arXiv:2301.12070v1 [math.LO] 28 Jan 2023

经典元理论中的赖特的严格有限主义逻辑：命题情形

山田隆宏

哲学与宗教研究系，乌得勒支大学，扬斯克霍夫13号，乌得勒支，3512 BL，荷兰。

通讯作者。电子邮箱：
g.yamadatakahiro@gmail.com；

摘要

克里斯平·赖特在其1982年的论文中主张严格有限主义，这是一种比直觉主义更具限制性的构造性立场。在附录中，他提出了严格有限主义算术的模型。这些模型是树状结构，在他的严格有限主义元理论中构造而成，其基础是数词之间的等式，并据此对具体算术句进行评估。作为严格有限主义经典形式化的第一步，我们在经典元理论中加入一个额外假设，提出这些模型的对应物；随后从中提取“严格有限主义逻辑”的命题部分并加以研究。我们将给出一对关于克里普克式语义和序列演算的可靠且完备的系统，并将其与其他逻辑进行比较。该逻辑不具备排中律和肯定前件式，弱于经典逻辑，但就定理性而言强于任何真正的中间逻辑。事实上，其他所有著名的经典定理都被证明是其中的定理。最后，我们将指出，这种语义的模型可以被视为一个直觉主义模型中的节点。

关键词：严格有限主义、克里斯平·赖特、构造主义、有限主义、经典重构

2 Wright 的严格有限主义命题逻辑

1 引言

1.1 目标

本文提出并探讨 Wright 所说的“严格有限主义逻辑”的命题部分。这一部分是在一项我们称为“原子普遍性条件”的附加假设下，通过其严格有限主义算术模型的经典对应物得到的。“严格有限主义”是一种数学观，认为一个对象，尤其是一个数，当且仅当它在实践中可构造时才予以承认；一个陈述当且仅当它在实践中可验证时才成立。它是构造主义的，因为它基于我们的认知能力来接受数和陈述；它比直觉主义更具限制性，因为它用“在实践中”这一概念取代了直觉主义的“原则上”。严格有限主义是有限主义的，因为由此可见，它否认存在无穷多个自然数这一观点。严格有限主义逻辑旨在成为一个关于实际可构造对象的逻辑推理抽象体系，并以实际可验证性为基础。

在文献来源中，Wright 的著作1982 [7], 对我们而言最具哲学启发性，似乎也包含了最丰富的形式逻辑内容。尽管 [7] 是对 Dummett 批评 [2]严格有限主义的哲学反驳，但其附录提出了严格有限主义算术模型[1]。Wright 概述了“一阶算术严格有限主义语义学纲要” [7, 第167], 页，并描述了一些概念，与直觉主义克里普克语义学中的模型和强迫条件颇为相似。“严格有限主义树”是严格有限主义算术的一个模型，它表示普通主体在算术发展过程中实际上可能经历的历史。每个节点代表一个构造阶段，并被赋予主体实际构造并学会的数词（例如 $\overline{0}+\overline{0}$）和算术真理（例如方程 $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$）。“验证条件” [7, 第169] 页规定了一阶算术语言中的哪些公式在某个节点上受到强迫，依据的是作为原子的已赋予真理。

我们关注的是，根据 Wright 的语义，什么样的句子是有效的，即在每棵严格有限主义树的每个节点上都被迫成立的句子。尽管已有一定数量的研究涉及对严格有限主义数结构的阐释[2], ，我们希望通过自己的研究，能够踏上一条理解严格有限主义推理的道路。

1.2 方法

Wright 在其严格有限主义元理论中引入了这些树和条件。这会造成一些问题。首先，这阻碍了进一步的数学研究。严格有限主义拒绝数学归纳法和排中律，而这两者是在经典元理论中允许使用的元层次原则。其次，严格有限主义树应如何解释并不清楚。它们

[1]我们必须注意到， [8] 是 Dummett 和 Wright 的严格有限主义的重要先驱。[2]例如，参见[4, 第 474-5] 页和 [1, 第 314-5]页。

是“足够小、实际可构造”的结构。但这一概念在经典意义下可能导致不一致。至少以下条件应当成立[3]。

(i) 0 是一个实际可构造的数词。(ii) 如果一个数词实际可构造，那么它的所有直接后继也都实际可构造。(iii) 存在一个并非实际可构造的数词。

因此，严格有限主义树的某些路径不能被视为与 $\mathbb{N}$ 的初始段同构，因为这些条件会导致矛盾。事实上，这些是严格有限主义的常见假设，也是形式化它之所以困难的主要原因。

基于这些考量，我们将采用经典元理论进行研究，并考虑带有某些约束的经典结构作为严格有限主义树的对应物，而不是试图将其呈现出来。我们的“算术模型”将是赋予算术句子（不含变量）的直觉主义克里普克框架。在对这些模型进行研究之后，我们将定义并探讨一种抽象的、克里普克风格的“严格有限主义语义”，以图式化的方式刻画其中的有效性。该系统中的模型，即“严格有限主义模型”，处理由变量构成的公式，这些变量可通过代换代表具体句子。我们将施加同类约束，并由此保留所有语义性质。随后，我们将定义一种序列演算，并证明它相对于严格有限主义语义是可靠且完备的。

我们将保留 Wright 的强制条件。他的否定条件（以及蕴涵条件，见第 1.3 节）将影响我们对强迫关系的解释。我们用 $k \models A$ 表示句子或公式 A 在树状结构中的节点 k 上成立。条件为 $k \models \neg A$ 当且仅当 $l \not\models A$ 对任意节点 l 均成立。因此，严格有限主义的否定表示实践上不可验证性。此外，它是“全局的”：如果 $\neg A$ 在结构中的某处成立，那么它就在所有地方成立。因此，A 的 $k \models \neg A$ 可能涉及主体尚未构造的表达式，因此 $k \models \neg A$ 可能并不代表主体在步骤 k 时的判断。更稳妥的解释是，$k \models A$ 在 k 时代表主体的知识，前提是 A 是原子的；否则（或者在所有情况下），它只呈现了作为经典思维的模型构造者的我们的判断。[4]

我们假设我们的算术模型满足以下“有限主义”约束。

(i) 框架是有限的。

[3]我们将简要讨论第四个条件，并说明它如何在我们的系统中实现，即命题 2.5。[4]我们感谢一位匿名审稿人的建议：因此，有人或许会说，本文的逻辑是关于实践可构造性的判断逻辑，而非严格有限主义推理本身的逻辑。这确实是一种合理的反应，我们也同意情况可能如此。真正的“严格有限主义推理逻辑”或许应当刻画普通主体对自身实践可构造性的判断。它可能就是 Wright 在严格有限主义元理论中的原始语义。这是一种模型论方法，用来理解普通主体的断言，例如某个陈述对其自身而言不可验证。那里的模型本身就是严格有限主义的，因为它们必须满足诸如“足够小”之类的要求。我们希望，本文通过提供其经典对应物，有助于我们这些经典思考者理解这种语义。

(ii) 每个节点至多迫使有限多个原子句子（有限验证条件）。

每个模型代表主体实际构造和验证的全部可能性中的一种集合。根据 (i)，我们的模型是有限的，但其中确实包括一些“不够小”的模型。我们将它们视为经典理想化的一部分，并希望从图式角度来看时，有效句子的总体不会受到影响。

我们将假设一个辅助条件。若对于某个 k，句子 A 在算术模型中是“可断言的”，则称之为可断言的。若句子 B，则称之为“普遍的”。

- 对于任意节点 k，都存在一个 $k' \geq k$ 使得 $k' \models B$，其中 $\leq$ 是结构[5]上的偏序。

可断言性是较弱意义上的实践可验证性，而普遍性更强，因为 A 在某种情形下得到验证，而 B 最终会在任何情形下得到验证。若算术模型中的所有可断言原子句子都是普遍的，则该模型具有“原子普遍性”。本文始终只考虑具有这一性质的模型。这是一个很强的假设，会使这两个概念合而为一；事实上，Wright 指出，我们通常不能假设这一点，见第168-9]页。无法保证在一种历史中发现的真理也能在其他每一种历史中发现，因为随着构造的继续，主体的构造能力会减弱。某个真理可能需要极其强大的能力，以至于主体在获得其他一些真理后便无法发现它。不过，为了让研究切实可行，我们将限制讨论范围。我们将在结束语中谈及这一问题。

我们还将仅把一种结构用作工具 S_∞，其 ω-序列作为分支。我们的算术模型将定义为 S_∞的有限部分。当然，它并不满足“有限主义”的约束。不过，它似乎是这些模型的一种自然扩展，具有原子普遍性，而且不会影响有效句子的总体范围（命题2.10）。

1.3 特征（i）：严格有限主义蕴涵

严格有限主义蕴涵 $A \to B$ 意味着，在 A 之后， B 迟早成立。我们将 Wright 的条件翻译为： $k \models A \to B$ 当且仅当对于任意节点 $k' \geq k$，若$k' \models A$，则存在某个节点 $k'' \geq k'$使得 $k'' \models B$ 成立。这是直觉主义蕴涵的一种变体，允许 A 与 B之间存在时间间隔。在我们看来，Wright 并未限制这个间隔，因为每棵严格有限主义树都被认为足够小。作为经典理想化的一部分，我们接受任意有限间隔（参见结束语）。[6]

