arXiv:2301.12142v1 [math.DG] 28 Jan 2023

结合代数簇的矩映射

HUI ZHANG 和 ZAILI YAN

摘要。我们考察 GL(n) 在 $V_n = \otimes^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n$ 上的作用所对应的矩映射 $m : \mathbb{P}V_n \to iu(n)$，并研究泛函 $F_n = \|m\|^2 : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的临界点。首先，我们证明 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是临界点，当且仅当存在某个 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 和 $D_\mu \in Der(\mu)$，使得 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，其中 $m([\mu]) = M_\mu \frac{\mu}{\|\mu\|^2}$。接着，我们证明任意代数 μ 都存在 Nikolayevsky 导子，该导子在自同构意义下唯一；此外，若 $[\mu]$ 是 F_n 的临界点，则 $\phi_\mu = -\frac{1}{c_\mu} D_\mu$。其次，我们刻画泛函 $F_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的极大值和极小值，其中 $\mathcal{A}_n$ 表示所有 n 维结合代数代数簇的射影化。此外，对于 $F_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的任意临界点 $[\mu]$，我们也给出了 $[\mu]$ 的代数结构描述。最后，我们分别对 $n = 2$ 和 3 时的 $F_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的临界点进行分类。

1. 引言

Lauret 研究了李代数簇上的矩映射，并在[7], 中取得了许多卓越成果。这些成果对于证明每个爱因斯坦可解流形都是标准的（[9]）以及刻画孤立子（[1, 10]）都非常重要。除了李代数之外，Lauret 也开始研究其他类代数上的矩映射，详情参见[11] 。受此启发，作者最近将矩映射的研究拓展到了 3-Lie代数簇（参见[17]）。

本文研究结合代数簇上的矩映射。设 GL(n) 是自然作用于复向量空间 $V_n = \otimes^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n$ 上的复约化李群，也就是说，该空间由所有 n 维复代数组成。$\mathbb{C}^n$ 上的通常厄米内积自然诱导出 V_n 上一个 U(n)-不变的厄米内积，记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。由于 $gl(n) = u(n) + iu(n)$，我们可以定义如下函数

$$m : \mathbb{P}V_n \to iu(n), \quad (m([\mu]), A) = \frac{(d\rho_\mu)_e A}{\|\mu\|^2}, \quad 0 \neq \mu \in V_n,\ A \in iu(n),$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 iu(n) 上 Ad(U(n))-不变的实内积，而 $\rho_\mu : GL(n) \to \mathbb{R}$ 的定义为$\rho_\mu(g) = \langle g.\mu, g.\mu \rangle$。函数 m 是来自辛几何的矩映射，对应于 U(n) 对辛流形 $\mathbb{P}V_{n\,n}$ 的哈密顿作用（见 [4, 12]）。本文研究泛函 $F_n = \|m\|^2 : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的临界点，重点关注位于所有 n 维结合代数构成的代数簇 $\mathcal{A}_n$的射影化中的临界点。

2010年数学主题分类。14L30、17B30、53D20。关键词和短语。矩映射；结合代数簇；临界点。本文受到国家自然科学基金委员会（项目编号：11701300、11626134）及宁波大学王宽诚教育基金的资助。

本文结构安排如下：第 2 节回顾复结合代数的一些基本概念和结果。

在第 3 节中，我们首先用 M_μ给出矩映射 $m: \mathbb{P}V_n \to iu(n)$ 的显式表达式，即对于任意 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$，有 $m([\mu]) = M_{\frac{\mu}{\|\mu\|^2}}$。然后我们证明，$[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 F_n 的临界点，当且仅当对于某个 $\mu \in \mathbb{R}$ 和某个 $D_\mu \in Der(\mu)$，有 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$（定理 3.3）。

在第 4 节中，我们首先证明，任意代数 $\mu \in V_n$ 都存在一个 Nikolayevsky导子 ϕ_μ，且其在自同构意义下唯一；ϕ_μ 的特征值必为有理数。此外，如果 $[\mu]$ 是 F_n 的临界点，则有 $\phi_\mu = -\frac{1}{c_\mu} D_\mu$（定理 4.1）。随后我们研究 F_n 的极值点：$\mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$，并证明最小值在半单结合代数处取得（定理 4.6），而最大值在一个二维交换结合代数与平凡代数的直和处取得（定理 4.9）。在李代数（[7]）的背景下，Lauret 证明了：对于任意满足存在 $[\lambda] \in GL(n).[\mu]$ 且 M_λ 的所有特征值均为负的 μ，它必为半单；我们证明这一结果对结合代数同样成立（注 4.7）。此外，我们还讨论了 F_n：$\mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的任意临界点 $[\mu]$ 的结构（定理 4.10 和定理 4.12）。

