从布尔函数的面特征与点特征重新思考 NPN 分类

张家玺[1]*、Shenggen Zheng[2]*、倪立伟[2, 3]*、李华伟[3,4] 和罗国杰[1]北京大学能源高效计算与应用中心，中国北京[2]鹏城实验室，中国深圳[3]中国科学院大学，中国北京[4]中国科学院计算技术研究所，中国北京 邮箱：zhangjiaxi@pku.edu.cn、zhengshg@pcl.ac.cn、nlwmode@gmail.com、lihuawei@ict.ac.cn、gluo@pku.edu.cn

arXiv:2301.12122v1 [cs.CC] 28 Jan 2023

摘要—NPN 分类是数字电路设计与验证中的一项重要问题。大多数现有研究探索了变量对称性和余因子签名，以开发分类方法。然而，余因子签名仅考虑布尔函数的面特征。本文提出一种新的 NPN 分类器，同时利用布尔函数的面特征与点特征，包括余因子、影响度和敏感度。该新方法为布尔函数分类提供了新的视角。分类器只需计算若干签名，而对应签名相等是 NPN 等价的必要条件。因此，这些签名可直接用于 NPN 分类，从而避免穷举变换枚举。实验结果表明，所提出的 NPN 分类器在速度相当的情况下，具有更高的 NPN 分类准确率。

索引词—**NPN分类器、余因子、影响度、敏感度**

I. 引言

布尔函数分类是将一组布尔函数划分为若干等价类。否定-置换-否定（NPN）等价是最常用的一种等价关系，涉及输入取反、输入置换和输出取反等变换。它在逻辑综合、工艺映射和验证中有重要应用。彼此 NPN 等价的布尔函数构成一个 NPN 等价类。

过去几十年来，布尔匹配与分类得到了广泛研究。以往的方法可分为三类：基于布尔可满足性（SAT）的算法、利用特征剪枝进行搜索的算法，以及基于规范形式的算法。基于 SAT 的方法能够处理输入变量数量较多的布尔函数，但由于 NP 完全性而速度较慢 [1]。利用特征剪枝进行搜索的算法通常用于成对匹配。布尔函数的特征是一种紧凑表示，用于刻画某些内在结构，并作为布尔匹配的必要条件。由行和 [2] 和余因子 [2]–[5] 导出的特征是两种常见类型，已得到广泛研究。Zhang等人 [6] 探索了敏感度特征，以进行进一步剪枝。沃尔什 [7] 和哈尔 [8] 等谱也被用作布尔匹配的特征。

基于规范形式的算法在 NPN 分类中最能体现其优势。规范形式是 NPN 等价布尔函数的一个代表，两个函数当且仅当它们的规范形式相同时才匹配。这些算法通过为布尔函数设计完备且唯一的规范形式，然后尝试计算每个布尔函数的规范形式，以检查其是否满足 NPN 等价。许多研究在构造规范形式时考虑了相位分配 [9],变量对称性 [10],[11] 和高阶对称性 [5], [12], [13]。Abdollahi等人 [3] 利用余因子特征定义基于特征的规范形式。Zhou 等人 [14]结合余因子特征与不同类型的对称性，设计了混合规范形式。

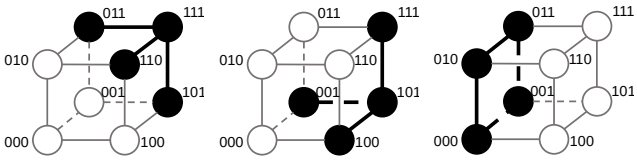
从布尔函数的超立方体视角来看，余因子只包含超立方体的面特征。在设计 NPN 分类器时，如果仅考虑面特征，就很难确保分类准确率。为了提高分类准确率或实现精确分类，通常需要进行穷举变换枚举。本文提出了一种新的 NPN分类方法，同时考虑布尔函数的面特征和点特征，即敏感度 [15]和影响度 [16]。直观地说，余因子考察超立方体的一个面，并统计该面上取相同值的点数；而敏感度考察超立方体的一个点，并统计其相邻点中取值与该点不同的点数。本文的主要贡献总结如下：

- 我们将布尔敏感度和影响度引入 NPN 分类。我们深入分析了这两种特征与余因子之间的关系，以阐明它们各自不同的性质。它们为 NPN 分类带来了新的视角。
- 我们基于这两种特征设计了一些特征向量，并给出这些向量的一些证明，以指导 NPN 等价性检查。
- 我们基于这些特征向量开发了一种新的 NPN分类器。计算特征后，该分类器无需枚举变换即可直接获得 NPN等价类。同时，该分类器的运行时间稳定，不会因布尔函数集不同而产生波动。

II. 面特征与点特征

本节介绍一些常用的记号和概念，然后介绍我们 NPN 分类器所使用的三种特征。

*这些作者对本项工作作出了同等贡献。



(a) 三数多数 f_1。 (b) f_2。 (c) f_3。

图 1：三个三变量布尔函数对应的超立方体。三输入多数逻辑 f_1 和 f_2 是NPN等价的，其诱导子图（加粗部分）同构。 f_2 和 f_3 不具备NPN等价性，其诱导子图不同构。

