arXiv:2301.11907v1 [math.RA] 27 Jan 2023

分次李代数的泛包络代数

FELIPE YUKIHIDE YASUMURA

Abstract. 本文构造了一个 G分次李代数的分次泛包络代数，其中 G不一定是阿贝尔群。如果分次群是阿贝尔群，则该构造与经典构造一致。我们证明了分次泛包络代数的存在性与唯一性。作为推论，我们证明了自由李代数的泛包络代数的维特定理的一个分次变体，以及阿多定理的分次版本；该定理表明，每个有限维李代数都存在一个忠实的有限维表示。此外，我们还研究了李分次是否等价于阿贝尔分次。

1. Introduction

李代数的泛包络代数是一种经典且重要的构造，它将李代数的表示与结合代数的表示联系起来，参见任何一本标准的李代数教材，例如 [6]。本文研究这一构造，但起点是一个 G分次李代数，其中 G 是一个群。众所周知，如果 G 是阿贝尔群，那么李代数的泛包络代数自然继承一个 G分次。然而，众所周知，如果分次群 G 不是阿贝尔群，则泛包络代数未必是分次代数。

设 G 为一个阿贝尔群， $\mathcal{L}$ 为一个 G分次李代数。于是，我们可以取 $\mathcal{L}$ 的一个有序齐次基 $\{e_i \mid i \in I\}$。令 $[e_i, e_j] = \sum_\ell \alpha_{ij\ell} e_\ell$。记 $X_G = \bigcup_{g\in G} X_g$，其中 $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$；记 $\mathbb{F}\langle X_G\rangle$ 为域 $\mathbb{F}$上的自由 G分次结合代数。 $\mathcal{L}$ 的泛包络代数为 $U(\mathcal{L}) \cong \mathbb{F}\langle X_G\rangle / J$，其中 J是由所有 $\{x_i x_j - x_j x_i - \sum_{\ell\in I} \alpha_{ij\ell} x_\ell \mid i, j \in I\}$生成的（普通）理想。由于生成 J 的元素是齐次的，因此 J 是一个分次理想。因此， $U(\mathcal{L})$ 是一个 G分次代数。

我们将上述构造推广到 G-分次李代数，其中 G是一个不一定为阿贝尔群的群（见定理 9 和定理 12）。当该群为阿贝尔群时，我们的构造与经典构造一致。我们找到了一个 PBW 基（定理 16）。由此，我们证明了适用于自由 G-分次李代数情形的维特定理的一个改编版本

由圣保罗州研究基金会（FAPESP）资助，项目编号为 2018年/23690-6。

（推论 23）。我们还推导出阿多定理的一个分次版本，即证明每个有限维 G-分次李代数都是某个有限维 G-分次结合代数的分次向量子空间（定理 34）。我们研究李代数上的每个群分次是否都等价于一个阿贝尔群分次这一问题。我们应用所构造的结构，得到了该问题的一个等价表述（推论 41）。

2. Notations and Preliminaries

设 G 为一个群， $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{F}$上的代数（不一定是结合代数或李代数）。 G上的一个 $\mathcal{A}$ -分次是指向量空间分解 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ ，满足 $\mathcal{A}_g\mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$，对所有 g、 $h \in G$均成立。 G-分次代数是指赋予了 G-分次的代数。向量子空间 $\mathcal{A}_g$ 称为次数 g的齐次分量，其中的非零元素称为次数 g的齐次元素。当分解未明确给出时，我们将写作（$\mathcal{A}$）$_g$ ，表示次数为 g的齐次分量。给定 $0 \neq x \in \mathcal{A}_g$，记作 $\deg_G x = g$；在不会引起歧义时，简写为 $\deg x = g$。分次的支集定义为

$$\operatorname{Supp}\Gamma = \{g \in G \mid \mathcal{A}_g \neq 0\}.$$

若向量子空间 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{A}_g \cap \mathcal{S}$，则称其为分次的。分次子代数是作为分次子空间的子代数。类似地，我们定义分次理想。若 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个分次理想，则商 $\mathcal{A}/\mathcal{S}$ 继承 G-分次代数的结构。

给定两个 G-分次代数 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 和 $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$，称 G-分次同态为代数同态 $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ，满足$\psi(\mathcal{A}_g) \subseteq \mathcal{C}_g$，对所有 $g \in G$均成立。

设 $\Gamma\colon \mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{A}_g$ 和 $\Gamma'\colon \mathcal{A} = \bigoplus_{h\in H} \mathcal{A}'_h$ 是同一代数 $\mathcal{A}$上的两个分次。如果存在代数自同构 ψ of $\mathcal{A}$，使得对于每个 $g \in G$ ，都存在满足 $\psi(\mathcal{A}_g) = \mathcal{A}'_h$的 $h \in H$，则称 Γ 和 Γ' 等价。如果存在一个与 Γ等价的 G-分次，则称分次 Γ 由群 G 实现。如果一个分次由阿贝尔群实现，则称其为阿贝尔分次。

值得一提的是，如果同一代数 $\mathcal{A}$上的两个分次通过同构 ψ 等价，并且 $I \subseteq \mathcal{A}$ 是一个分次理想，那么 I 和$\psi(I)$等价， $\mathcal{A}/I$ 和 $\mathcal{A}/\psi(I)$也等价。

2.1. 分次的泛群。我们在本小节及下一小节中沿用 [2] 。给定一个 G-分次，考虑能够实现该分次且关系数量最少的群是有意义的。正式定义如下。

定义 1（[2, 定义 1。17]）。设 Γ 是代数$\mathcal{A}$上的一个 G-分次。 Γ 的泛分次群是群 $U(\Gamma)$，满足：对于将 Γ 实现为一个 H-分次的任意方式，都存在唯一的群同态$U(\Gamma) \to H$，且该同态在 Supp Γ 上是恒等映射。

群分次的泛分次群 Γ 总是存在。它可以取为这样一个群：其生成元集合为 $\operatorname{Supp}\Gamma$，并且对于 s_1、s_2、$s_3 \in \operatorname{Supp}\Gamma$，具有关系 $s_1 s_2 = s_3$，只要 $0 \neq \mathcal{A}_{s_1}\mathcal{A}_{s_2} \subseteq \mathcal{A}_{s_3}$（见 [2, 命题 1。18]）。

考虑分次 Γ的泛阿贝尔分次群也很有意义。它由 $U(\Gamma)$的阿贝尔化定义，即 $U_{\mathrm{ab}}(\Gamma) = U(\Gamma)/U(\Gamma)'$，其中 G'是群 G的交换子群。泛阿贝尔群分次并不总能实现该分次Γ。事实上，在这个新群下，某些齐次分量可能会合并。当且仅当初始分次 Γ是阿贝尔的，分次才由 $U_{\mathrm{ab}}(\Gamma)$实现。

2.2. 细化与粗化。设 Γ：$\mathcal{A} = \bigoplus_{g\in G}\mathcal{A}_g$ 和 Γ'：$\mathcal{A} = \bigoplus_{h\in H}\mathcal{A}'_h$ 是 $\mathcal{A}$上的两个分次。若对于每个 $h \in \operatorname{Supp}\Gamma'$，都存在 $g \in \operatorname{Supp}\ \Gamma$使得 $\mathcal{A}'_h \subseteq \mathcal{A}_g$，则称 Γ' 是 Γ 的细化（或称 Γ 是 Γ′的粗化）。以下结论与我们有关：

引理 2（[2, 命题 1 的一部分。25]）。设 Γ 和 Γ' 是 $\mathcal{A}$ 上的分次，并假设 Γ' 实现为 H-分次，且是 Γ 的粗化。则存在一个群满同态 p：$U(\Gamma) \to H$，使得 $p(\operatorname{Supp}\ \Gamma) = \operatorname{Supp}\ \Gamma'$。

2.3. 自由代数。对于每个 $g \in G$，令 $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$，并令 $X_G = \bigcup_{g\in G} X_g$。于是，由 X_G 自由生成的自由结合代数 $\mathbb{F}\langle X_G\rangle$ 具有自然的 G-分次，其中单项式是齐次的，并且

$$\deg_G x_{i_1}^{(g_1)} \cdots x_{i_m}^{(g_m)} = g_1 \cdots g_m.$$

它满足以下泛性质：对于任意结合 G-分次代数 $\mathcal{A}$，以及每个保持次数的映射 ψ_0：$X_G \to \mathcal{A}$（即，$\psi_0(x_i^{(g)}) \in \mathcal{A}_g$），存在唯一的 G-分次代数同态 ψ：$\mathbb{F}\langle X_G\rangle \to \mathcal{A}$，将 ψ_0 延拓。因此，我们可以将 G-分次结合代数的 G-分次多项式恒等式定义为集合中的一个元素

$$\bigcap_{\substack{\psi\colon \mathbb{F}\langle X_G\rangle \to \mathcal{A} \\ G\text{-graded homomorphism}}} \operatorname{Ker}\psi.$$