在第 5节中，我们对 F_n：$\mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$在 $n = 2$、3 时的临界点进行分类。结果表明，每个二维结合代数都同构于 F_2的一个临界点；并且恰好存在一个三维结合代数不同构于 F_3的任何临界点。最后，基于前面各节的讨论，我们提出一些自然且有趣的问题。

2. 预备知识

本节回顾结合代数的一些基本定义和结果。除非另有说明，底域均假定为复数域 $\mathbb{C}$。

定义 2.1. 若向量空间 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{C}$ 上配备一个双线性运算 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，记作 $(x,y) \mapsto xy$，则称其为结合代数，若

$$x(yz) = (xy)z$$

对所有 $x, y, z \in \mathcal{A}$，均有。

结合代数 $\mathcal{A}$ 上的导子是满足下式的线性变换 $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy),$$

对于 $x,y \in \mathcal{A}$。容易看出，$\mathcal{A}$ 的所有导子构成一个李代数，记作 $Der(\mathcal{A})$。如果向量子空间 I 满足 $\mathcal{A}\,\mathcal{A}I, I\mathcal{A} \subset I$，则称 I 为 $\mathcal{A}$ 的一个理想。

定义 2.2. 设 $\mathcal{A}$ 为一个结合代数。 $\mathcal{A}$ 的中心定义为 $C(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xy = yx, \forall y \in \mathcal{A}\}$。 $\mathcal{A}$ 的湮灭子定义为 $ann(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xy = yx = 0, \forall y \in \mathcal{A}\}$。

显然，$C(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数，而 $ann(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的理想。

定义 2.3. 设 I 是一个结合代数的理想。若存在整数 $k \geq 1$，使得 $I^k = 0I^k = I \cdots I \cdots I \underbrace{\quad}_{k} \{z\}$，则称 I 为幂零的。

若 I、J 是结合代数 $\mathcal{A}$ 的任意两个幂零理想，则 $I + J$ 也是一个幂零理想。因此， $\mathcal{A}$ 的最大幂零理想是唯一的，称为根基，记作 $N(\mathcal{A})$。

注 2.4. 注意，$N(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{A}$ 的 Jacobson根基一致，因为 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的结合代数。此外，$N(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} :$ 对任意 $y \in \mathcal{A}\}$，xy、yx 都是幂零元素。

定义 2.5. 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数。若 $\mathcal{A}$ 除自身和 0 以外没有其他理想，则称 $\mathcal{A}$ 为单代数。

记 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 为所有 $n \times n$ 复方阵的集合，它关于通常的矩阵加法和乘法显然构成一个结合代数。事实上，对于任意 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，$n \geq 1$，根据 Wedderburn-Artin定理，任意有限维单结合代数（定义在 $\mathbb{C}$ 上）都同构于 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，其中 $n \geq 1$ ([15]) 为某个整数。

若结合代数 $\mathcal{A}$ 的根基 $N(\mathcal{A})$ 为零，则称其为半单代数。下面的定理是众所周知的。

定理 2.6（[15]）。域 $\mathbb{C}$ 上的结合代数是半单的，当且仅当它是若干单理想的直和。也就是说，半单结合代数同构于 $\mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{n_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_s}(\mathbb{C})$，其中 n_1, n_2、 $\cdots$、n_s 是正整数。

3. 复代数的矩映射

设 $\mathbb{C}^n$ 是 n 维复向量空间，$V_n = \otimes^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n$ 是所有 n 维复代数构成的空间。$GL(n) = GL(\mathbb{C}^n)$ 在 V_n 上的自然作用定义为

$$g.\mu(X, Y) = g\mu(g^{-1}X, g^{-1}Y), \quad g \in GL(n), X, Y \in \mathbb{C}^n. \tag{3.1}$$

显然，$GL(n).\mu$ 恰好是 μ 的同构类。注意，

$$\lim_{t\to\infty} g_t.\mu = 0, \quad g_t = tI \subset GL(n), t > 0,$$

我们看到，对于每个 n维代数 μ， $\in V_n$，0 位于轨道 $GL(n)\cdot\mu$ 的边界。对式 (3.1) 求导，得到 $gl(n_n$ 在 V 上的自然作用，即：

$$A.\mu(X, Y) = A\mu(X, Y) - \mu(AX, Y) - \mu(X, AY), \quad A \in \mathfrak{gl}(n), \mu \in V_n. \tag{3.2}$$

由此可得　在 A·μ 处，当且仅当 A ∈ Der(μ)，其中 Der(μ) 表示 μ 的导子代数　　.