我们的蕴涵将原子普遍性推广到所有复合句子（命题2.4）。根据普遍性，一个可断言的原子句子描述了可预见的未来领域中的一个事实，形象地说，它是一个

[5]“可断言性”是 Wright 的术语 [7, p.170], 而“普遍性”是我们的术语。[6]按照 BHK解释的思路， $A \to B$ 可能意味着存在一种方法，能够在“足够小”的步数内，将对 A 的任意验证转化为对 B 的验证。这是一种尊重转化时间尺度的直觉主义蕴涵。

由事实杂乱无章地组成的“糖果箱”，无论验证顺序如何。蕴涵的条件符合这一想法： $A \to B$ 意味着，如果 A 将来成立，那么 B也成立，不论哪一个先发生。因此，一般而言，可断言性与普遍性等价，并且同样代表实践可验证性。

这种“无序真理”的想法或许会让人联想到经典逻辑。事实上，可断言性可以像经典真值一样计算（命题 2.5），而所有严格有限主义模型中的可断言性都与经典命题逻辑 **CPC** 中的可证明性一致（推论2.24）[7]。因此，大多数经典重言式（以及推理规则）都被判定为有效（命题 2.5、2.26）。例外是排中律和肯定前件式（命题 2.6）。

借助广义普遍性，我们可以恰当地将 $\neg A$ 视为$A \to \bot$的缩写，其中 $\bot$ 表示一条在实践中无法验证的陈述。形式上，普遍性性质意味着 $k \models A \to \bot$ 当且仅当 $l \not\models A$ 对所有 l （参见命题2.4）。从概念上说， $A \to \bot$ 与 $\neg A$ 也一致。 $A \to \bot$ 意为：如果 A最终成立，那么 $\bot$也成立。由于后件不可能成立，这意味着 A 不会最终成立，也就是说，在实践中无法验证。

1.4 特征（二）：与直觉主义的关系

有人将以下观点视为严格有限主义与直觉主义之间的概念关联：

- 一条陈述原则上可验证，当且仅当它借助实践资源的某个有限扩展，在实践中可验证[8]。

我们将证明一些结果，它们似乎将这一认同方案形式化。具有有限框架的严格有限主义模型，按照实践验证能力由低到高排列，可以看作直觉主义模型的节点，反之亦然。我们将用“世代”的概念将这一顺序形式化。设$\mathcal{U}$ 为严格有限主义有限模型的集合。那么，集合 A_W 中可断言的变量决定了 $W \in \mathcal{U}$ 的可断言性，进而决定 W中每个公式在实践中是否可验证。若 W是另一个模型 W'的初始部分，且 $A_W \subseteq A_{W'}$，我们记作 $W \preceq W'$。那么 $W \preceq W'$表示 W'与 W代表同一主体，但具有更多验证资源，通常来自较晚的世代。

我们将 $G := \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle$ 称为“代结构”（“g-结构”）。这是一个直觉主义框架，其节点是严格有限主义有限模型，从而可作为一种框架，用以表达能力不断增强的实践可验证性。在这里，自然地诱导出关于 G 的两种评价：一种是直觉主义的，另一种则遵循严格有限主义的风格。由于 A_W 总结了 W 作为 G的一个节点时的实践可验证性，我们通过 $W \in v(p)$ 当且仅当 $p \in A_W$来定义赋值 v 。然后， v 定义了一个直觉主义强制关系 $\Vdash$。此外，还在一个 $W \in \mathcal{U}$ 与一个

[7]这符合严格有限主义者会坚持的观点：只有实践上可验证的陈述，而且是所有实践上可验证的陈述，才适当地受经典逻辑支配。参见例如 [7, p.115]。[8]Wright 沿着这一思路提出了一种“原则上的可判定性”认同方案 [7, p.113]。此外，[6, p.147] 和 [5, p.278] 也假设存在这种关系。

6 Wright 的严格有限主义命题逻辑

W 的节点和公式，基例采用每个 $W \in \mathcal{U}$ 中的赋值。蕴涵的定义将确保每个 W 在其下封闭：

- $W, k \Vdash A \to B$ 当且仅当对于任意 $W' \succeq W$ 以及 W' 中的节点 k'，若 $k' \geq k$ 且 W'，$k' \Vdash A$，则存在某个 W' 中的 k''，使得 $k'' \geq k'$ 且 W'，$k'' \Vdash B$。

W，$k \Vdash A \to B$ 无论能力如何增长，B 都会在 A “不久之后”、同一代内出现；因此，$\Vdash$ 如此定义的严格有限主义强迫关系考虑了能力的增长。按照 $\Vdash$，有效性意味着在所有配对上都被强迫。我们将证明，满足有限验证条件的直觉主义模型会导出一个 g-结构；并且导出的评价 $\Vdash$ 和 $\vdash$ 始终相对应（命题2.30、2.31）。此外，我们将证明，所有 g-结构中的有效性与直觉主义命题逻辑**IPC** 中的可证明性相一致（命题2.32）。

这些结果或许能够形式化上述概念关系。原则上可验证的任何陈述，都能在实践中通过有限步并借助某种能力扩展得到验证；而原则上可验证的陈述全体，与借助能力扩展后在实践中可验证的陈述全体相一致。

1.5 论文结构与比较结果

在第2.1节中，我们定义两种语言 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$。在2.2节中，我们定义 S_∞ 关于 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ 的内容，并通过 S_∞定义我们的算术模型；同时探讨它们的语义性质。在这一语境下，公式是具体的句子。为以图式方式刻画有效性，我们将在2.3 节中使用 $\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$ 这一带有变量的标准命题逻辑语言，来定义和研究严格有限主义语义。在2.4节中，我们定义序列演算严格有限主义逻辑，并证明它相对于严格有限主义语义是可靠且完备的。我们的完备性证明采用通常的 Henkin式方法。

在第2.5 节中，我们将与中间逻辑进行比较。除了上文提到的关系外，我们还将证明，我们的逻辑弱于**CPC**，但强于任何真中间逻辑——在此语境下，我们将每个逻辑视为其定理集，并以**SF** 表示严格有限主义逻辑。中间逻辑是通过将**CPC**的定理加入**IPC**，并在肯定前件式和公式代换下取闭包而得到的。所得逻辑若不是**CPC**，则称为“真”中间逻辑。众所周知，中间逻辑在集合包含关系下构成一个格，其最大元和最小元分别为**CPC** 和**IPC**。 **CPC** 有唯一的直接前驱，称为“此处与彼处逻辑”**HT**，其特征是由仅有两个节点（“此处”和“彼处”）的直觉主义模型构成的类[9]。我们将证明**HT** $\subsetneq$ **SF** $\subsetneq$ **CPC** （推论2.24，命题2.26） [10]。接下来，我们将探讨如何将严格有限主义模型视为直觉主义模型的节点；最后，在第3节中作一些评论。

[9]它由 $A \vee (A \to B) \vee \neg B$ 公理化；也称为哥德尔三值逻辑和斯梅塔尼奇逻辑。关于 HT 的现代论述及应用，参见例如 [3]。[10]严格有限主义逻辑本身并非中间逻辑，因为它不具备肯定前件式。

2 严格有限主义命题逻辑

2.1 语言

我们使用两种语言， $\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$。 $\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$ 是严格有限主义逻辑的语言。它是一种标准的命题逻辑语言：Var 是可数变量集，我们将 $\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$ 中所有公式构成的集合 Form 定义为

• 公式集 ::= $\bot$ | Var | 公式集 $\wedge$ 公式集 | 公式集 $\vee$ 公式集 | 公式集 $\rightarrow$ 公式集。

我们使用 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ 来描述我们的严格有限主义算术模型。这是一种不含变量的无量词算术语言。我们通过数的表达式来处理数，而这些表达式是 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$中的项。我们沿用 Wright [7,第167] “自然数指称表达式”（或“NDE”）[11]这一称谓。

- $\mathrm{NDE} ::= \overline{0} \mid S(\mathrm{NDE}) \mid \mathrm{NDE} + \mathrm{NDE} \mid \mathrm{NDE} \cdot \mathrm{NDE}.$

算术命题由 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ 中的公式集表达。原子是$\bot$ 以及 NDE 之间的“方程”。我们令 $=$ 为唯一的谓词符号，并令 $\mathrm{Eq} = \{x = y \mid x, y \in \mathrm{NDE}\}$。 $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ 中的所有公式都是闭公式，我们将其公式集定义为 ClForm：

• ClForm ::= $\bot$ | 等式集 | ClForm $\wedge$ ClForm | ClForm $\vee$ ClForm | ClForm $\rightarrow$ ClForm.