2.4. 自由对。我们回顾结合-李代数对簇的概念。一个结合-李代数对是一个对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$），其中 $\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{L}$生成的结合代数，而 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{A}$的向量子空间，同时也是一个李代数，并且 $\mathcal{L}$ 的乘积与 $\mathcal{A}$在 $\mathcal{L}$上的交换子限制一致。

给定两个对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$）和（$\mathcal{H}$，$\mathcal{C}$），成对同态是一个代数同态 ψ：$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$，满足 $\psi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{H}$。因此，$\psi$ 限制为一个李代数同态 $\mathcal{L} \to \mathcal{H}$。

设 $\mathscr{W}$为一类结合-李代数对。若对于类$\mathscr{W}$中的任意一对 $(\mathcal{H},\mathcal{C})$，以及任意映射

ψ_0：$X \to \mathcal{H}$，存在唯一一个从 $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ 到 $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$ 且延拓 ψ_0 的成对同态，则称一对 $(X \to \mathcal{H}, \mathcal{L})$ 是类 $\mathcal{F}$ 中由 $\mathcal{H}$ 自由生成的自由对。显然，$(\mathcal{L}(X), \mathbb{F}\langle X\rangle)$ 是一个自由对，其中 $\mathcal{L}(X)$ 是由 X 生成的自由结合代数的李子代数（即自由李代数），并且它在所有结合-李代数对这一类中由 X 自由生成。现在，由于自由结合-李代数对的存在，我们可以讨论成对的多项式恒等式。按照惯例，这些恒等式称为对 $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ 的弱多项式恒等式（或李代数表示的恒等式）。

上述讨论可以扩展到 G 分次结合代数-李代数对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$）的情形：一个 G 分次结合代数 $\mathcal{A}$，以及一个 G 分次李代数 $\mathcal{L}$，它是 $\mathcal{A}$ 的 G 分次子空间，其中 $\mathcal{L}$ 的乘积是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}$ 上的限制所得到的交换子。下面我们将证明存在一个 G 分次自由结合代数-李代数对。

3. 分次结合代数-李代数对

我们令 G 为一个不一定阿贝尔群。

记号。对于一个 G-对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$），我们指的是一个 G 分次结合代数-李代数对，即 $\mathcal{A}$ 是一个 G 分次结合代数，$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 G 分次子空间，并且关于 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{L}$ 上的限制所得到的交换子，$\mathcal{L}$ 也是一个 G 分次李代数。等价地，一个 G- 对是一个对（$\mathcal{L}$，ι），其中 $\mathcal{L}$ 是一个 G 分次李代数，$\mathcal{A}$ 是一个 G 分次结合代数，并且 ι：$\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ 是一个分次线性映射，使得 ι：$\mathcal{L} \to \mathcal{A}^{(-)}$ 是一个（未分次的）李单同态。

注意，向量空间 $\mathcal{A}$ 上的 G分次不一定能使其关于交换子构成 G分次李代数。在这种情况下，我们称 G对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$）为强 G对。

定义 3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个 G分次李代数。$\mathcal{L}$ 的 G分次泛包络代数是一个 G对（$\mathcal{L}$，$U_G(\mathcal{L})$），满足：（i）$U_G(\mathcal{L})$ 由 $\mathcal{L}$生成；（ii）对于任意 G对（$\mathcal{H}$，$\mathcal{A}$）以及任意 G分次李同态 $\mathcal{L} \to \mathcal{H}$，都存在一个延拓，使其成为 G 分次代数同态 $U_G(\mathcal{L}) \to \mathcal{A}$。

按照惯例，我们将代数 $U_G(\mathcal{L})$ 称为 $\mathcal{L}$的 G分次泛包络代数。我们将证明$U_G(\mathcal{L})$ 的存在性与唯一性。它将是通常的泛包络代数 $U(\mathcal{L})$ 的一个适当商。

注释。下文中，我们可以弱化对一对对象的定义，将 ι 的条件：$\mathcal{L} \to \mathcal{A}^{(-)}$ 为单同态，改为仅要求 ι 是一个同态。这是因为在定理 16之前，我们无法保证 $\mathcal{L} \to U_G(\mathcal{L})$是一个嵌入。

引理4。设 $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ 是一个 G-对，并设 $x, y \in \mathcal{L}$ 为满足 $\deg x = g$、$\deg y = h$ 以及 $gh \neq hg$ 的齐次元素。则 $xy = 0$。

证明。记 $\mathcal{L} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}_g$ 和 $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}_g$，则 $\mathcal{L}_g \subseteq \mathcal{A}_g$，对所有 $g \in G$。

由 $g=$的次数 x 和 $h=$的次数 y，可得 $yx \in \mathcal{A}_{hg}$和 $xy \in \mathcal{A}_{gh}$。另一方面，

$$-[y,x] = -yx + xy \in \mathcal{L}_{hg} \subseteq \mathcal{A}_{hg}.$$

因此 $xy = yx + (-yx + xy) \in \mathcal{A}_{hg} \cap \mathcal{A}_{gh} = 0$。 □

用多项式恒等式的语言表示，我们有：

推论5。设 $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ 是一个 G-对。那么该对满足弱 G-分次多项式恒等式

$$x_1^{(g)} x_2^{(h)} = 0, \quad [g,h] \neq 1. \quad \square$$

设 $\mathcal{L}$ 是一个具有齐次向量空间基 $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in N\}$ 的 G-分次李代数，其中 N 按序排列，并记 $[e_i, e_j] = \sum_{\ell \in N} \alpha_{ij}^{(k)} e_k$。设 $X_{\mathcal{B}} = \{x_i \mid i \in I\}$。设 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle$ 是由 $X_{\mathcal{B}}$ 自由生成的自由结合 G-分次代数，其中对于每个 $i \in N$，$\deg x_i = \deg_G e_i$。定义 $I_{\mathcal{B}}$ 为由下列元素生成的分次理想

$$\{x_i x_j - x_j x_i - \sum_k \alpha_{ij}^{(k)} x_k \mid i,j \in N\}, \tag{1}$$

也就是说，$I_{\mathcal{B}}$ 是包含上述所有元素的最小分次理想。进一步记 J 为由相同元素生成的非分次理想，因此$U(\mathcal{L}) \cong \mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / J$。代数 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}}$是分次的，并且（$\mathcal{L}$，$\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}}$）是一个$G$-对。

引理6。令 $J_{\mathcal{B}}$ 为 $U(\mathcal{L})$的理想，由以下元素生成

$$\{e_i e_j \mid i,j \in N, [\deg e_i, \deg e_j] \neq 1\}.$$

Then

$$\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}} \cong U(\mathcal{L}) / J_{\mathcal{B}}.$$

证明。由于 $J \subseteq I_{\mathcal{B}}$，存在一个满射代数同态 $\pi : U(\mathcal{L}) \to \mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}}$。根据引理4，由于（$\mathcal{L}$，$\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}}$）是一个 G-对，因此$J_G \subseteq \operatorname{Ker} \pi$。于是我们得到

$$I_{\mathcal{B}} \supseteq J + K,$$

其中 K是理想 $\langle x_i x_j \mid i$、 $j \in N$、 [（可能不是分次的），次数为 x_i、次数为 $x_j] \neq 1 \rangle$。注意， K 实际上是分次的，因为它的生成元都是齐次元素。现在，(1)中的每个元素要么是齐次的（当 [次数为 x_i、次数为 $x_j] = 1$时就是这种情况），要么属于 K（若 [次数为 x_i、次数为 $x_j] \neq 1$）。因此， $J+K$ 是一个分次理想。由此可得 $J+K \supseteq I_{\mathcal{B}}$，结果得证。□

现在我们可以证明， $\mathcal{L}$的 G分次泛包络代数存在。

引理 7. G-对（$\mathcal{L}$,$\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / I_{\mathcal{B}}$）是 $\mathcal{L}$ 的 G-分次泛包络代数。