注意，$\mathbb{C}^n$ 上的通常厄米内积可按如下方式在 V_n 上诱导出一个 U(n)-不变厄米内积

$$\langle \mu, \lambda \rangle = \sum_{i,j,k} \langle \mu(X_i, X_j), X_k \rangle \overline{\langle \lambda(X_i, X_j), X_k \rangle}, \qquad \mu, \lambda \in V_n, \tag{3.3}$$

其中，$\{X_1, X2, \cdots, X_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$的任意一组正交归一基。令 u(n) 表示 U(n) 的李代数，则容易看出，gl(n) = u(n) +iu(n) 分别分解为 V_n上的斜厄米变换和厄米变换。此外，gl(n) 上存在一个 Ad(U(n))-不变厄米内积，其定义为

$$(A, B) = \operatorname{tr} AB^*, \ A, B \in \mathfrak{gl}(n). \tag{3.4}$$

辛几何中的矩映射对应于 U(n) 在辛流形 $\mathbb{P}V_n$上的哈密顿作用，其定义如下

$$m : \mathbb{P}V_n \to \mathrm{iu}(n), \quad (m([\mu]), A) = \frac{(\mathrm{d}\rho_\mu)_e A}{\|\mu\|^2}, \quad 0 \neq \mu \in V_n, A \in \mathrm{iu}(n), \tag{3.5}$$

其中，ρ_μ: GL(n) → ℝ 由 ρ_μ(g) = ⟨g.μ, g.μ⟩ 给出。显然，对于任意 A ∈ iu(n)，都有 $(\mathrm{d}\rho_\mu)_e$A = ⟨A.μ, μ⟩ + ⟨μ, A.μ⟩ = 2⟨A.μ, μ⟩。矩映射的平方范数记为

$$F_n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

其中，对任意 [μ] ∈ $\mathbb{P}V_n$，F_n([μ]) = ‖m([μ])‖^2 = (m([μ]), m([μ]))。

为了明确写出矩映射 m，我们定义 M_μ ∈ iu(n) 如下

$$\mathrm{M}_\mu = 2\sum_i L^\mu_{X_i}(L^\mu_{X_i})^* - 2\sum_i (L^\mu_{X_i})^* L^\mu_{X_i} - 2\sum_i (R^\mu_{X_i})^* R^\mu_{X_i}, \tag{3.7}$$

其中，代数 μ 的左乘与右乘 L^μ $_X$、R^μ $_X$ （即由 X 进行的乘法）分别定义为：对所有 Y ∈ $\mathbb{C}^n$，L^μ $_X$(Y) =μ(X, Y)，R^μ $_X$(Y) = μ(Y, X)。不难证明

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}_\mu X, Y \rangle =& 2\sum_{i,j} \overline{\langle \mu(X_i, X_j), X \rangle} \langle \mu(X_i, X_j), Y \rangle - 2\sum_{i,j} \langle \mu(X_i, X), X_j \rangle \overline{\langle \mu(X_i, Y), X_j \rangle} \\ & - 2\sum_{i,j} \langle \mu(X, X_i), X_j \rangle \overline{\langle \mu(Y, X_i), X_j \rangle}\end{aligned} \tag{3.8}$$

对于 X、Y ∈ $\mathbb{C}^n$。 注意，如果代数 μ 是交换或反交换的，那么式（3.8）的第二项和第三项相同，此时，M^μ 与 [7]重合。

引理 3.1. 对任意 μ ∈ V_n，有 (M^μ, A) = 2⟨μ, A.μ⟩, ∀A ∈ gl(n) = u(n) + iu(n)。特别地，对于任意 0 , μ ∈ V_n，m([μ]) = $\frac{\mu}{\|\mu\|^2}$