在两者中，我们都令 $\neg A$ 为 $A \rightarrow \bot$ 的缩写。我们注意到，两者都没有 $\top$。

2.2 算术模型

在本节中，我们给出严格有限主义算术的模型，它们是 Wright 的严格有限主义树的对应物。我们主要关注哪类句子在其中有效。为此，我们将定义一种称为 S_∞ 的结构。将其纳入模型并不会改变在所有模型中有效的内容（命题 2.10），而且从该结构即可清楚看出这些模型的性质。

S_∞ 是一个固定的类树根结构，其中 NDE 和方程被分配给各个节点。 S_∞ 是一个元组 $\langle T, \leq_T, M, E\rangle$，其中 $\langle T, \leq_T\rangle$ 是一棵有限分支树，每个分支都是一个 ω-序列； M 是从T 到 $\mathcal{P}$(NDE)的映射； E 是从 T 到 $\mathcal{P}$(等式集)的映射。从概念上说， $M(t)$（其中 $t \in T$理想情况下）表示主体截至阶段 t实际构造的 NDE 集合； $E(t)$则表示主体截至 t实际验证并学会的方程集合，即算术事实集合。令 t_0 为根，我们设定 $M(t_0) = \{\overline{0}\}$以及 $E(t_0) = \emptyset$；并且对于每个 $t \in T$和 x, $y \in M(t)$,

(i) 如果 $S(x) \notin M(t)$，那么我们令存在一个直接后继 t'，使得 $M(t') = M(t) \cup \{S(x)\}$ 并且 $E(t') = E(t)$；(ii) 对 $x + y$ 和 $x \cdot y$ 也作类似处理；(iii) 如果 $[\![x]\!] = [\![y]\!]$ 且 $x = y \notin E(t)$，其中 $[\![z]\!]$ 是 $z \in$ NDE 所表示的自然数，那么我们令存在一个直接后继 t' ，使得 $M(t') = M(t)$，并且 $E(t') = E(t) \cup \{x = y\}$。

[11]Wright [7, 第167] 页将单数写作“nde”，复数形式写作“nde's”。

8 Wright 的严格有限主义命题逻辑

（我们假设背景中以自然的方式包含 $[\![]\!]$。）因此，主体逐一进行。 S_∞ 并非正式意义上的算术模型，但它是我们研究的有用工具。

在 $\mathcal{L}_\mathcal{S}$ 中的闭公式会在 S_∞的每个节点处求值。我们将 Wright 的强制条件解释如下[12]。

定义 2.1（实际验证条件）设 $t \in T$。对于任意 $p \in$ 等式集，$t \models_{S_\infty} p$ 当且仅当 $p \in E(t)$。对于任意 A， $B \in$ ClForm，

(i) $t \models_{S_\infty} A \wedge B$ 当且仅当 $t \models_{S_\infty} A$ 且 $t \models_{S_\infty} B$；(ii) $t \models_{S_\infty} A \vee B$ 当且仅当 $t \models_{S_\infty} A$ 或 $t \models_{S_\infty} B$；以及 (iii) $t \models_{S_\infty} A \to B$ 当且仅当对于任意 $t' \geq_T t$，若 $t' \models_{S_\infty} A$，则存在一个 $t'' \geq_T t'$ 使得 $t'' \models_{S_\infty} B$。

一般而言，只要不会引起混淆，我们可以省略下标。我们注意到，否定的行为符合直觉主义： $t \models_{S_\infty} \neg A$ 当且仅当 $t' \not\models_{S_\infty} A$ 对所有 $t' \geq_T t$成立。

我们注意到，该系统既处理项的实际构造，也处理句子的验证，这与第2.3节定义的抽象语义系统不同。 $t \models_{S_\infty} A \to B$ 表示，如果 A 得到实际验证，那么 B 也会得到验证。但是，要使$A \to B$ 成立，主体不必知道这一点。如果 $A \in$属于等式集， $t \models_{S_\infty} A$表示主体已通过 A 验证了 A ，并且知道这一点的步数是 t。否则，它仅反映我们对主体所做验证的判断（参见第 1.2节）。

我们在 S_∞ 中定义有效性，并引入两个额外概念：可断言性和普遍性。后两者表示实践可验证性（参见第 1.2节）。

定义 2.2（有效性、可断言性、普遍性）若对所有 $t \in T$， $t \models A$ 成立，则 S_∞ 中的 $A \in$ ClForm 是有效的；若对某个 $t \in T$， $t \models A$ 成立，则 S_∞ 中的 $x \in$ ClForm 是可断言的。若对于任意 $t \in T$，都存在一个 $t' \geq_T t$ ，使得$x \in M(t')$ ，则 S_∞ 中的 $A \in$ NDE 是普遍的。若对于任意 $t \in T$，都存在一个$t' \geq_T t$ ，使得 $t' \models A$，则 S_∞中的 $\models^V_{S_\infty} A$ClForm 是普遍的。我们分别用$\models^V_{S_\infty} A$、 $\models^A_{S_\infty} A$ 和$\models^P_{S_\infty} A$ 表示 A 在 S_∞中有效、可断言和普遍。

因此，$\not\models^V \overline{0} = \overline{0}$，因为 $t_0 \not\models \overline{0} = \overline{0}$。我们假设 S_∞ 的理想行动者一开始并不知道这个等式。我们很快会引入具有各种初始知识的算术模型（作为 $\mathcal{S}_{\text{fin}}$的元素）。语义后承的概念是通过有效性的概念来定义的。

定义 2.3（语义后承）设 Γ、 $\Delta \subseteq_{\text{fin}} \in$ClForm。若对于任意 $t \in T$，只要 $t \models A$ 对所有 $A \in \Gamma$成立，就有 $t \models B$ 对某个 $B \in \Delta$成立，则称 Δ 是 Γ 在 S_∞ 中的语义后承。我们用 $\Gamma \models^V_{S_\infty} \Delta$ 表示这一关系。

我们不为无限集合定义这一概念，因为如果 Γ 例如包含无限多个方程，那么 $\Gamma \models^V \Delta$ 就会空泛地成立。

[12]Wright 在 [7]的附录中将它们称为“验证条件”。在 [7], 的第3节中，他以“验证”之名分析了实际验证这一概念。

显然 $\models_{S_\infty}$ 成立[13]。 S_∞ 具有我们称之为普遍性性质：可断言性蕴涵普遍性。

命题 2.4（普遍性性质）(i) 每个 NDE 在 S_∞ 中都是普遍的。(ii) $\models^{A}_{S_\infty} A$蕴涵 $\models^{P}_{S_\infty} A$。

Proof 两者都通过归纳法证明。(ii) 将用到 (i)。 □

由此可得 $t \models \neg A$ 当且仅当 $s \not\models A$ 对所有 $s \in T$成立。右侧是 Wright 对否定给出的原始条件，这也为将 $A \to \bot$ 缩写为 $\neg A$（第1.2、1.3节）提供了依据。我们注意到，$\models^{V} \neg\neg A$ 当且仅当 $\models^{A} A$： $\neg\neg A$ 表示实践可验证性，以区别于 $\neg A$ 表示实践上不可验证性（第1.2节）。我们还有 $t \models A \to B$ 当且仅当 $t \models \neg A \vee \neg\neg B$。

我们看到，可断言性可以像经典真值那样计算，而有效性可以递归刻画。

命题 2.5 在 S_∞ 的语境中，

(i) (a) $\models^{A} A \wedge B$ 当且仅当 $\models^{A} A$ 且 $\models^{A} B$。(b) $\models^{A} A \vee B$ 当且仅当 $\models^{A} A$ 或 $\models^{A} B$。(c) $\models^{A} A \to B$ 当且仅当 $\not\models^{A} A$ 或 $\models^{A} B$。(ii) (a) 如果 A 是原子的，那么 $\not\models^{V} A$。(b) $\models^{V} A \wedge B$ 当且仅当 $\models^{V} A$ 且 $\models^{V} B$。(c) $\models^{V} A \vee B$ 当且仅当 $\models^{V} A$ 或 $\models^{V} B$。(d) $\models^{V} A \to B$ 当且仅当 $\models^{A} A \to B$。

Proof 根据普遍性性质。对于 (ii, a-c)，参见 t_0。 □

因此 $\models^{V} A \to B$当且仅当 $A \to B$是经典有效的；并且 $\neg A \vee \neg\neg A$， $\neg\neg A \to A$以及 $((A \to B) \to A) \to A$ 在 S_∞ 中有效。与 **CPC** 的一般关系将作为推论2.24 根据第 2.3节定义的语义给出。

在引言（第 1.2 节）中，我们看到了实践可构造性的三个条件。还有第四个条件：严格有限主义推理中的每个陈述都必须是“实际弱可判定的”，也就是说，它或者是可断言的，或者是不可断言的 [7, p.133][14]。我们认为 $\models^{V} \neg A \vee \neg\neg A$ 符合这一要求，因为它等价于 $\not\models^{A} A$ 或 $\models^{A} A$。

此外，对于任何可断言的 A 和不可断言的 B，我们都有 $t_0 \models \overline{0} = \overline{0} \to A$和 $t_0 \models^{V} \neg B$，即使其中包含巨大的 NDE。正如我们所指出的（第 1.2 节），这些并不反映行动者在 t_0 处的知识，而是展示了我们对其验证所作的判断；根据 S_∞ 的定义，我们必须对此作出承诺。

S_∞ 缺少两条原则：排中律和肯定前件式。

命题 2.6 (i) $\not\models^{V}_{S_\infty} A \vee \neg A$ 对于某个 A。(ii) 对于某些 A 和 B，$\models^{V}_{S_\infty} B \to A$ 和 $\models^{V}_{S_\infty} B$ 并不蕴涵 $\models^{V}_{S_\infty} A$。

---

[13] Wright 不得不假定它，并将其称为“未证明引理” [7, 第170页，第172]页。[14] 这实际上关乎实践可验证性。不过，前三项也可以用它来表述：将（i）译为“0 是构造出来的，这一点在实践上是可验证的”，等等。

10 Wright 的严格有限主义命题逻辑

Proof Let A be $\overline{0} = \overline{0}$, and B $(\overline{0} = \overline{0}) \to (\overline{0} = \overline{0})$, and look at t_0. □

(i) 即使对于具体句子也成立，这与直觉主义推理不同。由于节点代表实际的构造步骤，自然会存在尚未验证、但之后将得到验证的句子。同样，肯定前件式也不成立，因为其结论蕴涵 A 在开始时便已得到验证。我们注意到，然而，对于所有 A 和 B，$\models^{V}_{S_\infty} B \to A$和$\models^{V}_{S_\infty} B$都蕴涵$\models^{A}_{S_\infty} A$。

事实上，这些原理适用于具有"稳定性"的公式。我们称 A 在 S_∞ 中是稳定的，当且仅当 $\neg\neg A \models^{V}_{S_\infty} A$；否则称其不稳定。也就是说，对于稳定公式，可断言性蕴含有效性。很容易看出，$\neg\neg A \models^{V} A$ 当且仅当$\models^{V} A \vee \neg A$；并且，如果 A 稳定，那么对于所有 B，$\models^{V} B \to A$ 和 $\models^{V} B$ 蕴含 $\models^{V} A$。尽管我们尚未成功递归地刻画稳定公式，但可以给出一类具有稳定性的公式。定义

• ClST ::= $\bot$ | ClForm $\to$公式集 | ClST $\wedge$ClST | ClST $\vee$ClST.