证明。设（$\mathcal{H}, \mathcal{A}$）是一个 G-对，且 $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ 是一个 G-分次李代数同态。于是 φ 可延拓为一个代数同态（仍记作 φ） $\varphi\colon U(\mathcal{L}) \to \mathrm{alg}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{A}$。这里，$\mathrm{alg}(\mathcal{H})$ 是由 $\mathcal{H}$ 生成的结合子代数。若 $[\deg e_i, \deg e_j] \neq 1$，则引理4告诉我们

$$0 = \varphi(e_i)\varphi(e_j) = \varphi(e_i e_j).$$

因此，φ可经由 $J_{\mathcal{B}}$分解，也就是说，存在一个映射 $\bar{\varphi}\colon U(\mathcal{L})/J_{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}$。由引理6，$U(\mathcal{L})/J_{\mathcal{B}} \cong \mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle/I_{\mathcal{B}}$。映射 $\bar{\varphi}$ 是分次映射，并延拓了 φ，从而完成证明。□

最后，证明 G-分次泛包络代数在同构意义下唯一，是一个标准练习。

引理 8. 设 U_G 和 V_G 是 G-分次泛包络代数 $\mathcal{L}$。则存在一个 G-分次同构 $\iota\colon U_G \to V_G$，使得对每个 $x \in \mathcal{L}$，都有 $\iota(x) = x$。

证明. 由于（$\mathcal{L}$，V_G）是一对，恒等映射 $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 可延拓为一个 G-分次代数同态 $\iota\colon U_G \to V_G$。反过来，恒等映射也可延拓为一个 G-分次同态 $j\colon V_G \to U_G$。由于复合映射 $j\iota\colon U_G \to U_G$ 固定了 $\mathcal{L}$的所有元素，它必定是恒等映射。同理，ιj 是恒等映射。□

我们总结所得结果。当然，由 $U(\mathcal{L})$的向量空间基，我们可以得到 $U_G(\mathcal{L})$作为向量空间的一组生成元。

定理9. 设 $\mathcal{L}$是一个 G分次李代数，其中 G 是不一定阿贝尔群。则它具有一个在同构意义下唯一的 G分次泛包络代数 $U_G(\mathcal{L})$。如果 $\{e_i \mid i \in I\}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个有序齐次基，那么

$e_{i_1} \cdots e_{i_m}$、$m \geq 0$、$i_1 \leq \cdots \leq i_m$、[的次数分别为e_{i_j}、$e_{i_{j+1}}] = 1$、$j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$，它们是一组张成 $U_G(\mathcal{L})$的齐次元素。□

例1. 如果 G 是阿贝尔的且 $\mathcal{L}$ 是一个 G分次代数，那么 $U_G(\mathcal{L}) = U(\mathcal{L})$。

例2. 设 $G = C_2 * C_2 = \langle g、h \mid g^2 = h^2 = 1\rangle$和 $\mathcal{L}$ =张成$\{x, y\}$，即二维阿贝尔李代数。在 $\mathcal{L}$ 上定义一个 G分次，其中$x = g$的次数为$y = h$。于是，已知 $U(\mathcal{L}) \cong \mathbb{F}[X, Y]$，即关于两个可交换变量的多项式代数。由于 $U_G(\mathcal{L}) \cong \mathbb{F}[X, Y]/\langle XY\rangle$，可得 $U_G(\mathcal{L})$是由 X 和 Y生成的 $\mathbb{F}[X] \oplus \mathbb{F}[Y]$的含幺结合子代数，即

$$U_G(\mathcal{L}) = \{\alpha(1,1) + (F(X), G(Y)) \mid \alpha \in \mathbb{F}, F(X) \in \mathbb{F}[X], G(Y) \in \mathbb{F}[Y]\}.$$

4. 强对

我们假设 G是一个不一定为阿贝尔群的群。我们考察$U_G(\mathcal{L})$何时关于交换子构成一个 G-分次李代数。为此，我们需要考察强对，即 G-对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$），其中 $\mathcal{A}$ 是

一个关于交换子的 G-分次李代数。令 $\mathscr{V}_G$ 表示满足多项式恒等式的 G-分次结合代数簇

$$\left\{x_1^{(g)}x_2^{(h)} = 0 \mid g,h \in G, [g,h] \neq 1\right\}.$$

每当我们有一个强对（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$）时，根据引理4，有 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}_G$。

对每个 $g \in G$，记 $X_G = \bigcup_{g\in G} X_g$，其中 $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$。令 $\mathbb{F}_G(X_G)$为 $\mathscr{V}_G$中的相对自由代数，由 X_G自由生成。于是

$$\mathbb{F}_G(X_G) \cong \mathbb{F}\langle X_G\rangle / \langle x_1^{(g)}x_2^{(h)} \mid [g,h] \neq 1\rangle^{T_G}.$$

我们略微修改李代数的 G-分次泛包络代数的定义。

定义10. 设 $\mathcal{L}$ 是一个 G-分次李代数。$\mathcal{L}$ 的强 G-分次泛包络是一个强对（$\mathcal{L}$，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$），使得对于任意强对（$\mathcal{H}$，$\mathcal{A}$），每个 G-分次李代数同态 $\mathcal{L} \to \mathcal{H}$ 都唯一延拓为一个 G-分次代数同态$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) \to \mathcal{A}$。

标准论证表明，如果强 G 分次泛包络代数存在，那么它在 $\mathcal{L}$ 上为恒等映射的同构意义下是唯一的。此外，$\mathcal{L}$ 生成 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$。如果它存在，则它是 G 分次泛包络代数的一个商。

引理11。如果 $\mathcal{L}$ 的强 G 分次泛包络代数存在，那么它是 $U_G(\mathcal{L})$ 的一个商。

证明。如果 $(\mathcal{L}, \mathrm{SU}_G(\mathcal{L}))$ 是一个强对，那么它也是一个 G-对。因此，存在一个将恒等映射 $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 延拓为代数同态$U_G(\mathcal{L}) \to \mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 的延拓。由于 $\mathcal{L}$ 生成 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$，结论成立。□

例3。如果 G 是一个阿贝尔群，那么每个 G-对都是强对。因此，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 存在，并且它与 $U_G(\mathcal{L})$ 重合（后者又等于$U(\mathcal{L})$）。

例4。再次考虑例2：设 $G = C_2 * C_2 = \langle g, h \mid g^2 = h^2 = 1\rangle$ 和 $\mathcal{L} = \mathrm{Span}\{x, y\}$ 为二维阿贝尔李代数，其中 $\deg x = g$ 且 $\deg y = h$。$\mathcal{L}$ 的 G 分次泛包络代数关于交换子构成一个李代数（事实上，$U_G(\mathcal{L})$ 是一个交换代数）。特别地，它满足强G分次泛包络代数的定义，因此 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) = U_G(\mathcal{L})$。

例 5. 更一般地，如果 $U_G(\mathcal{L})$ 关于交换子恰好是一个 G-分次李代数，则 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 存在，并且它与$U_G(\mathcal{L})$重合。反之，如果 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) = U_G(\mathcal{L})$，那么 $U_G(\mathcal{L})^{(-)}$ 是一个 G-分次李代数。

现在，我们将证明强 G分次泛包络代数的存在性。其构造与 G分次泛包络代数的构造类似，但我们需要在 $\mathscr{V}_G$这一簇中进行研究。

设 $\mathcal{L}$ 是一个 G分次李代数，且 $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in N\}$ 是 $\mathcal{L}$的一组齐次基。考虑结构常数 $\alpha_{ij}^{(k)}$ 、 i、 j、 $k \in N$，即:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k \in N} \alpha_{ij}^{(k)} e_k.$$

令 $X_{\mathcal{B}} = \{z_i = x^{(g_i)}{}_i \mid i \in N, g_i = \deg e_i\}$，并令 $\mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle$ 为 $\mathscr{V}_G$ 中由 $X_{\mathcal{B}}$ 自由生成的相对自由代数。令 $J_{\mathcal{B}}$ 为由以下所有元素生成的 $\mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle$ 的理想:

$$z_i z_j - z_j z_i - \sum_{k \in N} \alpha_{ij}^{(k)} z_k, \quad i, j \in N.$$

上述元素都是齐次的。事实上，要么 $[\deg z_i, \deg z_j] = 1$，要么 $z_i z_j = z_j z_i = [z_i, z_j] = 0$。因此 $J_{\mathcal{B}}$ 是一个分次理想。

定理 12. $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle / J_{\mathcal{B}}$。

