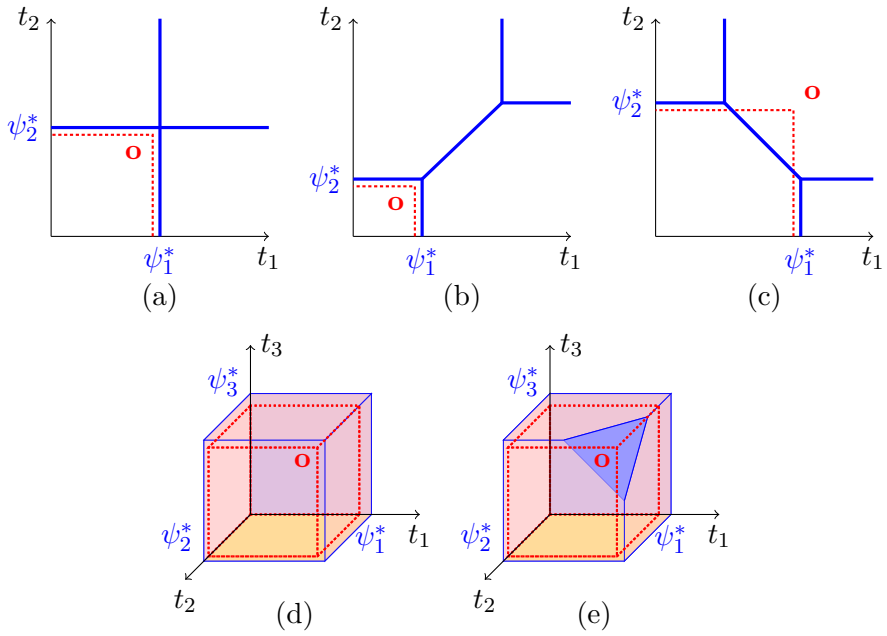

图2：（盒子）。对于具有2个叶节点（a）–（c）和3个叶节点（d）–（e）的星，根节点值的分配划分；在后一种情况下，只显示了部分分配划分。此图展示了一个星，其根节点为 i，叶节点为 $j \in \{1,2,3\}$。如果用 e_j表示星的边，图中使用以下简写： $t_j = v_i^{e_j}$ 表示根节点的值，$\psi_j^* = \psi_{i\,j}^{e_j}(v_j^{e_j})$表示边界值。请注意，单调性限制了分配区域的形状和边界，详见第5.1.1节和第5.1.2节。红色虚线对应于盒子定义中的值 $\psi_j^* - \delta$。情况（a）、（b）和（d）是盒子，因为角 o 位于根节点获得所有任务的区域内。另一方面，情况（c）和（e）不是盒子，因为角点 o 位于该区域之外。

盒定理的证明见第5节。为使符号尽可能简洁，在证明中我们不失一般性地假设多星的根节点是节点 0，叶节点是节点 1 到 $n-1$，并相应地调整符号。

主要结果（定理 1）的证明可由上述两个定理直接得出。我们考虑每个节点都带有值为 0 的环的多团，并注意到添加环不会影响上述定理的证明。使用定理9，找到一个满足连续性要求且包含重数足够高的漂亮多星的多团。使用定理10，在其中找到一个良好盒。

引理 11. *一个 δ-良好盒，其根节点带有一个环，根节点的所有值均为 0，叶节点的所有值均属于$(z(1+\varepsilon)z)$，其近似比为 n，当 δ 和 ε 趋于 0 时。*

证明。 取一个良好盒，并考虑如下实例：将根节点的值从 i 改为 $\psi_{i,\,j}^e(v_j^e) - \delta$ 对所有 $j \neq i$ 均成立。根据盒性，所有边都分配给根节点。现在将自环的值改为 z，并将根节点的值降低为 $\psi_{i,\,j}^e(v_j^e) - 2\delta$。由于与自环对应的任务即使在将其值提高到 z 时仍必须分配给根节点，再结合单调性（引理 4），边的分配保持不变。机制的最大完工时间为

$$z + \sum_{j \neq i} (\psi_{i,j}^e(v_j^e) - 2\delta) \geq z + (1-3\varepsilon)(n-1)z - 2(n-1)\delta,$$

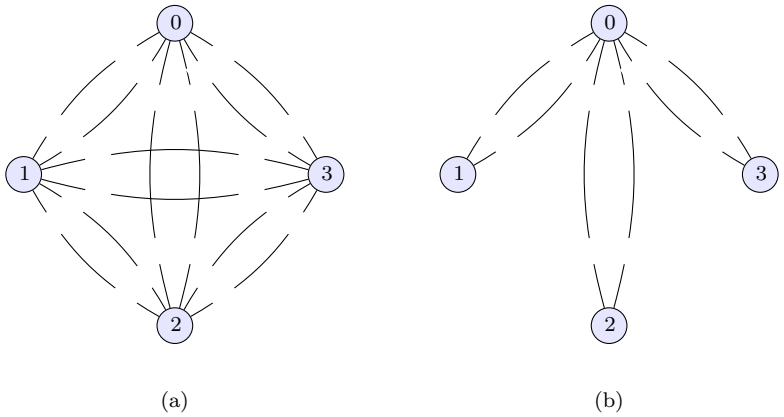

图3：这是定理9陈述中各个组成部分的示意图。(a) 展示了一个有四个节点、重数为2的多团。为简化起见，我们用 z 表示非零值，这些值不一定对所有边都相同。需要注意的是，实际所需的重数要高得多。(b) 展示了一个作为该多团子图的多星。同样，实际所需的重数很高。如果这是一个良好的多星，那么所有叶节点的值 z 大致相同。

而最优完工时间至多为 $(1+\varepsilon)z$（此时根节点获得自环，叶节点获得其余所有边）。当 δ 和 ε 趋近于 0 时，该比率趋近于 n。□

该引理与良好多星定理和盒定理共同确立了主要结果。实际上，它确立了一个更强的结论。即使定义域是多重图的集合，真实调度的近似比仍为 n。

推论12. 多重图的真实调度近似比为 n。

4 良好多星定理的证明（定理9)

本节旨在证明定理9。为使论证简洁明了，我们先整理并证明一些有用的结论，其中包括杨氏不等式在一维机制的边界函数上的直接应用，以及关于具有两个参与者和一个或两个任务的机制的两个简单性质。

4.1 边界函数与积分

对于一条边 $e=\{i,\ j\}$，固定其他所有边的值，并考虑边界函数$\psi^e_{i,\ j}(\cdot)$ 和 $\psi^e_{j,\ i}(\cdot)$。根据边界函数的定义（定义5），若一条边 e的值为 v^e_i和 v^e_j，则当 $v^e_i < \psi^e_{i,\ j}(v^e_j)$ 时， e分配给节点 i；当 $v^e_j < \psi^e_{j,\ i}(v^e_i)$ 时， e分配给节点 j。其中， v^e_i和 v^e_j 分别是边 e上节点 i 和 j 的值。请注意，当两者相等时，边界函数并不能确定分配方式。

这些函数是非递减的，而且粗略地说，互为逆函数。更精确地说，$\psi^e_{j,\ i}$ 是 $\psi^e_{i,\ j}$的伪逆，也就是说，

$$\sup\{x\ge 0\colon \psi^e_{i,j}(x)<y\}\ \le\ \psi^e_{j,i}(y)\ \le\ \inf\{x\ge 0\colon \psi^e_{i,j}(x)>y\}. \tag{2}$$

按照约定，当 $y=0$ 时，左侧的上确界为 0。

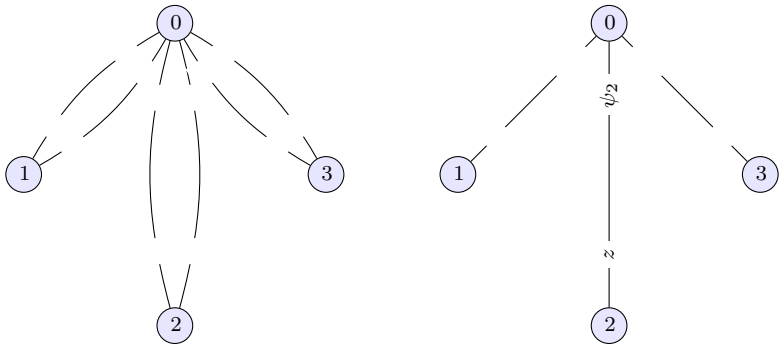

图4：该图描绘了一个具有高重数（a）的多星，以及由定理10选出的最终生成星（b）。如果该多星满足良好性，那么最终的星也满足良好性（因此大致为 $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \geq 3z$），同时还满足盒性（见图2(d)），这保证了这些边必须分配给根节点。请注意，这个最终的星是原始多团的一个子图；剩余边（图中未显示）对最优完工时间的贡献为 0。

以下命题是杨氏不等式的一个特例[2]。原始证明要求函数连续且严格递增，但后续证明将这些条件放宽为非递减伪逆函数 [15]。

命题13 （杨氏不等式）。 如果 $\psi^e_{i,\,j}$ 和 $\psi^e_{j,\,i}$ 是某条边的边界函数，那么对于每个 $a \geq 0$:

$$\int_0^a \psi^e_{i,j}(x)\,dx + \int_0^a \psi^e_{j,i}(x)\,dx \geq a^2. \tag{3}$$

4.2 平行边的边界函数的独立性

命题14。 对于每个具有有界近似比的机制，以及每条边都有一个值为 *0* 的多重图，边 $\psi^e_{i,\,j}(\cdot)$ $e = \{i, j\}$ 的边界函数独立于 i和 j之间其他边的值，但在其间断点处可能除外。

证明。 设 $e' \neq e$ 是连接 i 和 j的一条边。只需证明，在固定其余边的值时，$\psi^e_{i,\,j}(\cdot)$独立于 e' 的值。众所周知 [18] ，并且由定理 37也可直接推出，除非机制是一个（放宽的）任务无关机制，否则其近似比是无界的。这就证明了该命题，因为其余边对最优完工时间的贡献为 0。

□

命题 15. 对于近似比小于 n 的任意机制，以及每条边的一个取值为 *0* 的任意多重图，边 $e = \{i, j\}$ 的边界函数 $\psi^e_{i,j}(\cdot)$ 满足 $\psi^e_{i,j}(x) < n\,x$。

证明。 如果对于某个 x、 $\psi^e_{i,\,j}(x) \geq n\,x$，则将节点 j 和 i 的 e值分别设为 x 和 $\psi^e_{i,\,j}(x) - \epsilon x$，对于某个 $\epsilon > 0$，近似比至少为 $n - \epsilon$。令 $\epsilon \to 0$ 即得命题。

□

[2]原始的杨氏不等式指出，若 f 非负、连续且严格递增，则$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \geq ab$。

4.3 构造

固定某个 ε，使得 $1/\varepsilon$ 是正整数，并令 $\varepsilon\mathbb{Z}_{>0} = \{k\varepsilon\colon\ k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ 表示 ε 的整数倍数。我们还将使用记号 $\lfloor x \rfloor_\varepsilon = \varepsilon\lfloor x/\varepsilon \rfloor$ 和 $\lceil x \rceil_\varepsilon = \varepsilon\lceil x/\varepsilon \rceil$。

令 D_ε 表示取值于 $(0, 1]$ 的子集，即 $D_\varepsilon = \{\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \ldots,\ 1-\varepsilon,\ 1\}$，并定义 $W_\varepsilon = \{(0,\ z)\colon\ z \in D_\varepsilon\} \cup \{(z,\ 0)\colon\ z \in D_\varepsilon\}$。

在本节中，如果一个多重图的每条边的重数均为 k，我们就称其重数为 k-multiplicity。论证中的实例按如下方式选取：

定义 16 (随机多团)。取一个重数足够大的多团 q'。对于该多团的每条边 e，分两步选取其值：第一步，从 W_ε 中均匀且独立地选取一个值 $(0,\ z)$ 或 $(z,\ 0)$；第二步，将 z 改为在 $(z,\ (1+\varepsilon)z)$ 中均匀分布的随机值。我们将所得结果称为随机多团。

一旦选定这些值，我们便在本节中始终固定使用它们。由于随机多团的每条边的值都等于 0，因此这些多重图的最优完工时间为 0。

在选择随机多团的值时之所以要进行第二步，唯一原因是满足连续性要求，下一条引理将对此进行证明。第二步在本节中不发挥其他作用，因此基本上可以忽略；也就是说，如果边 e 的值直接取自 W_ε，论证会更加直接。

Lem引理 17。随机多团几乎必然满足连续性要求 *ly.*

证明。对于固定实例 v，将 Froda 定理应用于单调边界函数 $\psi^e_{i,\ j}(\cdot)$，可知其不连续点集合是可数的。由于边的集合是有限的，且 v 的有理平移是可数的，因此 v 及其有理平移的不连续点集合也是可数的。引理得证，因为随机多团的每个值都从 $(z,\ (1+\varepsilon)z)$ 中均匀选取，其中 $z,\ \varepsilon > 0$，而该集合是不可数集。 □

本节的目标是证明：对于每个近似比有界的真实机制，以及任意给定的正整数 q，只要随机多团的重数 q' 足够高，它就包含一个重数为 q 的漂亮多星。为此，我们使用有限个函数，其定义域为 D_ε，这些函数以 ε 的倍数近似边界函数：

$$\underline{\psi}^e_{i,j}(z) = \lfloor \psi^e_{i,j}(z) \rfloor_\varepsilon, \tag{4}$$

对于每个 $z \in D_\varepsilon$。

这些近似边界函数集合的一个重要性质是有限。其定义域 D_ε 由 $1/\varepsilon$ 个值组成，其值域由 n/ε 个值组成，即 $\{0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \ldots,\ n-\varepsilon\}$；这是因为近似比严格小于 n 的机制必须满足 $\psi^e_{i,\ j}(z) < nz$（命题 15）。我们将利用这一事实证明，大型随机多团中包含许多具有相同近似边界函数的边。实际上，我们需要更强的结论，因为漂亮多星的边还必须具有相同的值。为此，我们考虑具有相同近似边界函数、且覆盖整个值域的边集合。以下定义阐明了具体要求。

定义 18。节点 i 和 j 之间的 $2/\varepsilon$ 边 A 集合称为全范围偶极子，或简称偶极子，若

- 对于 D_ε 中的每个值 z，都存在一对边 e、$e\prime \in A$，其值满足 $\lfloor v^e_i \rfloor_\varepsilon = z$、$v^e_j = 0$、$v^{e\prime}{}_i = 0$，且 $\lfloor v^{e\prime}{}_j \rfloor_\varepsilon = z$，并且

- 所有边 $e \in A$ 都具有相同的 $\underline{\psi}^e_{i,\,j}(\cdot)$，我们将其简单记作 $\underline{\psi}_{i,\,j}(\cdot)$。类似地，所有边都具有相同的 $\underline{\psi}^e_{j,\,i}(\cdot)$。

偶极子很有用，因为如下引理所示，任何由偶极子组成的团——也就是每一对节点之间都有一个偶极子的多重图——都包含一个良好星形。实际上，该引理表明了一个<stronger statement 更强的结论：当我们将良好星形的定义（定义7）中的界（1）中的 $\psi^e_{i,j}(v^e_j)$ 替换为其下界 $\underline{\psi}^e_{i,j}(z)$ 时，该界仍然成立。正是这一更强的结论将有助于我们建立本节的主要结果。

引理 19。 在每个偶极子团中，都存在 $i \in [n]$ 和 $z \in D_\varepsilon$，使得对于星形结构 S，其根节点为 i，叶节点为其余 $n-1$ 个节点，并且对于 i，边的值为0，对于每个 $j \neq i$，边的值为$(z,(1+\varepsilon)z)$ 时，以下结论成立：

$$\sum_{j \neq i} \underline{\psi}_{i,j}(z) \geq (1-3\varepsilon)(n-1)z. \tag{5}$$

证明。 首先，对于连接 i 和 j的每条边 e，由于 $\psi^e_{i,j}(x)$ 和 $\psi^e_{j,i}(x)$ 是伪逆函数，杨氏不等式（命题13）给出

$$\int_0^1 \psi^e_{i,j}(x) + \psi^e_{j,i}(x)\,dx \geq 1.$$

其次，根据函数 $\psi^e_{i,\,j}(\cdot)$ 的单调性以及近似边界函数的定义，我们得到

$$\int_0^1 \psi^e_{i,j}(x)\,dx \leq \int_0^1 \psi^e_{i,j}(\lceil x \rceil_\varepsilon)\,dx \leq \int_0^1 \underline{\psi}_{i,j}(\lceil x \rceil_\varepsilon) + \varepsilon\,dx = \varepsilon + \sum_{z \in D_\varepsilon} \varepsilon \underline{\psi}_{i,j}(z).$$

结合这两个事实，我们得到，对于每条边 e between i and j:

$$\sum_{z \in D_\varepsilon} (\underline{\psi}_{i,j}(z) + \underline{\psi}_{j,i}(z)) \geq \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

对所有点对 $\{i,\ j\}$ 求和，得到

$$\sum_{z \in D_\varepsilon} \sum_{\{i,j\}} (\underline{\psi}_{i,j}(z) + \underline{\psi}_{j,i}(z)) \geq \binom{n}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right),$$

$$\sum_{z \in D_\varepsilon} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \underline{\psi}_{i,j}(z) \geq \binom{n}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right).$$

因此，根据中值定理的一个变体，存在 $z \in D_\varepsilon$ and $i \in [n]$ 使得 (5) 成立。为说明这一点，假设不存在这样的 z and i，因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in D_\varepsilon} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \underline{\psi}_{i,j}(z) &< \sum_{z \in D_\varepsilon} \sum_{i} (n-1)(1-3\varepsilon)z \\
&= n(n-1)(1-3\varepsilon)(\varepsilon + 2\varepsilon + \cdots + 1) \\
&= n(n-1)(1-3\varepsilon)\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&\leq \binom{n}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right),
\end{aligned}$$

矛盾。

对于每个 $j \neq i$，对 i 和 z 的值为 0 的边构成了一个满足该引理性质的星。

□

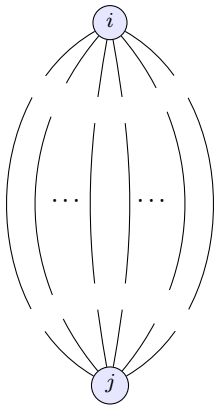

图 5：一个偶极子。所有对（$\underline{\psi}^e_{i,\ j}(\cdot)$、$\underline{\psi}^e_{j,\ i}(\cdot)$）都相同，并且值的集合 $\{\lfloor v^e_i \rfloor_\varepsilon,\ \lfloor v^e_j \rfloor_\varepsilon\}$ 等于 $W_\varepsilon = \{(0,\ z):\ z \in D_\varepsilon\} \cup \{(z,\ 0):\ z \in D_\varepsilon\}$。图中显示的是 $\lfloor v^e_i \rfloor_\varepsilon$而不是 v^e_i。

根据定义，$\underline{\psi}_{i,\ j}(z)$ 是 $\psi^e_{i,\ j}(z)$ 的下界。此外，如果 $z = \lfloor v^e_j \rfloor_\varepsilon$，则有 $\underline{\psi}_{i,\ j}(z) \leq \psi^e_{i,\ j}(z) \leq \psi^e_{i,\ j}(v^e_j)$。因此，上述引理所保证的星是一个良好星形。然而，我们需要一个具有适当高重数的漂亮多星。实现这一点有一个直接的策略：取一个具有足够高重数的随机多团；由于值的数量和近似边界函数的数量都有界，以非零概率，在每一对节点之间，它将包含许多具有相同近似边界函数的偶极子；根据上述引理，由这些偶极子形成的每个多团都将具有相同 i 和 z 的良好星形。

引理 20。将重数为 q 的偶极子多团定义为：对于每一对节点 $\{i、\ j\}$，其间包含 q 个不相交偶极子的多重图，并且这些偶极子具有相同的近似边界函数$\underline{\psi}_{i,\ j}(\cdot)$ 和 $\underline{\psi}_{j,\ i}(\cdot)$。对于任意给定的 q，都存在 q'，使得重数为 q' 的随机多团以严格为正的概率包含一个重数为 q 的偶极子多团。

