arXiv:2301.12078v1 [math.GM] 28 Jan 2023

# 向量之间的除法与新乘法

预印本

**J. EnriqueH. Ramírez**物理系
ABC联邦大学 圣保罗，巴西
e
nrique.ramirez@ufabc.edu.br

**E Roca O**
物理系
东方大学
古巴圣地亚哥-德古巴，古巴
eroca@cnt.uo.edu.cu

2023年1月31日

**摘要**

同一向量空间中两个向量之间的除法，可通过向量代数的基本运算得到，并由一个矩阵定义。对于二维和三维向量空间，均可得到这种表示。本文定义了一种新的向量乘法以及逆向量。通过这种乘法，我们可以得到前文定义的除法。本文分析了向量除法和乘法的含义。

***K*关键词** 向量除法 · 向量乘法 · 逆向量。

## 1 引言

在向量代数的框架下，向量之间的除法是一个鲜少探讨的主题。关于这一主题的研究寥寥无几，而已有研究得出的结论是：这种运算无法定义。1966 年，Kenneth O. May 撰写了一篇文章，[3], 其中他指出，在三维空间中，两个向量无法相除。这种不可能性主要源于人们定义向量之间除法的方式：这些方法未能实现这一目标，因为它们试图通过现有的向量乘积之一来实现除法，即点积或向量积；然而，这些乘积并不像数之间定义的乘法那样是真正的乘法。这些想法会导致无穷无尽的解。本文将通过几何表示说明，在向量代数的框架下，向量之间的除法是可以定义的。

众所周知，在实数域 **K** 中， $\mathbb{R}$，或在复数域中， $\mathbb{C}$，除法运算可以作为乘法的逆运算来定义，即， $a/b$ 存在唯一的 c 使得 $bc = a$ 成立；条件是 $b \neq 0, c$ 存在且唯一。如果 $b = 0, c$ 存在，那么当且仅当 $a = 0$ 时成立；在这种情况下， $c$ 是 **K** 中的任意数。由于向量不存在可用于执行逆运算的乘法运算，通常将向量间的商定义为一种特定的张量。两个量的商往往属于不同且更复杂的类型而非如此；两个整数的商通常不是整数，而是有理数。同样，众所周知，两个向量的商不是向量，而是一种新类型的量：张量 [1]；但这意味着，只有掌握张量代数，才能研究向量的除法。在 [2], 中，向量的除法是在多向量代数的背景下讨论的，而这类内容在基础课程中并未以同样的方式讲授。在这种代数中，乘法以及多向量的逆向量定义了多向量之间的除法，而向量是其中一种特殊情况。本文的主要目标是使用初等方法，对具有已定义内积的某个有限维向量空间 $V$ 中的两个向量 **a** 和 **b** 进行除法。下文中，除非另有说明，我们假设 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，并用 $|\mathbf{a}| = a$ 等表示。

## 2 向量除法

设**a** 和**b** 是有限 n 维空间 $V$ 中的两个向量，空间定义在实数域上，且定义了内积。我们可以将向量**a** 分解为两个方向，一个平行于向量**b**，另一个与之垂直，即：

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}, \tag{1}$$

因此，$\mathbf{a}_{\parallel} = \alpha \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}_{\perp} = \beta \mathbf{b}_{\perp}$（见图 1a），其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是待确定的两个实比例系数，而$\mathbf{b}_{\perp}$ 是向量**b**的垂直旋转。因此，我们可以将上述方程写为：

$$\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{b} + \beta\,\mathbf{b}_{\perp}. \tag{2}$$

对**b** 和$\mathbf{b}_{\perp}$ 进行数乘，可得 $\alpha$ 和$\beta$ 系数，

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{b^2},\\ \beta &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}}{b^2}.\end{aligned}$$