A. 符号与基本概念

一个 n 变量布尔函数 $f(X)$：$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$，将宽度为 n 的二进制字 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 映射为一个二进制值。在 f 中，变量 x_i 或其补变量 $\bar{x}_i$ 称为文字，而 i 表示其索引。最小项是由不同变量的 n 个文字合取而成的。

真值表 $T(f)$ 是一个由 2^n 位组成的二进制串，是布尔函数 f 的一种常用表示。$T(f)$ 的第 i 位等于 $f((i)_2)$，其中 $(i)_2$ 是整数 i 的小端序二进制编码。超立方体的子图也可以表示一个布尔函数。超立方体 Q_n 是一个阶为 2^n 的图，其顶点包括所有最小项，边连接恰好在一个变量上不同的顶点。布尔函数 f 可以表示为 Q_n 的诱导子图。图 1a 展示了超立方体 Q_3，而这些 • 个节点及其之间的边构成了三输入多数逻辑的诱导子图。

布尔函数的 NP 变换由变量的否定和置换构成。否定记作 $\neg$，它将一个变量替换为其补值（例如，$x_1 \to \neg x_1$）。此外，我们将 $(\neg)$ 记作选择性取反。为简便起见，我们用 $(\neg)X = (\neg)x_1(\neg)x_2\cdots(\neg)x_n$来描述对字 X 的选择性取反（例如，对于 $(\neg)(x_1x_2) = x_1x_2$，有 $(\neg)x_1 = x_1$ 和 $(\neg)x_2 = x_2$）。置换记作 π，表示对变量重新排序（例如，$\pi(x_1x_2) = x_2x_1$）。此外，我们用 $X_{(i)}$ 表示第 i 个最小项，用 X^i 表示对 X中的第 i 个变量取反。

函数 f 的满足计数是诱导子图中的节点数，记作 $|f|$。若 $|f| = |\bar{f}| = 2^{n-1}$，则称一个 n 输入的 f 为平衡。图 1 展示了三个平衡的 3 输入布尔函数。

B. 面特征——余因子

余因子是通过将某些输入变量替换为常数值得到的布尔函数，在过去几十年中，它已在布尔匹配和分类领域得到了广泛研究 [2]–[5], [11] 。

定义 1. *(*余因子*)*。 f 关于文字 x_i 和 x_i 的余因子 分别记作 $f_{x_i=1}$ 和 $\overline{f}_{x_i=0}$。

定义 2。（余因子签名）。余因子特征包括满足计数以及各余因子的满足计数。特别地，布尔函数的满足计数称为零元余因子签名。一元余因子签名是针对每个文字的余因子满足计数所组成的集合。高元余因子签名（又称高阶余因子签名）由针对一组变量的余因子满足计数组成。

超立方体中的面表示布尔函数针对一个或多个变量的余因子。在图 2a 中，蓝色的面是 $f_{x_1=0}$。此外，图 2b 中的蓝色面表示余因子 $f_{x_1x_2=00}$。因此，余因子签名是超立方体的面上的 1最小项数量。它们体现了布尔函数的**面特征**。高元余因子签名对应低元面。可以通过余因子推导对称性；对称性也可以视为布尔函数中面的性质。

C. 点特征——敏感度

敏感度考察超立方体上的一个点，并统计与该点相邻且取值不同的点的数量。

定义 3. (敏感)。给定一个字 X，若布尔函数f 在字 X的文字 x_i 处是敏感 的，即当 x_i 翻转时输出也发生翻转（即 $f(X) \neq f(X^i)$），则称之为敏感。

以图 1a 中三输入多数逻辑 f_1 的字 X=*100* 为例。如果第二位翻转， f_1 也会翻转。因此，对于字 *100*， f_1 在 x_2 处是敏感的。

定义 4.（敏感度）。 f 在给定字 X 上的敏感度（又称局部敏感度），是对 X 敏感的输入文字的数量： $sen(f, X) = |i: f(X) \neq f(X^i)|$。进一步地， f 的敏感度为 $sen(f) = \max\{sen(f, X): X \in \{0,1\}^n\}$。 f 的 0-敏感度为 $sen^0(f) = \max\{sen(f, X): X \in \{0,1\}^n, f(X) = 0\}$，而 f 的 1-敏感度为 $sen^1(f) = \max\{sen(f, X): X \in \{0,1\}^n, f(X) = 1\}$。