命题 2.7 每个 ClST 公式在 S_∞ 中都是稳定的。

Proof 归纳法。 □

现在我们定义算术模型。如果满足以下条件，则元组 $S = \langle T'、 \leq_{T'}、 M'、 E' \rangle$ 是严格有限主义算术的模型：（i）它是 S_∞ 的一个子模型的有限初始部分，其中（a）$T' \subseteq_{\text{fin}} T$，（b）$\leq_{T'}$和 M' 以及 E' 分别是 $\leq_T$、M 和 E 在 T' 上的限制，（c）$\langle T'、 \leq_{T'} \rangle$ 是一棵以 t'_0 为根的树，并且（d）每个分支都是某个 $s \in T$ 的 $\{t \in T \mid t'_0 \leq_T t <_T s\}$，并且

（ii）对于任意 $p \in$ 等式集，如果对于某个 $t \in T'$ 有 $p \in E'(t)$，那么对于任意 $s \in T'$，存在一个 $s' \geq_{T'} s$，使得 $p \in E'(s')$（原子普遍性条件）。

令 $\mathcal{S}_{\text{fin}}$ 表示所有算术模型的类，类 $\mathcal{S}$ 由 $\mathcal{S}_{\text{fin}}$ 和 S_∞组成。

我们沿用强迫条件和语义概念。对于每个 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$，我们以相同方式定义 S 的节点与 ClForm 之间的强迫关系，并用 $\models_S$ 代替 $\models_{S_\infty}$。每个 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ 中的有效性、可断言性、普遍性和语义后承也以类似方式定义，不过我们只考虑 S的节点。我们将分别记作 $\models^{V}_{S} A$ 等。对于类 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$，所谓 $\models^{V}_{\mathcal{S}'}$等，是指关系$\models^{V}_{S'}$等分别对所有 $S' \in \mathcal{S}'$成立。若 $\neg\neg A \models^{V}_{S} A$，则称 ClForm 在 $S \in \mathcal{S}$ 中稳定。

每个 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ 都从 S_∞继承其性质。显然，$\models_S$ 保持成立。原子普遍性扩展到所有复杂公式。

命题 2.8（完全普遍性）对于所有 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ 和 $A \in$ClForm，$\models^{A}_{S} A$ 蕴含 $\models^{P}_{S} A$。

Proof 归纳法。 □

其他性质可由各自形式中的完全普遍性推出。我们注意到，命题2.5 (ii, a) 现在是：对于所有原子的 A，$\models^V_S A$ 当且仅当$t'_0 \models_S A$。此外，命题2.6 具有如下形式。

命题 2.9 (i) $\not\models^V_S A \vee \neg A$ 对于某个 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ 和 A。(ii) 对于某个 $S \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ 和 A 以及 B，$\models^V_S B \to A$ 和 $\models^V_S B$ 并不能推出 $\models^V_S A$。

Proof 任取一个 S，其中有一个 A 在 S 中不稳定。令 B 为 $A \to A$。 □

虽然 S_∞ 并非正式意义上的算术模型，但将其加入 $\mathcal{S}_{\text{fin}}$ 并不会改变有效公式的总体集合。对每个 $t \in T$，定义 $T' := \{t \mid t_0 \leq_T t' \leq_T t\}$。于是 T' 定义了一个算术模型。我们称之为相对于 t 的 S_∞ 的收缩模型 $S_\infty|t$ 。给定一个 $A \in \mathbf{ClForm}$，令 $\mathbf{Eq}(A) \subseteq \mathbf{Eq}$ 表示出现在 A 中的方程集。由于 $\mathbf{Eq}(A)$ 是有限的，对于每个 $t \in T$，存在一个相对于 A 的收缩节点 $t' \geq_T t$，使得对于所有 $p \in \mathbf{Eq}(A)$，若$\models^A_{S_\infty} p$，则 $t' \models_{S_\infty} p$。令 T_A 为这些节点的集合。

命题 2.10 (i) 对任意 $t \in T_A$, $\models^A_{S_\infty} A$，当且仅当 $t \models_{S_\infty|t} A$。(ii) 对任意 $t \in T_A$，$\models^V_{S_\infty} A$ 当且仅当 $t_0 \models_{S_\infty|t} A$。(iii) $\models^V_{\mathcal{S}} A$ 当且仅当$\models^V_{\mathcal{S}_{\text{fin}}} A$。

Proof (i-ii) 两者均由归纳法得出。利用命题 2.5 以及 $T_{B\wedge C}$，$T_{B\vee C}$，$T_{B\to C} \subseteq T_B \cap T_C$ □。(ii) 将用到 (i)。(iii) 由 (ii) 立即得出。

2.3 严格有限主义克里普克语义

本节中，我们定义“严格有限主义语义”，以图式化地刻画 $\mathcal{S}$ 中的有效性。它是一种克里普克式语义，与直觉主义语义相似。直觉主义框架 $\langle K, \leq\rangle$ 是一个非空集合 K，由 $\leq$ 构成偏序。本文中，我们只考虑具有根的树状直觉主义框架。我们用 r 表示根。直觉主义模型 $\langle K, \leq, v\rangle$ 是一个配备赋值函数 $v : \mathbf{Var} \to \mathcal{P}(K)$ 的直觉主义框架，其中 $v(p)$ 向上封闭。若直觉主义模型 $\langle K, \leq, v\rangle$ 满足以下条件，则称其为严格有限主义模型

(i) $\langle K, \leq\rangle$ 是有限分支的，(ii) 每个分支的长度至多可数，(iii) 对每个 $k \in K$，$\{p \in \mathbf{Var} \mid k \in v(p)\}$ 都是有限的（有限验证条件），且 (iv) 对任意 p，若存在某个 k使得 $k \in v(p)$，则对任意 $l \in K$，都存在一个 $l' \geq l$ 使得 $l' \in v(p)$（原子普遍性条件）。

令 $\mathcal{W}$ 表示所有严格有限主义模型组成的类，其中既包含无限模型，也包含有限模型。

与 $\mathcal{S}_{\text{fin}}$ 的情况一样，我们沿用强迫条件和语义概念。对于任意 $W \in \mathcal{W}$，我们写作 $\models^V_W A$ 等等。不过，（i）强迫关系现在是在模型 W 的节点与

12 Wright 的严格有限主义命题逻辑

$\mathcal{L}_{\mathbf{SF}}$ 中的开放公式之间定义的。因此，这种语义不涉及构造，而只涉及以图式方式进行验证，这与直觉主义语义一样。（ii）强迫条件定义的基础现在是 $k \models_W p$ 当且仅当 $k \in v\,(p)$。（iii）我们将不再使用 ClST，而使用由下式定义的类 ST $\subseteq$ 公式集

- $\mathrm{ST} ::= \bot \mid \mathrm{Form} \to \mathrm{Form} \mid \mathrm{ST} \wedge \mathrm{ST} \mid \mathrm{ST} \vee \mathrm{ST}.$

不难看出，迄今为止的语义性质都以各自的公式集形式得以保留。特别地，对于每一个 $W \in \mathcal{W}$，$\models_W$ 仍然成立；并且完全普遍性（命题 2.8）成立（即 $\models^A_W$ A 蕴含 $\models^P_W$ A）。

$\mathcal{W}$ 通过两种意义下的代换对应于 $\mathcal{S}$。我们将任意映射$\sigma : \mathrm{Var} \to \mathrm{Eq}$ 称为代换；并将A 中出现的变量集合记为 $\mathrm{Var}(A)$。$\sigma(A)$ 表示将所有 $p \in \mathrm{Var}(A)$ 同时代换为 $\sigma(p)$ 的结果。如果 $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$，则 $\sigma(\Gamma)$ 表示 $\{\sigma(A) \mid A \in \Gamma\}$。我们称 σ 忠实于给定的 $W \in \mathcal{W}$，如果对于所有 p，$\models^A_W p$ 当且仅当 $\models^A_{S_\infty} \sigma(p)$。

首先，每个 $W = \langle K、\ \leq、\ v\rangle \in \mathcal{W}$都是 S_∞一部分的抽象。可以确认，对于忠实于 W的任意代换 σ，存在一个 $T' \subseteq T$和一个双射 $f\colon K \to T'$，使得