证明。设 $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ 为一对强对，并设 $f_0\colon \mathcal{L} \to \mathcal{H}$ 为一个 G-分次李同态。于是 f_0 限制为映射 $X_{\mathcal{B}} \to \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$，且保持次数。由于 $\mathcal{A} \in \mathscr{V}_G$， f_0 的限制延拓为一个 G-分次代数同态 $f\colon \mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathcal{A}$。由于 $\mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle$ 和 $\mathcal{A}$ 都是关于交换子的 G-分次李代数，因此 f 可经由 $J_{\mathcal{B}}$ 分解。于是 f_0 可延拓为一个 G-分次代数同态 $\mathbb{F}_G\langle X_{\mathcal{B}}\rangle / J_{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}$。□

因此，每个 G分次李代数都是某个$\mathcal{A}^{(-)}$的子代数，其中 $\mathcal{A}$是一个 G分次结合代数，且 $\mathcal{A}^{(-)}$ 是一个 G分次李代数。

记号。为方便起见，我们将齐次变量 $z_i \in X_{\mathcal{B}}$ 与基元素 $e_i \in \mathcal{B}$视为相同。因此，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$由所有元素$e_{i_1} \cdots e_{i_m}$张成，其中 e_{i_1}，……，$e_{i_m} \in \mathcal{B}$。

5. A PBW basis for$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$

本节将为$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$求出一组齐次向量空间基。为此，设 $X_G = \bigcup_{g \in G} X_g$ 为一组 G齐次变量（其中每个X_g 可以是有限的，也可以不是）。我们先为$\mathbb{F}_G\langle X_G\rangle$求出一组齐次向量空间基。

记号。如果 $\{g_1, \ldots, g_m\}$ 是某个群的子集，则缩写g.a.s.表示 $\{g_1, \ldots, g_m\}$ 生成一个阿贝尔子群。

引理 13. 相对自由代数 $\mathbb{F}_G\langle X_G\rangle$ 的 G-齐次向量空间基由以下各类单项式构成

$$x_{i_1}^{(g_1)} \cdots x_{i_m}^{(g_m)}, \quad \{g_1, \ldots, g_m\} \ g.a.s. \ .$$

证明。显然，这样的集合在向量空间中生成 $\mathbb{F}_G\langle X_G\rangle$。因此，只需证明它线性无关。考虑上述单项式的一个有限子集S 。我们可以假设有一组固定的变量，

也就是说， $Y = \{x^{(g_1)}{}_{i_1}$、.....、 $x^{(g_m)}{}_{i_m}\}$出现在 S的所有单项式中。我们可以假设由 $\{g_1, \ldots, g_m\}$生成的子群是阿贝尔子群；否则， S中的每个单项式都将为零。因此，令 $H = \langle g_1$、.....、 $g_m\rangle$为 G中由 g_1、.....、 g_m生成的阿贝尔子群。由 Y自由生成的自由结合 H分次代数 $\mathbb{F}\langle Y\rangle$可视为一个 G分次代数，其中 $G \setminus H$中的齐次分量均为0。因此，存在一个满射的 G分次代数同态 p： $\mathbb{F}_G(X_G) \to \mathbb{F}\langle Y\rangle$ ，其定义为

$$p(x_j^{(g)}) = \begin{cases} x_j^{(g)}, & \text{if } x_j^{(g)} \in Y, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在，集合 S 在 p的像下是线性无关的。因此， S 也是线性无关的。证明完毕。□

现在，设 G 为任意群， $\mathcal{L}$ 为任意域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G分次李代数，并设 $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in N\}$ 为 $\mathcal{L}$的齐次向量空间基，其中 N 有序。令

$$[e_i, e_j] = \sum_{\ell \in N} \alpha_{ij}^{(\ell)} e_\ell$$

它们是关于 $\mathcal{B}$的 $\mathcal{L}$ 的结构常数。我们将考虑自由变量集 $X_{\mathcal{B}} = \{e_i \mid i \in N\}$，并使用相同的字母表示齐次变量和 $\mathcal{B}$的元素。令 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$为由 $X_{\mathcal{B}}$自由生成的 $\mathscr{V}_G$中相对自由的 G分次代数，并令 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle$为由 $X_{\mathcal{B}}$自由生成的自由结合 G分次代数。

我们令 $\mathfrak{R}$ 为由所有.....张成的 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle$ 的向量子空间

$$e_{i_1} \cdots e_{i_m}, \quad m \geq 0, i_1 \leq \cdots \leq i_m.$$

下面是一个经典结果。

引理 14（[6, 引理 5。2]）。存在一个线性映射 σ_0： $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathfrak{R}$使得

$$\sigma_0 1 = 1,$$
$$\sigma_0(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) = e_{i_1} \cdots e_{i_m}, \ \textit{if } i_1 \leq \cdots \leq i_m,$$
$$\sigma_0(e_{j_1} \cdots e_{j_m} - e_{j_1} \cdots e_{j_{k+1}} e_{j_k} \cdots e_{j_m}) = \sigma_0(e_{j_1} \cdots \left(\sum_{\ell \in N} \alpha_{j_k j_{k+1}}^{(\ell)} e_\ell\right) \cdots e_{j_m}).$$

作为直接推论，我们得到以下分次版本。令$\mathfrak{B}$ 为 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 的向量子空间，它由所有

$$e_{i_1} \cdots e_{i_m}, \quad m \geq 0, i_1 \leq \cdots \leq i_m, \{\deg_G e_{i_1}, \ldots, \deg_G e_{i_m}\} \text{ g.a.s.}$$

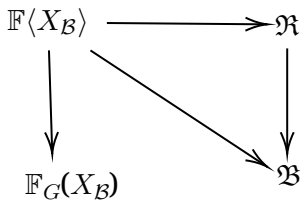
引理 15. 存在线性映射 σ： $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}}) \to \mathfrak{B}$ ， 使得

$$\sigma(e_{i_1} \cdots e_{i_m}) = 0,$$

如果 $\{\deg_G e_{i_1}$、……、$\deg_G e_{i_m}\}$不生成阿贝尔子群；否则，

$$\sigma 1 = 1,$$
$$\sigma(e_{i_1}\cdots e_{i_m}) = e_{i_1}\cdots e_{i_m},\ \textit{if } i_1 \leq \cdots \leq i_m,$$
$$\sigma(e_{j_1}\cdots e_{j_m} - e_{j_1}\cdots e_{j_{k+1}}e_{j_k}\cdots e_{j_m}) = \sigma(e_{j_1}\cdots\left(\sum_{\ell\in N}\alpha^{(\ell)}_{j_k j_{k+1}}e_\ell\right)\cdots e_{j_m}).$$

证明。投影 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 诱导出映射 $\mathfrak{R} \to \mathfrak{B}$。令 $\sigma_0 : \mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathfrak{R}$ 为引理 14 中的线性映射。于是有如下图表



由于 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathfrak{B}$ 的核包含于 $\mathbb{F}\langle X_{\mathcal{B}}\rangle \to \mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 的核（见引理 13），我们得到所需的映射 $\sigma : \mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}}) \to \mathfrak{B}$。□

这给出了 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 的 PBW 基。更准确地说，我们有

定理 16. 设 G 为任意群，$\mathcal{L}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的 G-分次李代数。设 $\{e_i \mid i \in N\}$ 为 $\mathcal{L}$ 的齐次基，其中 N 按序排列。那么，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 的齐次向量空间基由下式给出

$$e_{i_1}\cdots e_{i_m},\quad i_1 \leq \cdots \leq i_m, \{\deg_G e_{i_1}, \ldots, \deg_G e_{i_m}\}\ g.a.s.$$

证明。如同经典情形一样，显然上述单项式张成 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$。现在，引理 15 中的映射 $\sigma : \mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}}) \to \mathfrak{B}$ 经过 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) \to \mathfrak{B}$分解。因此，我们得到一个满射线性映射 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}) \to \mathfrak{B}$，上述单项式集被映射为一个线性无关集。因此，它构成一个基。□

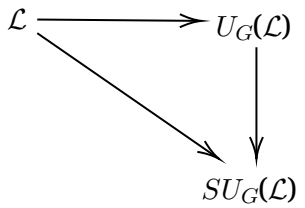
因此，我们得到（$\mathcal{L}, U_G(\mathcal{L})$）和（$\mathcal{L}, \mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$）确实是对。也就是说，我们有如下结论。

推论 17。设 G 为任意群，$\mathcal{L}$ 为一个 G-分次李代数。则

（i）存在一个嵌入 $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$;