敏感度反映了相邻点之间的关系。在图2c中，局部敏感度 $sen(f,$ 110)表示蓝色点与其相邻点之间的性质。因此，敏感度特征包含了布尔函数的**点特征**。

D. 点-面特征——影响度

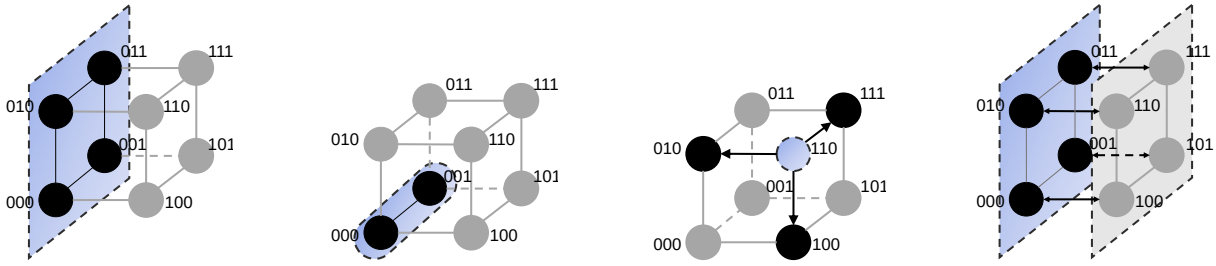
影响度是指一个面中的点与其对面上对应点取值不同的概率。

定义5。(影响度)。布尔函数 f 关于输入 x_i 的影响度定义为：对于字 X， f 在 x_i处敏感的概率： $inf(f, i) = \Pr_{X\in\{0,1\}^n}[f(X) \neq f(X^i)] = \frac{1}{2^n}|f(X) \neq f(X^i): X \in \{0,1\}^n|$ [1]。此外， f 的总影响力 可进一步定义为$inf(f) = \sum_{i=1}^n inf(f, i)$。

布尔影响度源于敏感性的定义。敏感属性刻画了相邻点之间的关系。影响度表示两个相对面之间的敏感属性。它计算一个面中与相对面取值不同的最小项数量。如图 2d 所示，变量 x_1 的影响度体现在蓝色面和灰色面上。因此，影响力特征包含了布尔函数的**点-面特征**。

从上述分析可以看出，布尔函数的影响度和敏感度特征所包含的结构信息

[1]为方便起见，在本文余下部分，我们记 $inf(f, i) = \frac{1}{2^n}|f(X) \neq f(X^i) \quad X \in \{0,1\}^n|$ $|f(X) \neq f(X^i)$ ( ) ( ) : 。显然，( ) ( ) : $X \in 0, 1^n|$ 是一个偶整数。例如，如果 f(000) $\neq f$(100)，那么 f(100) $\neq f$(000)。去掉因子 $\frac{1}{2^n}$ 后， $inf(f, i)$ 将是一个整数。计算整数比计算浮点数更容易。



(a) 余因子。 (b) 二元余因子。 (c) 敏感度。 (d) 影响度。

图 2：余因子、影响度和敏感度签名可视化。

与余因子特征相比，提供了不同的视角。以往的大多数研究只考虑了余因子特征在构建 NPN分类方法中的作用，却忽略了影响度和敏感度特征。这两种特征在指导 NPN 分类方面具有很大潜力。我们将在接下来的两个部分中对其进行探讨。

III. 特征向量与 NPN 等价

在本节中，我们首先根据布尔函数的点特征与面特征设计若干特征向量，然后给出关于这些特征向量与 NPN 等价的一些定理及其证明。

A. 特征向量

我们可以根据面特征与点特征的定义，进一步定义若干特征向量。

定义 6。（有序余因子向量）。 n 变量布尔函数 f 的一元有序余因子向量为$OC\ V_1 = \{|f_{z=v}|$: $z \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $v \in \{0,1\}\}_{\leq}$，其中 $\{\cdot\}_{\leq}$ 是按非递减顺序排列的多重集（包含所有余因子的可满足计数），且 $|OC\ V_1| = 2n$。此外， ℓ元有序余因子向量是 n 变量布尔函数 f 的有序多重集$OC\ V_\ell = \{|f_{z=v}|$: $z \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}_\ell$, $v \in \{0,1\}^\ell\}_{\leq}$，其中 $Z_\ell = \{z \subseteq Z$: $|z| = \ell\}$，且 $|co\ f_\ell| = \binom{n}{\ell} \cdot 2^\ell$。

定义 7. (有序影响度向量）。布尔函数 f的有序影响度向量$(f) = \{inf(f, z)$: $z \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}\}_{\leq}$。

定义 8.（有序敏感度向量）。对于真值表 $T(f)$ 中的所有字X，我们将排序后的多重集$OSV(f) = \{sen(f, X)$: $X \in \{0,1\}^n\}_{\leq}$称为函数 f 的有序敏感度向量。同理，我们可以定义 $OSV^0(f) = \{sen(f, X)$: $X \in \{0,1\}^n, f(X) = 0\}_{\leq}$为有序 0-敏感度向量，以及 $OSV^1(f) = \{sen(f, X)$: $X \in \{0,1\}^n, f(X) = 1\}_{\leq}$为有序 1-敏感度向量。显然，我们有 $OSV(f) = \{OSV^1(f)\ OSV^0(f)\}_{\leq}$。