证明。对于任意 $A \in \mathfrak{gl}(n)$，有 $(A, M_\mu) = \operatorname{tr} AM_\mu^* = \operatorname{tr} AM_\mu = \operatorname{tr} M_\mu A$，且

$$\operatorname{tr} M_\mu A = \underbrace{2 \operatorname{tr} \sum_i L_{X_i}^\mu (L_{X_i}^\mu)^* A}_{\mathrm{I}} - \underbrace{2 \operatorname{tr} \sum_i ((L_{X_i}^\mu)^* L_{X_i}^\mu + (R_{X_i}^\mu)^* R_{X_i}^\mu) A}_{\mathrm{II}}$$
$$=: \mathrm{I} - \mathrm{II}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 2 \sum_i \operatorname{tr} L_{X_i}^\mu (L_{X_i}^\mu)^* A \\
&= 2 \sum_i \operatorname{tr} (L_{X_i}^\mu)^* A L_{X_i}^\mu \\
&= 2 \sum_{i,j} \langle (L_{X_i}^\mu)^* A L_{X_i}^\mu (X_j), X_j \rangle \\
&= 2 \sum_{i,j} \langle A\mu(X_i, X_j), \mu(X_i, X_j) \rangle,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= 2 \operatorname{tr} \sum_i ((L_{X_i}^\mu)^* L_{X_i}^\mu + (R_{X_i}^\mu)^* R_{X_i}^\mu) A \\
&= 2 \sum_{i,j} \langle ((L_{X_i}^\mu)^* L_{X_i}^\mu + (R_{X_i}^\mu)^* R_{X_i}^\mu) A X_j, X_j \rangle \\
&= 2 \sum_{i,j} \langle \mu(X_i, AX_j), \mu(X_i, X_j) \rangle - 2 \sum_{i,j} \langle \mu(AX_j, X_i), \mu(X_j, X_i) \rangle \\
&= 2 \sum_{i,j} \langle \mu(AX_i, X_j) + \mu(X_i, AX_j), \mu(X_i, X_j) \rangle.
\end{aligned}$$

由 (3.2) 可得 $(A, M_\mu) = \operatorname{tr} M_\mu A = 2\langle A.\mu, \mu \rangle$，因此对于任意 $A \in \mathfrak{gl}(n)$，都有 $(M_\mu, A) = 2\langle \mu, A.\mu \rangle$。这就证明了第一个结论。对于 $A \in \mathfrak{iu}(n)$，我们有 $\langle A.\mu, \mu \rangle = \langle \mu, A.\mu \rangle$。由 (3.5) 可得，对于任意 0，$\mu \in V_n$，$\mathfrak{m}([\mu]) = M_{\|\overline{\mu}\|^2}^{\mu}$。引理 3.1 □ 的证明至此完成。

推论 3.2。对于任意 $\mu \in V_n$，有

(i) 对任意 $D \in \mathrm{Der}(\mu)$，$\operatorname{tr} M_\mu D = 0$；(ii) 对任意 $A \in \mathrm{Der}(\mu)$，$\operatorname{tr} M_\mu [A, A^*] \geq 0$，且等号成立当且仅当 $A^* \in \mathrm{Der}(\mu)$。

证明。对于 (i)，由引理 3.1 可得 $\operatorname{tr} M_\mu D = 2\langle D.\mu, \mu \rangle$。对于 (ii)，由此可得 $\operatorname{tr} M_\mu [A, A^*] = 2\langle [A, A^*].\mu, \mu \rangle = 2\langle A^*.\mu, A^*.\mu \rangle \geq 0, \forall A \in \mathrm{Der}(\mu)$，并注意到 $A^*.\mu = 0$ 当且仅当 $A^* \in \mathrm{Der}(\mu)$。□

定理 3.3。矩映射 $\mathfrak{m} : \mathbb{P}V_n \to \mathfrak{iu}(n)$、矩映射的泛函平方范数 $F_n = \|\mathfrak{m}\|^2 : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 以及 F_n 的梯度分别为

$$F_n([\mu]) = \frac{\operatorname{tr} M_\mu^2}{\|\mu\|^4}, \quad \operatorname{grad}(F_n)_{[\mu]} = \frac{8\pi_*(M_\mu).\mu}{\|\mu\|^4}, \quad [\mu] \in \mathbb{P}V_n, \tag{3.9}$$