证明。考虑一个随机多团，并聚焦于两个节点 i 和 j 之间的边。我们论证，当 q' 足够高时，i 和 j 之间存在 q 个偶极子的概率接近 1。实际上，只需该概率大于 $1 - 1/\binom{n}{2}$，即可通过并集界得到该引理。

q' 边界函数。这里有两个关键性质。首先，由于近似边界函数的定义域和值域分别取 $2/\varepsilon$ 和 $(n/\varepsilon)^2$ 值，因此近似边界函数的可能值对至多有 $K = (n/\varepsilon)^{4/\varepsilon}$ 种。其次，边界函数，以及近似边界函数，都与 i 和 j 之间的边的值无关（命题14）。

由第一个性质可知，至少存在一个包含 q'/K 条边的集合，其中的近似边界函数完全相同。固定这样一个集合，将其划分为若干个各含 $2/\varepsilon$ 条边的子集，并对每个部分考虑其构成偶极子的事件。每个此类事件的概率等于该部分中的所有值均不相同的概率，即 $p = (2/\varepsilon)!\,(\varepsilon/2)^{2/\varepsilon}$。这是因为，$2/\varepsilon$ 条边的值依次为（$0, \varepsilon$）、（ε、0）.....（0、1）、（1、0）的概率为 $(\varepsilon/2)^{2/\varepsilon}$，而这些值对共有 $(2/\varepsilon)!$种排列。考虑到各条边上的值是独立选取的，各个部分对应的事件相互独立。因此，只要 q'/K 足够大，就以大于 $1 - 1/\binom{n}{2}$的概率得到 q 个偶极子。

尽管它是　　证明中无需使用，我们给出关于 q 的 q' 界。该情形

可由一个随机试验描述，其中有 $(q'/K)/(2/\varepsilon)$ 个相互独立的伯努利试验，每次成功的概率为 p，问题是确定至少有 q 次成功的概率。由 Cantelli不等式[3] 可知，服从二项分布的随机变量 $X \sim B((2k+\lambda^2)/p, p)$ 满足 $P[X > k] \geq 1 - 1/(1+\lambda^2)$。在我们的情形中，$k = q$、$\lambda^2 = \binom{n}{2}$ 以及 $p = (2/\varepsilon)!(\varepsilon/2)^{2/\varepsilon}$。实际上，在证明的其余部分，我们需要 q 远大于 $\binom{n}{2}$，因此可以将 $2k+\lambda^2$ 简化为 $3k$，从而得到界 $(q'/K)/(2/\varepsilon) \geq 3q/p$。我们得出结论：$q' \geq 6Kq/(p\varepsilon)$ 足以证明该引理的结论。 □

定理 9 的证明直接由引理 19 和引理 20 得出。

定理 *9* 的证明。引理 20 保证存在一个重数为q的偶极子多团。根据引理 19，存在 i 和 z，使得由其偶极子形成的每个团都满足（5）。由于平行偶极子具有相同的近似边界函数 [4]，因此相同的 i 和 z 适用于每个偶极子团。

因此，存在一个重数为 q 的多星，使其所有星形结构都满足（5）。由于$\psi^e_{i,j}(v^e_j) \geq \psi^e_{i,j}(\lfloor v^e_j \rfloor_\varepsilon) \geq \underline{\psi}^e_{i,j}(\lfloor v^e_j \rfloor_\varepsilon)$，因此这是一个漂亮多星。 □

5 盒定理的证明（定理10）

在本节中，我们证明盒定理 10。该定理指出，所有具有足够高重数的多星都包含一个盒子。粗略地说，盒子是一个星 S，当我们固定其叶节点的值，并将根节点到所有其他任务的值设为 0 时，根节点为获取 S 中的所有任务而对应的分配区域 R_S 是矩形的（图2给出了示意图，精确定义见定义 8，而分配区域R_S的精确定义及其性质见第 5.1.1 节）。

实际上，该证明表明，随着重数趋于无穷，随机星是盒子的概率趋于 1。

上一节（第4节）的良好多星定理表明，对于给定的小参数 $\varepsilon > 0$，存在重数和值为 $(z, (1+\varepsilon)z)$ 的良好多星，其中 $z \in [\varepsilon, 1]$ 取某个值。为使记号简洁，本节的主定理讨论值位于 $(\xi, 1)$ 中的多星，其中 ξ 可以是任意严格正值。显然，该论证适用于任意值区间，而不仅仅是 $(\xi, 1)$；特别是也适用于区间 $(z, (1+\varepsilon)z)$，因此可以结合这两个定理，得到本文的主要结果。

盒定理的证明是对叶节点数 k 进行归纳。只有一个叶节点的情形显然成立——所有星都是盒子。然而，我们不将其作为归纳法的基例，因为证明 $k = 2$ 的情形需要采用不同于一般情形的处理方式，而且在许多方面都比归纳步骤更难。两个叶节点的情形与多于两个叶节点的情形之间的差异，源于一些简单的几何事实；在讨论归纳步骤的思路时，这些事实就会明了。

粗略地说，归纳步骤如下：假设我们已经证明，多星中有 $k-1$ 个叶节点的大多数星都是盒体。那么，我们就能找到一个星 S，有 k 个叶节点——实际上能找到许多这样的星——其中所有有 $k-1$ 个叶节点的子星形结构都是盒体。现在，S可能是一个盒体

[3]证明：对于 $X \in B(m, p)$，我们有 $\sigma_X^2 = mp(1-p) \leq E[X] = mp$，因此将其代入 Cantelli不等式 $P[X > E[X] - \lambda\sigma_X] \geq 1 - 1/(1+\lambda^2)$，可得 $P[X > mp - \lambda\sqrt{mp}] > 1 - 1/(1+\lambda^2)$。当 $m = (2k+\lambda^2)/p$ 时，可以很容易验证 $mp - \lambda\sqrt{mp} \geq k$，从而得到结果。[4]但边界函数不一定相同；这就是在（5）中使用带有近似边界函数的更强表述的原因。

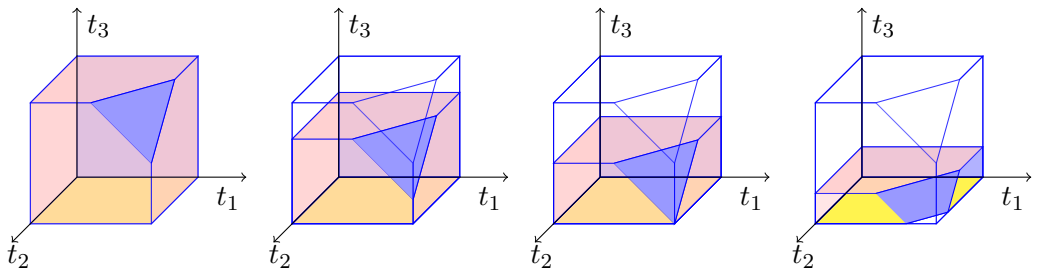

图6：该图对 $k = 3$的引理53证明的主要论证进行了高层次示意。左图对应一个严格截断盒，而另外三幅图展示了当 s_3 减小时边界的移动，这会导致矛盾，因为最后一幅图对于任务1、2而言并不是一个盒子。

本身，这种情况下就无须证明；也可能是一个仅有一个角被对角切割切掉的盒体（见图 2 和图 6）。我们把这种形状称为“截断盒”。

该论证的核心基于对 2×2 （2名玩家、2个任务）机制的刻画，旨在证明：截断盒实际上要么是一个盒子，要么当 S 中的一个任务被替换为一个兄弟任务（即属于同一叶节点的任务）时，我们可以得到一个盒子。为此，我们取星 S 中的一个任务 p 以及 p 的某个兄弟任务 p' ，并考虑（p、 p'）-切片机制，即固定其他每个任务的值后针对这两个任务的机制。根据对 2×2 机制的刻画，该切片机制要么是一个（松弛的）仿射极小化器，要么是一个（松弛的）任务独立机制。

如果切片机制是任务独立的，那么证明相对直接。任务 p 和 p' 彼此独立这一事实，根据分配区域的几何性质意味着，如果我们将任务p 替换为 p'，就会得到一个盒子，其中包含 p' 和其余的 $k-1$ 任务。这种情况下唯一真正的复杂之处可能出现在不连续点处，但连续性要求已将这些点排除。

另一种情况是，(p， p')-切片机制是仿射极小化器，且分配边界是线性函数。关键思路是利用这种线性。对于 p，我们只保留线性这一性质，而完全忽略任务 p' ，并聚焦于原始盒子。利用线性可以证明，当我们改变任务 p的叶节点值时，分配边界会沿直角方向移动。换句话说，被截断盒的整个上包络会沿直角方向移动。但如果将它移动到足够靠近侧面的位置，被截断的部分就会抵达边界，并在其上形成一个截断盒（见图 6 中的三维情形）。这似乎与归纳假设相矛盾：子星形结构是盒子，或者等价地说，侧面是低维盒子；但实际上，我们改变了任务 p的叶节点值。为了真正导出矛盾，我们采用一个更强的归纳假设：对于叶节点的许多取值，侧面（子星形结构）都是一个盒子（见下文截断盒的定义）。

不过，请注意，上述论证在 $k = 2$ 的情况下不成立，因为截去一部分的一维区间仍然是区间，也就是一个盒子。因此， $k = 2$ 的情况需要用不同的方法处理。为此，我们考虑一个有两个叶节点且每个叶节点有两条边的星，并证明这四个星中至少有一个是盒子。证明方法与归纳步骤中的论证类似，只是利用线性在两个不同方向上移动边界。利用一个已知的极值图论结果（该结果与 Zarankiewicz 问题有关），可以将“有两个叶节点且每个叶节点有两条边的多星包含一个盒子”这一事实结合起来，从而证明几乎所有星形结构都是盒子。

本文其余部分 本节将上述纲要具体化。具体而言，在第5.1小节中，我们 e

引入符号并给出定义、本节主要结果的正式表述（定理 24），以及有用的事实和引理。在第5.2节中，我们给出主要论证。在第5.3节中，我们证明基例；在第5.4节中，我们证明归纳步骤；最后，在第5.5节中，我们总结并证明盒子的存在性。

5.1 符号、定义和预备知识

以下大多数定义都取决于所讨论的机制，因此，本节中将固定一个任意的真实机制会很方便。由于我们处理的是多星而不是一般的多重图，因此更改符号表示会比较方便。

我们考虑具有 n 个节点的多星：根节点是节点 0，叶节点是节点 1、……、$n-1$。我们将边命名为 1、2、……、m，其中 $m=\ell(n-1)$。边对应于任务；两条平行边称为兄弟节点。叶节点 i 的任务集合表示为 C_i，并且我们对 i和 C_i都使用叶节点这一术语。每条边的重数为 ℓ，即对于每个 $i\in[n-1]$，都有 $|C_i|=\ell$。

节点 0 与叶节点 i之间的边 $j\in[m]$ 的值由两个非负值 $(v_0^j$、$v_i^j)$ 构成，它们表示两个玩家的处理时间；为简单起见，我们将其记为 $(t_j$、$s_j)$。本节中的所有实例都满足 $s_j\in[0,B)$，其中 B 为任意高的值，尽管在大多数论证中，s_j取自 $[0,1]$。所有边 $T=$的值集合 t、$s)=(t_j$、$s_j)_{j\in[m]}$ 称为一个实例。

对于给定实例 $T=(t,s)$，我们将根节点关于边$j\in[m]$ 的边界函数 $\psi_{0,i}^j(v_i^j)$ 记作 $\psi_j(s_j)$。回想一下，其含义是：固定所有其他边的值后，边 j若满足 $t_j<\psi_j(s_j)$，则赋给根节点；而当 $t_j>\psi_j(s_j)$ 时，则赋给叶节点。由于论证有时会考虑多个实例，因此将记法扩展为 $\psi_j(t_{-j},s_{-j},s_j)$，以明确表示其他边的值，会很有用。我们也将其写作$\psi_j[t_{-j},s_{-j}](s_j)$，以便仅将其视为$s_j$的函数。由于大多数其他边的值可以从上下文中推知，我们只在可选部分（方括号内的部分）标明发生变化的值。例如，对于实例 $T=(t,s)$，如果将 t_1 从当前值改为 x，那么边 2 的新边界函数记作 $\psi_2[t_1=x](s_2)$，或简写为 $\psi_2[x](s_2)$。

在本节中，我们使用满足连续性要求 （定义 6）的实例，尽管它们的值不必是有理数。我们使用以下固定参数。

定义 21（参数）。 假设这些参数的值为有理数。

- $\xi\in(0,1)$;
- $\nu\in(0,\frac{1}{n2^{\xi}\cdot 4^n})$，一个非常小的固定严格正值;
- $\nu=\nu/4$。

目标是证明，对于所有 $j\in[m]$，一个具有 $t_j=0$和 $s_j\in(\xi,1)$的多星（t，s）都有一个参数为 $\delta=4^n\nu$ 的盒子。显然，值的值域（ξ，1）可以替换为任何其他区间，因此该定理可以用于主要论证中的漂亮多星，其中值位于值域（z，$(1+\varepsilon)z$）内，其中 ε 是固定的小参数。

为了应用归纳法，我们需要较小星形结构的盒子定义，因此我们用本节的记号，并针对即将使用的特定参数 δ，重述盒子的定义（定义 8）。注意，δ 取决于星形结构的大小。

定义 22（盒子）。 对于固定的 ν，具有 k 个叶节点的星 S，如果对于 S 的每个叶节点 j，我们令 $t_j=\psi_j(s_j)-\delta$，其中 $\delta=4^k\nu$，则称为 δ-盒子，或简称盒子；此时，机制会将所有边分配给根节点。

下文将多次使用以下导出的实例。

定义 23 (实例 $T_\nu(S)$)。 对于给定实例 $T=(t,s)$，令 $T_\nu(S)=(t',s)$ 为与 T 在所有方面都一致的实例，但星 S 中具有 k 个叶节点的任务除外，对于这些任务， $t_j=\psi_j(s_j)-4^k\nu$。

现在我们可以重新表述本节的主要定理，即定理10的另一种表述。

定理 24 (盒子)。 对于任何满足定义 *21* 要求的 ν 和 ξ，若多星形实例 $T=(t,\bar{s})$ 的值为 $t_j=0$、$\bar{s}_j\in[\xi,1]$，重数为 $\ell>\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{2n}$，且满足连续性要求，则其中包含一个具有 $n-1$ 个叶节点的 δ-盒子，其中 $\delta=4^{n-1}\nu$。

通常，我们固定大多数任务的值，并考察机制在其余任务上的分配。具体来说，在使用 2×2 机制的刻画时，我们会这样做。下一个定义将对此作出形式化说明。

定义 25 （切片与切片机制）。 固定一个实例 T 以及两个任务 p 和 p'。与 T 在除任务 p 和 p' 之外的所有任务上均一致的实例集合，称为（p,p'）切片。机制对这两个任务的分配函数称为（p,p'）切片机制，其中其他任务的值固定；如果可根据上下文推断其他值，也简称为（p,p'）切片机制。类似地，我们为更大的任务集合定义切片机制。

定义 26 （平凡叶子）。 具有边集合 C_i 的叶节点 i，若对于给定实例 T， $t_j=0$ 且 $s_j<1$ 对每个任务 $j\in C_i$.都成立，则称其为平凡的

现在我们给出本文将贯穿讨论的主要类型实例的定义。

定义 27 （标准实例）。 对于给定的真实机制，实例 $T=$ （$t,\bar{s}$）是一个针对叶节点集合的标准实例$\mathcal{C}$，当且仅当满足以下条件

- $t_j=0$，对于每个 $j\in[m]$
- $\bar{s}_j\in$ （ξ，1），对于这些叶节点中的每个任务 j，即 $j\in\cup_{i\in\mathcal{C}}C_i$,
- T 满足连续性要求。

$\mathcal{C}$ 中的叶节点随后被称为实例 T. 的标准叶子

今后，记号 $\bar{s}$ 将表示某个固定的标准实例（根据上下文可明确）。我们保留记号 s 表示变量，该变量可以取任意值。注意，定理 24 的陈述中的实例 $T=(t,\ \bar{s})$ 对所有叶节点的集合而言是标准实例。

论证的核心部分是对叶节点数量 k 进行归纳。在从 $(k-1)$ 到 k 的归纳步骤中，其余叶节点的值固定且无关紧要，因此不起作用；特别是，它们不会影响近似比。

定义 28 （单元素集合的临界值 α_j ）。 对于标准实例 $T=$ （t、 $\bar{s}$），我们将使用简写 α_j 表示 ψ_j （$\bar{s}_j$） 。

下面关于边界函数 $\psi_j(s_j)$ 的观察是命题 15 的直接推广。下界的证明与命题 15 中给出的上界证明几乎完全相同。

引理29。 设 $T=$ （t、 s）为一个实例，其中所有叶节点都是平凡的。假设近似因子小于 n，则对于每个任务 $j\in[m]$ ，都有

(i) $s_j/n<\psi_j\ (s_j)\ <ns_j$;

(ii) $\lim_{s_j\to0}\psi_j(s_j)\ =\psi_j(0)\ =0$;

5.1.1 区域 R_P

给定机制和实例 T的 R_P 区域的下一个定义涉及由任务集 P. 定义的 k维切片。其他任务 $[m] \setminus P$ 具有固定值，为简单起见，定义中不对其进行处理。在大多数考虑 R_P 的情况下， P 将是一个星或一对兄弟节点，而任务 $[m] \setminus P$将是平凡的。

定义 30 (区域 R_P和 $R_{\emptyset|P}$**).** 设 $T = (t, s)$ 为给定实例， $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$为任务集合。分配区域 $R_P^T \subset \mathbb{R}_{0,+}^k$ 由所有满足以下条件的向量 t'_P 组成：对于输入$T' = ((t'_P, t_{-P}) \ s)$， P的所有任务都分配给根节点。类似地， $R_{\emptyset|P}^T$由所有满足以下条件的 t'_P组成：对于 $((t'_P, t_{-P}) \ s)$， P的所有任务都分配给叶节点。当上下文明确时，记号中省略 T。

由弱单调性性质可直接推出， R_P 是一个由形如 $\sum_{i \in I} t_{p_i} \leq c_I$, 的线性约束定义的（可能退化的） k维多面体，其中 $I \subset [k]$和 $c_I \in \mathbb{R}_+$为某些值。特别地，对于 $k = 2$， R_P 要么是一个矩形，要么是一个被 -45° 切割去一部分的矩形。对于更高维情形，它是一个被特定超平面切割去若干部分的超矩形（正交体）。图2展示了 $k = 2$ 和 $k = 3$ 对应的 R_P 示例；另请参见 [31]，其中给出了真实性的几何解释。注意， $R_P \subseteq \times_{i=1}^k [0, \alpha_{p_i}]$，其中 $\alpha_{p_i} = \psi_{p_i}(s_{p_i})$。

R_P 在论证中发挥重要作用的形状有两种：盒子（完整正交体）和截断盒，它们是通过形如 $\sum_{i \in [k]} t_{p_i} = c_{[k]}$的对角切割去除一个角的盒子。严格来说，在盒子和截断盒的定义中，我们允许其各个面缺失宽度不超过 δ 的薄片。

更一般地，当 R_P 的$\sum_{i \in [k]} t_{p_i} = c_{[k]}$ 存在时，我们称其为<style id='3'>捆绑面。当捆绑边界面存在时，它将区域 R_P 和 $R_{\emptyset|P}$分隔开。

下面这个显然的引理稍后会很有用。

引理31。 设 $T = (t、 s)$ 是一个实例，对所有 j均满足 $t_j = 0$ ，并假设对于某个任务集合 $P = \{p_1、 p_2、 \ldots\ldots、 p_k\}$，区域 R_P具有满维捆绑面，即包含一个具有严格正坐标的点。那么，对于每个任务 $p_j \in P$，$\psi_{p_j}(s_{p_j}) > 0$且 $s_{p_j} > 0$。

证明。 设 $\hat{} \ t_P$ 是捆绑面上的一个严格正坐标点。对于某个足够小的 $\epsilon > 0$，考虑点 $(t_{p_j} = \hat{} t_{p_j} - \epsilon, (t_{p_i} = 0)^{i \in [k] \setminus j})$。由弱单调性可知，该输入点属于 R_P, 因此 P 中的所有任务都分配给根节点。由此可得 $\psi_{p_j}(s_{p_j}) \geq \hat{} t_{p_j} - \epsilon > 0$。根据引理29， s_{p_j} 也严格为正，因为 $s_{p_j} > \psi_{p_j}(s_{p_j})/n$。 □

以下是 [9] 中一个有用的命题。

命题 32 ([9] 引理21. 断言（i）**).** 对于每个真实机制以及任意的 $T = (t, s)$，边界函数 $\psi_r(t_{-r}, s)$ 关于 t_{-r} 是 ***1-Lipschitz*** 的，即 $|\psi_r(t_{-r}, s) - \psi_r(t'_{-r}, s)| \leq |t_{-r} - t'_{-r}|_1$。

5.1.2 关于两个任务的事实。

本节总结关于两个任务的已知概念和结果，即两个可以属于同一个叶节点（兄弟任务）或属于两个不同叶节点的边（两个任务的星形结构）（例如见 [9]）。在此，我们假设所有其他任务均已固定，并在记号中省略它们。因此，简单记作 $t = (t_1, \ t_2)$ 和 $s = (s_1, \ s_2)$。首先，对于固定的值 $s = (s_1, \ s_2)$，我们考察根节点根据其自身报价 $(t_1, \ t_2)$ 所对应的分配区域。这里的 s_1 和 s_2 不一定属于同一个叶节点。已知，在两个任务的情况下，对于固定的 s ，弱单调分配中根节点的四个可能分配区域基本上以三种可能的方式细分 $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ ，具体总结如下定义所述（图 7 给出了示意图）。

定义 33。 对于给定的（s_1、 s_2），我们将根节点的分配称为

- 准捆绑，如果在 $R_{\{1,2\}}$ 和 $R_{\emptyset|\{1,2\}}$;的边界上至少有两个点 $t \neq t\prime$
- 准翻转，如果 $R_{\{1,2\}}$ 和 $R_{\emptyset}$ 没有共同的边界点；
- 交叉；否则，如果存在唯一的共同边界点。

我们有时称之　　统称准捆绑和准翻转分配为不交叉　　.