（ii）存在一个嵌入 $\mathcal{L} \hookrightarrow U_G(\mathcal{L})$。

证明。断言（i）直接由前一个定理得到。为证明（ii），应考虑下图



其中，满射 $U_G(\mathcal{L}) \to \mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 来自引理11。 □

6. 自由分次李代数

构造 G-分次自由李代数有一种直接的方法。例如， [3]中曾提到过这种方法。为完整起见，我们在此给出其构造。设 $\mathbb{F}\{X_G\}$ 是绝对自由的（非结合）G-分次代数，并设 I 是由以下类型的所有元素生成的分次T-理想：

$$x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)} + x_2^{(g_2)}x_1^{(g_1)},$$
$$(x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)})x_3^{(g_3)} + (x_2^{(g_2)}x_3^{(g_3)})x_1^{(g_1)} + (x_3^{(g_3)}x_1^{(g_1)})x_2^{(g_2)}.$$

记 $\mathcal{L}(X_G) = \mathbb{F}\{X_G\}/I$。根据构造， $\mathcal{L}(X_G)$ 是一个 G-分次代数，并且显然是一个李代数。

命题18。 $\mathcal{L}(X_G)$ 在所有 G-分次李代数的范畴中是自由的，并且由集合 X_G 自由生成。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个 G-分次李代数，并设 $\varphi\colon X_G \to \mathcal{H}$ 是一个保持次数的映射，即 $\deg \varphi(x_i^{(g)}) = g$。则 φ 可延拓为一个 G-分次同态 $\varphi\colon \mathbb{F}\{X_G\} \to \mathcal{H}$。于是 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是一个分次理想；又由于 $\mathcal{H}$ 是一个分次李代数，它包含 I 的生成元。因此，φ 可通过 $\mathbb{F}\{X_G\}/I$ 分解，也就是说， φ 诱导出一个分次李同态 $\mathcal{L}(X_G) \to \mathcal{H}$ ，该同态延拓了映射 $X_G \to \mathcal{H}$。□

6.1. 分次自由代数与对。我们固定一个群 G。根据推论5，我们可以考虑满足弱 G-分次多项式恒等式的对的簇 $\mathscr{W}_G$

$$x_1^{(g)}x_2^{(h)} = 0, \quad [g,h] \neq 1.$$

设 $\mathcal{L}(X_G)$ 为自由的 G-分次李代数，并设 $U_G(\mathcal{L}(X_G))$ 为其相应的 G-分次泛包络代数。

命题 19。对 $(\mathcal{L}(X_G)\ U_G(\mathcal{L}(X_G)))$ 在对的簇 $\mathscr{W}_G$ 中是自由的，而 X_G 是一组自由生成元。

证明。设（$\mathcal{H}$， $\mathcal{A}$）是一个 G-对，且 $\psi_0\colon X_G \to \mathcal{H}$ 是一个保次数映射。由于 $\mathcal{L}$（X_G）是自由的，因此 ψ_0 可唯一延拓为李代数同态 $\mathcal{L}$（X_G） $\to \mathcal{H}$。于是，它可唯一延拓为代数同态 U_G（$\mathcal{L}$（X_G）） $\to \mathcal{A}$。因此，（$\mathcal{L}$（X_G） U_G（$\mathcal{L}$（X_G））） 在对的簇 $\mathscr{W}_G$ 中是自由的，由 X_G自由生成。□

反之，我们可以从 $\mathscr{W}_G$ 中的一个自由对得到自由的 G-分次李代数。因此，设（$\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$）是 $\mathscr{W}_G$ 中 G-分次对的簇中的一个自由对，由 X自由生成。令 $\mathcal{L}$（X）为由 X 生成的 G-分次李代数。于是， $\mathcal{L}$（X）$=\mathcal{L}$。更准确地说，我们有：

命题20。代数 $\mathcal{L}(X)$ 是自由的 G-分次李代数，由 X 自由生成；而 G-对 $(\mathcal{L}(X)\ U_G(\mathcal{L}(X)))$ 在对 $\mathscr{W}_G$ 的簇中是自由的，且 X 是一组自由生成元。

证明。设 $(\mathcal{H},\mathcal{A})$ 是一个 G-对，并设 $\psi_0\colon X\to\mathcal{H}$ 是一个保次数映射。由于该对属于 $\mathscr{W}_G$(推论5)，且 $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ 是自由的，因此存在将 ψ_0 延拓为 G-分次代数同态 $\psi\colon \mathcal{F}\to\mathcal{A}$,¯，其限制为李代数同态 $\psi\colon \mathcal{L}\to\mathcal{H}$。特别地，$\psi$ 限制为从 $\mathcal{L}(X)$ 到 $\to\mathcal{H}$ 的李代数同态。每个 G-分次李代数都可以看作由其自身及其 G-分次泛包络¯代数构成的对，因此我们得到 $\mathcal{L}(X)$ 是一个自由的 G-分次李代数。现在 ψ 唯一延拓为同态 $U_G(\mathcal{L}(X))\to\mathcal{A}$。因此，$(\mathcal{L}(X)\ U_G(\mathcal{L}(X)))$ 是 $\mathscr{W}_G$ 中的自由对，并且由 X 自由生成。□

作为命题 19 和命题 20 的推论，我们得到自由 G分次李代数的另一种描述，以及它与簇 $\mathscr{W}_G$ 中自由 G对之间的关系。这是维特定理的一个分次版本（关于经典情形，参见例如 [1, 定理 1.3。5] 或 [6, 定理 V。7] ）。

推论 21. 设 $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ 是簇 $\mathscr{W}_G$ 中由 X 自由生成的自由对。那么， $\mathcal{L}$ 与由 X 生成的李代数 $\mathcal{L}(X)$ 重合，并且它是由 X 自由生成的自由 G分次李代数，且 $\mathcal{F}=U_G(\mathcal{L})$。□

6.2. 强维特定理。现在，我们得到维特定理的一个完整的分次版本。设 $\mathbb{F}_G(X_G)$ 是簇 $\mathscr{V}_G$ 中相对自由的 G分次结合代数，设 $\mathcal{L}(X_G)$ 是其由 X_G 生成的李子代数。那么我们有

定理 22。代数 $\mathcal{L}(X_G)$ 是一个自由的 G分次李代数，由 X_G 自由生成。此外，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}(X_G))=\mathbb{F}_G(X_G)$。

证明。令 $\mathcal{H}$ 为一个 G分次李代数，并令 $f_0\colon X_G\to\mathcal{H}$ 为一个保持次数的映射。现在，由于 $\mathcal{H}\subseteq\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$，映射 f_0 可延拓为一个 G分次代数同态 $f\colon \mathbb{F}_G(X_G)\to\mathrm{SU}_G(\mathcal{H})$。此类映射限制为一个 G分次李同态 $\mathcal{L}(X_G)\to\mathrm{Lie}(\mathcal{H})=\mathcal{H}$。因此， $\mathcal{L}(X_G)$ 是自由的，由 X_G 自由生成。

现在，设（$\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$）是一个强对，且 $f\colon \mathcal{L}(X_G)\to\mathcal{H}$ 是一个 G-分次李同态。于是， f 限制为一个分次映射 $X_G\to\mathcal{H}$，它允许¯延拓为一个 G-分次代数同态 $f\colon \mathbb{F}_G(X_G)\to\mathcal{A}$。由于¯ f 限制到 $\mathcal{L}(X_G)$ 上是一个 G-分次李同态，且 f 是映射 $X_G\to\mathcal{H}$ 的¯唯一延拓，我们得到 f¯的限制与 f 重合。这意味着， f是 f的延拓。因此，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}(X_G))=\mathbb{F}_G(X_G)$。□

结合推论 21 和定理 22，我们得到维特定理的分次版本的完整表述。我们总结这些结果，并回顾主要定义。

推论23。设 G 是一个群，并考虑以下 G-分次多项式

$$x_1^{(g)}x_2^{(h)}, \quad [g,h] \neq 1,\, g,h \in G. \tag{2}$$

设 $\mathscr{V}_G$ 为满足恒等式（2）的 G-分次结合代数构成的簇， $\mathscr{W}_G$ 为满足弱多项式恒等式（2）的 G-分次结合-李代数对构成的簇。设 X_G 为一组 G-分次变量，$\mathbb{F}_G(X_G)$为由 X_G自由生成的 $\mathscr{V}_G$中的相对自由代数，且$(\mathcal{L},\mathscr{F})$为由 X_G自由生成的 $\mathscr{W}_G$中的自由对。那么：