(i) 对所有 $k_1、\ k_2 \in K、\ k_1 \leq k_2$，当且仅当 $f(k_1) \leq_{T'} f(k_2)$;
以及 (ii) 对所有 p 和 k，当且仅当 $k \models_W p$ (f) k($\models_{S_\infty} \sigma$),

其中 $\leq_{T'}$ 是 $\leq_T$ 在 T' 上的限制。请注意，我们不要求 T' 关于 $\leq_T$ 向上封闭；也不要求 (i) 两侧的两个节点之间没有其他节点。我们称这样的双射为 f_σ。上面的对应关系 (ii) 可以推广到所有公式。

命题 2.11 对于任意忠实的 σ 和 $A \in$公式集，(i)$\models^A_W A$ 当且仅当 $\models^A_{S_\infty}\sigma(A)$, 以及 (ii) $k \models_W A$ 当且仅当 $f_\sigma(k) \models_{S_\infty} \sigma(A)$。

Proof 两者都通过归纳法证明。(ii) 将用到 (i)。 □

其次，整个类 $\mathcal{W}$ 刻画了 $\mathcal{S}$ 中的有效性。对于每个 $S = \langle T_0、\ \leq_{T_0}、\ M_{|T_0}、\ E_{|T_0}\rangle \in \mathcal{S}$ 和 $\sigma\colon$ Var $\to$ 等式集，我们将 S 在 σ 下的复制模型 $W_S \in \mathcal{W}$ 定义为 $\langle T_0、\ \leq_{T_0}、\ v_S\rangle$，其中 $t \in v_S(p)$ 当且仅当 $\sigma(p) \in E_{|T_0}(t)$。

命题 2.12 对所有 $t \in T_0$ 和 $A \in$ 公式集，$t \models_{W_S} A$ 当且仅当 $t \models_S \sigma(A)$.

Proof 归纳法。 □

命题 2.13 对任意 $\Gamma, \Delta \subseteq_{\mathrm{fin}}$ 公式集，$\Gamma \models^V_{\mathcal{W}} \Delta$ 当且仅当 $\sigma(\Gamma) \models^V_{\mathcal{S}} \sigma(\Delta)$ 对所有 $\sigma : \mathrm{Var} \to$ 等式集。

Proof 固定 Γ 和 Δ，并证明逆否命题。($\Longrightarrow$) 如果存在一个 σ 和一个S，使得 $\sigma(\Gamma) \not\models^V_S \sigma(\Delta)$，那么考虑 σ下 S 的副本 W_S。然后根据

命题 2.12 $\Gamma \not\models^{V}_{W_S} \Delta$. ($\Longleftarrow$) 如果存在一个 W 使得 $\Gamma \not\models^{V}_{W} \Delta$，那么考虑一个忠实于 W的代换，并使用命题 2.11. □

命题 2.10 可以进一步加强： $\mathcal{W}$ 中的语义后承概念归结为二节点模型类 $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}$ 中的语义后承概念。比较我们的逻辑与中间逻辑时，我们将借助这一事实。令$W = \langle K, \leq, v\rangle \in \mathcal{W}$。对每个 $k \in K$，定义收缩模型 $W|k \in \mathcal{W}_2$为 $\langle \{r, k\}, \leq', v'\rangle$，其中 $r <' k$，且 $v'(p) = v(p) \cap \{r, k\}$。给定 $A \in$ 公式集，令 $K_A \subseteq K$ 为满足以下条件的收缩节点集合：对于所有 $p \in$Var(A)，$\models^{A}_{W} p$ 蕴含 $k \in v(p)$。

命题 2.14（模型收缩）（i）对于任意 $k \in K_A$, $\models^{A}_{W} A$ 当且仅当 $k \models_{W|k} A$。（ii）对于任意 $k \in K_A$, $\models^{V}_{W} A$ 当且仅当 $r \models_{W|k} A$。（iii）$\models^{V}_{\mathcal{W}} A$ 当且仅当 $\models^{V}_{\mathcal{W}_2} A$。

Proof 类似于命题 2.10。 □

对于每个 $k \in K$，定义由 k生成的子模型 $W_k \in \mathcal{W}$ 为 $\langle K', \leq', v'\rangle$，其中 $K' = \{k' \in K \mid k \leq k'\}$, $\leq'$ 是 $\leq$ 在 K' 上的限制，并且 $v'(p) = v(p) \cap K'$。通过归纳法确认，对于所有 $l \in K'$， $l \models_{W} A$ 当且仅当 $l \models_{W_k} A$。

命题 2.15 $\Gamma \models^{V}_{\mathcal{W}} \Delta$ 当且仅当 $\Gamma \models^{V}_{\mathcal{W}_2} \Delta$。

Proof($\Longleftarrow$) 我们可以假设 $\Gamma \neq \emptyset$。假设 $k \in K$并且 $k \models_{W} \bigwedge\Gamma$。取 $k' \geq k$使得 $k' \in K_{\bigwedge\Gamma \wedge \bigvee\Delta}$，其中 $\bigvee\Delta$是 $\bot$如果 $\Delta = \emptyset$。由于 $k \models_{W} \bigwedge\Gamma$， $\models^{V}_{W_k} \bigwedge\Gamma$。因此 $k \models_{W_k|k'} \bigwedge\Gamma$ 根据命题 2.14 (ii)。 $\Gamma \models^{V}_{\mathcal{W}_2} \Delta$ 蕴含 $k \models_{W_k|k'} \bigvee\Delta$。其余部分很简单。 □

2.4 一个完备的序列演算 SF

定义了序列演算 SF，并证明其相对于严格有限主义语义是可靠且完备的。对于 Form 中的任意有限序列 Γ 和 Δ， $\Gamma \vdash \Delta$ 是 SF 中的一个序列。下文中，对于任意 Γ， $\neg\neg\Gamma$ 表示 $\{\neg\neg A \mid A \in \Gamma\}$。对于所有 $p \in$ Var，初始序列为 $\bot \vdash$ 和 $p \vdash p$。SF 具有 LK 的结构规则。逻辑规则如下：

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{B \wedge A, \Gamma \vdash \Delta} \wedge \mathrm{L}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge \mathrm{R}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \wedge \mathrm{L}_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee \mathrm{R}_1$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \vee \mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, B \vee A} \vee \mathrm{R}_2$$

14 Wright 的严格有限主义命题逻辑

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, A \to B, \Pi \vdash \Delta, \neg\neg\Sigma} \to \mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \neg\neg B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \neg\neg\Delta.} \to \mathrm{R}$$

我们用 $\Gamma \vdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ 表示 $\Gamma \vdash \Delta$ 可在严格有限主义逻辑中推导。

证明严格有限主义逻辑的可靠性是一件常规工作。

命题 2.16（可靠性）$\Gamma \vdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ 蕴含 $\Gamma \models^{V}_{\mathcal{W}} \Delta$。

Proof $W = \langle K \leq v \rangle \in \mathcal{W}$ $k \in K$ → $k \models_W$归纳法。设，，，和。(L) 假设 ()。那 $\bigwedge\Gamma \wedge A \to B \wedge \bigwedge\Pi$ $k \models_W \bigvee\Delta \vee A$ $k \models_W$ 么，根据归纳假设，。如果 $\bigvee\Delta$ $k \models_W A$ $k' \geq k$ $k' \models_W B$ ，则证明完毕。如果，那么存在一个 使得，因此 $k' \models_W \bigvee\Sigma$。(→R) 假设 $k \models_W \bigwedge\Gamma$。利用 $\models^{V}_{W} \neg A \vee \neg\neg A$。如果 $\models^{V}_{W} \neg A$，那么 $k \models_W A \to B$。如果 $\models^{V}_{W} \neg\neg A$，那么存在一个 $k' \geq k$ 使得 $k' \models_W A$，因此 $k' \models \neg\neg B \vee \bigvee\Delta$。其余部分很容易。□

注意，对于所有 $A \in$ 公式集，$A \vdash_{\mathbf{SF}} A$、$A \vdash_{\mathbf{SF}} \neg\neg A$ 和 $\neg\neg\neg A \vdash_{\mathbf{SF}} \neg A$。此外，$A \to B \dashv\vdash_{\mathbf{SF}} \neg A \vee \neg\neg B$，因此 $\vdash_{\mathbf{SF}} \neg A \vee \neg\neg A$。以下规则是可容许的：

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\neg\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg\Delta} \neg\neg\ \mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg A.} \neg\neg\ \mathrm{R}$$

我们可以在这个系统中重现 ST 公式的稳定性结果。请确认以下各项均可导出：(i) $\neg\neg(A \wedge B) \vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg B$，(ii) $\neg\neg(A \vee B) \vdash\dashv \neg\neg A \vee \neg\neg B$，以及 (iii) $\neg\neg(A \to B) \vdash A \to B$。

命题 2.17 $\neg\neg S \vdash_{\mathbf{SF}} S$ 对所有 $S \in$ST 均成立。

Proof 对 S 进行归纳。$\bot$ 的情形很简单。使用上述 (i-iii)。 □

在这里，$\neg\neg A \vdash_{\mathbf{SF}} A$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{SF}} A \vee \neg A$ 对所有 $A \in$ 公式集成立。因此，$\vdash_{\mathbf{SF}} S \vee \neg S$ 对所有 $S \in$ ST 成立。A，$A \to S \vdash_{\mathbf{SF}} S$ 也很简单。涉及 ST 公式的推理与 LK 类似。

Pr命题 2.18 对任意 $S \in$ST，以下 LK 规则都是可容许的 .