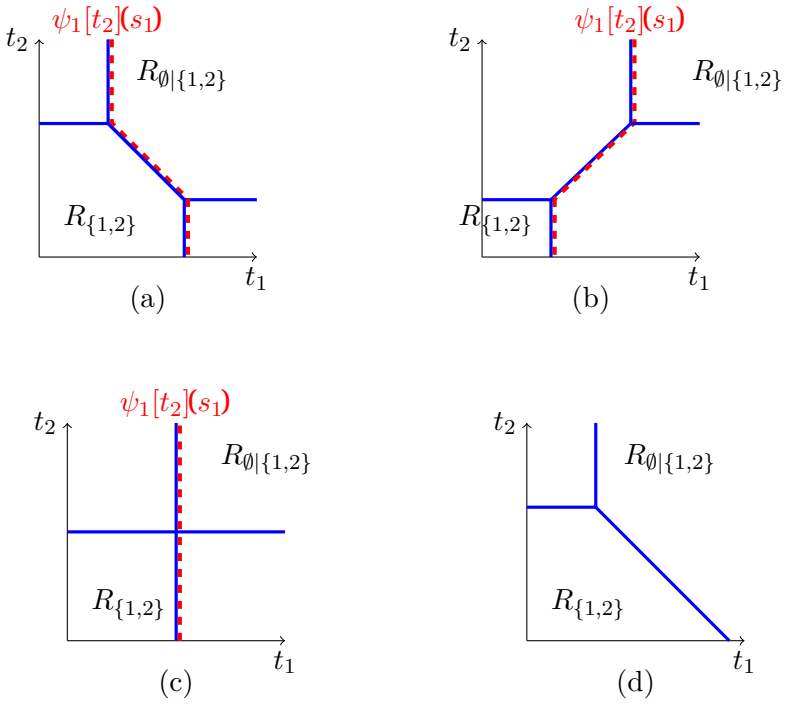

图 7：对于其他玩家的值$s = (s_1, s_2)$固定时，根节点根据其自身的出价向量（t_1, t_2）可能获得的分配为：(a) 准捆绑分配；(b) 准翻转分配；(c) 交叉分配。任务1的边界 $\psi_1[t_2](s_1)$以虚线表示。部分 (d) 描绘了任务1中的半捆绑分配，这是准捆绑分配的一种退化情形。

如果分配是准捆绑分配，则 $R_{\{1,2\}}$ 与 $R_{\emptyset|\{1,2\}}$ 之间的边界是捆绑边界。一般而言，在 $\mathbb{R}^2_{0,+}$ 中定义 $R_{\{1,2\}}$ 的面具有以下可能形式： $t_1 = c_1$， $t_2 = c_2$，以及 $t_1 + t_2 = c.$。非平凡面 $t_1 + t_2 = c$ 存在，当且仅当分配是准捆绑分配。

我们需要区分并单独处理一种特殊的准捆绑分配，因为在这种情况下，边界函数 ψ_1 可以成为 s_1 的非线性函数，即使在仿射极小化器中也是如此（更准确地说，是在其称为 *relaxed* 仿射极小化器的推广形式中，见定理 35 和 [8]）。如果面 $t_1 + t_2 = c$ 存在但面 $t_1 = c_1$ 缺失（即 $c_1 > c$），那么我们将这种任务分配称为半捆绑，定义如下（见图 7 (d)）。

定义34。 两个任务（1、2）（无论是否为兄弟节点）的分配称为在任务1处进行半捆绑1，如果区域 $R_{\{1,2\}}$ 非空，并且由至多两个面 $t_2 = c_2$ 和 $t_1 + t_2 = c$定义，但不存在非平凡面 $t_1 = c_1$，即 $c_1 > c$。如果在任务1 和任务2 处均进行半捆绑，即 c_1、 $c_2 > c$均成立，则该分配称为完全捆绑。

最后，我们在此给出2台机器和2个任务（2×2 情形）的刻画结果。[5]也就是说，从这里开始，我们考虑两个兄弟任务：输入（t_1，t_2）属于根，而（s_1，s_2）属于同一个叶节点。该刻画假设，对于固定的值 s 以及根的足够高的值，两个任务都会被分配给该叶节点；否则近似比是无界的（即使存在其他具有固定值的玩家和任务）。回顾我们的实例 $T =$（t，s），根的值可以任意高，但对于 s 玩家而言，它们属于 $[0, B)$。我们所使用的 [8] 定理刻画了值恰好位于该定义域中的机制。

定理 35 (机制的刻画 2×2 [8])。对于每个 $B \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$，任何具有两个任务和两个参与者、值为 $t \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ 和 $s \in [0, B) \times [0, B)$ 的弱单调分配——且满足对于每个 s，都存在一个 t，使得两个任务都分配给第二个参与者——均属于以下类别：*(1)* 松弛仿射极小化器（包括仿射极小化器这一特殊情形），*(2)* 松弛任务独立机制（包括任务独立机制这一特殊情形），*(3)* 一维机制，*(4)* 常数机制。

备注。这里有两点重要说明。

(a) 严格来说，仿射极小化器中根节点的分配，在开区域 $s \in (0, B) \times (0, B)$ 上符合定义。如果 $s_1 = 0$ 或 $s_2 = 0$，那么即使是仿射极小化器的边界也可能存在跳跃不连续性（叶节点的情况反之，见 [8]）。不过，这不会影响我们的证明，因为 (i) 如果除兄弟节点 (p, p') 外的所有任务都是平凡的，且近似比有限，那么 2×2 机制中的 $s_p = 0$ 不可能发生跳跃（由引理29，$\lim_{s_p \to 0} \psi_p(s_p) = \psi_p(0) = 0$）；(ii) 当其他任务非平凡且使用 (p, p') 的刻画时，我们从不考虑满足 $s_p = 0.$ 的实例。

(b) 一维捆绑机制（其中2个任务总是捆绑在一起）是带有某些加性常数的特殊松弛仿射极小化器，这些常数为 ∞。一维任务独立机制（其中一个任务总是分配给同一玩家）是特殊的松弛任务独立机制。常数机制（它们与(s_1, s_2)无关）是乘性常数为0的特殊仿射极小化器。从这个意义上说，唯一可能的 2×2 机制是松弛仿射极小化器 和松弛任务独立机制。

有些机制可能同时属于两种类型；例如，VCG机制既是仿射极小化器，也是任务独立机制，而且还存在其他任务独立的仿射极小化器。这些机制将被视为任务独立机制。

我们根据可能的分配图示（见 [8, 9]）总结这些机制最相关的性质。粗略地说，当存在一条捆绑（或翻转）边界，且有三个或四个分配区域时，边界函数是仿射的。

O观察 36. 以下性质适用于一个 2×2 真实机制 $m.$

(i) 对于每个(s_1, s_2)，松弛任务独立机制的分配均为交叉，只有可数多个点(s_1', s_2')例外；在这些点上，$\psi_1(s_1$<style>*)* 在 s_1' 处有跳跃间断，且 $\psi_2(s_2$<style>*)*在 s_2'处有跳跃间断；

(ii) 对于每个（s_1, s_2）；[6]，一个（非任务独立的）松弛仿射极小化器的分配均不交叉；它要么始终是准捆绑，要么始终是准翻转，并且对于所有足够大的 s，斜边界的长度相同——随着 s_1 和/或 s_2 变小，斜边界的一部分可能消失，因此其长度可能缩短（此外，在退化松弛仿射最小化机制中，斜边界的可能长度可以是无界的）；

[5]有关这些机制的描述，请参见 [8, 9]。有关相关刻画结果，请参见 [11, 18]。[6]除非由于较小的 s，分配至多有两个区域

(iii) 松弛仿射极小化器的边界函数 $\psi_1[t_2, s_2](s_1)$ 对每个 (t_2, s_1, s_2) 都是截断线性函数，除非分配是完全捆绑的：[7]

$$\psi_1[t_2, s_2](s_1) = \max(0\,,\, \lambda(t_2, s_2)\, s_1 - \gamma(t_2, s_2)\,).$$

对称的陈述同样适用于 ψ_2.

放宽的任务独立机制存在不连续性，这一事实可能会带来复杂问题，但我们通过考虑满足连续性要求的实例来避免这些问题。

5.2 主要盒定理 24 的证明

盒定理的证明与 [9], 中的主要引理有一些相似之处，但证明的一般结构和细节都必须以不同的方式处理。

定理 *24* 的证明。 固定 $n-1$ 叶节点的某个标准实例以及足够高的重数ℓ。我们对 k 进行归纳，证明在 $k \in [n-1]$ 叶节点的每个子集中，均匀且独立地选取的随机星以某个确定的正概率是一个盒子。

更准确地说，令 $1 - b_k$ 表示具有 k 个叶节点的随机星是一个盒子的概率的一个下界。我们建立关于 b_k 的递推式，证明 $b_{n-1} < 1$，从而证明至少存在一个具有 $n-1$ 个叶节点的盒子。

具体而言，定理 45 确立了归纳法的基例（$k = 2$），这表明$b_2 \le 2/\sqrt{\ell}$。引理 58 基于归纳假设的证明确立了递推关系

$$b_k \le \left(\frac{5n}{\nu} - 1\right) b_{k-1} + \frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}},$$

对于 $k \ge 3$。由此可知，当 ℓ 足够大时， b_{n-1} 可以任意小（关于 b_k 更精确的界，参见推论 59）。 □

5.2.1 初步观察

下面的定理本质上是对命题14的重新表述，它说明，如果机制具有有界近似比，则两个兄弟节点的切片机制的分配必须是交叉的。它还排除了常数机制的退化情形。

定理 37. 设 $T = (t, \bar{s})$ 是一个标准实例。如果该机制的近似比至多为 n，则任务 p 的边界函数 $\psi_p[t_{-p}, \bar{s}_{-p}](s_p)$ 与其兄弟节点的值无关。此外，对于任意兄弟节点 p'，即使将 t 改为非零值，(p, p')切片机制也不能是常数。

证明。 该定理可由以下两个引理直接得出。第一个引理排除了常数机制这一退化情形。下一个引理指出，当近似比有界时，两个兄弟任务的切片机制不能具有准捆绑或准翻转边界。根据刻画结果，该切片机制必须是松弛任务独立机制。根据连续性要求，不存在不连续点，因此，任务的 p 的 $\psi_p[t_{-p}, \bar{s}_{-p}](s_p)$与其兄弟任务的值无关。

□

[7]因此，如果该分配在任务1处为半捆绑，那么对于缩减后的 s_1， $\psi_1(s_1)$在图形变为完全捆绑时可能会变为非线性。

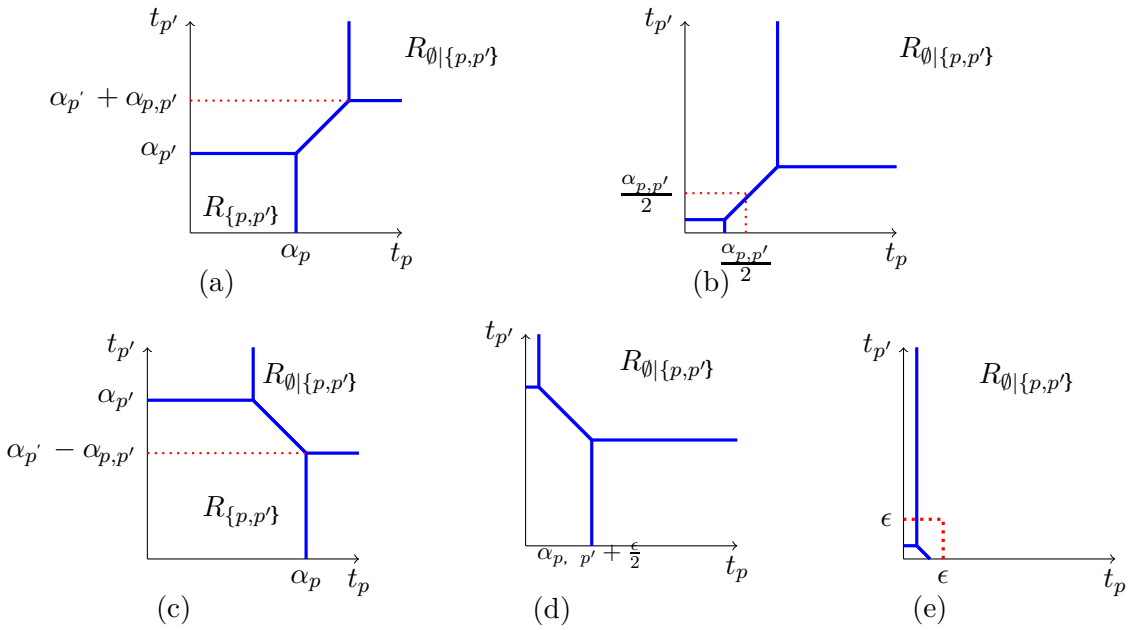

图8：引理 39 证明的高层次示意图

引理38。 假设该机制的近似比至多为 n。令 $T = (t, \bar{s})$ 为一个标准实例，且 Q 为任意叶节点，其兄弟任务为 p、 $p' \in Q$. 。此外，对于某个 $k \leq n-1$， 令$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 为由 k 个其他任务组成的任意集合。若在 T中将每个 $t_{p_i}(p_i \in P)$ 提高到某个任意值ˆ $t_{p_i} \geq 0$，则在所得实例ˆT中，切片机制(p, p') 不是常数机制，除非整个机制的近似比至少为 n.

证明。考虑（p， p'）切片机制，并令（t， t'）=（t_p， $t_{p'}$）和（s， s'）=（s_p， $s_{p'}$）分别表示一般情况下这两个任务的输入。根据定义， 2×2常数机制至少与根节点或叶节点的值无关。观察根节点的分配（对于任意固定的 s），不妨设区域 $R_{\emptyset|\{p,p'\}}$ 非空（否则我们可以将其增加到（t， t'）=（∞， ∞），这样根节点仍会获得一个任务，从而表明近似比无界）。因此，如果机制与根节点无关，那么对于每个（s， s'），分配将只由 $R_{\emptyset|\{p,p'\}}$ 构成——根节点永远不会获得任何任务，这同样与 s 无关。因此，无论如何，分配都必须与 s. 无关。 OPT中除 p、 p' 之外的每个任务的贡献至多为 $\sum_{p_i \in P} \bar{s}_{p_i} \leq (n-1)\cdot 1$，因为 T 是一个标准实例。

现在，令 $(t,\ t') = (n^2,\ n^2)$。如果根节点没有从 $\{p,\ p'\}$ 中获得任何任务，那么增大 $(s,\ s') = (2n^3,\ 0)$。于是机制成本 $\geq 2n^3$，且最优成本 $< n + n^2 < 2n^2$，从而得到很高的近似比。如果根节点至少获得其中一个任务，那么机制成本 $\geq n^2$. 令 $(s,\ s') = (0,\ 0)$，我们有最优成本 $< n$，因此近似比同样很高。

□

引理 39。 设 $T = (t, \bar{s})$ 是一个标准实例，且 Q 是任意一个叶节点。假设存在两个兄弟任务 p, $p' \in Q$， 使得在 (p, p')-切片机制中的分配是准捆绑或准翻转。那么该机制具有无限近似比。

证明。 根据刻画结果（定理 35 和观察 36），$(p,\ p')$-切片机制是一个（非任务独立的）松弛仿射极小化器。

首先考虑仿射极小化器为准翻转的情况（图 8（a）），翻转边界的高度为 $\alpha_{p,\ p'}$（即 45° 边界的高度）。引理29意味着，当

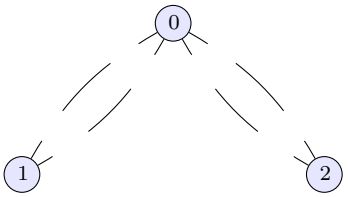

图9：基例实例

$s_p \to 0$时，而当 $s_{p'} \to 0$时，$\psi_{p'}(s_{p'}) \to 0$，因此对于 $(s_p, s_{p'}) = (\epsilon, \epsilon)$，分配仍然是准翻转的。特别地，由于 $0 < \psi_p(\epsilon) \le n\epsilon$，且 $0 < \psi_{p'}(\epsilon) \le n\epsilon$，并且翻转边界的高度为 $\alpha_{p,\ p'}$，对于值 $(t_p, t_{p'}) = (\alpha_{p,p'}/2, \alpha_{p,p'}/2)$，恰好有一个任务被分配给根节点（图 8（b））。当 $\epsilon \to 0.$ 时，近似比为 $\text{Mech}/\text{Opt} > (\alpha_{p,p'}/2)/2\epsilon \to \infty$。最后，在准翻转情况下，根据引理29 (i)，可以排除 $\alpha_{pp'} = \infty$（简单地说，$R_{\{p,p'\}}$ 和 $R_{\emptyset|\{p,p'\}}$ 都必须非空）。

现在考虑松弛仿射极小化器为准捆绑，且捆绑边界的高度等于 $\alpha_{p,\ p'}$（图 8 (c)）的情况。2×2 刻画意味着 $\alpha_{p,\ p'}$ 是常数（即当 s 足够大时，与（s，t）值无关，参见观察 36）。设定 s_p，使得 $\psi_p(s_p) = \alpha_{p,\ p'} + \epsilon/2$（图 8 (d)）。现在，对于某个足够大的 $s_{p'}$，在 p'处分配几乎是半捆绑的；根据松弛仿射最小化器的定义，当我们减小 $s_{p'}\cdot$ 时，分配仍然保持准捆绑。如果我们设定 $s_{p'} = \epsilon/(2n)$ 和 $t = (\epsilon,\ \epsilon)$，考虑到 $\psi_{p'}(s_{p'}) < n\, s_{p'} = \epsilon/2$，捆绑边界的存在保证两个任务都被分配给该叶节点（图 8 (e)）。反过来，这导致无界近似比，因为机制成本 $\ge s_p > \psi_p(s_p)/n > \alpha_{p,\ p'}/n$，而最优成本 $\le 2\epsilon$。

在准捆绑情形下 $\alpha_{pp'} = \infty$（例如，对于一维捆绑机制），论证类似。对于 $s_p = 1,$ $s_{p'} = \epsilon/2n$ 和 $t = (\epsilon,\ \epsilon)$，两项任务都分配给叶节点，因此我们得到无界比率。

□

推论 40. 设 $T = (t, \bar{s})$ 是一个标准实例，p, p' 是兄弟任务，q 是任意的第三个任务。如果区域 $R_{\{p,p',q\}}$ 有一个方程为 $t_p + t_{p'} + t_q = D$（其中 $D < \alpha_p + \alpha_{p'}$）的捆绑面，那么 $R_{\{p,p'\}}$ 是准捆绑，因此根据引理 *39*，该机制具有无界比率。