(i) 由 X_G生成的 $\mathbb{F}_G(X_G)$的李子代数 $\mathcal{L}_G(X_G)$是由 X_G自由生成的自由 G-分次李代数。此外，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L}_G(X_G)) = \mathbb{F}_G(X_G)$。(ii) 由 X_G 生成的 $\mathcal{F}$ 的李子代数与 $\mathcal{L}$重合，且它是由 X_G自由生成的自由 G-分次李代数。此外，$U_G(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$。□

7. A graded version of Ado's Theorem

本节中，我们假设特征$\mathbb{F} = 0$。

若 $\mathcal{L}$ 是一个 G分次李代数，则众所周知，其中心是一个分次理想。此外，Gordienko 的以下结果（Pagon、Repovˇs 和 Zaicev 也在 [7]中证明）很有用：

定理24（[4, 推论4.2和推论4.3]）。设 $\mathcal{L}$ 是域上特征零的有限维 G分次李代数，且$\mathcal{R}$是其可解根基。

(1) $\mathcal{L}$的幂零根和可解根基是分次理想。(2)（分次 Levi 分解）存在一个分次子代数 $\mathcal{L}_1$，使得 $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{R} = 0$ 且 $\mathcal{L} = \mathcal{R} + \mathcal{L}_1$。

我们将遵循 Ado 定理证明的经典非分次版本。其主要思路是找到一个有限余维的分次理想 $I \subseteq U_G$（$\mathcal{L}$），使得 $\mathcal{L} \cap I = 0$。

引理 25. 设 $\mathcal{L}$为一个 G-分次可解李代数， $\mathcal{R}$ 为其幂零根，且$I \subseteq U_G(\mathcal{L})$ 是一个有限余维分次理想。假设每个 $x \in \mathcal{R}$ 模 I 都是幂零的。则存在一个分次理想 $J \subseteq U_G(\mathcal{L})$，使得：

(1) $J \subseteq I$，(2) J 在 $U_G(\mathcal{L})$中具有有限余维，(3) 每个 $x \in \mathcal{R}$ 模 J都是幂零的，(4) 每个 $\mathcal{L}$的导子 D ，若可延拓到 $U_G(\mathcal{L})$，则满足$DJ \subseteq J$。

证明。令 I' 为 $U_G(\mathcal{L})$中由 I 和 $\mathcal{R}$生成的分次理想。于是$\mathcal{L}/\mathcal{L}\cap I \cong (\mathcal{L}+I)/I$是一个 G-分次李代数，而 I'/I是它的一个分次理想。由于 $\dim \mathcal{L}/\mathcal{L}\cap I < \infty$，且 I'/I 包含一组由幂零元素构成的基，因此 I'/I 是幂零的。于是存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$J := (I')^m \subseteq I.$$

显然， J 满足 (1)–(3)。另一方面，由于 $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$，已知对于 $\mathcal{L}$的任意导子 D，都有 $D\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$。因此， $DU_G(\mathcal{L}) \subseteq I'$。于是$DJ \subseteq J$。□

下面的引理很容易推出，为完整起见，我们给出其陈述。

引理 26. 设 $\mathcal{L}$ 为有限维的 G分次李代数。则，IDer($\mathcal{L}$)，即 $\mathcal{L}$的内导子集合，是一个 G分次李代数。□

引理 27. 设 $\mathcal{L}$ 为有限维的 G分次李代数，且 $\mathcal{H} \subseteq \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\mathcal{L}$ 是包含于 Der($\mathcal{L}$) 中的一个 G分次李代数。则由 $\mathcal{H}$ 和 IDer($\mathcal{L}$)生成的李子代数是一个 G分次李代数。

证明。由于 IDer($\mathcal{L}$) 是 Der($\mathcal{L}$) 的李理想，向量空间 $\mathcal{H}+\operatorname{IDer}(\mathcal{L})$ 是一个李代数。由于这两个空间都是分次的，它们的和也是一个分次子空间。由于 $\mathcal{H}$ 和 IDer($\mathcal{L}$) 中的每一个都是分次李子代数，只需证明以下性质即可：若 $D \in \mathcal{H}$ 和 $x \in \mathcal{L}$ 是齐次的，则 $[D,\operatorname{ad}\ x]$ 要么为 0，要么是次数为 $\deg_G D \deg_G x$ 的齐次元素。这是显然的，因为 $[D,\operatorname{ad}\ x] = \operatorname{ad}(D(x))$，而 $D(x)$ 要么为 0，要么 $\deg_G D(x) = \deg_G D \deg_G x$。□

引理 28. 设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{H}$ 是有限维 G分次李代数。设ρ: $\mathcal{H} \to \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\mathcal{L}$ 是一个李代数同态，同时也是一个 G分次线性映射。则 $\operatorname{Im}\rho$ 是一个 G分次李代数，且 ρ 是一个分次李同态。

证明。我们知道 $\operatorname{Im}\rho$ 是一个分次子空间。因此，只需证明：给定齐次 u、$v \in \operatorname{Im}\ \rho$，$[u,v] = 0$或 $[u,v]$必为次数为 h 的齐次元素：$= \deg_G u \deg_G v$。设 u_0、$v_0 \in \mathcal{H}$ 为齐次元素，且 $u = \rho(u_0)$和 $v = \rho(v_0)$。于是 $[u,v] = \rho[u_0,v_0]$，因此只需证明后者是一个次数为 h的分次线性映射。若$[\deg_g u$、$\deg_g v] \neq 1$，则 $[u_0,v_0] = 0$，无需进一步证明。否则，若 $x \in \mathcal{L}$ 为齐次元素，则 uvx 和 vux 都是次数为 $h\deg_G x$的齐次元素。因此，$[u,v]$是次数为 h的齐次元素。□

例6. 设 $G = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ 为由$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$自由生成的自由群。设 $\mathcal{L}$ 为三维阿贝尔李代数，并假设 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 $\mathcal{L}$的一组基。于是，对 $i = 1$、2、3，令$\deg_G x_i = \alpha_i$，我们在 $\mathcal{L}$上得到一个（李代数） G-分次。注意，内导子代数$\mathcal{L} = 0$，且Der $\mathcal{L} = \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\mathcal{L}$。然而，Der $\mathcal{L}$不是一个分次李代数。事实上，设$e_{ij} \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}\mathcal{L}$ 是由下式定义的映射：

$$e_{ij}x_\ell = \delta_{j\ell}x_i.$$

于是，e_{ij} 是一个次数为 $\alpha_i\alpha_j^{-1}$的齐次映射。一方面，$e_{12}e_{23} = e_{13} \neq 0$。另一方面，$[\deg_G e_{12}, \deg_G e_{23}] \neq 1$。因此，根据引理4，不可能在Der $\mathcal{L}$上赋予一种由交换子给出的分次李代数结构。

注意，Der $\mathcal{L}$ 包含多个关于交换子的 G-分次李代数。例如，若 $1 \leq i < j \leq 3$，则 Span$\{e_{ii}, e_{ij}, e_{ji}, e_{jj}\}$是一个 G-分次李代数。

下面的命题是证明本节主要结果的关键步骤。

命题29. 设 $\mathcal{L} = \mathcal{R} + \mathcal{L}_1$ 是有限维的 G-分次李代数，其中 $\mathcal{R}$ 是分次可解理想，且 $\mathcal{L}_1$ 是分次子代数。假设 $J \subseteq U_G(\mathcal{R})$是满足引理 25 的 (ii)–(iv) 条件的分次理想。那么存在一个分次理想 $J' \subseteq U_G(\mathcal{L})$，使得

(i) $\mathcal{R} \cap J' \subseteq \mathcal{R} \cap J$；(ii) 若 $x \in \mathfrak{n}(\mathcal{R})$且 $y \in \mathcal{L}_1$ 满足 $\mathrm{ad}_{\mathcal{R}}\, y$ 是幂零的，则 $x + y$ 模 J'后是幂零的。