我们可以将 $\mathbf{b}_{\perp}$ 写成 $\mathbf{b}_{\perp} = R\mathbf{b}$，其中 $R$ 是一个垂直旋转矩阵，因此 2 可以写成：

$$\mathbf{a} = \alpha\,I\,\mathbf{b} + \beta\,R\,\mathbf{b}, \tag{3}$$

其中 $I$ 是单位矩阵。在 3 中对**b** 进行因式分解，得到：

$$\mathbf{a} = (\alpha\,I\, + \beta\,R)\,\mathbf{b}, \tag{4}$$

其中我们可以定义：

**定义 2.1**。 向量 ***a*** 与***b***之间的除法，记作 ***a***/***b***，其中 ***b*** $\neq$ ***0***，由矩阵 $E$ 给出，

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \alpha\,I\, + \beta\,R. \tag{5}$$

如果 $V$是向量空间 $\mathcal{R}^2$，那么

$$\begin{aligned}E &= \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix} \qquad (6)\\ &= \frac{a}{b}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

矩阵 $E$ 旋转向量 **b**，然后将其模长调整为向量 **a** 的模长。特别地，当**a** $=$ **b**时， $E$ 就是通常的旋转。

在这种情况下， $E$ 的行列式（det$E$）由下式给出

$$\begin{aligned}detE &= \alpha^2 + \beta^2 \qquad (7)\\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2\end{aligned}$$

如果 $V$是向量空间 $\mathcal{R}^3$，则有

$$\begin{aligned}E &= \begin{bmatrix}\alpha & C\beta & -B\beta\\ -C\beta & \alpha & A\beta\\ B\beta & -A\beta & \alpha\end{bmatrix} \qquad (8)\\ &= \frac{a}{b}\begin{bmatrix}\cos\theta & C\sin\theta & -B\sin\theta\\ -C\sin\theta & \cos\theta & A\sin\theta\\ B\sin\theta & -A\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $A$、 $B$和 $C$是单位向量 **n**的分量，给定为：

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|} \qquad (9)\\ &= (A, B, C)\end{aligned}$$

这里，

$$\begin{aligned}detE &= \alpha\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \qquad (10)\\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^3\cos\theta.\end{aligned}$$

我们来看两个例子：

例 2.1. 设 **a** = (3, -1) 和 **b** = (2, 5) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量，求 **a/b**。

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{b^2}\\ &= \frac{1}{29}.\end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}}{b^2}$$

有两个向量与 **b** 垂直，分别是 $\mathbf{b}_{1\perp} = (-5,2)$ 和 $\mathbf{b}_{2\perp} = (5,-2)$。垂直旋转矩阵 $R$取决于我们选择哪个向量。我们选择 $\mathbf{b}_{1\perp}$，于是

$$\beta = -\frac{17}{29}$$

and

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{29}I - \frac{17}{29}R\\ &= \frac{1}{29}\begin{bmatrix}1 & 17\\ -17 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

其中 $R$ 由下式给出

$$R = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

注意，如果我们选择 $\mathbf{b}_{2\perp}$，相应的垂直旋转矩阵将是前一个矩阵的转置；另一方面，我们可以很容易地验证**a** $= E$**b**。

例 2.2。 设**a** = (3, -1, 2) 和**b** = (2, 5, 1) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量，求 **a/b**。

在这种情况下，我们发现 $\alpha = 3/30$。要找到 $\beta$，我们来求**a** 和**b**的叉积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -11\mathbf{i} + \mathbf{j} + 17\mathbf{k}$$

是

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{411}}(-11,1,17)$$

由此我们发现， $E$ 由下式给出

$$E \;=\; \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 3 & 17 & -1 \\ -17 & 3 & -11 \\ 1 & 11 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

再次可以验证，$\mathbf{a} = E\mathbf{b}$。

### 2.1 除法性质

D1: $\mathbf{a}/\mathbf{a} = I$

证明。 根据定义 2.1，我们有
$\mathbf{a}/\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}/a^2\, I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_\perp/a^2\, R$ 但是
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_\perp = 0$ and $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}/a^2 = 1$, then $\mathbf{a}/\mathbf{a} = I$. □