证明。 根据定义，在 $(p,\ p')$ 切片中，点 $(\alpha_p,\ 0)$ 和 $(0,\ \alpha_{p'})$ 位于 $R_{\{p,p'\}}$.另一方面，在 $R_{\{p,p',q\}}$ 中，点 $(\alpha_p,\ \alpha_{p'},\ 0)$ 严格违反 $t_p + t_{p'} + t_q \le D.$因此，点 $(\alpha_p,\ \alpha_{p'})$ 不属于 $R_{\{p,p'\}}$，所以该分配区域只能是准捆绑（另见图10）。

□

5.3 基例

本节证明盒定理（定理 24）在两个叶节点情况下的特殊情形。在这一特定情况下，重数 2 已经足够。

定理 41。 对于近似比至多为 n 的机制，每个具有 *2* 个叶节点且每个叶节点有 *2* 个任务的标准实例都包含一个由 *2* 个叶节点组成的盒子。

本节给出该定理的证明。我们考虑一个具有两个叶节点且每个叶节点有两个任务的多星，如图9所示。我们将叶节点 1 的两个任务重新命名为 1,1’ 和叶节点 2 的两个任务重新命名为 2,2’。

下一个断言可直接由盒子的定义得出。因子 $32 = 2\cdot\ 4^2$ 来自盒子的定义和简单的几何考量。

引理 42. 如果任务对 {1,2} 不是一个盒子，那么这两个任务对应的切片机制的 $R_{\{1,2\}}$ 区域具有捆绑边界。特别地，存在 $\alpha_{12} \geq 32\nu$ ，使得该捆绑边界由方程 $t_1 + t_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{12}$ 定义。其他任务对$\{1, 2'\}$、$\{1',2\}$ 和 $\{1', 2'\}$ 的情形也类似。

我们继续介绍两个技术性引理。在这些引理之后，我们会对基例提供一些直观解释。注意，第一个引理是推论 40 的结果，它打破了任务之间的对称性，即如果交换两个叶节点的角色，该结论便不再适用。

引理 43。 假设 $\alpha_{2'} = \max\{\alpha_1, \alpha_{1'}, \alpha_2, \alpha_{2'}\}$。如果存在某个 $\bar{t}_1 \in (\alpha_1 - \alpha_{12}, \alpha_1)$，使得切片 $(2,\ 2')$ 中的分配在任务 2处是半捆绑的，则该机制具有无界近似比。类似地，如果存在某个 $\bar{t}_{1'} \in (\alpha_{1'} - \alpha_{1'2}, \alpha_{1'})$，使得切片 $(2,\ 2')$ 中的分配在任务 2处是半捆绑的，则该机制具有无界近似比。

证明。 证明的示意图见图10。假设对于 $\bar{t}_1 \in (\alpha_1 - \alpha_{12},\ \alpha_1)$，切片 $(2,\ 2')$ 中的分配在任务 2 处为半捆绑。设半捆绑边界的端点为 $\bar{t} = (\bar{t}_1,\ \bar{t}_2,\ t_{2'} = 0)$。 由于这是任务 2 的边界点（即，$\bar{t}_2$ 是一个临界值），它也位于 $R_{\{1,2\}}$， 的捆绑边界上，而且显然 $\bar{t}_1 < \alpha_1$ 和 $\bar{t}_2 < \alpha_2$ 成立。

我们将证明，区域 $R_{\{1,2,2'\}}$ 必须具有方程为 $t_1 + t_2 + t_{2'} = D$，的捆绑面，其中 $D < \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_{2'} + \alpha_2$. 。根据推论 40，这意味着该机制的近似比为无穷大。

根据半捆绑边界的几何性质，对于输入点 $\bar{t}' = (\bar{t}_1, \bar{t}_2 - \epsilon, t_{2'} = 2\epsilon)$，任务2和 $2'$ 没有分配给根玩家。因此， $\bar{t}'$ 位于区域 $R_{\{1,2,2'\}}$, 之外，并违反了定义$R_{\{1,2,2'\}}$.的至少一个线性约束

这些约束可能是什么？通过选择足够小的 ϵ ，我们将排除所有其他可能性，从而得出必定存在一个方程为 $t_1 + t_2 + t_{2'} = D$ 的捆绑面。首先，$R_{\{1,2,2'\}}$ 可能有方程为 $t_1 = \alpha_1,\ t_2 = \alpha_2,\ t_{2'} = \alpha_{2'}$, 的面，但 $\bar{t}'$ 不违反其中任何一个。此外，可能存在一个形如 $t_1 + t_2 = d$的面。但由于 t 满足这一约束， $d \geq \bar{t}_1 + \bar{t}_2 > \bar{t}_1 + \bar{t}_2 - \epsilon$，因此对于 $\bar{t}'$ 而言，这一约束也不可能被违反。同样，方程为 $t_2 + t_{2'} = e$ 的面不会被违反，因为 $e \geq \alpha_2 > t_2 + \epsilon$；最后，方程为$t_1 + t_{2'} = f$ 的面也不可能被违反，因为 $f \geq \alpha_1 > t_1 + 2\epsilon,$ ，只要 ϵ. 足够小。剩下的唯一可能性是面 $t_1 + t_2 + t_{2'} = D,$ ，使得 $D \leq \bar{t}_1 + (\bar{t}_2 - \epsilon) + 2\epsilon = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \epsilon < \alpha_1 + \alpha_2,$ 由此证明了该结论。第二个陈述的证明类似，只需用任务 $1'$ 代替任务1.

□

下一个引理的断言在相当一般的条件下成立。我们将把它应用于四个任务的不同三元组，甚至应用于不同的实例。

引理 44. 如果 $R_{\{1,2\}}$ 和 $R_{\{1,2'\}}$ 都是准捆绑，那么当我们将 t_1 设为区间 $(\alpha_1 - \min\{\alpha_{12}, \alpha_{12'}\}\ \alpha_1)$中的任意值时，切片机制$(2, 2')$ 的分配都不交叉，但该区间内至多有一个值例外。将任务 *1* 换成任务 $1'$ 时，同样成立。

证明。 反设区间内存在两个值 $\bar{t}_1$ 和 $\bar{t}'_1$ ，满足 $\bar{t}_1 < \bar{t}'_1$ ，且对于这两个值，切片 $(2, 2')$ 中的分配都是交叉的。这意味着，对于$t_1 \in \{\bar{t}_1, \bar{t}'_1\}$，任务 2 和 2’ 的切片机制与任务无关；也就是说，改变任务 2’ 的值不会影响任务 2 的边界。

t_1的这两个值位于 $(\alpha_1 - \min\{\alpha_{12},\ \alpha_{12'}\}\ \alpha_1) \subseteq (\alpha_1 - \alpha_{12},\ \alpha_1)$ 中，这意味着它们落在任务1和任务2之间的捆绑边界上（图11）。在区间 $[\bar{t}_1, \bar{t}'_1]$ 内，任务1和任务2的捆绑边界是共同的。由于任务2的边界不受影响

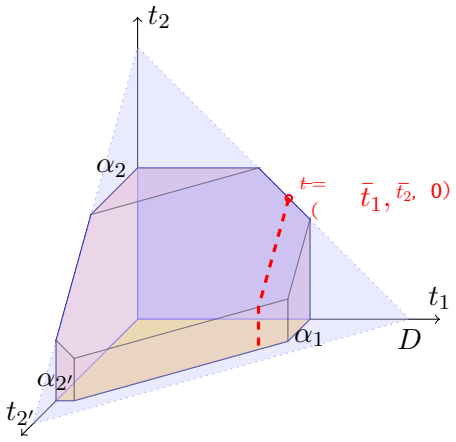

图10：引理 43 证明的示意图。切片（t_2，$t_{2'}$）中，半捆绑边界由虚线绘出。只有当 $R_{\{1,2,2'\}}$ 在平面 $t_1+t_2+t_{2'}=D$ 上具有捆绑面（其中 $D=\bar{t}_1+\bar{t}_2$）时，它才可能存在。由于 $D<\alpha_2+\alpha_{2'}$，$R_{\{2,2'\}}$ 的分配（对于$t_1=0$）不可能发生交叉，即使存在其他任意定义面 $R_{\{1,2,2'\}}$ 。

通过改变任务2'的值，t_1 在 $[\bar{t}_1,\bar{t}'_1]$ 中的边界也不会因改变任务2'的值而受到影响。特别是，这意味着对于实例 $(t_1=\bar{t}_1,\ t_2=0,\ t_{2'}=x)$，对于所有 x，机制都会将任务1和任务2都分配给根节点。

但是对于较大的 x，例如 $x\geq\alpha_{2'}$，上述点位于区域 $R_{\emptyset|\{1,2'\}}$ 中，因为 $t_1>\alpha_1-\alpha_{12'}$，且点（$t_1=\bar{t}_1,\ t_2=0,\ t_{2'}=x$）位于 1 和 2' 的捆绑边界之上。这与 1 被分配给根节点这一事实相矛盾。

□

现在我们已经可以陈述基例的主要引理了。我们将证明，如果来自 {1, 1′,2, 2′} 的四个星形结构都不是盒子，那么该机制的近似比就很高。

直观地说，我们将进行如下论证：通过将 s_2 减小到某个正 值 s_2^*，，我们使 $R_{\{1,2\}}$ 和 $R_{\{1',2\}}$ 的二维捆绑边界面分别平行于自身移动，直到二者都到达 $t_2=0$ 平面（即，捆绑边界分别到达 t_1-轴和 $t_{1'}$-轴，但不会消失）。在此过程中，我们将利用前一个引理所说明的事实：(2, 2′) 切片不是与任务无关的，因此边界位置 ψ_2 是 s_2. 的线性函数

随后——沿另一个正交方向应用该引理——我们减小 s_1，，以便使其中一个捆绑边界（例如 $R_{\{1,2\}}$ 的捆绑边界）沿另一个方向移动，到达 t_2-轴，并继续移动，直到捆绑边界"消失"。最终这将意味着近似比很高，因为 s_2^* 仍为正且有下界，而 $(t_1,t_2)\approx(0,0)$ 输入将被分配给叶节点。

我们指出，对于仿射极小化器而言，将边界沿 s_i 的线性函数平移是显而易见的；但对于任务 1 和 2 （它们不是兄弟节点）而言，这一点远非显而易见，因为 2×2 的刻画确实适用于 (1，2)- 切片机制。

现在我们可以证明基例（定理 41）了。

定理 *41* 的证明。 考虑一个标准实例 $T=(t,\ \bar{s})$，并不失一般性地假设 $\alpha_{2'}=\max\{\alpha_1,\ \alpha_{1'},\ \alpha_2,\ \alpha_{2'}\}$。首先，我们对三元组 {1，2，2′} 应用引理 44。根据该引理，除至多一个 $t_1\in(\alpha_1-C,\ \alpha_1)$ 外，相应的切片机制 (2，2′) 都有一个非交叉分配，其中 $C=\min\{\alpha_{12},\ \alpha_{12'}\}\geq 32\nu$。

根据连续性要求，（2，2′）-切片机制不能是任务独立的（对于 t_1有理数），因为它具有非交叉分配。此外，定理 37 证明了它不能是

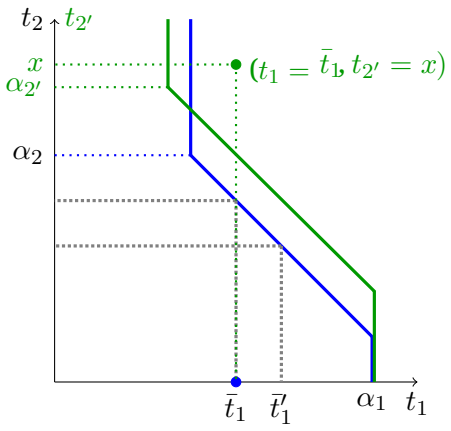

图11：引理 44 证明的高层次论证。蓝色部分表示任务1和任务2的值，绿色部分表示任务1和任务2'的值。蓝色实线表示当 $t_{2'} = 0$ 时任务1和任务2的边界。同样，绿色实线表示当$t_2 = 0$时任务1和任务2'的边界。$t_1 = \bar{t}_1$ 和 $t_1 = \bar{t}'_1$ 是任务1和任务2之间捆绑边界（即斜率为 -45° 的部分）上的两个值。该引理表明，(2,2')切片机制不可能在这两个 t_1 值处同时实现任务独立。事实上，如果任务2和任务2'在 $t_1 \in \{\bar{t}_1, \bar{t}'_1\}$ 处相互独立，则改变 $t_{2'}$ 不会改变这些值处的蓝线，因此1和2之间的边界在区间 $[\bar{t}_1, \bar{t}'_1]$ 内仍然是捆绑边界。当我们考虑实例 $(t_1 = \bar{t}_1, t_2 = 0, t_{2'} = x)$ 在$x \geq \alpha_{2'}$时的分配时，便会导致矛盾。该实例在图中表示为 $(t_1 = \bar{t}_1, t_2 = 0)$ 处的蓝点，以及 $(t_1 = \bar{t}_1, t_{2'} = x)$ 处的绿点；它位于蓝线（即1和2之间的边界）的西侧，以及绿线（即1和2'之间的边界）的东侧；前者说明任务1被分配给根节点，后者说明任务1未被分配给根节点。

常数机制，前提是近似比至多为 n。因此，（2，2′）-切片机制只能是松弛仿射极小化器。引理 43 排除了它在任务 2 上进行半捆绑的可能性，对于 $t_1 \in (\alpha_1 - C,\ \alpha_1)$。我们得出结论：对于（除一个以外的）有理数 $t_1 \in (\alpha_1 - C,\ \alpha_1)$，（2，2′）切片机制位于松弛仿射极小化器的线性部分中，也就是说，根据观察 36 (iii)，它对于 t_2 的临界值是 s_2的截断线性函数：

$$\psi_2[t_1](s_2) = \max(0,\ \lambda(t_1)\, s_2 - \gamma(t_1)\,).$$

请注意，这种记法省略了具有原始值 $\bar{s}$ 和 $t = 0$ 的参数。特别是，$\lambda(t_1)$ 和 $\gamma(t_1)$ 都可能依赖于 s_{-2} 中的值，但这种依赖在论证中不会起任何作用。

类似地，我们可以将命题 44 应用于三元组 {1′,2, 2′}, 从而得到，对于除至多一个有理数 $t_{1'} \in (\alpha_{1'} - C', \alpha_{1'})$ 之外的所有情况，$\psi_2[t_{1'}](s_2)$ 都是关于 s_2. 的截断线性函数，其中 $C' = \min\{\alpha_{1'2}, \alpha_{1'2'}\}$。

以下断言是（[8], 引理4）的一个变体；我们证明，对于同一捆绑边界上的不同点，由于线性性，$\psi_2()$ 的乘性常数必然相同。

断言 (i). 在区间 $t_1 \in (\alpha_1 - C, \alpha_1)$ 中，$\lambda(t_1)$ 是固定的，即与 t_1 无关。同样，$\lambda(t_{1'})$与 $t_{1'} \in (\alpha_{1'} - C', \alpha_{1'})$ 无关。

证明。固定两个值 $t_1, \hat{t}_1 \in (\alpha_1 - C, \alpha_1) \subset (\alpha_1 - \alpha_{12}, \alpha_1)$，且 $t_1 < \hat{t}_1$。t_2 的临界值点位于 $R_{\{1,2\}}$ 的捆绑边界上，因此

$$\psi_2[t_1](\bar{s}_2) - \psi_2[\hat{t}_1](\bar{s}_2) = \hat{t}_1 - t_1.$$

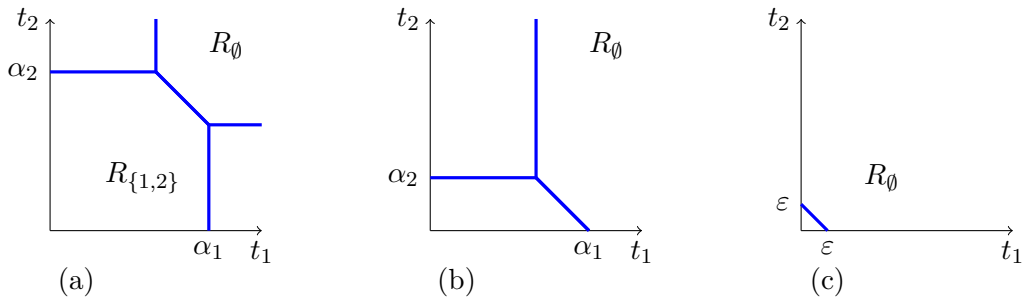

图 12：定理 41 证明的高层次论证。图 (a) 展示了 (1,2) 切片。图 (b) 展示了当我们将 s_2 的值降低到 $s_2^* > 0$ 时，$R_{1,2}$ 的面积如何变化；图 (c) 则展示了将 s_1 降低到 s_1^*时的变化。在图 (c) 中，即使 $t_1 = t_2 = \varepsilon$的值很小，也没有任务分配给根节点，这意味着近似比无界（见引理 39）。注意，对于仿射最小化器而言，由于边界的线性，这种捆绑边界的移动是显而易见的。但在这里，我们需要借助兄弟任务 $1'$, $2'$仔细证明这一点。先将引理 44 应用于三元组 $\{1,2,2'\}$，再应用于三元组 $\{1',2,2'\}$, ，由此我们证明了边界 $\psi_2(s_2)$ 在一段 t_1 值的区间上是线性的。图 (b) 展示了这使我们能够通过将 s_2 降低到 $s_2^* > 0$ 来移动捆绑边界，从而达到半捆绑位置（断言 (i)、(ii)、(iii)）。随后，命题 (iv) 证明了 $\psi_1(s_1)$ 的线性，这使我们能够将 s_1降低到 $s_1^* > 0$ ，从而得到无界近似比。

反设 $\lambda(t_1) > \lambda(\hat{}t_1)$. 那么，我们将 s_2 稍微增大到 $\bar{s}_2 + \epsilon$, 并得到$\psi_2[t_1](\bar{s}_2 + \epsilon) - \psi_2[\hat{}t_1](\bar{s}_2 + \epsilon)$ $= \hat{}t_1 - t_1 + \epsilon(\lambda(t_1) - \lambda(\hat{}t_1)) > \hat{}t_1 - t_1$，这与 Lipschitz 性质（命题 32 ）矛盾。

对于反方向， $\lambda(t_1) < \lambda(\hat{}t_1)$， 我们将值略微减小至 $s_2 - \epsilon$， 并以类似方式再次违反 Lipschitz 性质。

□

由断言（i）可得， $\psi_2[t_1](s_2) - \psi_2[t_1'](s_2) = t_1' - t_1$ 对于每个 s_2 ，只要这些 ψ_2值为正。因此，对于每个 s_2 ，以下是 $R_{\{1,2\}}$ 的边界点集合，

$$\{(t_1\,,\,\psi_2[t_1](s_2))\colon t_1 \in (\alpha_1 - C,\,\alpha_1) \;\wedge\; \psi_2[t_1](s_2) > 0\,\}\,,$$

仍属于捆绑边界。对于 $R_{\{1'2\}}$ 的边界，也有类似结论，其中参数为 $t_{1'} \in (\alpha_1 - C',\ \alpha_1]$。接下来，我们给出 λ 和 γ. 的简单界

断言（ii）。令 $t_1 \in (\alpha_1 - C,\ \alpha_1]$, 和

$$\psi_2[t_1](s_2) = \max(0\,,\,\lambda(t_1)\cdot s_2 - \gamma(t_1)\,);$$

则 $0 < \gamma(t_1) < \lambda(t_1) < 2n$ ，或者近似比至少为 n. 。类似地，对于每个 $t_1' \in (\alpha_1 - C',\ \alpha_1]$.