证明。考虑映射

$$\mathrm{IDer}\,\mathcal{L} \to \mathrm{Der}(\mathcal{R}/\mathcal{R} \cap J),$$

该映射由内导子限制到 $\mathcal{R}$ 后，再与商上的诱导映射复合得到。由于 $\mathcal{R} \cap J$ 是 $\mathcal{R}$ 的理想，该映射是良定义的。由于 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{L}$ 的分次理想，因此该映射是分次的。于是，根据引理 28，其像是一个 G-分次李代数，记为 $\mathcal{H}$。现在考虑复合映射

$$\rho\colon \mathcal{L} \to \mathrm{IDer}\,\mathcal{L} \to \mathcal{H}.$$

因此，ρ 是李代数的 G-分次同态，并且它有一个延拓 $\bar{\rho}\colon U_G(\mathcal{L}) \to U_G(\mathcal{H})$。令 $J' = \mathrm{Ker}\ \bar{\rho} \cap \langle J \rangle$，其中 $\langle J \rangle = U_G(\mathcal{L})JU_G(\mathcal{L})$。注意，根据构造，$\mathcal{R} \cap J' \subseteq \mathcal{R} \cap J$。此外，如果 $y \in \mathcal{L}_1$ 满足 $\mathrm{ad}_{\mathcal{R}}\, y$ 是幂零的，那么根据构造，$\bar{\rho}(y)$ 也是幂零的。因此，y 模 J' 是幂零的。□

现在我们开始证明主要结果。我们将证明分为几个步骤。

引理 30. 设 $\mathfrak{z}$ 是一个有限维的 G-分次阿贝尔李代数。则存在一个有限余维分次理想 $I \subseteq U_G(\mathfrak{z})$，使得

(i) $I \cap \mathfrak{z} = 0$，且 (ii) 每个 $x \in \mathfrak{z}$ 模 I 均为幂零。

证明。由于 $\mathfrak{z}$具有零乘积，它也是具有平凡乘法的结合代数。因此，$(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ 是一对。于是，恒等映射 $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}$ 可延拓为 $\rho\colon U_G(\mathfrak{z}) \to \mathfrak{z}$。令 $I =$为 Ker ρ。由于 $\dim \mathfrak{z} < \infty$，因此 I具有有限余维。由于 ρ 是分次同态，I 也是分次理想。由于 ρ在 $\mathfrak{z}$中是 1–1 的，我们得到 $I \cap \mathfrak{z} = 0$。最后，一旦 $\mathfrak{z}$具有平凡乘法，

$$\rho(U_G(\mathfrak{z})^2) \subseteq \mathfrak{z}^2 = 0.$$

特别地， $\mathfrak{z}^2 \subseteq I$。 □

引理31. 设 $\mathfrak{n}$ 是一个有限维 G 分次幂零李代数，且 $\mathfrak{z}$ 是其中心。则存在一个有限余维的分次理想 $I \subseteq U_G(\mathfrak{z})$，使得

（i） $I \cap \mathfrak{z} = 0$，且（ii）每个 $x \in \mathfrak{n}$ 模 I 都是幂零的。

证明。考虑链

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{n}_0 \subseteq \mathfrak{n}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{n}_t = \mathfrak{n},$$

其中每个 $\mathfrak{n}_i$ 都是分次理想，且 $\dim \mathfrak{n}_i = i + \dim \mathfrak{z}$。我们将对 i 进行归纳以证明结论。若 $i = 0$，则可应用引理30。因此，对某个 $0 \leq i < i$，设 $I_i \subseteq U_G(\mathfrak{n}_i)$ 是满足（i）的分次理想，并且每个 $x \in \mathfrak{n}_i$ 模 I_i 都是幂零的。记作 $\mathfrak{n}_{i+1} = \mathfrak{n}_i + \mathcal{L}_i$，其中 $\mathcal{L}_i$ 是一个分次李代数。根据命题29，存在一个满足（ii）的分次理想 $I_{i+1} \subseteq U_G(\mathfrak{n}_{i+1})$，且 $I_{i+1} \cap \mathfrak{z}_i \subseteq I_i \cap \mathfrak{z}_i$。于是，

$$I_{i+1} \cap \mathfrak{z} = I_{i+1} \cap \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_i \subseteq I_i \cap \mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{z} = 0.$$

因此， I_{i+1} 也满足（i）。 □

引理32. 设 $\mathcal{R}$ 是有限维 G分次可解李代数，$\mathfrak{n}$ 是其幂零根， $\mathfrak{z}$ 是其中心。则存在一个有限余维的分次理想 $I \subseteq U_G(\mathcal{R})$，使得

（i） $I \cap \mathfrak{z} = 0$，且（ii）每个 $x \in \mathfrak{n}$ 模 I均为幂零的。

证明。考虑分次子代数链

$$\mathfrak{n} = \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_s = \mathcal{R},$$

其中 $\mathcal{R}_i$是 $\mathcal{R}_{i+1}$的理想，且 $\dim \mathcal{R}_i = i + \dim \mathfrak{n}$。那么，已知每个 $\mathcal{R}_i$ 的幂零根都是 $\mathfrak{n}$。我们可以对 i进行归纳，其中 $i = 0$ 的情形由引理31保证成立。然后，我们可以重复前一个引理证明中给出的论证。□

推论33. 设 $\mathcal{L}$是有限维 G分次李代数， $\mathfrak{z}$ 是其中心。则存在一个有限余维的分次理想 $I \subseteq U_G(\mathcal{L})$，使得 $I \cap \mathfrak{z} = 0$。

证明。只需结合分次 Levi 分解（定理24）、引理32和命题29。□

现在，我们可以证明本节的主要结果了。

定理34. 设 $\mathcal{L}$ 是域为特征零域上的有限维 G分次李代数，其中 G是不一定阿贝尔群。则存在有限维 G分次结合代数 $\mathcal{A}$，使得（$\mathcal{L}, \mathcal{A}$）是一个 G对。换言之， $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个分次向量子空间，并且关于 $\mathcal{A}$的交换子，$\mathcal{L}$ 是一个 G分次李代数。

证明。只需找到一个有限余维的分次理想 $I \subseteq U_G(\mathcal{L})$，使得 $I \cap \mathcal{L} = 0$。若 I 是这样的理想，则 $\mathcal{A} = U_G(\mathcal{L})/I$ 是一个有限维 G分次结合代数，而自然的分次线性映射$\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ 以 $\mathcal{L} \cap I = 0$ 为其核。因此，$(\mathcal{L}, \mathcal{A})$是一个对。

考虑伴随映射 $\mathcal{L} \to$ 内导子代数 $\mathcal{L}$及其延拓 $U_G(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$。令 I_1 为后一个映射的核。已知$I_1 \cap \mathcal{L} = \mathfrak{z}$是 $\mathcal{L}$的中心。由于 $\dim \mathrm{End}_{\mathbb{F}} \mathcal{L} < \infty$, 我们看到 I_1 具有有限余维。令 I_2 为推论33中的理想，并令 $I = I_1 \cap I_2$。那么，根据构造， I 是一个有限余维分次理想。此外,

$$I \cap \mathcal{L} = (I_1 \cap \mathcal{L}) \cap I_2 = \mathfrak{z} \cap I_2 = 0.$$

证明完毕。 □

注。我们无法保证存在一个强对（$\mathcal{L}$， $\mathcal{A}$），使得 $\mathcal{A}$ 是有限维的。这是因为我们无法保证（内导子代数 $\mathcal{L}$，$\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$）是一个强对。

8. Group gradings on Lie algebras

以下问题由 I. Shestakov 提出：李代数上的任意 G-分次是否都等价于某个阿贝尔群分次? 我们将利用所构造的对象对这一问题给出部分答案。为此，我们需要若干技术引理。

首先，我们需要一个表现得类似于从自由阿贝尔群到任意群的同态的映射。这一构造有助于找出阿贝尔分次与 G-分次之间的等价关系，其中 G 不一定是阿贝尔群。

引理 35. 设 G是一个群， g_1、……、 $g_m \in G$ 以及 $Z = \langle a_1$、……、 $a_m \mid [a_i, a_j] = 1$、 $\forall i$、 $j\rangle$是秩为 m 的自由阿贝尔群。令

$$S = \{a_{i_1} \cdots a_{i_r} \in Z \mid \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}\} \ g.a.s. \ \}.$$

则存在良定义映射 α： $S \to G$，使得

$$\alpha(a_{i_1} \cdots a_{i_r}) = g_{i_1} \cdots g_{i_r}.$$

证明。令

$$\mathscr{F} = \{\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, m\} \mid \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}\} \text{ g.a.s. } \}.$$