D2: $\mathbf{0}/\mathbf{a} = O$

证明。 根据定义 2.1，我们有
$\mathbf{0}/\mathbf{a} = \mathbf{0}\cdot\mathbf{a}/a^2\, I + \mathbf{0}\cdot\mathbf{a}_\perp/a^2\, R$ then $\mathbf{a}/\mathbf{a} = O$. □

D3: $\mathbf{a}/\mathbf{b} = (\mathbf{b}/\mathbf{a})^{-1}$

证明。 我们将通过计算乘积（$\mathbf{a}/\mathbf{a}$）（$\mathbf{b}/\mathbf{a}$）来证明这一性质，并说明它等于酉矩阵 $I$。

$(\mathbf{a}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a}) \;=\; (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/b^2\, I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_\perp/b^2\, R)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/a^2\, I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_\perp/a^2\, \acute{R})$

执行所示运算，并考虑到 $R\,R = I$ 和 $R = -R$，我们得到了预期结果。

□

D4: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})/\mathbf{c} = \mathbf{a}/\mathbf{c} + \mathbf{b}/\mathbf{c}$

证明。 根据定义，
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})/\mathbf{c} \;=\; ((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c})/c^2\, I \;+\; ((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}_\perp)/c^2\, R$

由于标量乘积遵循分配律，我们有，

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})/\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}/c^2\, I + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}/c^2\, I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_\perp/c^2\, R + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}_\perp/c^2\, R$
重新排列各项可得
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})/\mathbf{c} = \mathbf{a}/\mathbf{c} + \mathbf{b}/\mathbf{c}$, as we hope.

□

## 3 向量乘法

点积和叉积的缺陷在于，无法通过它们定义逆向量。因此，我们将在本节中定义一种新的向量乘法，通过这种乘法可以得到逆向量，并且这种乘法与此前定义的向量除法运算相一致。

**定义 3.1** （向量乘法）。 设 $V$ 是一个定义了内积的向量空间，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是其中的两个向量 $\in V$。向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的乘积（记作 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$）由矩阵 $E$ 给出，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b} &= E \\ &= \alpha\, I + \beta\, R, \end{aligned} \qquad (12)$$

其中， $I$ 是单位矩阵， $R$ 是垂直旋转矩阵， $\alpha$ 和 $\beta$ 是两个系数，定义如下：

$$\begin{aligned} \alpha &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \beta &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_\perp = \boldsymbol{a}_\perp\cdot\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

$\beta$ 系数与垂直旋转矩阵 $R$ 以及垂直向量 $\mathbf{b}_\perp$ 或 $\mathbf{a}_\perp$ 密切相关。

现在我们将根据定义 3.1 来定义逆向量。

**定义 3.2**。 设 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 是 $V$ 中的一个向量。根据定义 *3.1*，$\boldsymbol{a}$ 的逆向量（记作 $\boldsymbol{a}^{-1}$）满足

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}^{-1} \;=\; I. \qquad (13)$$

由定义 3.2 可知，$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}/a^2$，这表明向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}^{-1}$ 共线。现在来看看乘法的性质。

对于二维和三维空间，我们有

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} \;=\; a\,b\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \alpha & C\beta & -B\beta \\ -C\beta & \alpha & A\beta \\ B\beta & -A\beta & \alpha \end{bmatrix} \qquad (15) \\ &= a\,b\begin{bmatrix} \cos\theta & C\sin\theta & -B\sin\theta \\ -C\sin\theta & \cos\theta & A\sin\theta \\ B\sin\theta & -A\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这些矩阵将逆向量 $\mathbf{a}^{-1}$ ($\mathbf{b}^{-1}$) 旋转至**b(a)**的方向，然后调整其大小，将其转换为向量 **b( a)**。

由式（15）可得众所周知的向量代数关系：

$$(a\,b)^2 \quad = \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + (\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|)^2\,. \qquad (16)$$