证明。固定一个 $t_1 \in (\alpha_1 - C,\ \alpha_1]$, 并令 $\lambda = \lambda(t_1)$ 和 $\gamma = \gamma(t_1)$。

首先我们证明 $0 < \gamma$. 对于每个 s_2，若 $R_{\{1,2\}}$ (或 $R_{\{1',2\}}$) 有捆绑边界，则显然有 $\psi_2(s_2) > 0$ (引理31)。另一方面，根据引理29， $\psi_2(s_2) \to 0$ 作为$s_2 \to 0$. 因此，对于 $s_2 = 0$，不可能有任何捆绑边界部分留给 $R_{\{1,2\}}$. 因此，对于 t_1，有 $\psi_2[t_1](0) = 0$，从而 $\lambda \cdot 0 - \gamma \le 0$，这意味着 $0 \le \gamma$. 最后，由于根据同样的论证， $\gamma(t_1 - \epsilon) \ge 0$，且由于捆绑边界 $\gamma(t_1) - \epsilon = \gamma(t_1 - \epsilon) \ge 0$，我们甚至得到严格不等式 $\gamma(t_1) > 0$ ，对每个 $t_1 \in (\alpha_1 - C, \alpha_1]$.

其次，我们证明 $\gamma < \lambda$. 。由于 $R_{\{1,2\}}$ 是准捆绑，且根据 t_1的位置，显然有 $\psi_2[t_1](\bar{s}_2) > 0$。由于 $\bar{s}_2 \le 1$, 可得 $\gamma < \lambda$。然后，根据$\psi_2[t_1](s_2) < ns_2$对 s_2 的所有取值都成立这一事实，可得 $\lambda < 2n$ （引理29）。

□

令$\hat{s}_2 = \gamma(\alpha_1)/\lambda(\alpha_1) > 0$. 注意，$\hat{s}_2$ 是满足 $\psi_2[t_1 = \alpha_1](s_2) = 0$的最大 s_2 值（也就是说，对于$\hat{s}_2$，$R_{\{1,2\}}$ 的捆绑边界与 t_1 轴相接）。类似地，定义$\hat{s}'_2 > 0$ 为满足 $\psi_2[t_{1'} = \alpha_{1'}](s_2) = 0$. 的最大 s_2 值。无妨设$\hat{s}_2 \le \hat{s}'_2$，也就是说

$$\psi_2[t_1 = \alpha_1](\hat{s}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2[t_{1'} = \alpha_{1'}](\hat{s}_2) = 0.$$

我们希望将 $s_2 = \bar{s}_2$ 化归为某个适当的 $s_2 = s_2^* > 0$，其中 $\psi_2[t_1 = \alpha_1](s_2^*) = 0$ 以及$\psi_2[t_{1'} = \alpha_{1'}](s_2^*) = 0$，但对于 $(t_1, t_{1'}) = (0, 0)$，仍有 $\psi_2[t_1 = 0, t_{1'} = 0](s_2^*) > 0$. 成立。下一个断言给出了这样的 s_2^*:

断言 (iii)。 存在 $q^* \in \{0、1、\ldots\ldots、4n/\nu\}$，使得对于 $s_2^* := \bar{s}_2 - q^*\nu/(4n)$ 以下结论成立:

(a) $\psi_2[t_1 = \alpha_1](s_2^*) = \psi_2[t_{1'} = \alpha_{1'}](s_2^*) = 0$;
(b) $\psi_2[t_1 = 0, t_{1'} = 0](s_2^*) > 30\nu$***(c)***
$s_2^* > 30\nu/n$.

证明。 对于任意 $t_1 \in [\alpha_1 - C, \alpha_1]$，考虑值序列 $\psi_2[t_1](\bar{s}_2 - q\frac{\nu}{4n})$，其中 $q = 0, 1, 2, \ldots\ldots$。根据断言（ii），$\lambda(t_1) \le 2n$，因此该序列中的相邻值之差至多为 $\lambda(\nu/4n) \le 2n\nu/4n = \nu/2$.

如上所述，令 $\hat{s}_2$ 为满足 $\psi_2[t_1 = \alpha_1](\hat{s}_2) = 0$. 的最大值。对于这个 $\hat{s}_2$，在整个区间 $t_1 \in [\alpha_1 - C, \alpha_1]$ 上仍存在一个 $R_{\{1,2\}}$. 的捆绑边界。因此

$$\psi_2[t_1 = \alpha_1 - C](\hat{s}_2) - 0 = \psi_2[t_1 = \alpha_1 - C](\hat{s}_2) - \psi_2[t_1 = \alpha_1](\hat{s}_2) = \alpha_1 - (\alpha_1 - C) = C \ge 32\nu.$$

现在我们进一步将 $\hat{s}_2$ 降低到下一个形如 $\bar{s}_2 - q\nu/(4n)$，的可能值，并将其定义为 s_2^*.。我们有 $\psi_2[t_1 = 0, t_{1'} = 0](s_2^*) \ge \psi_2[t_1 = \alpha_1 - C, t_{1'} = 0](s_2^*) \ge 32\nu - \nu/2 > 30\nu$，因此（b）成立。此外，根据 $\psi_2[t_1 = \alpha_1](s_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2[t_{1'} = \alpha_{1'}](s_2) = 0$. 的假设，（a）成立。最后，由观察 $29\ s_2^* \cdot n > \psi_2(s_2^*) = \psi_2[t_1 = 0, t_{1'} = 0](s_2^*) > 30\nu$.，（c）成立。 □

令 T^* 表示我们在 $T = (t, \bar{s})$。中将 $\bar{s}_2$ 更改为 s_2^* 后得到的实例。我们断言，在 T^* 中，区域 $R^{T^*}{}_{\{1,2\}}$ 在 1 处是半捆绑的，而区域 $R^{T^*}{}_{\{1',2\}}$ 在 $1'$ 处是半捆绑的。这由断言（iii）（a）和（b）立即得到。事实上，如果对于某个 $t'_1 > 0$，$\psi_2[t_1 = 0](s_2^*) > \psi_2[t_1 = t'_1](s_2^*) = 0$，则根据几何关系，$R_{\{1,2\}}$ 只能是半捆绑的（$R_{\{1',2\}}$ 的情况同理）。

注意，T^* 是叶节点集合 {1} 的标准实例。我们将引理 39 应用于 $(1, 1')$，并得到：$R_{\{1,1'\}}$（对于 $t_2 = 0$）必须是交叉的，否则近似比为 ∞.

令 $c = \psi_2[t_1 = 0, t_{1'} = 0](s_2^*) > 30\nu$（另见图 13）。对于 t_1 的临界值，我们将使用记号 $\alpha_1^* = \psi_1[T^*](\bar{s}_1)$。类似地，令 $\alpha_{1'}^* = \psi_{1'}[T^*](\bar{s}_{1'})$。根据 $R_{\{1',2\}}$ 在 $1'$ 处进行半捆绑，我们有 $\alpha_1^* \ge c$ 和 $\alpha_{1'}^* \ge c$.

现在考虑对于不同的 $t_2 \in$ 的正有理数值（0，c），针对 T^* 的（1，$1'$）切片分配。这些分配可能是什么？将命题 44 应用于 {2，1，$1'$} 可知，对于几乎所有（事实上是所有）的 $t_2 \in$（0，c），它不可能是交叉分配。下面的断言排除了它对于任何 $t_2 \in$（0，c）都是半捆绑的可能性。唯一剩下的可能性是，对于每个有理数（0，c），它是松弛仿射极小化器的（线性部分）。这将意味着，对于这样的 t_2，临界值函数 $\psi_1[t_2](s_1)$ 关于变量 s_1. 是截断线性的

断言 (iv)。 如果切片 $(1, 1')$ 的分配对于某个 $t_2 \in (0, c)$是半捆绑，则该机制的近似比是无界的。

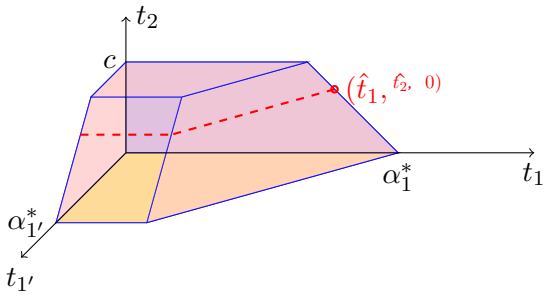

图 13：断言 iv 的证明示意图。虚线是切片（t_1，$t_{1'}$）中的半捆绑边界。这意味着存在一个属于 $R_{\{1,1',2\}}$. 的捆绑面。这样的面排除了 $R_{\{1,1'\}}$ （对于 $t_2 = 0$）发生交叉的可能性，即使 $R_{\{1,1',2\}}$ 中还存在其他面。

证明。 证明与引理 43 的证明类似。假设对于某个 $\hat{}\ t_2 \in (0,\ c)$，$(1,\ 1')$ 分配在任务1处是半捆绑的。令 $(\hat{}t_1,\ t_{1'} = 0,\ \hat{}t_2)$ 表示半捆绑边界的端点（见图 13）。根据定义，在（ $t_2 = \hat{}t_2$ 固定时），该点位于切片 $(1,\ 1')$ 的半捆绑边界上。另一方面，（由于任务1的临界值 $\hat{}\ t_1$ 是唯一的）在（ $t_{1'} = 0$ 固定时），该点也位于切片 $(1,\ 2)$ 的半捆绑边界上，因为 $R_{\{1,2\}}$ 在任务1处是半捆绑的，并且 $\hat{}\ t_2 < c$. 由后者可知 $\hat{}\ t_1 + \hat{}t_2 = \alpha_1^*$.

我们证明区域 $R_{\{1,1',2\}}$ 具有一个方程为 $t_1 + t_{1'} + t_2 = \alpha_1^* < \alpha_1^* + \alpha_{1'}^*$. 的捆绑面。根据推论 40，这将意味着该机制具有无界近似比。

对于足够小的某个 $\epsilon > 0$，点（$\hat{}t_1 - \epsilon,\ t_{1'} = 2\epsilon,\ \hat{}t_2$）不在 $R_{\{1,1',2\}}$，因为根据切片（$1,\ 1'$）的半捆绑边界的定义，任务 1 和 $1'$ （至少）没有被分配给根节点。因此，该点违反了定义 $R_{\{1,1',2\}}$. 的至少一个线性约束。

$R_{\{1,1',2\}}$ 可能分别有方程 $t_1 = \alpha_1^*,\ t_{1'} = \alpha_{1'}^*$ 和 $t_2 = c$, 的面。点 $(\hat{}t_1 - \epsilon, t_{1'} = 2\epsilon, \hat{}t_2)$ 对于 $2\epsilon < \alpha_{1'}^*$. 位于这些界限内。此外，可能还存在方程 $t_1 + t_2 = d$ （对于某个 $d \geq \alpha_1^*$）、 $t_1 + t_{1'} = e$ （对于 $e \geq \alpha_1^*$）或 $t_{1'} + t_2 = f$ （对于 $f \geq c$）的界限。然而，当 ϵ 较小时，这些界限不会将点 $(\hat{}t_1 - \epsilon, t_{1'} = 2\epsilon, \hat{}t_2)$ 排除在 $R_{\{1,1',2\}}$ 之外（分别可由 $\hat{}\ t_1 + \hat{}t_2 = \alpha_1^* \leq d,$、 $\hat{}\ t_1 < \alpha_1^* \leq e,$ 和 $\hat{}\ t_2 < c \leq f,$ 得出）。

唯一剩下的可能性是一个面 $t_1 + t_{1'} + t_2 = D$ 使得 $\hat{}\ t_1 + \epsilon + \hat{}t_2 \geq D \geq \alpha_1^* = \hat{}t_1 + \hat{}t_2$.取 $\epsilon \to 0$，我们得到 $D = \alpha_1^*$，由此完成证明。 □

因此我们得出结论：对于每个（有理数） $t_2 \in (0,\ c)$，$(1,\ 1')$ 切片是一个（线性部分中的）仿射极小化器，因此 t_1 在 $t_{1'} = 0$ 处的临界值函数关于 s_1 是线性的，即 $\psi_1[t_2](s_1) = \max(0,\ \lambda(t_2) \cdot\ s_1 - \gamma(t_2))$。在任务 1 和任务 2 之间交换角色，并采用与断言（i）完全相同的论证，我们得出 $\lambda(t_2)$ 对所有有理数 $t_2 \in (0,\ c)$ 都相等，因此对所有 $t_2 \in (0,\ c)$ 也相等。

现在我们只关注 $(1, 2)$ 分配，而其他所有 t-值均为 0。设 $\psi_1(s_1) = \psi_1[t_2 = 0](s_1)$。我们对 s_1 进行缩减，使得 $s_1 \to 0$. 根据应用于 T^*的观察 29 (ii)，我们有$\psi_1(s_1) \to 0$ （即， $\gamma(t_2 = 0) = 0$）。由于 ψ_1 的线性性质，以及每个 $t_2 \in (0, c)$ 都具有唯一的 λ，只要 $\psi_1(s_1) > 0$，机制成本就具有半捆绑边界，也就是说，只要 $s_1 > 0$. 这就意味着，对于每个 $s_1 > 0$，点 $(t_1, t_2) = (\psi_1(s_1)\ \psi_1(s_1))$ 位于区域 $R_{\emptyset|\{1,2\}}$中，即任务 1 和任务 2 被分配给叶节点。随着 s_1 趋近于 0，点 $(\psi_1(s_1)\ \psi_1(s_1))$ 趋近于 (0,0)。显然，最优成本 $\to 0$，而机制成本 $\geq s_2^* > 30\nu$. 取 $s_1 \to 0$，我们得到无界近似比。

□

定理 41 证明，每一对各有两个任务的叶节点都包含一个大小为

二的盒子。这立即表明，大小为二的盒体有很多。下面的陈述将这一点精确化。

定理 45。 设 T 为一个标准实例。如果近似比至多为 n，则随机的双叶节点星不是盒子的概率至多为 $2/\sqrt{\ell}$。

证明。 该证明直接由以下极值图论结果 [21] 得出：每个具有至少 $2\ell\sqrt{\ell}$ 条边的 $\ell \times \ell$ 二部图都包含一个环 C_4。

取一个 $\ell \times \ell$ 二部图，其边表示相应的星不是盒子。定理 41 保证不存在 C_4，这意味着最多有 $2\ell\sqrt{\ell}$ 个不是盒子的星。

□

5.4 归纳法步骤

在归纳法步骤中，我们考虑一个包含 $k \geq 3$ 个任务的星，并将其称为截断盒，使得其所有包含 $k-1$ 个任务的子集都是盒子。截断盒的精确结构详见以下定义。

定义46 （截断盒）。 固定一个机制。对于叶节点集合$\mathcal{C}$，由 $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ 构成的星，如果 $|\mathcal{C}| = k \geq 3$，则称其为实例 T 的截断盒，条件是 $T = (t, \bar{s})$ 对 P 是标准的，并且满足以下条件

- 对于每个 $i \in [k]$，$P_{-i} = P \setminus \{p_i\}$ 是 T的一个盒子；
- 对于每个 $q = 1$，……，$4n/\nu$，使得 $\bar{s}_{p_k} > q\nu/(4n)$，当我们将任务 p_k 的值替换为 $[t_{p_k} = 0, \bar{s}_{p_k} - q\nu/(4n)]$，时，由 T得到的实例 P_{-k} 是一个盒子。

如果一个截断盒本身不是盒子，则称其为严格截断盒。

盒子的定义针对分配区域 R_P，其中所有任务都分配给根节点。回想一下，盒子是这样一个任务集合，其中 R_P （几乎）是一个正交体（超矩形）。另一方面，截断盒定义中的第一个条件实质上表示，它是一个沿对角切割切去一个单纯形后得到的盒子（即，被形如$\sum_{i\in[k]} t_{p_i} = c_{[k]}$的超平面切去）。定义允许被去掉的单纯形为空（此时得到的就是一个盒子）；但若要强调该单纯形非空，我们称之为严格截断盒（见图2（c）和（e））。

在本节余下部分中，我们将证明截断盒不是盒子的概率很小。我们考虑一个标准实例 $T = (t、s)$，以及来自叶节点集合 $C = (Q_1、\ldots、Q_k)$ 的星 $P = \{p_1、\ldots、p_k\}$，并假设 P 是一个严格截断盒。令 p'_k 为 p_k 的一个随机兄弟项，即叶节点 Q_k. 的另一个任务。本节的主要结果证明，几乎所有其他集合 $(P_{-k}、p'_k)$ 都是盒子。具体而言，我们将通过概率论证证明，$(P_{-k}、p'_k)$ 是盒子的概率至少为 $1 - 2n^3/\ell\xi$ （引理 55）。为证明这一结果，我们考虑 $(p_k、p'_k)$-切片机制；这是一种涉及两个参与者和两个任务的机制，并利用了 2×2 刻画（定理 35 和观察 36）。

我们将重点关注位于分配区域 R_P 周围特定区域内的输入点；当使用 2×2 刻画时，我们可以为这些点建立一些有用的性质。下文中，两个重要的输入点是 $T_\nu(P)$ 和 $T_{\nu'}(P)$。回顾定义 23，$T_\nu(P)$ 是一个实例 (t^ν, s)，它在所有地方都与 T一致，但对于 P 中的任务，$t^\nu_{p_i} = \alpha_{p_i} - 4^k\nu$. 我们类似地定义 $T_{\nu'}(P) = (t^{\nu'}, s)$，但针对的是 $\nu' = \nu/4$。那么 $t^{\nu'}_P$是位于 t^ν_P 和 $(\alpha_{p_i})_{p_i \in P}$之间的一个点。此外，$T_\nu(P_{-k})$ 是沿 p_k-轴方向对 $T_{\nu'}(P)$ 的投影，即 $P \setminus p_k$. 中的所有任务 p_i 的 t 值都等于 $\alpha_{p_i} - 4^{k-1}\nu$。我们将使用简写 $T_\nu = T_\nu(P)$ 和 $T_{\nu'} = T_{\nu'}(P)$。

我们将先讨论切角盒体的一些有用性质（第5.4.1节），然后考察 (p_k,p'_k)-切片机制的各种可能性（第5.4.2节）。最后，我们给出本节的主要结果：切角盒不是盒子的概率很小（第5.4.3节）。

5.4.1 一般观察。

我们需要对弱单调机制作一些简单的观察。首先，以下命题及其推论有助于我们直观地理解截断箱体集合。

命题 47. 假设 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 是 $T = (t, \bar{s})$的一个严格截断盒。考虑任意实例 $T' = [(t'_P, t_{[m]\setminus P})\ \bar{s}]$，使得 $t^\nu_P < t'_P < t^{\nu'}_P$逐坐标成立——因此， $T_\nu \leq T\prime \leq T_{\nu'}$. 那么，点 t'_P满足定义区域 R^T_P的每一个线性约束，只有一个非冗余约束 $\sum_{i=1}^k t_{p_i} = c$被违反；对于某个 $c \leq \sum_{i=1}^k \alpha_{p_i} - k \cdot 4^k \cdot \nu$，该约束定义了 R_P.的一个捆绑边界面

证明。 对于输入 t^ν_P，至少有一个任务 $p_i \in P$ 没有分配给根节点，否则 P 就会是一个盒子。换言之，$(\alpha_{p_i} - 4^k\nu)_{i=1}^k = t^\nu_P \notin R_P$, 因此，对于 R_P，形如$\sum_{i\in I} t_{p_i} \leq c_I$ 的线性约束要么被 t^ν_P违反，要么被其取等号。显然，所有点$t'_P > t^\nu_P$ 也都违反这一约束。

我们需要证明 $I = [k]$. 反设 $I \neq [k]$, 并令 $j \in [k] \setminus I$. 于是，在任务 P_{-j} 的（$k-1$）维空间中，点 $(t^\nu_{p_i})_{\ i\in[k]\setminus\{j\}}$ 违反了（至少）同一个约束 $\sum_{i\in I} t_{p_i} \leq c_I$。然而，更高的点 $(t^{\nu'}_{p_i})_{\ i\in[k]\setminus\{j\}} = (\alpha_{p_i} - 4^{(k-1)}\nu)_{\ i\in[k]\setminus\{j\}}$ 严格违反了同一个约束，这与 P_{-j} 是一个盒子的事实相矛盾。通过同样的论证，点 $t'_P \leq t^{\nu'}_P$ 不可能违反 R_P, 的任何其他线性约束，只有这个约束例外 $I = [k]$.