其中 π_* 表示 $\pi : V_n\backslash\{0\} \to \mathbb{P}V_n$ 的导数，即典范投影。此外，以下陈述等价：

(i) $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 F_n的临界点。(ii) $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 $F_n|_{GL(n).[\mu]}$的临界点。(iii) 对于某个 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 和 $D_\mu \in Der(\mu)$，$M_\mu = c_\mu I + D_\mu$。

证明。由（3.6）和引理 3.1，对于任意 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$，有 $F_n([\mu]) = \operatorname{tr} M_{\frac{\mu}{\|\mu\|^4}}^2 \mu$。为证明第二个结论，我们只需计算 $F_n : V_n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$，$F_n(\mu) = \operatorname{tr} M_{\frac{\mu}{\|\mu\|^4}}^2 \mu$的梯度，然后通过 π_*对其进行投影。如果 $\mu, \lambda \in V_n$ 且 $\mu \neq 0$，那么

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle \operatorname{grad}(F_n)_\mu, \lambda\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_n(\mu + t\lambda) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{\|\mu + t\lambda\|^4}(M_{\mu+t\lambda}, M_{\mu+t\lambda}) \\ &= -4\operatorname{Re}\langle \frac{F_n(\mu)}{\|\mu\|^2}\mu, \lambda\rangle + \frac{2}{\|\mu\|^4}(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} M_{\mu+t\lambda}, M_\mu)\end{aligned}$$

我们断言，对于任意 $A \in iu(n)$，有 $(\frac{d}{dt}|_{t=0} M_{\mu+t\lambda}, A) = 4\operatorname{Re}\langle A.\mu, \lambda\rangle$。事实上，根据引理 3.1，$(\frac{d}{dt}|_{t=0} M_{\mu+t\lambda}, A) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(M_{\mu+t\lambda}, A) = 2\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \mu + t\lambda, A.(\mu + t\lambda)\rangle = 2\langle \lambda, A.\mu\rangle + 2\langle \mu, A.\lambda\rangle = 4\operatorname{Re}\langle A.\mu, \lambda\rangle$ 对于任意 $A \in iu(n)$。因此，$\operatorname{grad}(F_n)_\mu = -4F_n(\mu)\|\mu\|^2\mu + 8(M_\mu)\mu\|\mu\|^4$，从而

$$\operatorname{grad}(F_n)_{[\mu]} = \frac{8\pi_*(M_\mu).\mu}{\|\mu\|^4}.$$

由此，定理的第一部分得证。接下来证明命题 (i)、(ii) 和 (iii) 等价。

(i) $\Leftrightarrow$(ii)：等价性由 $\operatorname{grad}(F_n)$ 与 $GL(n)$ 轨道相切可得。事实上

$$\operatorname{grad}(F_n)_{[\mu]} = \frac{8\pi_*(M_\mu).\mu}{\|\mu\|^4} = \frac{8}{\|\mu\|^4}\pi_*(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tM_\mu}.\mu) = \frac{8}{\|\mu\|^4}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tM_\mu}.[\mu] \in T_{[\mu]}(GL(n).[\mu]).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)：由 (3.2)，我们知道 $I.\mu = -\mu$，且 $(M_\mu).\mu = (c_\mu I + D_\mu).\mu = -c_\mu\mu$。由此可得 $\operatorname{grad}(F_n)_{[\mu]} = 0$。

(i) $\Rightarrow$ (iii)：由于 $\operatorname{grad}(F_n)_{[\mu]} = 0$，因此 $(M_\mu).\mu \in \ker \pi_{*\mu} = \mathbb{C}\mu$。所以，对于某个 $c \in \mathbb{C}$ 和 $D \in Der(\mu)$，有 $M_\mu = cI + D$。显然 $[D, D^*] = [M_\mu - cI, M_\mu - \bar{c}I] = 0$，由推论 3.2 可知，$D^*$ 也是 μ 的一个导子。特别地，$(c - \bar{c})I = (D^* - D) \in Der(\mu)$，因此 $c = \bar{c} \in \mathbb{R}$。□