### 3.1 乘法性质

M1：$\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^{-}1 = I$，乘法逆元。

证明。 我们将证明，存在**a** 的乘法逆元（记作$\mathbf{a}^{-1}$），使得$\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}^{-1} = I$

由于 $\alpha = 1$，这意味着 $a^{-1} = 1/a$。另一方面，因为 $\beta = 0$ 这些向量共线（即$\mathbf{a}^{-1} = k\mathbf{a}$），所以我们有$k = 1/a^2$，由此可得$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}/a^2$。

□

M2：$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$，乘法交换律。

证明。 设$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \alpha I + \beta R$，且$\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} = \acute{\alpha} I + \acute{\beta}\acute{R}$，其中$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$且$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$，$\theta$为向量**a** 和**b**的夹角。我们必须证明，$\alpha = \acute{\alpha}$、$\beta = \acute{\beta}$和$R = \acute{R}$。

根据定义，$\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$且$\acute{\alpha} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，所以$\alpha = \acute{\alpha}$。
另一方面，$\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}$且$\acute{\beta} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}$，因此$\beta = \acute{\beta}$。

在向量**a** 和**b**所在的平面内，有两个与**b** 垂直的向量（见图1b），我们将它们记为$\mathbf{b}_{\perp 1}$和$\mathbf{b}_{\perp 2}$，其中$\mathbf{b}_{\perp 1} = -\mathbf{b}_{\perp 2}$。

由于 $\beta = \acute{\beta}$，我们有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp 1} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp 2}$。如果考虑$\mathbf{b}_{\perp 1}\neq\mathbf{b}_{\perp 2}$，我们就得到 $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp 1} = 0$，这与$\mathbf{a}\neq 0$和$\mathbf{b}_{\perp 1}$在一般意义上并不垂直这一点矛盾。因此，我们关于$\mathbf{b}_{\perp 1}\neq\mathbf{b}_{\perp 2}$的假设不正确，于是$\mathbf{b}_{\perp 1} = \mathbf{b}_{\perp 2}$。

另一方面，我们有 $R\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}_{\perp 1}^{-1}$，且 $\acute{R}\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}_{\perp 2}^{-1} = \mathbf{b}_{\perp 1}^{-1}$，因此得出结论：$R = \acute{R}$，由此证明$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$。

□

M3：$\mathbf{a}\otimes\mathbf{u} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{a} = a\,I$，乘法的单位元。

证明。 我们将证明存在一个向量 **u**，使得 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{u} = a\,I$。

根据定义$\mathbf{a}\otimes\mathbf{u} = \alpha I + \beta R$，其中 $\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$且 $\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{a}_{\perp}\cdot\mathbf{u}$，但$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = a$且$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_{\perp} = 0$，因此 $u = 1/cos\theta$且 $au\,tan\theta = 0$于是

$\theta = 0$ and $u = 1$.

由于$\mathbf{u} = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\mathbf{a}^{-1}$，我们有
$\mathbf{u} = a\,I\,\mathbf{a}^{-1} = a\mathbf{a}/a^2 = \mathbf{a}/a$。
也就是说，我们得到$\mathbf{u} = \mathbf{a}/a$。 □

M4：$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{a}\otimes\mathbf{c}$，对向量加法满足分配律。

证明。 根据定义
$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})\,I + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})_{\perp}\,R$。
由于点积满足分配律，因此有$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\;I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\;I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}\,R + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_{\perp}\,R$

$$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}\,R) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_{\perp}\,R).$$

Then
$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{a}\otimes\mathbf{c}$.