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad S, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, A \to S, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} \to L^{*} \qquad \frac{\Gamma, S \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash S \to B, \Delta} \to R^{*}$$

Proof (→ L*) 将 (→ L) 应用于左前提和 $S \vdash S$。然后使用 $\neg\neg S \vdash_{\mathbf{SF}} S$切割 $\neg\neg S$。最后使用右前提切割 S。(→ R*) 使用 $\vdash S$、$\neg S$ 和该前提切割 S。使用 $\neg S \vdash_{\mathbf{SF}} S \to B$ 和 $B \vdash_{\mathbf{SF}} S \to B$。□

现在让我们证明严格有限主义逻辑的完备性。给定 $\Gamma \subseteq \Psi \subseteq$ 公式集，我们称 Γ 是关于 Ψ 的素理论，当且仅当对于所有 A、$B \in \Psi$，(i) $A \vee B \in \Gamma$蕴含 $A \in \Gamma$ 或 $B \in \Gamma$，且 (ii) $\Gamma \vdash_{\mathbf{SF}} A$ 蕴含 $A \in \Gamma$。此外，我们令 $\mathrm{Var}(\Gamma) = \bigcup_{A \in \Gamma} \mathrm{Var}(A)$；并令 Form(Γ) 为仅由以下内容构成的所有公式的集合

Var(Γ)。对于 Γ, $\Delta \subseteq$ 公式集，如果对于任意 $\Gamma' \subseteq_{\text{fin}} \Gamma$ 和 $\Delta' \subseteq_{\text{fin}} \Delta$, $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta'$，我们称 $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ 是一致的；否则称其为不一致的。

证明过程如下。首先，设 Γ, $\Delta \subseteq_{\text{fin}}$ 公式集，使得 $\Gamma \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ 已给定。然后我们构造一个素理论。

引理 2.19（扩展引理）存在一个关于 Form($\Gamma \cup \Delta$) 的素理论 $\Gamma^* \supseteq \Gamma$，使得 $\langle \Gamma^*, \Delta \rangle$ 是一致的。

Proof 定义 Γ^* 如下。首先，$\Gamma_0 := \Gamma$。然后 $\Gamma_0 \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$。令 $\langle A_n \vee B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ 通过无限重复枚举 Form($\Gamma \cup \Delta$) 中的所有析取公式。设 Γ_n 与 $\Gamma_n \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ 已给定。如果 $\Gamma_n \vdash_{\mathbf{SF}} A_n \vee B_n$，那么 Γ_n, $A \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ 或 Γ_n, $B \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$，因为严格有限主义逻辑具有（切割规则）。若为前者，则定义 Γ_{n+1} 为 $\Gamma_n \cup \{A\}$；否则定义为 $\Gamma_n \cup \{B\}$。然后 $\Gamma_{n+1} \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$。定义 $\Gamma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$。

$\Gamma^* \subseteq$公式集(Γ ∪ Δ)可由归纳法直接得出。(i) 若 $A \vee B \in \Gamma^*$，则令 n为满足 $\Gamma_m \vdash_{\mathbf{SF}} A \vee B$的 m中最小的一个。于是存在一个 $n' \geq n$，使得我们在第 n'步考虑$A \vee B$，因此 $A \in \Gamma_{n'+1}$或 $B \in \Gamma_{n'+1}$。(ii) 若 $\Gamma^* \vdash_{\mathbf{SF}} A$，则$\Gamma^* \vdash_{\mathbf{SF}} A \vee A$。所以，依照同样的论证，我们得出 $A \in \Gamma^*$。最后，对所有 $n \in \mathbb{N}$，由归纳法可得$\Gamma_n \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$ $\langle \Gamma^* \ \Delta \rangle$ □。所以，不可能是不一致的。

引理 2.20 对任意 $A \in$ 公式集(Γ ∪ Δ)，要么 $\neg A \in \Gamma^*$，要么 $\neg\neg A \in \Gamma^*$。

Proof 由 $\vdash_{\mathbf{SF}} \neg A \vee \neg\neg A$ 和 ⟨Γ*立即可得，因为Δ⟩ 是一致的。 □

现在定义 $W = \langle \{k, k'\}$、$\leq$、$v \rangle$ 如下：$k < k'$当且仅当 $k \in v(p)$，且 $p \in \Gamma^*$ 当且仅当 $k' \in v(p)$。于是$\neg\neg p \in \Gamma^*$，因为 Var(Γ ∪ Δ)是有限的。k 反映了 $\Gamma \nvdash_{\mathbf{SF}} \Delta$。

引理 2.21（真值引理）对于所有 $A \in$ Form($\Gamma \cup \Delta$)，(i) $\neg\neg A \in \Gamma^*$ 当且仅当$k' \models_W A$；且(ii) $A \in \Gamma^*$ 当且仅当 $k \models_W A$。

Proof 两者均由归纳法证明。利用 Γ*的性质。(i) 基例显然。对于($\wedge$ $\neg\neg\, A \wedge B \ \dashv\vdash_{\mathbf{SF}} \neg\neg A \wedge \neg\neg B$ $\vee$ $\rightarrow$ $\neg\neg\, A \rightarrow$), 利用( ) . ( ); $B \ \dashv\vdash_{\mathbf{SF}} \neg A \vee \neg\neg B$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ ( )的证明类似。对于( )，利用( ) . (ii) 基例、( )和( )都很容易。对于( )，根据(i)即可。□

现在通过诉诸二节点模型建立完备性。

命题 2.22（完备性）$\Gamma \models^{V}_{\mathcal{W}} \Delta$ 蕴含 $\Gamma \vdash_{\mathbf{SF}} \Delta$。

Proof 逆否命题。根据前面的引理，我们可以断定存在一个 $W \in \mathcal{W}_2$，使得对所有 $A \in \Gamma$, 都有 $k \models_W A$；并且对所有 $B \in \Delta$，都有 $k \not\models_W B$。□

2.5 与中间逻辑的关系

本节中，我们将比较严格有限主义逻辑与中间逻辑。我们将证明 HT $\subsetneq$ 严格有限主义逻辑 $\subsetneq$ CPC；然后说明严格有限主义模型如何被视为直觉主义模型中的节点。已知 HT 的特征刻画为

16 Wright 的严格有限主义命题逻辑

由 2 节点直觉主义模型构成的类，我们将其记为 $\mathcal{W}_{2i}$。我们用 $\Vdash$ 表示直觉主义强制关系。

为了与 CPC 和 HT 进行比较，我们将考察 $\mathcal{W}_2$（参见命题 2.15）。由于所有 $W \in \mathcal{W}_2$ 都具有同构框架，我们固定一个框架 $F := \langle \{k, k'\}, \leq \rangle$，其中 $k < k'$，并考虑 F上的赋值类 $\mathcal{V}_2$。如果考虑模型$W = \langle \{k, k'\}, \leq, v \rangle$，我们将写作 $\models_v^V A$ 等，而不写作 $\models_W^V A$ 等。我们还将写作$\models_{\mathcal{V}_2}^V A$ 等。若一个公式在框架 $v \in \mathcal{V}_2$ 中于模型 $\langle \{k, k'\}, \leq, v \rangle$中稳定，则称该公式在框架中稳定。$\mathcal{V}_2$中的稳定性依此理解。

容易看出，SF $\subsetneq$ CPC：事实上，SF 的所有推理规则在 LK 中都是可容许的，而 $\nvdash_{\mathbf{SF}} A \vee \neg A$ 则由可靠性得出。此外，我们还可以给出一个充分条件，判定经典定理何时也是 SF 的定理。SF 的完备性意味着，A在 $\mathcal{V}_2$中稳定，当且仅当 $\neg\neg A \vdash_{\mathbf{SF}} A$。对于每个 $W = \langle K, \leq, v \rangle \in \mathcal{W}$，我们用 cl($v$) 表示 v 的经典部分：由 cl(v)(p) $= 1$当且仅当 $\models_W^P p$ 定义的公式集 $\to \{0, 1\}$。$\vdash_{\mathbf{X}} A$表示 A 是中间逻辑 X 的定理。

命题 2.23 如果 $\vdash_{\mathbf{CPC}} A$ 和 A 在 $\mathcal{V}_2$中稳定，则 $\vdash_{\mathbf{SF}} A$。

Proof 如果 $\vdash_{\mathbf{CPC}} A$，那么对于所有 $v \in \mathcal{V}_2$，cl(v)(A) $= 1$。因此 $\models_{\mathcal{V}_2}^V \neg\neg A$，故由严格有限主义逻辑的完备性可得$\vdash_{\mathbf{SF}} \neg\neg A$。接着，由于 A 稳定，所以 $\vdash_{\mathbf{SF}} A$。□

推论 2.24 $\models_{\mathcal{W}}^A A$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{CPC}} A$。

Proof 利用$\models_{\mathcal{W}}^A A$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{SF}} \neg\neg A$；以及 $\neg\neg A \in$ ST。 □