备注。 我们使用了这样一个事实：将 R_P 的约束限制到（超）平面 $t_{p_j} = 0$ 上，所得的是 $R_{P\setminus\{p_j\}}$ 针对同一个实例 T. 的约束。对此的一个简短解释是，分配区域的线性约束中的常数项对应于支付的（差值），而对于给定的机制和给定的 $\bar{s}$.，这些支付是唯一的

□

推论 48。 设条件与命题 *47* 中的条件相同。则

(i) 区域 R_P 具有方程为 $\sum_{i=1}^k t_{p_i} = c$ 的非冗余捆绑面，其中 c;

(ii) 对于 T'，每个任务 $p_i \in P$ 都被分配给该叶节点;

(iii) 对于每个 $j \in [k]$, 如果在 T' 中仅将任务 p_j 的 t-值改为 0，那么所有任务 $i \in P$ 都被分配给根节点。

(iv) 在 $T\prime$ 中，对于任务 p_k及其临界值 $\psi_{p_k} = \psi_{p_k}(t'_{-p_k}, \bar{s})$，有 $\psi_{p_k} > 0$，且点 $(t'_{P\setminus\{p_k\}}\ \psi_{p_k}) \in \mathbb{R}^k$是 R_P的捆绑边界面的一个点。

证明。 (i) 根据命题 47 可直接得到。

(ii) 对于 $T_\nu(P) = (t^\nu,\ \bar{s})$，有 $t^\nu_P \notin R_P$，因为 P不是一个盒子。因此，根据命题 47，它必须是 R_P和 $R_{\emptyset|P}$, 之间捆绑面上的一个点，或是 $R_{\emptyset|P}$, 中的一个点，因为它不能违反任何其他类型的线性约束（即带有 $I \neq [k]$ 的约束），对于 R_P. 根据弱单调性，$t'_P > t^\nu_P$ 意味着 $t'_P \in R_{\emptyset|P}$ 对于 T'.

(iii) 根据定义，由于 P是一个严格截断盒， P_{-j}必须是一个盒子，因此对于输入 $(t_{p_j} = 0, t^{\nu'}_{-p_j})$, 所有任务 $i \in P\setminus\{p_j\}$ 都分配给根节点。此外，根据弱单调性，对于每个 $t'_P \leq t^{\nu'}_P$., 情况也都相同

接下来，我们论证，任务 p_j 在将 t'_{p_j} 改为 0 时也会分配给根节点. 唯一违反的约束是由 R_P 和 $R_{\emptyset|P}$. 之间的捆绑面定义的。因此， $t'^{\nu'}_P$ 满足条件，而 t'_P严格满足定义 R_P. 的所有其他约束。显然，在对 $t'_{p_j} = 0$. 作出更改后，这一点仍然成立。由于根据命题 47，不存在其他类型的约束被违反（即，带有 $I \neq [k]$ 的约束），在将 $t'_{p_j} = 0$改为, 之后，该点可能位于 R_P, 或 $R_{\emptyset|P}$. 中。然而，任务 $P\backslash\{p_j\}$被分配给根节点这一事实意味着，该点不可能位于 $R_{\emptyset|P}$，因此必定位于 R_P。

(iv) $\psi_{p_k} > 0$ 由 (iii) 得出。边界点 $(t'_{P\setminus\{p_k\}}\ \psi_{p_k}) \in \mathbb{R}^k$ 至少位于一个由任务集合 I的线性约束所定义的面上，其中 $p_k \in I$. 根据命题 47，这只能是满足 $I = [k]$.的约束。

□

接下来的命题讨论 R_P. 的捆绑边界面上的点。我们考虑输入 $T_1 = [(t^1_P, t_{[m]\setminus P})\ \bar{s}]$ 和 $T_2 = [(t^2_P, t_{[m]\setminus P})\ \bar{s}]$，它们仅在任务 $p_i \in P$、的坐标 t_{p_i} 上与 $T_{\nu'}$ 和 T_ν 不同，其中 $t^\nu_{p_i} \leq t^1_{p_i} < t^2_{p_i} \leq t^{\nu'}_{p_i}$。所有其他 t-坐标 $j \in [m] \setminus P$保持不变，即 $t^\nu_j = t^1_j = t^2_j = t^{\nu'}_j$ 、以及 s-坐标。

由 T_1 与 T_2的相对位置，以及任务 p_k 的临界值点位于 R_P的捆绑边界上，（推论 48（iv））， 直观上显然可知，任意两个这样的点都以等号成立的形式满足 Lipschitz 性质（命题 32）。

命题49 （[9] 引理 21。断言（ii））。设 $T_\nu \leq T_1 \leq T_2 \leq T_{\nu'}$ 逐坐标成立，且对每个 $p_i \in P.$，$t^1_{p_i} < t^2_{p_i}$均以严格不等式成立。则

$$\psi_{p_k}(t^1_{-p_k}, \bar{s}) - \psi_{p_k}(t^2_{-p_k}, \bar{s}) = |t^1_{-p_k} - t^2_{-p_k}|_1 = \sum_{i\in[k-1]} (t^2_{p_i} - t^1_{p_i}).$$

证明。固定 $\bar{s}.$。由推论 48（ii）可知，在实例 T_1 的分配中， P中的所有任务都分配给叶节点。我们构造另一个与 T_1 接近的实例 $\hat{}\ T_1 = [(\hat{}t^1_P, t_{[m]\setminus P})\ \bar{s}]$，使其对 P中的任务具有相同的分配：对于 $i \in [k-1]$，我们令 $\hat{}t^1_{p_i} = t^1_{p_i} + \epsilon/n$，并对某个足够小的 $\epsilon > 0$，令 $\hat{}t^1_{p_k} = \psi_{p_k}(t^1_{-p_k}) + \epsilon$。 P的分配保持不变，因为（1）边界 $\psi_{p_k}(t^1_{-p_k})$ 的变化小于 $(n-1)\epsilon/n < \epsilon$（由 Lipschitz 性质可知），因此 p_k的新 t 值 $\hat{}t^1_{p_k}$ 仍在边界之上；（2）由弱单调性可知，其他任务的分配保持不变。

同样，我们构造接近实例 T_2, 我们令 $\hat{}t^2_{p_i} = t^2_{p_i} - \epsilon/n$，对于 $i \in [k-1]$和 $\hat{}t^2_{p_k} = \psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) - \epsilon$。我们断言，在 $\hat{}\ T_2$ 中，所有任务都分配给根节点。为此，注意到对于 $(t^2_{-p_k},\ t_{p_k} = 0)$，所有任务都分配给根节点（由推论 48 得出）；而根据 Lipschitz 性质， $\psi_{p_k}(t^2_{-p_k})$ 的值最多减少 ϵ，因此 p_k 仍会分配给根节点。同样，分配不会改变。

由弱单调性可得

$$0 \geq \sum_{i\in[k]} (1-0)(\hat{t}^2_{p_i} - \hat{t}^1_{p_i}) \geq \sum_{i\in[k-1]} (t^2_{p_i} - t^1_{p_i}) + \psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) - \psi_{p_k}(t^1_{-p_k}) - \left(2 + \frac{k-1}{n}\right)\epsilon.$$

另一方面，Lipschitz 性质意味着

$$\psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) - \psi_{p_k}(t^1_{-p_k}) \leq \sum_{i\in[k-1]} (t^2_{p_i} - t^1_{p_i}),$$

由于 $T_2 \geq T_1$，因此右侧求和中的所有项均非负。令 ϵ趋于 0，即得该断言的等式。

□

前一个命题（的证明）表明，$\psi_{p_k}(t^1) - \psi_{p_k}(t^2) = |t^1 - t^2|_1$，本质上利用了这样一个事实：当 $i = 1$，2 时，点 $(t^i_{-p_k}, \psi_{p_k}(t^i)) \in \mathbb{R}^k$位于 R_P 的捆绑边界上，而 $R_{\emptyset|P}$.。下一个命题及其推论表明反过来也成立：如果 $\psi_{p_k}($ $t^1_{-p_k}) \psi_{p_k} t^2_{-p_k} = |t^2_{-p_k} - t^1_{-p_k}|_1$ t' $t^1 \le t' \le t^2$ $p_k()$，那么对于所有点，其任务的临界输入都位于 R_P 的捆绑边界上。

命题50。 固定 s，对每个 $p_i \in P$ 令 $t^1_{p_i} < t^2_{p_i}$，并令 $t^1_j = t^2_j$ 对于 $j \in [m] \setminus P.$若 $\psi_{p_k}(t^1_{-p_k})$ $- \psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) = \sum_{i\in[k-1]}(t^2_{p_i} - t^1_{p_i})$，则

(i) 对于 $(t^1_{-p_k}, \psi_{p_k}(t^1) - \epsilon)$，所有任务 $p_i \in P$均交给根节点，适用于 $0 < \epsilon < \psi_{p_k}($ $t^1)$；*(ii)* 对于 $(t^2_{-p_k}, \psi_{p_k}(t^2) + \epsilon)$，所有任务 $p_i \in P$均交给叶节点，适用于 $\epsilon > 0.$

证明。 证明与命题 32 的证明几乎相同。我们可以忽略坐标 $j \in [m]\backslash P,$，因为在此处，这些任务的值保持不变。

考虑实例（$t^1_{-p_k}$，$\psi_{p_k}(t^1_{-p_k}) - \epsilon$）和（$t^2_{-p_k}$，$\psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) + \epsilon$）。根据$\psi_{p_k}$的定义，任务 p_k在第一个实例中被分配给根节点，但在第二个实例中没有。令 a^1和 a^2表示这两个实例的分配。根据弱单调性，我们有

$$\sum_{i\neq k}(a^1_{p_i} - a^2_{p_i})(t^1_{p_i} - t^2_{p_i}) + (1-0)((\psi_{p_k}(t^1) - \epsilon) - (\psi_{p_k}(t^2) + \epsilon)) \le 0$$

$$\psi_{p_k}(t^1) - \psi_{p_k}(t^2) \le \sum_{i\neq k}(a^1_{p_i} - a^2_{p_i})(t^2_{p_i} - t^1_{p_i}) + 2\epsilon.$$

由于 $\psi_{p_k}(t^1_{-p_k}) - \psi_{p_k}(t^2_{-p_k}) = \sum_{i\in[k-1]}(t^2_{p_i} - t^1_{p_i})$，令 ϵ趋于 0，我们也得到对所有 $i \in [k-1]$ 都成立的 $a^1_{p_i} = 1$和 $a^2_{p_i} = 0$。 □

推论 51。 假设对每个 $p_i \in P$都有 $t^1_{p_i} < t^2_{p_i}$，并且对 $j \in [m] \setminus P$有 $t^1_j = t^2_j$，且 $\psi_{p_k}(t^1_{-p_k})$ $-$ ψ_{p_k} $t^2_{-p_k} = \sum_{i\in[k-1]}$ $t^2_{p_i} - t^1_{p_i}$. $t^1 \le t' \le t^2$ $t^1_{p_i} < t'_{p_i} < t^2_{p_i}$ $i \in [k]$. ()()令其满足 ()则

(i) 对于 $(t'_{-p_k}, \psi_{p_k}(t') - \epsilon)$，所有任务 $p_i \in P$均分配给根节点，并且

(ii) 对于 $(t'_{-p_k}, \psi_{p_k}(t') + \epsilon)$，所有任务 $p_i \in P$均分配给叶节点。

证明。 设 $\psi^1 = \psi_{p_k}(t^1)$ $\psi^2 = \psi_{p_k}(t^2)$，且 $\psi' = \psi_{p_k}(t')$。显然，

$$\psi^1 - \psi^2 = (\psi^1 - \psi') + (\psi' - \psi^2) \le \sum_{i\neq k}(t'_{p_i} - t^1_{p_i}) + \sum_{i\neq k}(t^2_{p_i} - t'_{p_i}) = \sum_{i\neq k}(t^2_{p_i} - t^1_{p_i}) = \psi^1 - \psi^2.$$

该不等式由 Lipschitz 性质得出，最后一个等式则由假设得出。由此可知，各处都必须取等号，尤其是 $\psi^1 - \psi' = \sum_{i\neq k}($ $t'_{p_i} - t^1_{p_i})$ 和 $(\psi' - \psi^2) \sum_{i\neq k}$ $t^2_{p_i} - t'_{p_i}$. t' t^1 50, t' ( ) 因此， 可以在命题中发挥 的作用，从而推出 (i)。对称地， 可以发挥 t^2 的作用，进而推出 (ii)。 □

5.4.2 The p_k-p'_k 切片

现在考虑一个严格截断盒 $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$，并随机选取一个兄弟节点 p'_k ofp_k。我们将根据 2×2 的刻画，考虑 (p_k, p'_k)-切片机制的所有不同可能性。首先，我们考虑机制与任务无关的情形，并证明此时 (P_{-k}, p'_k) 必须是一个盒子（引理52）。然后，我们处理非任务无关情形，排除几乎处处仿射极小化器（引理53），并给出机制能够成为松弛仿射极小化器的兄弟节点 p'_k 数量的上界（引理54）。

与任务无关（交叉）分配的情形。本段讨论至少在 T_ν 与 $T_{\nu'}$ 之间的两个点 $T_1 < T_2$ 处，$(p_k,\ p'_k)$-切片的分配发生交叉的情形。我们证明，在这种情况下，集合 $(P_{-k},\ p'_k)$ 是一个盒子。

引理52。 假设 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 是 $T = (t, \bar{s})$的严格截断盒。固定一个兄弟节点 p'_k ，它属于 p_k. 。假设存在两个不同的实例 T_1, T_2，使得

- $T_\nu \le T_1 \le T_2 \le T_{\nu'}$ 逐坐标地，并且 $t^\nu_{p_i} < t^1_{p_i} < t^2_{p_i} < t^{\nu'}{}_{p_i}$ 对每个 $p_i \in P$；都成立且满足严格不等式
- 对于 T_1 和 T_2，在 (p_k, p_k) 切片机制中，根节点的分配是交叉的。

*As*假设近似比小于 n，那么 (P_{-k}, p'_k) 是 T的一个盒子 .

证明。 证明与（[9] 引理 27）的证明类似，也是命题 44 的一种推广。我们用记号 $t^1 = t^1_P$ 和 $t^2 = t^2_P$ 分别表示任务集 $P.$ 上的 k维 t向量。对于所有考虑的输入，其他所有 t 值以及 $\bar{s}$ 都固定不变，但 $t_{p'_k}$， 我们将对其进行更改并明确处理。我们还使用记号 $\alpha' = \alpha_{p'_k}.$

现在，在 T_1 和 T_2 中，我们将任务 p'_k 的值从 $t_{p'_k} = 0$ 提高到 $\bar{t}_{p'_k} = \alpha' - \epsilon$ ，增加量为某个较小的 $\epsilon < 4^k\nu,$ ，从而分别得到新的实例 $\bar{T}_1$ 和 $\bar{T}_2,$ 。根据引理的假设，在 T_1 和 T_2 中，$(p_k,$ $p'_k)$ 机制的分配均为交叉型（任务独立型），因此，对 t 值的这一¯更改不会影响任务 p_k的相应临界值，即 $\psi_{p_k}(T_1) = \psi_{p_k}(T_1)$¯以及 $\psi_{p_k}(T_2) = \psi_{p_k}(T_2)$。

根据推论 48（iv），对于 T_1和 T_2，点 $(t^1_{-p_k},\ \psi_{p_k}(t^1))$ 和 $(t^2_{-p_k},\ \psi_{p_k}(t^2))$ 位于 R_P的捆绑边界面上；此外，根据命题49（$\psi_{p_k}(T_1)) - \psi_{p_k}(T_2))$, $= |t^2_{-p_k} - t^1_{-p_k}|_1$成立。由于 $\bar{T}_1$和 $\bar{T}_2$的临界值没有变化，因此对于 $\bar{t}_{p'_k} = \alpha' - \epsilon.$, $(\psi_{p_k}(\bar{T}_1)) - \psi_{p_k}(\bar{T}_2)) = |t^2_{-p_k} - t^1_{-p_k}|_1$仍然成立。

现在对 $\bar{T}_1 \le \bar{T}_2$ 应用命题50 (i)（对于区域 $R_P^{\bar{T}_1}$）。通过将 t_{p_k} 在 $\bar{T}_1,$ 中减小为零来定义实例 $\hat{}T$ ，即令 $\hat{}t := (t^1_{-p_k},\ t_{p_k} = 0)$ 和 $\hat{}\ t_{p'_k} = \alpha' - \epsilon.$。根据命题50 (i)，我们 $\hat{}$ 得到，对于输入 T， P 中的所有任务都被分配给根节点。

我们证明，对于 $\hat{}T.$ ， p'_k 也被分配给根节点。反设并非如此。于是我们将 $\hat{}\ t_{p'_k}$ 增加到 $t^*_{p'_k} = \alpha' - \epsilon/2,$ ，并将其他所有值从 $\hat{}\ t_{p_i}$ 降低到 $t^*_{p_i} = 0$ ，从而得到 $t^*.$ 。省略坐标 t_{p_k} （其值为 0），根据弱单调性，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\ge \sum_{i\in[k-1]} (\hat{a}_{p_i} - a^*_{p_i})(\hat{t}_{p_i} - t^*_{p_i}) + (\hat{a}_{p'_k} - a^*_{p'_k})(\hat{t}_{p'_k} - t^*_{p'_k}) \\ &= \sum_{i\in[k-1]} (1 - a^*_{p_i})(\hat{t}_{p_i}) + (0-1)(-\epsilon/2). \end{aligned}$$

这里， t-值由 t^*的定义得出；$\hat{}a_{p_i} = 1$ 由上一段得出；$\hat{}a_{p'_k} = 0$由间接假设得出； $a^*_{p'_k} = 1$ 则由 $\alpha' = \alpha_{p'_k}$，的定义得出，因为在 $t^*.$ 中 $t^*_{p'_k} < \alpha'$ 及其他t-值均为 0。由于$\hat{}\ t_{p_i} > 0$ ，这就产生了矛盾。总而言之，这证明了对于输入$\hat{}T$， $P_{-k} \cup \{p'_k\}$中的所有任务都已分配给根节点。

最后，注意到根据定义，$\hat{}t_{p_i} = t^1_{p_i} > \alpha_{p_i} - 4^k\nu$、$(i \in [k-1])$以及$\hat{}\ t_{p'_k} = \alpha_{p'_k} - \epsilon > \alpha_{p'_k} - 4^k\nu.$ 这意味着根据弱单调性，对于 $T_\nu(P_{-k} \cup \{p'_k\})$，任务集 $P_{-k} \cup \{p'_k\}$ 也会被分配给根节点，因此 $(P_{-k}$、 $p'_k)$ 是 $T.$的一个盒子 □

非交叉分配的情形。 在接下来的部分中，我们需要排除这样一种情形：在 T_ν 和 $T_{\nu'}$ 之间，存在"许多"点，使得切片机制 $(p_k$、$p'_k)$ 的分配是不交叉的。对于根节点而言不交叉的 2×2-机制的分配，出现在以下两种情况：(1) 松弛仿射极小化器的线性部分（作为 s_{p_k} 的函数是线性的）[8], ；或 (2) 它们在 p_k 处必须是半捆绑的[9]（包括完全捆绑）。

以下段落将讨论这两种情况；对于任意给定的点 T，情况（1）——线性边界函数——将在适当位置选取的 k 个不同点处被排除，因此线性函数几乎必然不会出现；情况（2）则以高概率在选择 p'_k 时被排除。

情况 1：线性边界函数。 这里我们排除这样一种情况：在 k 个精心选取的点 T_0，T_1，$\ldots$，T_{k-1} 处，$(p_k$，$p'_k)$-切片机制是一个（放宽的）仿射极小化器，并且在这些点中的每一个点处，临界值函数 $\psi_k(s_{p_k})$ 都是截断线性的。这意味着线性边界函数几乎必然不会出现。下一个引理是 [9] 中引理21的一个变体。

引理53。 假设近似比至多为 $n.$。设 $P = (p_1, \ldots, p_k)$ 是标准实例 $T = (t, \bar{s})$ 的一个严格截断盒。固定 $p_k.$ 的一个兄弟节点 p'_k 。最后令 $h = (5/8) \cdot 4^k \nu$，并令 $0 < \eta < \nu/4n$ 为某个较小的数。不存在互不相同的实例 $T_0 = (t^0, \bar{s})$、$T_1 = (t^1, \bar{s}) \ldots$，$T_{k-1} = (t^{k-1}, \bar{s})$ 使得