定义 9。（敏感度距离）。汉明距离$h(X, Y)$ 是用于比较两个二进制字符串X 和 Y的度量。它表示X 和 Y 在比特位置上不同的数量。敏感度距离定义为具有相同局部敏感度的两个字 X 和 Y 之间的汉明距离，记作元组 $\{\langle sen(f, X)\ sen(f, Y)\ h(X, Y)\rangle | sen(f, X) = sen(f, Y)\}$。

定义 10.（有序敏感度距离向量）。对于给定的 n 变量布尔函数 f，我们定义 $OSDV(f) = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，其中 $\sigma_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{in})$ 且 $\delta_{ij} = |\{(X, Y)$: $sen(f, X) = sen(f, Y) = i$, $h(X, Y) = j$，并且 $X < Y\}|$。 δ_{ij} 是敏感度为 i 且距离为 $h(X, Y) = j$ 的数对 (X, Y) 的数量。类似地，我们可以基于定义 4 定义 $OSDV^1(f)$ 和 $OSDV^0(f)$。

表 I：不同特征向量的示例。

特征向量	f_1 见图 1a	f_3 见图 1c
OCV_1	(1,1,1,3,3,3)	(0,2,2,2,2,4)
OCV_2	(0,0,0,1,1,1,1,1,1,2,2,2)	(0,0,0,0,1,1,1,1,2,2,2,2)
OIV	(2,2,2)	(0,0,4)
OSV^1	(0,2,2,2)	(1,1,1,1)
OSV^0	(0,2,2,2)	(1,1,1,1)
OSV	(0,0,2,2,2,2,2,2)	(1,1,1,1,1,1,1,1)
$OSDV^1$	(0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0)	(0,0,0,4,2,0,0,0,0,0,0,0)
$OSDV$	(0,0,1,0,0,0,6,6,3,0,0,0)	(0,0,0,12,12,4,0,0,0,0,0,0)

表 I 展示了图 1 中两个 3 输入布尔函数的不同特征向量示例。我们将用这个例子进一步说明如何得到 $OSDV^1$。对于图 1a 中的 f_1，不存在任何字 X，使得 $sen^1(f, X) = 1$ 且 $sen^1(f, X) = 3$。此外，只有一个字 $X = 111$ 满足 $sen^1(f, X) = 0$。因此，$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_3 = (0, 0, 0)$。对于局部敏感度等于 2 的三个字 011、101 和 110，根据定义 10，我们可以得到 $\delta_{21} = 0$、$\delta_{22} = 3$ 和 $\delta_{23} = 0$ 。总之，$OSDV^1(f_1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0)$。

B. 特征向量与 *NPN* 等价

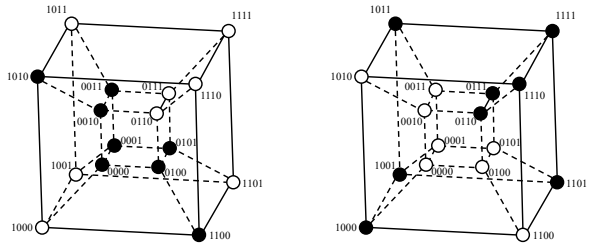
先前的研究 [3] 已证明，OCV_ℓ 相等是 NPN 等价的前提，因此本小节仅考虑 OIV、 OSV和 $OSDV$。布尔函数的敏感属性本身已考虑输出的极性（输出取反）。对于非平衡布尔函数，我们只需考虑输入相位赋值和输入变量顺序。也就是说，NPN 等价问题可简化为 PN 等价问题。因此，为了给出以下定理，我们只需关注 PN 等价。

引理1. 如果布尔函数 f 与布尔函数 g是 *PN* 等价的，即 $f(\pi((\neg)x)) = g(x)$，那么对于任意输入 i，都有 $inf(f, \pi((\neg)i)) = inf(g, i)$。

证明. 如果 f与 g是 *PN* 等价的，显然 $inf(g, i) = \frac{1}{2}|g\ X \neq g\ X^i \quad X \in \{0,1\}^n| = \frac{1}{2}|f\ \pi\ \neg X \neq ()\ ():((())\ ((()))\ :)\ (,((()))\ f\ \pi\ \neg X^i \quad X \in \{0,1\}^n\ | = inf\ f\ \pi\ \neg i$.