□

M5：$\mathbf{a}\otimes k\,\mathbf{b} = k\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$，关于数乘是线性的，其中 $k\in\mathbb{R}$。

证明。 根据定义，$\mathbf{a}\otimes k\,\mathbf{b} = \alpha I + \beta R$，其中$\alpha = \mathbf{a}\cdot k\mathbf{b} = k\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$且 $\beta = k\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}$则
$\mathbf{a}\otimes k\mathbf{b} = k\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,I + k\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}\,R = k\,(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$ □

M6: $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = O$, then either $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ or $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

证明。 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = O$，意味着 $\alpha = 0$ 且 $\beta = 0$或 $ab(cos\theta - sin\theta) = 0$ 对于任意 $\theta$，则必然 $a = 0$ 或 $b = 0$，这意味着$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或$\mathbf{b} = \mathbf{0}$。

□

现在来看两个乘法的例子。为此，我们回到例 2.1 和 2.2 中的向量。

例 3.1. 设**a** = (3, -1) 和**b** = (2, 5) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量，求$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$。

$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\;I + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp}\,R$，其中$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1$且$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp} = -17$（我们选择$\mathbf{b}_{\perp} = (-5,2)$）。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{then}$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -17 & 1 \end{bmatrix}.$$

如果$\mathbf{b} = 1/29\,(2,5)$（**b** 的向量逆元），那么我们可以看到$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$与例 2.1 中的除法相符，正如我们所预期的那样。

例 3.2. 设**a** = (3, -1, 2) 和**b** = (2, 5, 1) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的两个向量，求$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$。

$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = 3\,I + \sqrt{411}\,R$,
分别为 $\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$和 $\beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{\perp} = \sqrt{411}$

$$R = \frac{1}{\sqrt{411}} \begin{bmatrix} 0 & 17 & -1 \\ -17 & 0 & -11 \\ 1 & 11 & 0 \end{bmatrix},$$

then

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & -1 \\ -17 & 3 & -11 \\ 1 & 11 & 3 \end{bmatrix}.$$

如果 $\mathbf{b} = 1/30\,(2,5,1)$（$\mathbf{b}$ 的逆向量），那么我们可以看到，$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ 与例 2.2 中的除法相符。

## 4 结论

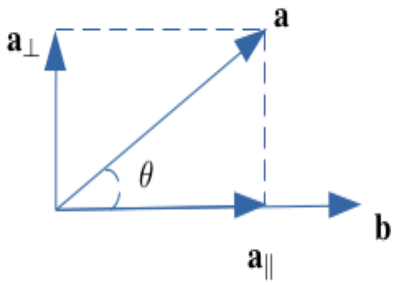
在向量代数的框架下，可以定义向量空间 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^3$ 中向量之间的除法，其定义为一个矩阵。这个矩阵表示旋转与缩放。也可以定义相应的乘法，它同样表示旋转。逆向量是通过这种乘法定义的，并由此可以得到除法。本文给出了向量之间除法和乘法的基本性质，这些性质类似于数的运算性质，并附有相应的证明。我们将继续研究这些运算及其在物理学中的应用。我们认为，它们可以与群论联系起来。

## 参考文献

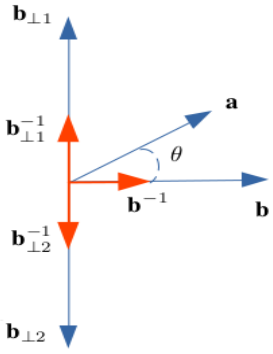
[1] GOLDSTEIN, H. 经典力学. Reverté，2018年。

[2] HESTENES, D. 经典与量子物理中的向量、旋量与复数。《美国物理学杂志》第*39*卷，第9期（1971年），1013–1027。

[3] MAY, K. O. 三维空间中向量除法代数的不可能性。《美国数学月刊》第*73*卷，第3期（1966年），289–291。




(a) 按照方向分解向量**a**与**b**平行和垂直




(b) 展示向量**b**、它的逆向量（$\mathbf{b}^{-1}$），以及两种可能的与它垂直的向量（$\mathbf{b}_{\perp 1}$、$\mathbf{b}_{\perp 2}$）。图中还展示了这两种逆向垂直向量。

图1：图1a展示了向量**a** 的分解，从而可以定义向量**a**与**b**之间的除法；图1b展示了向量**b**的逆向量和垂直向量。