- $T_\nu \le T_j \le T_{\nu'}$ 对于每个 $j = 0$、.....、$k-1$;
- $t^0_{p_j} + h < t^j_{p_j} < t^0_{p_j} + h + \eta$ 对于所有 $j \in [k-1]$;
- $t^0_{p_i} + \eta/2 < t^j_{p_i} < t^0_{p_i} + \eta$ 对于所有 $j \in [k-1]$以及所有 $i \neq j$;
- 边界函数 ψ_{p_k} 关于 s_{p_k} 是截断线性的，即 $is,$

$$\psi_{p_k}(t^j_{-p_k}, \bar{s}) = \max(0\,,\, \lambda(t^j_{-p_k}, \bar{s}_{-p_k}) s_{p_k} - \gamma(t^j_{-p_k}, \bar{s}_{-p_k})),$$

对于实例 T_j、 $j = 0$、1、.....、$k-1.$ 中的每一个

证明。 为导出矛盾，假设存在这样的实例 T_0、T_1、.....、T_{k-1}。为简化记号，在整个证明过程中，对于固定的值 $t^j_{-p_k}$ 和 $\bar{s}_{-p_k}$，我们将临界值函数 $\psi[T_j]_{p_k}(s_{p_k})$ 记作 $\psi^j_k(s_{p_k})$,

总体思路如下。我们忽略其他所有维度，只考虑任务 $P.$ 的 k 坐标。根据推论 48（分别对应 (ii)、(iii) 和 (iv)），我们知道，在 $T_j, j = 0, 1, \ldots, k-1$ 的分配中，所有任务都分配给叶节点；当我们将 t_{p_k} 值改为 0, 时，所有任务 $p_i \in P$ 都分配给根节点；相应的边界点 $(t^j_{-p_k}, \psi^j_k(\bar{s}_{p_k})) \in \mathbb{R}^k$ 位于 $R_P.$ 的一个捆绑边界面上。现在，随着我们减小 $s_{p_k},$，由于每个边界函数 $\psi^j_k(s_{p_k})$, 都具有线性，这些 k 边界点会以相同速度 λ 朝坐标平面 $t_{p_k} = 0,$ 移动，因此它们始终位于捆绑边界上。对于某个正的 $s^*_{p_k}$，这个捆绑边界面将与平面 $t_{p_k} = 0$,[10] 相交，并在那里为任务集 $P_{-k}.$ "形成"一个维度为 $k-1$ 的捆绑边界。但这将证明，对于这个 $s^*_{p_k}$，集合 P_k 不可能是一个盒子，这与 P 是截断盒这一事实矛盾。

[8]常数机制是特殊的仿射极小化器；或者我们可以立即利用引理38排除它们[9]松弛任务独立机制处于某个奇异点（s_{p_k}，$s_{p'_k}$）的情形可以排除，因为我们考虑的输入几乎必然满足连续性要求。[10]由于我们进行了离散化（以便使 s_{p_k}的递减步骤有限），因此必须将所考虑的边界点稍微"停"在平面 $t_{p_k} = 0.$上方

我们先观察临界值 $\psi_k^j(\bar{s}_{p_k})$, 以及当 $s_{p_k} = \bar{s}_{p_k}$ 时 R_P 相应的边界点。注意，对每个 $j \in [k-1]$，根据定义， $t^0_{p_i} < t^j_{p_i}$ 对所有 $p_i \in P.$ 都成立。因此，根据命题49

$$\psi_k^0(\bar{s}_{p_k}) - \psi_k^j(\bar{s}_{p_k}) = |t^0_{-p_k} - t^j_{-p_k}|_1 = \sum_{i\in[k-1]} (t^j_{p_i} - t^0_{p_i}).$$

此外，对于每个 $j \in [k-1]$，这个差值大致等于 h, 特别是

$$h < \sum_{i\in[k-1]} (t^j_{p_i} - t^0_{p_i}) < h + n \cdot \eta.$$

因此，所有这些临界值几乎相同，也就是说，对于任意一对指标 $j, j' \in [k-1]$，都有

$$|\psi_k^j(\bar{s}_{p_k}) - \psi_k^{j'}(\bar{s}_{p_k})| < n \cdot \eta.$$

接下来，我们证明这些相对位置对每个都 $s_{p_k}\cdot$ 保持不变。以下是定理 41 的证明中断言（i）的推广。

断言 （i）. t^j、 $j = 0$、1、. . .、 $k-1$的边界函数,

$$\psi_k^j(s_{p_k}) = \lambda(t^j_{-p_k}) s_{p_k} - \gamma(t^j_{-p_k})$$

具有相同的线性系数，即 $\lambda(t^0_{-p_k}) = \lambda(t^1_{-p_k}) = \ldots = \lambda(t^{k-1}_{-p_k}) = \lambda$。

证明。 我们证明所有线性系数都等于 $\lambda(t^0_{-p_k})$. 反设存在某个 $j \in [k-1].$，使得$\lambda(t^0_{-p_k}) > \lambda(t^j_{-p_k})$。对于 $s_{p_k} = \bar{s}_{p_k} + \epsilon$，取某个 $\epsilon > 0$，可得

$$\psi_k^0(\bar{s}_{p_k} + \epsilon) - \psi_k^j(\bar{s}_{p_k} + \epsilon) = \psi_k^0(\bar{s}_{p_k}) - \psi_k^j(\bar{s}_{p_k}) + \left(\lambda(t^0_{-p_k}) - \lambda(t^j_{-p_k})\right)\epsilon > |t^0_{-p_k} - t^j_{-p_k}|_1,$$

这违反了 Lipschitz 性质（命题 32）。 $\lambda(t^0_{-p_k}) < \lambda(t^j_{-p_k})$ 的情况类似，只是现在我们考虑 $s_{p_k} = \bar{s}_{p_k} - \epsilon.$ □

作为推论，我们得到，ψ_k^0 与 ψ_k^j 之间的（正）临界值之差对于每个 s_{p_k}都保持不变。

Claim (ii). 令 $j \in [k-1].$ 对于每个 s_{p_k}，若 $\psi_k^j(s_{p_k}) > 0$，则有:

(a) $\psi_k^0(s_{p_k}) - \psi_k^j(s_{p_k}) = |t^0_{-p_k} - t^j_{-p_k}|_1$;

(b) $|\psi_k^j(s_{p_k}) - \psi_k^{j'}(s_{p_k})| \le n \cdot \eta$对于每个 $j' \in [k-1]$;

(c) 点 $(t^j_{-p_k}, \psi_k^j(s_{p_k})) \in \mathbb{R}^k$ 位于捆绑边界上，特别是位于 $R_P^{T'}$ 的边界上，其中 T'由 T通过将 $\bar{s}_{p_k}$ 替换为 s_{p_k}得到，对于 $j = 0$、1、.....、 $k-1$;

证明。 （a）和（b）由断言（i）得出；（c）由（a）、命题50和推论51得出。 □

令 $\psi_k^1(s_{p_k}) = \max(0, \lambda s_{p_k} - \gamma)$。 接下来我们证明 γ和 λ.的下界和上界

断言 (iii)。 令 $\psi_k^1(s_{p_k}) = \max(0、 \lambda s_{p_k} - \gamma)$，其中 λ 和 γ 不依赖于 t_{p_k} 和 s_{p_k}。进一步假设近似比小于 n，则

(a) $0 \le \gamma < \lambda$;

(b) $\frac{1}{2n} < \lambda < 2n.$

证明。(a) 根据推论 48，(iv) 成立，即 $\psi_k^1(\bar{s}_{p_k}) > 0$。现在注意到 $\lambda \cdot 1 - \gamma = \psi_k^1(1) \geq \psi_k^1(\bar{s}_{p_k}) > 0.$ 这意味着 $\gamma < \lambda$。

接下来我们证明 $\gamma \geq 0.$ 我们断言 $\psi_k^1(s_{p_k} = 0) = 0.$。反设 $\psi_k^1(s_{p_k} = 0) > 0.$。那么，根据命题 (ii) (c)，$(t_{-p_k}^1, \psi_k^1(0))$ 是 $R_P^{T'}$ 捆绑边界上坐标为正的一个点，其中 $T\prime$ 由 T 通过设定 $s_{p_k} = 0.$ 得到。另一方面，根据观察 31 $s_{p_k} > 0$ 必然成立，矛盾。因此我们有 $\psi_k^1(s_{p_k} = 0) = 0.$。consequently，$\lambda \cdot 0 - \gamma \leq 0,$ 所以 $0 \leq \gamma.$

(b) 我们首先证明 $\lambda < 2n$。假设 $\lambda \geq 2n.$。令 $s_{p_k} = n + 1, \quad t_{-p_k} = t_{-p_k}^1$ 且 $t_{p_k} = \psi_k^1(s_{p_k}) - \epsilon = \lambda s_{p_k} - \gamma - \epsilon.$。于是任务 p_k 被分配给根节点，最大完工时间为机制成本 $\geq \lambda s_{p_k} - \gamma - \epsilon \geq \lambda s_{p_k} - \lambda - \epsilon \geq \lambda (s_{p_k} - 1) - \epsilon \geq 2n \cdot n - \epsilon.$

任务 $[m] \setminus P$ 对最优完工时间的贡献为 0，因为其他叶节点都是平凡的。我们有最优成本 $\leq s_{p_k} + \sum_{i \neq k} \bar{s}_{p_i} \leq n + 1 + n - 1 = 2n.$。当 $\epsilon \to 0,$ 时，我们得到机制成本/最优成本 $\to n$，由此完成了上界的证明。

为证明 $\lambda,$ 的下界，我们反设 $\lambda \leq 1/2n,$，并设 $s_{p_k} = 2n^2,$ 和 $t_{p_k} = \lambda s_{p_k} - \gamma + \epsilon,$，使得该叶节点获得任务 $p_k.$

于是，机制成本 Mech 为 $\geq 2n^2,$；由于其他任务的贡献至多为 $n - 1,$，利用 $\gamma \geq 0,$ 可得最优成本 Opt $\leq t_{p_k} + n - 1 \leq (1/2n) \cdot 2n^2 - \gamma + \epsilon + n - 1 \leq 2n.$。近似因子至少为 $n,$，矛盾。 □

断言 (iv)**.** 存在 $q^* \in \{0, 1, \ldots, 4n/\nu\}$，使得 $\bar{s}_{p_k} \geq q^*\nu/(4n)$，且对每个 $j \in [k-1].$，$\psi_k^j(\bar{s}_{p_k} - q^*\nu/(4n))$都位于区间 $(0, \nu)$ 内

证明。根据推论 48 (iv)，对于每个 $j \in [k]$，都有 $\psi_k^j(\bar{s}_{p_k}) > 0.$。如果对于每个 $j \in [k-1]$，$\psi_k^j(\bar{s}_{p_k}) < \nu$ 也成立，那么显然，取 $q^* = 0.$ 即可得到该断言

否则，令 $\bar{q} \leq 4n/\nu$ 为满足 $\bar{s}_{p_k} \geq \bar{q}\nu/(4n)$ 的最大整数（回想一下，$\bar{s}_{p_k} \leq 1$）。考虑值序列 $\psi_k^1(\bar{s}_{p_k} - q\frac{\nu}{4n})$，其中 $q = 0, 1, \ldots\ldots, \bar{q}.$。根据断言（iii），$\lambda < 2n$，因此该序列中相邻的值至多相差 $\lambda(\nu/4n) \leq 2n\nu/4n = \nu/2.$。此外，由于 $\gamma \geq 0,$ 我们有 $\psi_k^1(0) = 0.$。因此，对某个 $0 \leq q^* \leq \bar{q},$ $\psi_k^1(\bar{s}_{p_k} - q^* \cdot \frac{\nu}{4n})$ 落在 $\nu/4$ 与 $3\nu/4.$ 之间。最后，根据断言（ii）（b），可得 $\psi_k^j(\bar{s}_{p_k} - q^* \cdot \frac{\nu}{4n}) \in (0, \nu)$ 对每个 $j \in [k-1],$ 都成立，因为 $n\eta < \nu/4.$ □

令 $s_{p_k}^* := \bar{s}_{p_k} - q^*\nu/(4n)$ 为前一个断言中满足以下条件的值：对于每个 $j \in [n-1].$，$\psi_k^j(s_{p_k}^*) \in (0, \nu)$。在证明的其余部分，我们固定 $(s_{p_k}^*, \bar{s}_{-p_k})$。根据命题 (ii) (c)，对于每个 $j \in [k-1],$ 在点 $(t_{-p_k}^j, \psi_k^j(s_{p_k}^*))$ 的任意小邻域内，都存在一些点 t_P，使得所有任务 $p_i \in P$ 都分配给根节点；同时，也存在一些点，使得任务 $p_i \in P$ 中没有任何一个分配给根节点。

回顾一下，对于实例 $T = (t, \bar{s})$，每个 $p_i \in P$ 都有 $t_{p_i} = 0$。令 $T^* = (t, (s_{p_k}^*, \bar{s}_{-p_k}))$ 表示将 T 中的 $\bar{s}_{p_k}$ 替换为 $s_{p_k}^*.$ 后得到的实例。注意，T^* 是星 $P_{-k} = P \setminus p_k.$ 的标准实例。我们需要谨慎，因为关于实例 T^* 的分配，我们所知道的只有捆绑边界的 k 个平移点 $(t_{-p_k}^j, \psi_k^j(s_{p_k}^*))$（特别是，$\alpha_{p_j}$ 值可能已经发生变化）。

下面说明如何完成证明。对于每个 $j \in [k-1]$，我们将定义两个与 $(t_{-p_k}^j, \psi_k^j(s_{p_k}^*))$，相邻的实例，分别称为 $\underline{T}_j$ 和 $\overline{T}_j$，使得对于这两个实例，t_{p_k} 项均为零，s_{p_k} 项等于 $s_{p_k}^*$，；并且对于 $\underline{T}_j$，所有任务 $p_i \in P_{-k}$ 都分配给根节点，而对于 $\overline{T}_j$，所有任务 $p_i \in P_{-k}$ 都分配给叶节点。最终，这将证明对于 $t_{p_k} = 0$ 和 $s_{p_k} = s_{p_k}^*$，任务集 P_{-k} 不是一个盒子，从而与 P 是截断盒的假设相矛盾（定义46的第二条）。

我们将使用记号 $\alpha^*_{p_j}$ 表示实例 T^* 中各任务的（新） α 值（见定义28）。在下一个断言中，我们定义并使用 $\underline{T}_j$ 实例，为 P_{-k} 中任务的 $\alpha^*_{p_j}$ 值以及实例 T^*. 给出下界

Claim (v)**.** $\alpha^*_{p_j} > t^0_{p_j} + h$ *for every* $j \in [k-1]$.

证明。 任取 $j \in [k-1]$. 。为简化起见，我们忽略坐标 $[m] \setminus P$. 。定义$\underline{T}_j = (\underline{t}^j,\ (s^*_{p_k},\ \bar{s}_{-p_k}))$, 使得 $\underline{t}^j_{p_k} = 0$, 并且 $\underline{t}^j_{p_i} = t^j_{p_i} - \epsilon$, 对于某个较小的 ϵ，对每个 $p_i \in P_{-p_k}$。由于 $\underline{t}^j_{p_i} < t^j_{p_i}$，对于每个 $p_i \in P_{-k}$, 且 $\underline{t}^j_{p_k} = 0 < \psi^j_k(s^*_{p_k})$, 每个 $p_i \in P$ 都必须分配给 $\underline{T}_j$ 的根节点（根据命题 (ii) (c) 和弱单调性）。这意味着 $\underline{t}^j_{-p_k} \in R^{T^*}_{P_{-k}}$, 因此 $\alpha^*_{p_j} \geq \underline{t}^j_{p_j}$。鉴于对于足够小的 ϵ，$\underline{t}^j_{p_j} = t^j_{p_j} - \epsilon > t^0_{p_j} + h$, 我们得到 $\alpha^*_{p_j} \geq \underline{t}^j_{p_j} = t^j_{p_j} - \epsilon > t^0_{p_j} + h$. □

在最后一个断言中，我们定义 $\overline{T}_j$ 实例，并用它们证明，对于 $T^*_\nu(P_{-k})$, P_{-k} 的作业都分配给叶节点（关于 T^*_ν，请参见定义 23）。这与对于 $s^*_{p_k}$，集合 P_{-k} 是一个盒子的假设矛盾，因此 P 也是一个截断盒的假设也不成立，从而完成证明。

断言 (vi)。 对于实例 $T^*_\nu(P_{-k})$， P_{-k} 中的任务均未分配给根节点 .

证明。 我们忽略坐标 $[m]\backslash P$, 并且 $(s^*_{p_k},\ \bar{s}_{-p_k})$ 是固定的。首先取任意 $j \in [k-1]$.令 $t' = (t^j_{-p_k}, \psi^j_k(s^*_{p_k}))_P$, 表示捆绑边界上的点（根据命题 (ii) (c)），并且 a' 表示 t'. 的相应分配。无损失地假设 a' 将 P 中的所有任务分配给叶节点（否则，我们将 P 中的所有 t-值略微增加一个无穷小量）。

我们将 $\overline{T}_j = (\overline{t}^j, (s^*_{p_k}, \bar{s}_{-p_k}))$ 定义如下：令 $\overline{t}^j_{p_k} = 0 > \psi^j_k(s^*_{p_k}) - \nu$, 并令 $\overline{t}^j_{p_i} = t^j_{p_i} + \nu$, 对每个 $p_i \in P_{-p_k}$. 我们首先证明，对于 $\overline{t}^j$，每个 $p_i \in P_{-k}$ 都分配给叶节点，即 $\overline{t}^j \in R^{T^*}_{\emptyset|P_{-k}}$. 令 $\overline{t} = \overline{t}^j_P$ 和 $\overline{a}$ 为 $\overline{T}_j$. 的分配。于是，由根节点的弱单调性

$$0 \geq \sum_{i\in[k]} (\overline{a}_i - a'_i)(\overline{t}_i - t'_i) = \sum_{i\in[k]} (\overline{a}_i - 0)(\overline{t}_i - t'_i) = \sum_{i\in[k-1]} \overline{a}_i \cdot \nu + \overline{a}_k(0 - t'_k).$$

第一个等式成立，是因为根据假设，在 t'中所有任务都分配给叶节点；第二个等式根据 $\overline{t}_i = \overline{t}^j_{p_i}$, 和 $t'_i = t^j_{p_i}$.的定义成立

由于 $t'_k = \psi^j_k(s^*_{p_k}) < \nu$，必有

$$\sum_{i\in[k-1]} \overline{a}_i \cdot \nu < \overline{a}_k \cdot \nu.$$

但由于 $\overline{a}_i \in \{0,1\}$, 由上式可知，对每个 $i \in [k-1]$, 都有 $\overline{a}_i = 0$，从而得出 $\overline{t}^j \in R^{T^*}_{\emptyset|P_{-k}}$。现在令 t^c 为点 $\{\overline{t}^1, \overline{t}^2, \ldots, \overline{t}^{(k-1)}\}$. 的均值。也就是说，

$$t^c_{p_i} = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \overline{t}^j_{p_i}}{k-1} \qquad \forall p_i \in P.$$

那么 $t^c_{p_k} = 0$, 并且对于所有 $p_i \in P_{-k}$

$$t^c_{p_i} < t^0_{p_i} + h/(k-1) + \eta + \nu < t^0_{p_i} + h/2 + 2\nu. \tag{6}$$

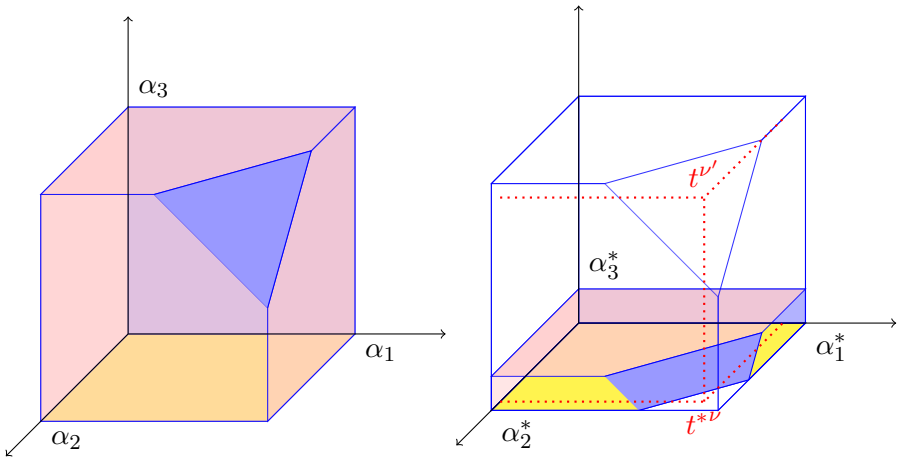

图14：该图从高层次展示了针对 $k = 3$ 的引理53证明的主要论证。左图对应一个严格截断盒（针对 $\bar{s}$ ），右图则展示了当 s_3 减小至 s_3^* 时边界的移动；这会导致矛盾，因为最后一幅图不是任务1、2的盒子。

此外，由于对于每个 j， $\bar{t}^j \in R^{T^*}_{\emptyset|P_{-k}}$ 都成立，因此它们的凸组合 t^c. 也满足同样的性质。我们采用记号 $T^*_\nu(P_{-k}) = (t^{*\nu}, (s^*_{p_k}, \bar{s}_{-p_k}))$; 根据定义 23 $t^{*\nu}_{p_i} = \alpha^*_{p_i} - 4^{k-1}\nu$，对于 $p_i \in P_{-k}$.