定理1。 两个 *PN* 等价函数 f 和 g 具有相同的有序影响度向量：若 f 与 g*PN* 等价，则 $OIV(f) = OIV(g)$。

证明。 根据定义*5*和引理*1*，很明显，对一个变量进行否定不会改变其影响度，并且



(a)$OSV^1(f) = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3\}$ $OSV^0(f) = \{0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3\}$。 (b)$OSV^1(g) = \{0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3\}$ $OSV^0(g) = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3\}$。

图 3：两个 NPN等价的平衡布尔函数。$OSV^1(f) = OSV^0(g)$ 和 $OSV^0(f) = OSV^1(g)$ 在这两个函数中。

$inf(f, \pi(i)) = inf(g, i)$ 在变量 x_i 的置换下。因此，如果两个函数f 和 g 彼此 *PN* 等价，则有序的 OIV 不会改变。

引理 2. 如果布尔函数 f 与布尔函数 g是 *PN* 等价的，即 $f(\pi((\neg)x) = g(x)$，那么对于任意输入 X，都有 $sen(f, \pi((\neg)X)) = sen(g, X)$。

证明。 由于 $f(\pi((\neg)x_1, (\neg)x_2, \cdots, (\neg)x_n)) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，显然，如果 f对输入字 $\pi((\neg)X)$在索引 i 处敏感，那么 g 对输入字 X 在索引 j 处敏感，其中 $\pi(j)$=i。敏感属性本身就考虑了变量的否定，因此翻转输入不会改变布尔函数的敏感度。

例如，设 $f(x)$ 是一个 *4* 位布尔函数，置换为 $\pi(x_1x_2x_3x_4) = x_4x_3x_2x_1$，选择性否定为 $(\neg)x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2\overline{x_3}x_4$，且 $\overline{f(\pi((\neg)x_1x_2x_3x_4))} = f(x_4, x_3, x_2, x_1) = g(\overline{x_1}, x_2, x_3, \overline{x_4})$。假设 f对字 $(x_4, x_3, \underline{x_2}, x_1)$ 在索引 *2* 处敏感（即 x_3 所在的位置），则有 $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \neg f(x_4, \underline{x_3}, x_2, x_1) = \neg g(x_1, \underline{x_2}, x_3, x_4)$。函数 g对输入字 (x_1, x_2, x_3, x_4) 在索引 $3=\pi(2)$ 处敏感。

因此，对于任意 X, $sen(f, \pi((\neg)X)) = sen(g, X)$。

定理 2. 两个 *PN* 等价的非平衡函数 f和 g 具有相同的有序敏感度向量、有序 *0*-敏感度向量和有序 *1*-敏感度向量：若 f与 g*PN* 等价，则 $(OSV, OSV^0, OSV^1)(f) = (OSV, OSV^0, OSV^1)(g)$。

Zhang 等人等 [6]证明了一个类似的定理。然而，他们忽略了平衡布尔函数。图 3 中的两个布尔函数是NPN等价的。对于这两个函数，$OSV^1(f)$=$OSV^0(g)$ 和 $OSV^0(f)$=$OSV^1(g)$。我们将 1- 敏感度和 0- 敏感度分开，以处理平衡布尔函数。给定两个 NPN等价的非平衡布尔函数 f 和 g，很容易检查 g 是否由 f 经过否定变换得到。我们可以利用这些函数的零元余因子找出可能的否定。然而，如果 f 和 g 是平衡的，仅凭它们的零元余因子无法确定可能的否定。在这种情况下，我们计算这些函数的 1-敏感度和 0-敏感度，以处理可能的否定。

定理 3. 给定两个平衡布尔函数 f 和g，若 f与 g *NPN* 等价，则 $OSV^1(f)$=$OSV^1(g)$、$OSV^0(f)$=$OSV^0(g)$ 或 $OSV^1(f)$=$OSV^0(g)$，$OSV^0(f)$=$OSV^1(g)$。

证明。根据定理 *2*，若 f 与 g*PN* 等价，即 $f(\pi((\neg)x)) = g(x)$，则有 $OSV^1(f) = OSV^1(g)$ 和 $OSV^0(f) = OSV^0(g)$。若 $\neg f(\pi((\neg)x)) = g(x)$，显然 $OSV^0(f) = OSV^1(g)$ 和 $OSV^1(f) = OSV^0(g)$。

为在算法中处理平衡布尔函数，如果 $OSV^1(f)$ 小于 $OSV^0(f)$，我们将交换这两个向量，并始终将较小的那个放在 $OSV^0(f)$ 中。

引理 *3.* 给定两个输入 X 和 Y，如果 f 与 g *PN* 等价，那么 $\langle sen(f, \pi((\neg)X)), sen(f, \pi((\neg)Y)), h(\pi((\neg)X), \pi((\neg)Y))\rangle = \langle sen(g, X), sen(g, Y), h(X, Y)\rangle$。

证明。 容易看出，$h(X, Y) = h(\pi((\neg)X, (\neg)Y))$。根据引理 *2* 和定义 *9*，定理得证。

定理 *4.* 两个 *PN* 等价的非平衡函数f 和 g 具有相同的有序敏感度距离向量、有序 *0*-敏感度距离向量和有序 *1*-敏感度距离向量：如果 f 与 g *PN* 等价，那么 $(OSDV, OSDV^0, OSDV^1)(f) = (OSDV, OSDV^0, OSDV^1)(g)$。对于两个平衡布尔函数 f 和 g，如果 f 与 g *NPN* 等价，那么$OSDV^1(f) = OSDV^1(g)$, $OSDV^0(f) = OSDV^0(g)$ 或 $OSDV^1(f) = OSDV^0(g)$, $OSDV^0(f) = OSDV^1(g)$。