注记 3.4. 设 $[\mu]$ 是 F_n 的一个临界点，且 $[\lambda]$ 是 F_m 的一个临界点，则对于适当的 $c \in \mathbb{C}$，$[\mu \oplus c\lambda]$ 是 F_{n+m} 的一个临界点。事实上，假设对于某个 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 和 $D_\mu \in \in Der(\mu)$，有 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，且对于某个 $c_\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $D_\lambda \in \in Der(\lambda)$，有 $M_\lambda = c_\lambda I + D_\lambda$。注意到对任意 $t \in \mathbb{C}$，$M_{t\lambda} = |t|^2 M_\lambda$，我们可以选取 t_0 使得 $c_\mu = |t_0|^2 c_\lambda$，于是可得 $[\mu \oplus t_0\lambda]$ 是 F_{n+m} 的一个临界点。

在代数的框架下，Ness 的一个重要结果可表述如下

定理 3.5 ([12])。若 $[\mu]$ 是泛函 $F_n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的临界点，则

(i) $F_n|_{GL(n).[\mu]}$ 在 [μ] 处取得最小值。(ii) $[\lambda] \in GL(n).[\mu]$ 是 F_n 的临界点，当且仅当 $[\lambda] \in U(n).[\mu]$。

事实上，上述定理意味着，对于每个 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$，在 U(n)-轨道意义下，GL(n).[μ] 至多包含一个临界点。

引理 3.6. 设 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 F_n 的一个临界点，且 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，其中 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 为常数，$D_\mu \in$ 属于 Der(μ)。则有

(i) $c_\mu = \frac{\operatorname{tr} M_\mu^2}{\operatorname{tr} M_\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tr} M_\mu^2}{\|\mu\|^2} < 0.$

(ii) *If* $\operatorname{tr} D_\mu \neq 0$, *then* $c_\mu = -\frac{\operatorname{tr} D_\mu^2}{\operatorname{tr} D_\mu}$ *and* $\operatorname{tr} D_\mu > 0.$

证明。由于 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，由引理3.1 和推论3.2 可得

$$\operatorname{tr} M_\mu = (M_\mu, I) = 2\langle \mu, I.\mu\rangle = -2\|\mu\|^2 < 0,$$

$$\operatorname{tr} M_\mu^2 = \operatorname{tr} M_\mu(c_\mu I + D_\mu) = c_\mu \operatorname{tr} M_\mu.$$

因此 $c_\mu = \frac{\operatorname{tr} M_\mu^2}{\operatorname{tr} M_\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tr} M_\mu^2}{\|\mu\|^2} < 0$。若 $\operatorname{tr} D_\mu, 0$，则

$$0 = \operatorname{tr} M_\mu D_\mu = c_\mu \operatorname{tr} D_\mu + \operatorname{tr} D_\mu^2.$$

因此 $c_\mu = -\frac{\operatorname{tr} D_\mu^2}{\operatorname{tr} D_\mu}$，且 $\operatorname{tr} D_\mu > 0$。

□

注3.7. 事实上，$\operatorname{tr} D_\mu = 0$ 当且仅当 $D_\mu = 0$。确实，由于 $0 = \operatorname{tr} M_\mu D_\mu = c_\mu \operatorname{tr} D_\mu + \operatorname{tr} D_\mu^2$，且 D_μ 是厄米的，结论由此得出。

4. 结合代数簇的临界点

空间 $\mathscr{A}_n$ 所有 n维结合代数由多项式条件定义，因此构成一个代数集。记 $\mathcal{A}_n$ 为将 $\mathscr{A}_n$ 射影化后得到的射影代数簇。注意到 $\mathcal{A}_n$ 是 GL(n)-不变的，因此根据定理 3.3，$F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的临界点恰好是 $F_n: \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 中落在 $\mathcal{A}_n$内的临界点。

4.1. Nikolayevsky导子与有理性。代数 $(\mu, \mathbb{C}^n)$ 的 ϕ 导子称为Nikolayevsky导子，如果它是半单的，所有特征值均为实数，并且对任意 $\psi \in$Der(μ)，都有 $\operatorname{tr} \phi\psi = \operatorname{tr} \psi$。这一概念的动机来自[14]。

定理 4.1. 设 $(\mu, \mathbb{C}^n)$ 是任意代数。那么

(1) $(\mu, \mathbb{C}^n)$ 存在 Nikolayevsky导子 ϕ_μ。(2) Nikolayevsky导子 ϕ_μ 在 μ 的自同构作用下唯一确定。(3) ϕ_μ 的所有特征值都是有理数。