若 S_1、 $S_2 \in \mathscr{F}$，则 $S_1 \cap S_2 \in \mathscr{F}$。对每个 $S_0 = \{i_1, \ldots, i_r\} \in \mathscr{F}$，令 $G_{S_0} = \langle g_{i_1}$、 $\ldots g_{i_r}\rangle \subseteq G$和 $Z_{S_0} = \langle a_{i_1}$，……， $a_{i_r}\rangle$。则 Z_{S_0}是秩为 r的自由阿贝尔群，而 G_{S_0} 是 G的阿贝尔子群。因此存在良定义的群同态 α_{S_0}： $Z_{S_0} \to G_{S_0}$，使得对每个$i_j \in S_0$，都有 $a_{i_j} \mapsto g_{i_j}$。注意， $S \subseteq \bigcup_{S_0 \in \mathscr{F}} Z_{S_0}$。现在对每个 $s \in S$，令 $s \in S_0 \in \mathscr{F}$，并设

$$\alpha(s) = \alpha_{S_0}(s).$$

若 $s \in S_1 \cap S_2$，则由于这些映射由它们在生成元上的取值唯一确定，我们有

$$\alpha_{S_1}(s) = \alpha_{S_1 \cap S_2}(s) = \alpha_{S_2}(s).$$

因此 α 是良定义的。 □

我们再次考虑第 4 节中定义的簇 $\mathscr{V}_G$，即满足恒等式的 G-分次结合代数簇

$$x_1^{(g)} x_2^{(h)} = 0, \quad [g,h] \neq 1,\ g,h \in G.$$

设 $\mathcal{L}$ 是一个 G-分次李代数，$\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in N\}$ 是一个齐次向量空间基。令 $X_{\mathcal{B}} = \{x^{(g_i)}{}_i \mid i \in N, g_i = \deg_G e_i\}$。假设 $\{g_i \mid i \in N\}$ 具有 m 个元素，并将其记为 $\{g_1, \ldots, g_m\}$。令 $Z = \langle a_1、\ \ldots、\ a_m \mid [a_i, a_j] = 1、\forall i、\ j\rangle$ 为秩为 m 的自由阿贝尔群。我们考虑变量 $X_Z = \{x^{(z_j)}{}_i \mid \deg e_i = g_j, i \in N\}$，即将变量 $X_{\mathcal{B}}$ “提升”为 Z-分次变量。令 $\mathbb{F}\langle X_Z\rangle$ 为自由结合代数Z-分次代数，由 X_Z 自由生成；令 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 为 $\mathscr{V}_G$ 中的相对自由代数，由 $X_{\mathcal{B}}$自由生成。我们有一个代数满同态ψ：$\mathbb{F}\langle X_Z\rangle \to \mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$，其中 $\psi(x^{(z_j)}{}_i) = x^{(g_j)}{}_i$，对每个 $i \in N$ 均成立。根据引理 35，令

$$S = \{z_{i_1} \cdots z_{i_r} \in Z \mid \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}\} \text{ g.a.s. }\},$$

并令 α: $S \to G$ 由下式定义

$$\alpha(z_{i_1} \cdots z_{i_r}) = g_{i_1} \cdots g_{i_r}.$$

命题36。映射 ψ 是 α-分次的，即

$$\psi\left(\mathbb{F}\langle X_Z\rangle\right)_z \subseteq \left(\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{L}})\right)_{\alpha(z)}, \quad \forall z \in S,$$

且对 $z \in Z \setminus S$，$\psi\left(\mathbb{F}\langle X_Z\rangle\right)_z = 0$。

证明。令 $m = x^{(z_{i_1})}{}_{i_1} \cdots x^{(z_{i_r})}{}_{i_r} \in \mathbb{F}\langle X_Z\rangle$。只需证明 $\psi(m) = 0$或 $\psi(m)$ 是 $\alpha(z_{i_1}) \cdots \alpha(z_{i_r})$ 的齐次元素，且其在 G-分次下的次数为 $\alpha(z_{i_1}) \cdots \alpha(z_{i_r})$。证明对 r 进行归纳，显然的基例为 $r = 1$。令 $m_0 = x^{(z_{i_1})}{}_{i_1} \cdots x^{(z_{i_{r-1}})}{}_{i_{r-1}}$。若 $\psi(m_0) = 0$，则无需证明。否则，子集 $\{\alpha(z_{i_1}) \ldots, \alpha(z_{i_{r-1}})\}$ 生成一个阿贝尔群。若对于某个 j，

$$[\alpha(z_{i_j})\alpha(z_{i_{j+1}}) \cdots \alpha(z_{i_{r-1}}), \alpha(z_{i_r})] \neq 1,$$

则 $\psi(m) = 0$。否则，$\{\alpha(z_{i_1}) \ldots, \alpha(z_{i_{r-1}})\ \alpha(z_{i_r})\}$ 也生成一个阿贝尔子群。因此，要么 $\psi(m) = 0$，要么 $\deg_G \psi(m) = \alpha(\deg_Z m)$。□

推论 37。 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 的分次是由相应的普适阿贝尔分次群实现的分次的粗化。

证明。由命题36可知，在$\mathbb{F}_F(X_Z)$上存在一个细阿贝尔分次（由 $\mathbb{F}\langle X_Z\rangle$取商得到），它是 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$的细化。□

我们目前还不知道下面命题的证明。

猜想38。设 Γ是李代数上的一个群分次，由一个阿贝尔分次粗化而来。那么 Γ 是阿贝尔的。

例7。猜想38在李代数以外的其他情形下是错误的。事实上，我们知道，在任意矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$上，都存在唯一的细初等分次（在等价意义下），并且它可以由一个阿贝尔群实现（例如参见 [2, 命题2.31]）。因此，矩阵代数上的任意初等分次都是某个阿贝尔分次的粗化。另一方面，不难看出，有限维代数上的阿贝尔分次等价于有限群分次（另见 [5, 命题4.11]）。在 [5, 推论5.6], 中证明了，矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$上存在一个初等分次 Γ，无法由有限群实现。因此， Γ 无法由阿贝尔群实现，而它是某个阿贝尔分次的粗化。

综合这些结果（推论 37 和猜想 38），我们得到以下引理。

引理 39. 设 $\mathcal{L}$ 是一个 G-分次李代数。那么，如果猜想 38 成立，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 上的分次等价于一个阿贝尔分次。

证明. 由推论 37 和猜想 38，我们得到 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})$ 上的分次等价于一个阿贝尔分次。现在，对于理想 $J_{\mathcal{B}}$ 及其商 $\mathbb{F}_G(X_{\mathcal{B}})/J_{\mathcal{B}} \cong \mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$，该等价性仍然成立。□

因此，我们得到本节的主要结果。

定理 40. 如果猜想 38 成立，那么李代数上的每个 G-分次都等价于一个阿贝尔分次。

证明. 设 $\mathcal{L}$ 是一个 G-分次代数。根据构造（定理 12）， $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 的分次子代数。由引理 39，$\mathrm{SU}_G(\mathcal{L})$ 上的分次等价于一个阿贝尔分次。因此， $\mathcal{L}$ 上的分次也等价于一个阿贝尔分次。□

我们总结本节的结果。我们得到了以下两个问题的等价性。

推论 41。以下断言等价。

（1）李代数上的每个群分次都等价于一个阿贝尔群分次。（2）李代数上的阿贝尔群分次的每个粗化都等价于一个阿贝尔群分次。

证明。显然，（1）蕴含（2）。现在，假设（2）成立，则定理40证明了（1）。□

Acknowledgements

我们感谢 Ivan Shestakov教授、Plamen Koshlukov、Lucia Ikemoto 和 Mikhail Kochetov 的有益讨论与鼓励。

References

[1] V. Drensky, 《自由代数与PI代数》。代数研究生课程，Springer-Verlag Singapore，新加坡，2000年。[2] A. Elduque，M. Kochetov， *Gradings on simple Lie algebras*，《Mathematical Surveys and Monographs》，189，美国数学学会（2013年）。[3] A. Gordienko， *Amitsur's conjecture for polynomial H-identities of H-module Lie algebras* **367** 2015 313 354 ，《Transactions of the American Mathematical Society》（），–。[4] A. Gordienko， *Co-stability of radicals and its applications to PI-theory*，《Algebra Colloquium》23（2016年），481–492。[5] A. Gordienko，O. Schnabel， *On weak equivalences of gradings*，《Journal of Algebra》501（2018年），435–457。[6] N. Jacobson， *Lie algebras*。1962年原版再版。Dover Publications, Inc.，纽约，1979年。[7] D. Pagon，D. Repovˇs，M. Zaicev， *Group gradings on finite dimensional Lie algebras*，《Algebra Colloquium》20（2013年），573–578。

Department of Mathematics, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, SP, Brazil*Email address*: fyyasumura@ime.usp.br