接下来，我们将看到 HT $\subsetneq$ 严格有限主义逻辑。严格有限主义逻辑 $\not\subseteq$ HT 显然不成立，因为皮尔士定律不属于 HT。为证明 HT $\subseteq$ 严格有限主义逻辑，我们将借助直觉主义语义。令 $\mathcal{V}_{2i}$ 为 F上的直觉主义赋值类。那么$\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_{2i}$。因此，在$F$ 中使用严格有限主义赋值 $v \in \mathcal{V}_2$对公式进行直觉主义地求值是有意义的。在此语境下，我们也可以类似地写作 $k \Vdash_v A$ 等。$\Vdash$ 的定义中唯一的区别是：$l \Vdash_v B \to C$当且仅当对于所有 $l' \geq l$，$l' \Vdash_v B$ 蕴含 $l' \Vdash_v C$。有效性的定义方式与$\models_v$相同；我们也将写作 $\Vdash_v^V A$ 等。在这种设定下，说 HT 由$\mathcal{W}_{2i}$ 刻画，就是说对于所有 A，$\vdash_{\mathbf{HT}} A$ 当且仅当 $\Vdash_{\mathcal{V}_{2i}}^V A$。因此我们注意到，$\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_{2i}$，所以 $\vdash_{\mathbf{HT}} A$蕴含 $\Vdash_{\mathcal{V}_2}^V A$。

命题 2.25 (i) $k' \Vdash_v A$ 当且仅当 $k' \models_v A$。(ii) $k \Vdash_v A$ 蕴含 $k \models_v A$。 *(iii)* $\Vdash_{\mathcal{V}_2}^V A$蕴含 $\models_{\mathcal{V}_2}^V A$。

Proof 通过归纳法证明 (i, ii)。(i) 很显然，因为两个评价都是经典的。(ii)（$\to$）利用持久性和 (i)。(iii) 由 (ii) 立即得出。□

命题 2.26 HT $\subseteq$ 严格有限主义逻辑。

Proof 利用 $\vdash_{\mathbf{HT}} A$ 蕴含 $\models^{V}_{\mathcal{V}_2} A$这一点，并应用严格有限主义逻辑的完备性。 □

最后，我们将说明，严格有限主义有限模型如何可以看作满足有限验证条件的直觉主义模型中的节点。设 $\mathcal{W}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{W}$ 为有限模型的类，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}_{\text{fin}}$ 至多可数，$\preceq \subseteq \mathcal{U}^2$ 且对每个 $W \in \mathcal{U}$，$W = \langle K_W, \leq_W, v_W \rangle$。那么，如果 $W_1 \preceq W_2$，则 $\preceq$ 是 $\mathcal{U}$ 上的生成序，当且仅当：(i) $K_{W_1} \subseteq K_{W_2}$；(ii) 对所有 k，$k' \in K_{W_1}$当且仅当 $k \leq_{W_2} k'$；(iii) $v_{W_1}(p) \subseteq v_{W_2}(p)$。显然，生成序是一种偏序。若 $\langle \mathcal{U}, \preceq \rangle$ 是直觉主义框架且 $\preceq$ 是生成序，则称其为生成结构（g-结构）。我们只考虑根树状直觉主义框架。设 $\mathcal{G}$ 为所有 g-结构的类。对于任意 $G = \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle \in \mathcal{G}$，我们用 $R_G(\in \mathcal{U})$ 表示 G的根；用 $r_G(\in K_{R_G})$ 表示 R_G 的根；并令 K_G 为 $\{\langle W, k \rangle \mid W \in \mathcal{U} \wedge k \in K_W\}$。

g-结构 $\langle \mathcal{U}, \preceq \rangle$ 规定了主体的认知能力如何增长，并表示在这种增长过程中，主体如何实际验证基本事实（例如具体方程）。每个 $W \in \mathcal{U}$ 通常代表同一主体的不同世代，较晚的世代则对应更强的能力和更多的验证步骤。

给定一个 $G = \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle \in \mathcal{G}$，我们根据 $\mathcal{U}$ 的元素的赋值诱导出一个映射 $v_G : \mathsf{Var} \to \mathcal{P}(K_G)$：$\langle W, k \rangle \in v_G(p)$ 当且仅当 $k \in v_W(p)$。我们可以证明，$v_G(p)$ 关于 G 和每个 $W \in \mathcal{U}$ 都是向上封闭的。

命题 2.27 若 $\langle W, k \rangle \in v_G(p)$，则对于所有 $W' \succeq W$ 和 $k'(\in K_{W'}) \geq_{W'} k$，都有 $\langle W', k' \rangle \in v_G(p)$。

Proof 根据 v_W 在每个 W 中的持久性以及 v_G的定义。 □

我们定义扩展 v_G 的代强迫关系 $\Vdash_G \subseteq K_G \times$ 公式集如下。

(i) $W, k \Vdash_G p$ 当且仅当 $\langle W, k \rangle \in v_G(p)$；(ii) $W, k \Vdash_G A \wedge B$ 当且仅当 $W, k \Vdash_G A$ 且 $W, k \Vdash_G B$；(iii) $W, k \Vdash_G A \vee B$ 当且仅当 $W, k \Vdash_G A$ 或 $W, k \Vdash_G B$；以及 (iv) $W, k \Vdash_G A \to B$ 当且仅当对于任意 $W' \succeq W$ 和 $k'(\in K_{W'}) \geq_{W'} k$，若 $W', k' \Vdash_G A$，则存在一个 $k''(\in K_{W'}) \geq_{W'} k'$ 使得 $W', k'' \Vdash_G B$。

$\Vdash_G$ 如此定义，形式化了主体在能力不断增强时的实际验证。$W, k \Vdash_G A \to B$ 表示，如果 A 在某种能力扩展下得到验证，那么 B 在相同能力下也得到验证；$W, k \Vdash_G \neg A$ 表示 A 在任何扩展下实际上都无法验证。如果 A 是原子的，$W, k \Vdash_G A$ 表示主体已通过 A 验证了 A，并且知道这一点发生在生成的第 k 步 W。否则，它仅反映了我们的判断。

若对于所有 $\langle W, k \rangle \in K_G$，都有 $W, k \Vdash_G A$，则公式集在 $G = \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle \in \mathcal{G}$ 中有效。我们将此记作 $\Vdash^{V}_{G} A$；而将对于所有 $G \in \mathcal{G}$ 的 $\Vdash^{V}_{G} A$ 记作 $\Vdash^{V}_{\mathcal{G}} A$。可以通过归纳法验证，$\Vdash_G$ 在 G 及每个 W 中都保持不变，正如 v_G 一样。因此，$\Vdash^{V}_{G} A$ 当且仅当 $R_G, r_G \Vdash_G A$。由于每个 W 都是严格有限主义模型，我们在其中拥有 $\Vdash_G$ 的普遍性性质。

18 Wright 的严格有限主义命题逻辑

命题 2.28（生成中的普遍性）如果对于某个 $k \in K_W$，$W, k \Vdash_G A$，那么对于任意 $l \in K_W$，存在一个 $l'(\in K_W) \geq_W l$，使得 $W, l' \Vdash_G A$。

Proof 对 A 使用归纳法。利用 $\Vdash_G$ 的持久性。 □

推论 2.29 $W, r_G \Vdash_G A \to B$ 当且仅当对于某个 $k \in K_W$，$W, k \Vdash_G A \to B$。

Proof ($\Longleftarrow$) 可由生成中的普遍性推出。 □

我们注意到，$\models^P_W$，其中 $W \in \mathcal{U}$ 在 G 中不具有持久性。一个人可能能力不足，无法验证（$\models^P_W \neg p$），但之后可能可以验证（$\models^P_{W'} p$，且具有 $W \preceq W'$）。

令 $\mathcal{J}$ 表示满足有限验证条件的直觉主义模型类。我们看到，一个 $G = \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle \in \mathcal{G}$ 会导出相应的$I \in \mathcal{J}$，反之亦然。给定 G，我们定义映射 $v : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$，使得$W \in v(p)$当且仅当存在一个 $k \in K_W$使得 $W, k \Vdash_G p$；并令 $I_G := \langle \mathcal{U}, \preceq, v \rangle$。那么 $v(p)$在 G中向上封闭，并且由于每个 $W \in \mathcal{U}$ 都是有限的，故 $I_G \in \mathcal{J}$成立。因此，对每个 $A \in$ 公式和 $W \in \mathcal{U}$，$W \Vdash_{I_G} A$ 都有意义。我们用 $\Vdash^V_{I_G} A$ 表示对所有 $W \in \mathcal{U}$，$W \Vdash_{I_G} A$。$\Vdash_{I_G}$ 在 G中保持成立，因此 $\Vdash^V_{I_G} A$当且仅当 $R_G \Vdash_{I_G} A$。$\Vdash_{I_G}$ 与 $\Vdash_G$ 之间的对应关系可以推广到所有复杂公式。

命题 2.30 $W \Vdash_{I_G} A$ 当且仅当存在一个 $k \in K_W$，使得 $W, k \Vdash_G A$.