证明。给定两个输入 x 和 y，若 f 与 g是 *PN*-等价的，根据引理 *3*，我们有$\langle h(X, Y), sen(f, X), sen(f, Y)\rangle = \langle h(X', Y'), sen(g, X'), sen(g, Y')\rangle$，其中 X' 和 Y' 分别是 X 和 Y的 *NP* 变换。根据定义 *9* 和定义 *10*，显然，对于非平衡布尔函数 f和 g，有 $(OSDV, OSDV^0, OSDV^1)(f) = (OSDV, OSDV^0, OSDV^1)(g)$。类似于定理 *3* 的证明，我们可以证明该定理中关于平衡布尔函数的其余结论。

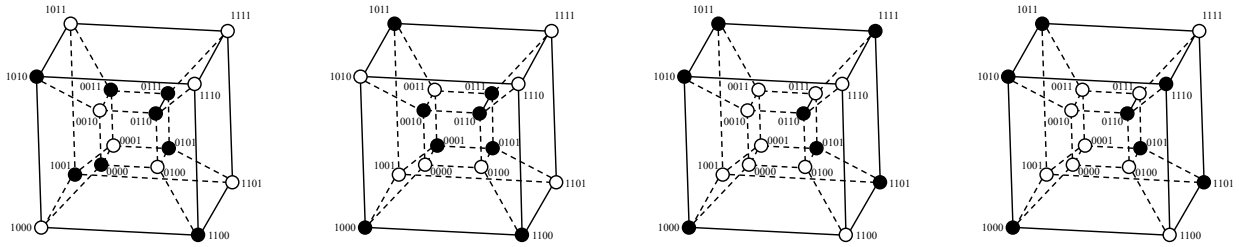
IV. 分类器

本节首先展示影响度和敏感度特征向量对 NPN 分类的作用，然后介绍我们的分类算法。

A. 签名向量选择

所有余因子签名向量的 arity 均已被证明构成一种规范形式 [3]。然而，计算所有 arity 的余因子特征十分耗时。接下来，我们将展示 OIV、OSV 和 $OSDV$ 是在 OCV_1 和 OCV_2 上判定 NPN 不等价的强判别器。

图 4 展示了两对彼此不等价的 4 输入布尔函数 g_1, g_2 和 h_1,h_2 的四个超立方体。OC $V_1(g_1)$=OC $V_1(g_2)$=(3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5) 和 OC $V_2(g_1)$=OC $V_2(g_2)$=(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3) 分别相同。然而，这两个函数的 $OIV_1(g_1)$=(6, 6, 6, 8) 和 $OIV_2(g_2)$=(2, 6, 6, 8) 不同。有序影响度向量能够区分无法通过 OCV_1 和 OCV_2 分类的彼此不等价的布尔函数。此外，OC $V_1(h_1)$= OC $V_1(h_2)$=(2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5)、OC $V_2(h_1)$=OC $V_2(h_2)$=(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) 和 OI $V_1(h_1)$=OI $V_1(h_2)$=(3, 5, 5, 5) 分别相同。但这两个函数的 $OSV^1(h_1)$=(2, 2, 2, 2, 3, 3, 4) 和 $OSV^1(h_2)$=(1, 2, 3, 3, 3, 3, 3)



(a) $g_{1\circ}$ (b) $g_{2\circ}$ (c) $h_{1\circ}$ (d) $h_{2\circ}$

图 4：两对不等价的 4 输入布尔函数 g_1、 g_2 和 h_1、 h_2 的超立方体。

算法 1 NPN 分类器

输入：输入变量 n**，真值表集合** tts**输出：NPN 等价类 1：对于** tts **中的** tt **，执行 2：获取** OCV_1**(**tt**) 和** OCV_2**(**tt**)；3：获取** OIV**(**tt**)；4：获取** OSV**(**tt**)；5：使用** OSV**(**tt**) 计算** $OSDV$**(**tt**)；6：使用** OCV_1**(**tt**)、** OCV_2**(**tt**)、**OIV_1**(**tt**)、** OSV**(**tt**) 和** $OSDV$**(**tt**) 构造** MSV**(**tt**)；7：**$class \leftarrow hash$**(**MSV**(**tt**))；8：结束循环**

彼此不同。因此，有序敏感度向量能够区分那些无法通过 OCV_1 和 OCV_2分类的非等价布尔函数。更多评估结果见第 V-B 节。

B. 分类方法

根据上文提到的余因子、影响度和敏感度的性质，以二进制串作为表示来计算特征非常方便。我们采用 [17] 中的若干位运算技巧，以快速计算特征。例如，要计算某个文字的余因子签名，只需保留真值表中相关的位，并统计其中 1 的数量。