我们通过证明对于每个 $p_i \in P_{-k}$.， $t^c_{p_i} < t^{*\nu}_{p_i}$，来完成证明。这将证明（根据弱单调性） $t^{*\nu} \in R^{T^*}_{\emptyset|P_{-k}}$，也成立，因此 P_{-k} 不是 T^*，的盒子，矛盾。我们有

$$t^{*\nu}_{p_i} = \alpha^*_{p_i} - 4^{k-1}\nu > t^0_{p_i} + h - 4^{k-1}\nu > t^0_{p_i} + h/2 + 2\nu > t^c_{p_i}.$$

第一个不等式由断言（v）得出；若 $h = (5/8)4^k\nu$ 且 $k \geq 3$，则第二个不等式成立；最后一个不等式由不等式6得出。证明至此结束。 □

□

情形2：半捆绑边界函数。 我们考虑这样的情形：对于某个 $T_\nu(P) \leq \hat{T} \leq T_{\nu'}(P)$，切片机制（$p_k$, p'_k）是不交叉的，因此它在p_k 处具有边界半捆绑（或者甚至在 p_k 和 p'_k处都完全捆绑）。回顾可知，这包括一维捆绑机制，以及松弛仿射极小化器；后者在较小的 s_{p_k}· 时可能变为非线性。通过一个技术性更强的论证，可以证明即使在这种情形下，边界函数 $\psi_k(s_{p_k})$ 也必须是线性的，否则（整个）机制将具有较高的近似因子。[11]不过，为了便于更简单地展示，我们改为采用与 [9] 中相同的方法：对于任意固定的 $T_\nu(P) \leq \hat{T} \leq T_{\nu'}(P)$，我们排除这样的情况：切片机制（$p_k$, p'_k）在 p_k，对许多 不同的兄弟节点 $p'_k \in Q_k$. 处是半捆绑的。下一个引理是（[9] 引理23）的一个变体。

引理54。假设 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 是标准实例$T = (t, \bar{s})$的一个严格截断盒，对应的叶节点集合为 $C = \{Q_1, Q_2, \ldots Q_k\}$，且近似比小于$n.$。设 $T_\nu(P) \leq \hat{T} \leq T_{\nu'}(P)$ 为任意输入。那么， p_k 的兄弟节点中，至多有少于 n^2/ξ 个 $p'_k \in Q_k$ 在 $\hat{T}$ 中具有一个在 p_k. 处为半捆绑的切片机制 (p_k, p'_k)。

[11]利用 $R_{\{p_k, p'_k\}}$ 必须交叉这一事实，并且 T 处于一般位置，可以采用与引理 43 中类似的论证。

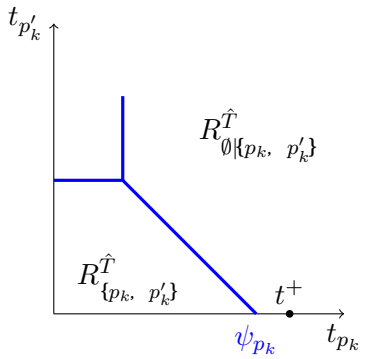

图15：引理54的证明：$\hat{T}$ 中的切片 $(p_k,\ p'_k)$ 在 p_k 处是半捆绑的。对于输入 $(t^+,\ \bar{s})$，p_k 和 p'_k 都没有分配给根节点。

证明。令 $\hat{T} = ((\hat{t}_P, t_{-P}),\ \bar{s})$，（根据定义 $t_{-P} = \hat{t}_{-P}$）。在证明的其余部分，我们固定并省略 $\bar{s}$ 的记号。令 $\psi_{p_k} = \psi_{p_k}[\hat{T}]$ 为 $\hat{T}$ 中 t_{p_k} 的临界值

设 T 在 p_k 处是半捆绑的（见图15），使得对于边界 p'_k 位于 ψ_{p_k} 正上方稍微一点的输入点（$\hat{t}_{P_{-k}}$，$t_{p_k} = \psi_{p_k} + \epsilon,\ t_{-P}$），任务 p_k 和 p'_k 都没有分配给根节点。这由 ψ_{p_k}，的定义、$t_{p'_k} = 0$ 这一事实（因为 T 是 P 的标准实例），以及切片 $(p_k,\ p'_k)$ 中 p_k 的边界根据半捆绑分配的定义（定义34）在 $t_{p'_k} = 0$ 处局部捆绑得出。

反设 p_k 至少有 n^2/ξ 个不同的兄弟节点 p'_k 与其进行半捆绑，对于输入 t^+，我们得到所有这些p'_k 任务都被分配给同一个叶节点玩家，并且每个任务产生至少为 ξ 的成本（因为 Q_k 是标准叶节点，因此 $\bar{s}_{p'_k} > \xi$）。因此，机制实现的最大完工时间至少为 $(n^2/\xi) \cdot \xi \geq n^2$。另一方面，由于 $[m] \setminus P$中的任务都是平凡的，我们有最优分配的最大完工时间至多为 $\max_{p_i \in P} \bar{s}_{p_i} \leq 1$. 这将意味着近似比高于 n，矛盾。 □

5.4.3 主归纳引理。

第5.4.2节的结果最终归结为以下引理。

引理 55。 假设 $P = (p_1, \ldots, p_k)$ 是 T. 的一个严格截断盒。那么，P要么是 T的一个盒子，要么对于 p_k 的不同兄弟节点 p'_k 的数量而言，使得(P_{-k}, p'_k) 是 T的一个盒子的兄弟节点数量至少为$\ell - 2n^3/\xi$.

证明。假设 P不是一个盒子，并为 p_k. 随机选取一个兄弟节点 p'_k。对于 $j = 0,\ 1,\ \ldots k-1$，我们固定实例 $T_j,\ T^*_j$，使得

(i) $T_\nu \leq T_j \leq T^*_j \leq T_{\nu'}$ 以及 T_j的所有 t坐标，T^*_j都是有理数；

(ii) 对于某个足够小的 ϵ，对每个 $i \in [k]$都有 $t^{j*}_{p_i} = t^j_{p_i} + \epsilon$；

(iii) $T_0,\ T_1,\ \ldots T_{k-1}$的相对位置如引理53的陈述中所定义；此外，即使将 T_j 中的任意子集替换为相应的 T^*_j实例，该性质仍然成立。

首先注意，这样的实例确实存在：根据引理 53 $h = (5/8) \cdot 4^k \nu$，且 η 可以任意小；另一方面，$t^{\nu'}_{p_i} - t^{\nu}_{p_i} = (4^k - 4^{k-1})\nu = (3/4)4^k \nu > (5/8)4^k \nu$. 因此，预定相对位置上有足够的空间容纳这些实例。

根据引理54并使用并集界，在这些 $2k$ 个实例中，至少有一个实例的 $(p_k,\ p'_k)$ 切片机制属于半捆绑的兄弟节点 $p'_k \in Q_k \setminus \{p_k\}$ 数量少于$2kn^2/\xi \le 2n^3/\xi - 1.$ 因此，大多数兄弟节点 p'_k（至少有 $\ell - 1 - (2n^3/\xi - 1) = \ell - 2n^3/\xi$个）在任何一个 $2k$ 个固定实例中，都没有与 p_k 对应的半捆绑边界。现在我们聚焦于这样的兄弟节点 $p'_{k^\cdot}$。根据引理53，至少存在一个 $j \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}$，使得在 T_j 和 T_j^* 中，$\psi[T_j]_{p_k}(s_{p_k})$ 和 $\psi[T_j^*]_{p_k}(s_{p_k})$ 函数都不是截断线性的。总之，这排除了（非任务独立的）松弛仿射极小化器机制、常数机制和一维捆绑机制，也排除了这两个点处的不连续性。剩下的可能性是，切片 $(p_k,\ p'_k)$ 的分配对 T_j和 $T_j^{*}.$都是交叉的。于是，根据引理52，星 $(P_{-k},\ p'_k)$ 对于 $T.$是一个盒子。

□

5.5 大小为 $n-1.$的盒子的存在性

现在我们准备证明本节的主要结果（推论 59），即证明大小为 $n-1$ 的盒子存在。证明采用关于盒子大小的归纳法，下面的定义有助于在 k 叶节点上定义“坏”事件。

定义 56（概率 b_k）。 固定一个机制，设 $1 \le k \le n-1.$ 假设 T 是集合 $\mathcal{C}$ 中包含 k 个叶节点的一个标准实例。我们用 $b(T、\mathcal{C})$ 表示从 $\mathcal{C}$ 中随机选取的包含 k 个任务的随机星P 不是盒子的概率。令 b_k 表示对于给定机制，所有满足 $|\mathcal{C}| = k$ 的 T 和 $\mathcal{C}$ 的选择所对应的 b（T、$\mathcal{C}$）的上确界。

接下来，我们用 b_{k-1}.给出上界，估计包含 k 个任务的随机星 P 不是截断盒子的概率

引理 57。 固定任意实例 T，它是集合 $\mathcal{C}$ 中包含 $k \ge 3$ 个叶节点的一个标准实例，并设 P 是从$\mathcal{C}$中随机选取的包含 k 个任务的随机星。 P 对于 T 不是截断盒子的概率至多为（$(5n/\nu - 1)\ b_{k-1}.$

证明。 从 C 中随机选取一个包含 k 个任务的星 $P = \{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k\}$。 对于每个 $i \in [k]$， P_{-i} 不是 T 的盒子的概率至多为 $b_{k-1}.$。此外，将任务 p_k 设为 $(t_{p_k} = 0,\ s_{p_k} = \bar{s}_{p_k} - q\nu/(4n))$ 时，P_{-k} 不是盒子的概率，对于每个（至多） $q = 1,\ \ldots,\ 4n/\nu.$ 至多为 b_{k-1}， 。根据并集界，这些坏事件中至少有一个发生的概率至多为 $(k+4n/\nu)b_{k-1} < (n + 4n/\nu)b_{k-1} < (5n/\nu - 1)b_{k-1}.$

□

最后，下一个引理综合了得到的概率。

引理 58。 固定一个近似比小于 n 的机制，则对于 $3 \le k \le n-1$

$$b_k \le \left(\frac{5n}{\nu} - 1\right) b_{k-1} + \frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}.$$

证明。 设 T是某个叶节点集合 C $= \{Q_1、\ldots\ldots、Q_k\}$，且 $\mathsf{C}_{-k} = \{Q_1,\ \ldots Q_{k-1}\}$。 考虑 C 中的一个星 $P^* = \{p_1、\ldots\ldots、p_{k-1}\}_{-k}.$我们称集合 $P^* \cup \{p_k\}$、 $p_k \in Q_k$为 P^*的扩展。

设 $0 \le y \le \ell$ 为被截断盒的扩展数量。其中有多少个扩展是盒子？要么所有 y 个扩展都是盒子，此时盒子扩展的数量至少为 y；要么某个扩展不是盒子，而其他 $\ell - 2n^3/\xi$ 个扩展是盒子（引理 55）。因此，作为盒子的扩展数量至少为 $\min\{y,\ \ell - 2n^3/\xi\} \ge y(\ell - 2n^3/\xi)/\ell = y(1 - 2n^3/\ell\xi)$。 由于这对每个星 P^* 都成立，随机

大小为 k 的星是盒子的概率至少为 $1-2n^3/\xi\ell$ 乘以大小为 k 的随机星是截断盒的概率。

为严格证明，令 R 为 C_{-k}. 中不同的 $k-1$ 任务星形结构的集合。我们从 C，中随机选取一个由 k 任务构成的星形结构 P，并定义以下事件：Y：“P 是一个截断盒”；X：“P是一个盒子”；E_{P^*}：“$P_{-k}=P^*$”。注意，一般而言 $X\not\subset Y$.根据上述论证，$\mathbb{P}(X|E_{P^*})\geq(1-2n^3/\xi\ell)\cdot\mathbb{P}(Y|E_{P^*})$。因此我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X)&=\sum_{P^*\in\mathcal{R}}\mathbb{P}(X|E_{P^*})\mathbb{P}(E_{P^*})\\&\geq(1-2n^3/\xi\ell)\sum_{P^*\in\mathcal{R}}\mathbb{P}(Y|E_{P^*})\mathbb{P}(E_{P^*})\\&=(1-2n^3/\xi\ell)\cdot\mathbb{P}(Y).\end{aligned}$$

根据引理 57，大小为 k 的随机星是截断盒的概率至少为 $1-(5n/\nu-1)b_{k-1}$；因此我们得到

$$\mathbb{P}(X)\geq\left(1-\frac{2n^3}{\xi\ell}\right)\left[1-\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)b_{k-1}\right]>1-\frac{2n^3}{\xi\ell}-\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)b_{k-1}.$$

这进一步得到

$$b_k=1-\mathbb{P}(X)<\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)b_{k-1}+\frac{2n^3}{\xi\ell}<\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)b_{k-1}+\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}.$$

□

推论 59. 固定一个近似比小于 n 的机制，则对于 $2\leq k\leq n-1$

$$b_k\leq\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{k-2}\cdot\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}.$$

证明。对于 $k=2$，根据定理 45 $b_2\leq 3/\sqrt{\ell}<2n^3/(\xi\sqrt{\ell})$，因此基例成立。现在对于 $k\geq 3$，由归纳法可得

$$\begin{aligned}b_k&\leq\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)b_{k-1}+\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}\\&\leq\left(\frac{5n}{\nu}-1\right)\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{k-3}\cdot\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}+\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}\\&=\left(\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{k-2}-\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{k-3}+1\right)\cdot\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}\\&\leq\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{k-2}\cdot\frac{2n^3}{\xi\sqrt{\ell}}.\end{aligned}$$

□

设定 $k=n-1$，并使用 $\nu<\xi$，我们得到 ℓ 的以下粗略下界。

推论 60。如果 $\ell>\left(\frac{5n}{\nu}\right)^{2n}$，我们得到 $b_{n-1}<1$，并且对于每个实例 $T=(t,\bar{s})$ 标准，都至少存在一个大小为 $n-1$ 的盒子$\{C_i\}^{i\in[n-1]}$.

参考文献

[1] Aaron Archer 和 Éva Tardos。单参数代理的真值机制。载于第 *42* 届 *IEEE* 计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集，第 482–491 页，2001 年。1[2] Itai Ashlagi、Shahar Dobzinski 和 Ron Lavi。匿名调度机制的最优下界。运筹学数学，37(2):244–258，2012 年。2, 4[3] Vincenzo Auletta、George Christodoulou 和 Paolo Penna。具有单比特私有值的调度机制。理论计算机系统，57(3):523–548，2015 年。2[4] Sushil Bikhchandani、Shurojit Chatterji、Ron Lavi、Ahuva Mu'alem、Noam Nisan 和 Arunava Sen。弱单调性刻画确定性占优策略实现。计量经济学，74(4):1109–1132，2006 年。4[5] Shuchi Chawla、Jason D. Hartline、David L. Malec 和 Balasubramanian Sivan。用于调度的先验无关机制。载于$STOC$，第 51–60 页。ACM，2013 年。2[6] Xujin Chen、Donglei Du 和 Luis Fernando Zuluaga。用于两台无关机器上真实调度的基于 Copula 的随机机制。理论计算机系统，57(3):753–781，2015 年。2[7] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Annamária Kovács。无关机器上分数调度的机制设计。*ACM* 算法学汇刊，6(2)，2010 年。2[8] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Annamária Kovács。关于子模值函数的 Nisan-Ronen 猜想。载于$STOC$，第 1086–1096 页。ACM，2020 年。（完整版本：arXiv:1907.12733）。4, 18, 19, 25[9] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Annamária Kovács。关于 Nisan-Ronen 猜想。载于$FOCS$，第 839–850 页。IEEE，2021 年。2, 17, 19, 20, 31, 33, 34, 38[10] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Annamária Kovács。图和超图中的真实分配。载于$ICALP$，$LIPIcs$第 198 卷，第 56:1–56:20 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021 年。2, 4[11] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Angelina Vidali。调度问题中双玩家机制的刻画。载于ESA，计算机科学讲义第 5193 卷，第 297–307 页。Springer，2008 年。19[12] George Christodoulou、Elias Koutsoupias 和 Angelina Vidali。调度机制的一个下界。$Algorithmica$，55(4):729–740，2009 年。2, 4[13] George Christodoulou 和 Annamária Kovács。用于相关机器调度的确定性真实多项式时间近似方案。*SIAM* 计算杂志，42(4):1572–1595，2013 年。1[14] Edward H. Clarke。公共物品的多部分定价。公共选择，8，1971 年。1[15] F. Cunningham 和 Nathaniel Grossman。关于杨氏不等式。美国数学月刊，78(7):781–783，1971 年 8 月。出版商：Taylor & Francis。9[16] Constantinos Daskalakis 和 S. Matthew Weinberg。基于双标准近似算法的作业调度贝叶斯真实机制。载于$SODA$，第 1934–1952 页。SIAM，2015 年。2

[17] Shahar Dobzinski 和 Ariel Shaulker. 真值调度的改进下界，2020. 2, 4[18] Shahar Dobzinski 和 Mukund Sundararajan. 关于组合拍卖和调度的真值机制的刻画。载于 EC，第 38–47 页。ACM，2008. 9, 19[19] Yiannis Giannakopoulos、Alexander Hammerl 和 Diogo Poças. 确定性真值调度的一个新下界。载于 $SAGT$，计算机科学讲义第 12283 卷，第 226–240 页。施普林格，2020. 2, 4[20] Yiannis Giannakopoulos 和 Maria Kyropoulou. 贝叶斯调度的 VCG机制。*ACM* 经济学与计算汇刊，5(4):19:1–19:16，2017. 2[21] Ronald L. Graham、Bruce L. Rothschild 和 Joel H. Spencer. 拉姆齐理论，第 *2* 版。威利离散数学与优化丛书，1990. 29 [22] Theodore Groves. 团队激励。计量经济学，41(4):617–631，1973. 1[23] Elias Koutsoupias 和 Angelina Vidali. 真实调度机制的一个下界： $1+\phi$ 。$Algorithmica$，第 1–13 页，2012. 2[24] Ron Lavi 和 Chaitanya Swamy. 基于循环单调性的多维调度真实机制设计。$Games\ and\ Economic\ Behavior$，67(1):99–124，2009. 2[25] Pinyan Lu 和 Changyuan Yu. 一种改进的无关机器调度随机化真值机制。载于$STACS$，第 1 卷，第 527–538 页，2008. 2[26] Pinyan Lu 和 Changyuan Yu. 用于无关机器调度的随机化真值机制。载于 $WINE$，计算机科学讲义第 5385 卷，第 402–413 页。施普林格，2008. 2[27] Ahuva Mu'alem 和 Michael Schapira. 确立真实性的下界。$Games\ andEconomic\ Behavior$，110:174–193，2018. 2, 4[28] Noam Nisan 和 Amir Ronen. 算法机制设计。$Games\ and\ Economic\ Behavior$，35:166–196，2001. 1, 2, 4[29] Michael E. Saks 和 Lan Yu. 在凸域上，弱单调性足以保证真实性。载于 EC，第 286–293 页。ACM，2005. 4[30] William Vickrey. 反向投机、拍卖与竞争性密封投标。金融学期刊，16:8–37，1961. 1[31] Angelina Vidali. 真实性的几何学。载于 $WINE$，计算机科学讲义第 5929 卷，第 340–350 页。施普林格，2009. 17[32] Changyuan Yu. 无关机器调度的双范围值变体的真值机制。理论计算机科学，410(21-23):2196–2206，2009. 2