*Proof*归纳法。$(\wedge)$ ($\Longrightarrow$) 若 $W \Vdash_{I_G} B \wedge C$，则 $W, k \Vdash_G B$并且 $W, l \Vdash_G C$对某个 k，$l \in K_W$成立。因此，根据普遍性和持久性，$W, k' \Vdash_G B \wedge C$对某个 $k' \in K_W$成立，使得 $k \leq_W k'$。

$(\to)$ ($\Longrightarrow$) 假设 $W \Vdash_{I_G} B \to C$。我们将证明 $W, r_G \Vdash_G B \to C$。设 $W \preceq W', k \in K_{W'}$且 $W', k \Vdash_G B$。于是 $W' \Vdash_{I_G} B$，因此根据假设可得 $W' \Vdash_{I_G} C$。所以 $W', l \Vdash_G C$对某个 $l \in K_{W'}$成立。因此，根据普遍性，$W', k' \Vdash_G C$对某个 $k' \geq_{W'} k$成立。($\Longleftarrow$) 设 $W, k \Vdash_G B \to C$，$W \preceq W'$且 $W' \Vdash_{I_G} B$。于是$W', l \Vdash_G B$对某个 $l \in K_{W'}$成立。由于 $k \in K_{W'}$，W'，根据普遍性，$k' \Vdash_G B$对某个 $k' \geq_{W'} k$成立。因此 $W', k'' \Vdash C$对某个 $k'' \geq_{W'} k'$成立。使用归纳假设。□

反过来，设给定了 $I = \langle U^*, \preceq^*, v^* \rangle \in \mathcal{J}$。那么，对于每个 $U \in U^*$，我们都可以令 $K_U = \{U' \in U^* \mid U' \preceq^* U\}$、$U' \leq_U U''$ 当且仅当 $U' \preceq^* U''$ 和 $v_U(p) = v^*(p) \cap K_U$，从而得到 $W_U = \langle K_U, \leq_U, v_U \rangle \in \mathcal{W}_{\mathrm{fin}}$。定义 $\mathcal{U} := \{W_U \mid U \in U^*\}$；$\preceq \subseteq \mathcal{U}^2$，使得 $W_{U_1} \preceq W_{U_2}$ 当且仅当 $U_1 \preceq^* U_2$；并令 $G_I := \langle \mathcal{U}, \preceq \rangle$。那么 $G_I \in \mathcal{G}$。I 和 G_I 在以下意义上相对应。

Pr命题 2.31 对于所有的 $A \in$公式集和 $U \in U^*, U \Vdash_I A$，当且仅当 $W_U, U \Vdash_{G_I} A$.

Proof $\to$ $\Longrightarrow$ $U \Vdash_I B \to C$ $W_{U'}$ $U'' \Vdash_{G_I} B$ $U \preceq$归纳法。( ) ( ) 设，且，并且。$U'' \preceq U'$ $W_{U'}$ $U' \Vdash_{G_I} B$ $U' \Vdash_I B$ $U' \Vdash_I C$
那么，由于，根据持久性，。因此。所以$W_{U'}, U' \Vdash_{G_I} C$，($\Longleftarrow$) 假设 $W_U, U \Vdash_{G_I} B \to C, U \preceq^* U'$ 且 $U' \Vdash_I B$。

那么 $W_{U'}, U' \Vdash_{G_I} B$。根据假设，$U'$ 是$\langle K_{U'}, \leq_{U'}\rangle, W_{U'}, U' \Vdash_{G_I} C$中的最大值。□

$\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{J}$ 之间的这些对应关系表明，在所有 $G \in \mathcal{G}$ 中有效的公式全体与 IPC 一致。我们注意到，显然，$\vdash_{\mathbf{IPC}} A$ 当且仅当对所有 $I \in \mathcal{J}$，$\Vdash_I^V A$。

命题 2.32 对所有 $A \in$ 公式集，(i) $\Vdash_{\mathcal{G}}^V A$ 当且仅当 (ii) 对所有 $G \in \mathcal{G}$，$\Vdash_{I_G}^V A$ 当且仅当 (iii) $\vdash_{\mathbf{IPC}} A$。

Proof (i $\Longrightarrow$ ii) 令 $G \in \mathcal{G}$。$\Vdash_G^V A$ 推出 $R_G, r_G \Vdash_G A$，因此$R_G \Vdash_{I_G} A$。

(ii $\Longrightarrow$ iii) 令 $H = \langle U^*, \preceq^*, v^*\rangle \in \mathcal{J}$ 和 R 为 H 的根。则有 $\Vdash_H^V A$ 当且仅当 $R \Vdash_H A$ 当且仅当 $W_R, R \Vdash_{G_H} A$ 当且仅当 $W_R \Vdash_{I_{G_H}} A$。（ii）推出最后一个结论。

(iii $\Longrightarrow$ i) 通过归纳法证明，对于所有 A，$\vdash_{\mathbf{IPC}} A$ 蕴含 $\Vdash_{\mathcal{G}}^V A$。基础情形和（$\wedge$）是显然的。（$\vee$）根据 IPC 的析取性质。（$\rightarrow$）不依赖于归纳假设。假设对于所有 $I \in \mathcal{J}$都有$\Vdash_I^V B \rightarrow C$。令 $G = \langle \mathcal{U}, \preceq\rangle \in \mathcal{G}$。根据推论 2.29，$R_G$ 当且仅当 R_G，其中对于某个 $k \in K_{R_G}$有 $r_G \Vdash_G B \rightarrow C$、$k \Vdash_G B \rightarrow C$。根据假设，我们有 $R_G \Vdash_{I_G} B \rightarrow C$。应用命题 2.30。□

这些结果或许具有哲学意义。$\mathbf{HT} \subsetneq$ 严格有限主义逻辑 $\subsetneq \mathbf{CPC}$（参见推论2.24，命题2.26）意味着严格有限主义逻辑 过于强大，不能恰当地处于中间地位。然而，它与**IPC**关系密切：命题2.31和2.32 似乎支持第1.4节提到的严格有限主义与直觉主义之间的概念关联。普遍性条件（参见命题2.4 和2.8）自然会被怀疑是造成这一点的原因，但我们尚不清楚它们究竟发挥了什么作用。

3 结束语：进一步探讨

本文仅展示了我们对赖特的严格有限主义逻辑进行经典形式化的初步尝试，至少还有两个主题有待进一步研究。（i）Wright指出，通常不能假定原子普遍性（参见第1.2节），而他的纲要已包含谓词部分。语义需要沿这两个方向扩展。若没有普遍性条件，与**CPC** 的联系将会消失，且 $\neg A$ 将与 $A \rightarrow \bot$分离，不过皮尔士定律和 $\neg A \vee \neg\neg A$ 或许仍然成立。研究这种逻辑会呈现出何种面貌，或许能为上述哲学问题提供答案。同时，鉴于否定的全局性质，我们的语义中的谓词部分应包含对论域中所有对象的量化，而不仅仅是对某个节点之后的对象进行量化。我们正在为此撰写一篇文章，其中将给出一个针对扩展语义的可靠且完备的证明系统。

(ii) 我们保留了 Wright 的强制条件，并且作为经典理想化的一部分，接受蕴涵中任意有限长度的时间间隔（参见第1.3节）。事实上，从相关文献来看，似乎很难从哲学上论证某个特定数值是最大长度。然而，发展一种理论

20 Wright 的严格有限主义命题逻辑

受限蕴涵或许值得关注。直觉主义蕴涵就是时间间隔为 0 的严格有限主义蕴涵。如果我们将 ω 与严格有限主义逻辑联系起来，因为后件可以在任意 $n < \omega$ 步之内到来，那么鉴于 $0 < 1$，将 1 与 IPC 联系起来或许是合理的。若有一套涵盖不同长度的蕴涵理论，我们或许就能看到严格有限主义逻辑与 IPC 之间存在一系列不同层次的逻辑。

致谢

• 本研究由日本学生支援机构以“攻读学位学生研究生奖学金”项目资助。

• 我谨向 Rosalie Iemhoff 致谢，感谢她平日里给予我极具洞见且切实有益的建议。我也感谢 Amirhossein Akbar Tabatabai 提出的深刻评论：事实上，正是他最先指出了它与 IPC 的关系。我衷心感谢一位匿名审稿人提供极有帮助的评论和建议。本文的一些初步版本曾在 OZSW 2020 年会议、2021年第三届证明论及其应用研讨会以及 2022 年荷兰逻辑学博士日上报告。本研究是在乌得勒支大学 Rosalie Iemhoff 教授的博士生导师指导下开展的。

参考文献

[1]Dean W（2018）严格有限主义、可行性与堆垛悖论。《符号逻辑评论》11(2):295–346。https://doi.org/10.1017/s1755020318000163[2]Dummett M（1975）王氏悖论。载于：《真理与其他谜题》。哈佛大学出版社，剑桥，第15章，第248–68页，1978年出版[3]Lifschitz V、Pearce D、Valverde A（2001）强等价逻辑程序。《ACM 计算逻辑汇刊》2(40):526–41。https://doi.org/10.1145/383779.383783[4] Magidor O（2012）严格有限主义与快乐堆垛悖论。《哲学逻辑杂志》41(2):471–91。https://doi.org/10.1007/s10992-011-9180-8[5]Murzi J（2010）可知性与二值性：可知性悖论的直觉主义解法。《哲学研究》149:269–81。https://doi.org/10.1007/s11098-009-9349-y[6] Tennant N（1997）《驯服真理》。克拉伦登出版社，牛津[7] Wright C（1982）严格有限主义。载于：《实在论、意义与真理》。布莱克威尔出版社，英国牛津；美国剑桥，第4章，第107–75页，第二版于1993年出版

[8]Yessenin-Volpin AS（1970年）《数学基础的超直觉主义批判与反传统纲领》。载于：Kino A、Myhill J、Vesley R（编），《直觉主义与证明理论》。北荷兰出版公司：阿姆斯特丹、伦敦、纽约州布法罗，第 3–45 页，https://doi.org/10.1016/s0049-237x(08)70738-9