算法 1 给出了 NPN 分类的整体算法。首先，我们根据上述定义计算若干特征向量（第 2 至第 5 行）。然后，构造 MSV（混合签名向量）（第 6 行）。最后，使用哈希函数完成该布尔函数的分类（第 7 行）。为节省运行时间，我们可以用 OSV^1、OSV^0 替代 OSV，并用 $OSDV^1$、 $OSDV^0$ 替代$OSDV$。对于平衡布尔函数，需要注意的是，应根据定理 4 构造不同的 OSV。大多数 NPN 分类方法首先利用余因子特征和层次对称性定义一种规范形式，然后提出复杂的算法来计算该形式。布尔函数的对称性各不相同，这进一步增加了复杂度。我们的分类方法只需通过位运算和哈希即可完成分类。

V. 实验评估

A. 设置

我们使用 C++ 实现了分类算法，并将我们的工作与一些最先进的 NPN 分类研究进行了比较。所有实验均在一台配备 60GB 内存的英特尔至强双 CPU 20 核计算机上运行。基准测试的输入由一组需要按照 NPN 等价进行分类的布尔函数（以真值表形式表示）组成。输出包括等价类的数量以及分类后的真值表。

我们使用 EPFL 基准测试 [18] 来测试我们算法在实际综合应用中的有效性。我们通过割枚举从这些基准测试中提取真值表，并删除真值表相同的布尔函数。

B. 特征向量评估

我们评估每个特征向量部分及其不同组合的有效性。表 II 展示了结果。第三列中的精确类别数是在 $n \leq 6$ 时使用 Kitty 运行得到的，而在 $n > 6$时使用 [19] 中的精确版本运行得到的。总体而言，余因子特征在分类方面比影响度更有效，但不如敏感度。影响度与敏感度签名向量的组合优于余因子签名向量。当 $n \leq 7$时，该组合可实现精确分类。因此，点特征和面特征具有不同的属性，将它们结合起来可以有效完成 NPN 分类。

*C. NPN*分类器评估

我们评估了所提出的分类算法，并将结果与 EPFL逻辑综合库中的 Kitty [21]以及几种最先进的工作 [13], [14], [20], 进行比较。这些工作在 ABC [19] 中实现为命令 `testnpn` ，并使用不同的参数。由于 [14] 中的一些方法会在最后通过穷举进行精确分类，为了公平比较，我们修改了 ABC 并移除了这部分。表III展示了结果。Kitty 能够实现精确的 NPN 分类，但运行速度较慢，并且在 $n > 6$时无法运行。当$n \leq 5$时，命令 `testnpn -7` 会失败。因此，我们省略了这些结果。 $n \leq 6$ 时使用 Kitty 运行的精确类别数量，以及 $n > 6$时 [19] 中的精确版本。我们的分类算法在保持相同分类准确率的同时，相较于 Kitty（6 位）最高可实现 325 倍加速。尽管 [13]中的算法速度极快，但其分类准确率不高。 [20] 和 [14] 中的算法则在速度和分类准确率方面均有所提升。

以往的分类方法需要规范形式和计算算法来获取 NPN 等价类。这类方法的运行时间与布尔函数的性质有关，例如对称性。如果布尔函数的性质较差，规范形式的计算就会变得复杂，导致运行时间不稳定。本文提出的分类器只需进行按位计算和哈希操作，因此运行时间仅与位宽和布尔函数总数有关

表 II：使用不同特征向量进行分类的结果。

n	#精确类别	#类别 作者：OIV	类别数 作者：OCV_1	类别数 作者：OSV	类别数（作者：OIV+OSV	按类别数 OCV_1+OSV	按类别数 OCV_1+OCV_2 +OSV	按类别数 OIV+OSV +$OSDV$	类别数 按全部
4	49	28	41	48	48	49	49	49	**49**
5	312	173	251	305	310	311	311	312	**312**
6	1673	1175	1380	1619	1654	1668	1671	1673	**1673**
7	6071	5224	5498	5985	6052	6057	6057	6052	**6071**
8	48895	44497	44183	48584	48876	48876	48876	48877	48887
9	92741	87485	87080	92381	92721	92723	92723	92721	92725
10	184832	178155	177799	184428	184794	184794	184795	184796	184796

表III：不同 NPN分类器的运行时间和准确率比较。

n	#函数	#精确类别	Kitty		testnpn -6 [13]		testnpn -7 [20]		testnpn -11 [14]		**Ours**	
			#类别	Time	#类别	Time	#类别	Time	#类别	Time	#类别	Time
4	1146	49	49	0.031	251	0.0003	-	-	52	0.0024	**49**	**0.0013**
5	6824	312	312	0.858	1586	0.0026	-	-	322	0.015	**312**	**0.0049**
6	28672	1673	1673	39.453	7375	0.006	1752	0.021	1690	0.046	**1673**	0.121
7	80123	6071	-	-	23318	0.216	6249	0.067	6115	0.194	**6071**	0.773
8	480516	48895	-	-	190708	0.13	50066	0.554	49577	4.701	48887	12.350
9	691474	92741	-	-	278090	0.296	94283	1.438	93575	128.926	92725	**51.86**
10	1153464	184832	-	-	500911	0.881	187117	4.193	186098	1329.995	184796	**318.56**

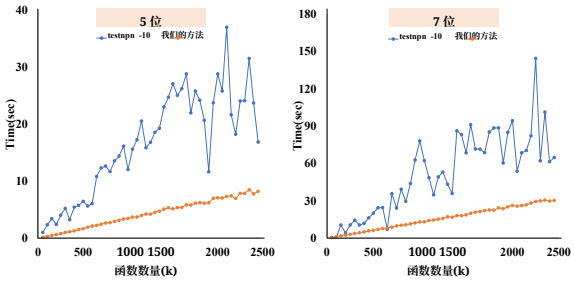


图5：我们的分类器具有稳定的运行时间。

。图5展示了我们的分类器和`testnpn -11` 在随机生成的 5 位和 7 位布尔函数上的测试运行时间。横轴表示生成的布尔函数数量。对于每个位数，我们随机生成固定数量的真值表采用连续二进制编码的布尔函数。图中显示，我们的分类器运行时间与布尔函数总数几乎呈线性关系，而`testnpn -11`的运行时间则会随着布尔函数集合的不同而大幅波动。实际上，我们的分类器无法返回精确匹配的解。影响度和敏感度仍有很大的潜力，可扩展至传统方法以实现精确的 NPN 分类；我们将在未来对此进行探索。

VI. 结论

本文从布尔函数的面特征与点特征角度重新审视了 NPN 分类问题。我们引入了布尔敏感度和影响度这两个概念，用于描述NPN分类中的点特征和面—点特征。我们基于这两种特征设计了一些特征向量。结合余因子特征，我们开发了一种仅依赖特征向量计算的新型分类器。实验表明，与速度相当且稳定的现有方法相比，所提出的NPN分类器具有更高的NPN分类准确率。

国家重点研发计划（项目编号：致谢

本工作部分得到国家自然科学基金（项目编号：62090021）和 2022YFB4500500）的资助。Shenggen Zheng 部分感谢鹏城实验室重大重点项目的支持。

参考文献

[1] M. Soeken等人，“使用AIG和LEXSAT对大型函数进行启发式NPN分类”，载于SAT。Springer，2016年，第212–227页。[2] D. Chai等人，“构建更优秀的布尔匹配器和对称性检测器”，载于DATE，2006年，第1–6页。[3] A. Abdollahi等人，“利用布尔函数基于特征的规范形式进行对称性检测和布尔匹配”，IEEE TCAD，第27卷，第6期，第1128–1137页，2008年。[4] G. Agosta等人，“布尔匹配的变换参数化方法”，IEEE TCAD，第28卷，第6期，第805–817页，2009年。[5] X. Zhou等人，“利用广义对称性实现快速可调的NPN分类”，ACM TRETS，第12卷，第2期，第1–16页，2019年。[6] J. Zhang等人，“基于敏感度特征剪枝的增强型快速布尔匹配”，载于ICCAD，2021年，第1–9页。[7] E. M. Clarke等人，“大型布尔函数的谱变换及其在工艺映射中的应用”，载于DAC，1993年，第54–60页。[8] M. A. Thornton等人，“利用哈尔谱系数和部分BDD进行逻辑电路等价性检查”，VLSI Design，第14卷，第1期，第53–64页，2002年。[9] C.-C. Tsai等人，“通过固定极性Reed-Muller形式对布尔函数进行分类”，IEEE TC，第46卷，第2期，第173–186页，1997年。[10] A. Abdollahi等人，“用于逻辑综合与验证的快速布尔匹配新规范形式”，载于DAC，2005年，第379–384页。[11] J. Zhang等人，“基于结构特征和Shannon展开的高效NPN布尔匹配算法”，Cluster，第22卷，第3期，第7491–7506页，2019年。[12] V. N. Kravets等人，“布尔函数中的广义对称性”，载于ICCAD，2000年，第526–532页。[13] Z. Huang等人，“基于NPN 分类的快速布尔匹配”，载于FPT，2013年，第310–313页。[14] X. Zhou等人，“通过协同设计规范形式及其计算算法实现快速精确的NPN分类”，IEEE TC，第69卷，第9期，第1293–1307页，2020年。[15] S. Cook等人，“并行RAM计算简单函数所需时间的界限”，载于STOC，1982年，第231–233页。[16] J. Kahn等人，“变量对布尔函数的影响度”，载于SFCS，1988年，第68–80页。[17] H. S. Warren，《Hacker’s Delight》。Pearson Education，2013年。[18] L. Amar´u等人，“EPFL组合逻辑基准套件”，载于IWLS，2015年。[19] 伯克利逻辑综合与验证小组。“ABC：一种用于时序综合与验证的系统”。2022年。 [在线]。网址：https://people.eecs.berkeley.edu/~alanmi/abc/ [20] A. Petkovska等人，“快速层次化NPN分类”，载于FPL，2016年，第1–4页。[21] M. Soeken等人，“EPFL逻辑综合库”，arXiv预印本arXiv:1805.05121，2018年。