此外，如果 [μ] 是 F_n: $\mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的临界点，且 $M^\mu = c^\mu I + D^\mu$，其中 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 为某个值，$D_\mu \in$ Der(μ)，那么 $-\frac{1}{n}c_\mu D_\mu$ 就是 μ 的 Nikolayevsky导子。

证明。(1) 复李代数 Der(μ) 是代数的。设 Der(μ) = s ⊕t ⊕n 为其 Levi-Mal'cev分解，其中 s 是半单的，t ⊕n 是 Der(μ) 的根基，n 是 t⊕n 中所有幂零元素的集合（也是 t ⊕n 的幂零根基），t 是由半单元素构成的阿贝尔子代数，且[s, t] = 0。在 Der(μ) 上定义双线性型 B 如下:

$$B(\psi_1, \psi_2) := \operatorname{tr} \psi_1 \psi_2, \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \operatorname{Der}(\mu).$$

那么，一般而言，B 是退化的，且 Ker B = n。由于 s 是半单的，因此 B(s, t) = B([s, s],t) = B(s, [s, t]) = 0。显然，B 在 t 上非退化。由于 t 是约化的，我们有 t = a +ia，其中 a 由所有特征值均为实数的半单元素构成。因此，存在唯一的元素 $\phi \in$ a，使得对于任意 $\psi \in$ t，$B(\phi, \psi) = \operatorname{tr} \psi$。于是，对于任意 $\psi \in$ Der(μ)，$\operatorname{tr} \phi\psi = \operatorname{tr} \psi$。

(2) 子代数 s ⊕ t 是 Der(μ) 的极大完全可约子代数。由于 Der(μ) 的极大完全可约子代数在 Der(μ) 的内自同构（对应于 μ 的自同构）下彼此共轭，因此 s ⊕ t 的中心 t 在自同构意义下唯一确定。因此，Nikolayevsky 导子在 μ 的自同构意义下唯一确定。

(3) $\phi_\mu = 0$ 的情形是平凡的。下文中，我们假设 ϕ_μ 非零。注意到 ϕ_μ 是半单的，且所有特征值均为实数，因此有如下分解

$$\mathbb{C}^n = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_r,$$

其中，$\mathfrak{l}_i = \{X \in \mathbb{C}^n | \phi_\mu X = c_i X\}$ 是 ϕ_μ 对应于特征值 $c_1 < c_2 < \cdots < c_r \in \mathbb{R}$ 的特征子空间。令 $d_i = \dim \mathfrak{l}_i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le r$。由于 ϕ_μ 是一个导子，我们有以下关系

$$\mu(\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_j) \subset \mathfrak{l}_k \quad \text{if } c_i + c_j = c_k,$$

对所有 $1 \le$ i、j、k $\le r$ 均成立。反之，若定义线性变换 ψ： $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 通过 $\psi|_{\mathfrak{l}_i} = a_i \mathrm{Id}_{\mathfrak{l}_i}$，其中 $a_1, a2, \cdots$，且 $a_r \in \mathbb{R}$ 满足 $a_i + a_j = a_k$ 对所有满足 $c_i + c_j = c_k$ 的 $1 \le$ i、j、k $\le r$ 成立，则 ψ 是 μ 的导子。显然，所有此类导子构成一个实向量空间，可与 W 识别: = {$(w_1, w2, \cdots, w_r) \in \mathbb{R}^r | w_i + w_j = w_k$ if $c_i + c_j = c_k$}。我们赋予 $\mathbb{R}^r$ 通常的内积，即

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i, \tag{4.1}$$

对于任意 $x = (x_1, x2, \cdots, x_r)$、$y = (y_1, y2, \cdots, y_r) \in \mathbb{R}^r$。

对于任意导子 $\psi \in$ W，我们有

$$\operatorname{tr}(\phi_\mu - I)\psi = \operatorname{tr} \phi_\mu \psi - \operatorname{tr} \psi = 0.$$

于是我们看到，相对于$d_1(c_1-1)$，$d_2(c_2-1)$，$\cdots$，$d_r(c_r-1)\perp W$（4.1）。令$F:=W^{\perp}$，那么根据定义，我们有

$$F=\operatorname{span}_{1\le i,j,k\le r}\{e_i+e_j-e_k : c_i+c_j=c_k\},$$

其中，e_i属于$\mathbb{R}^r$，其第 i 个位置为 1，其余位置为 0。设$\{e_{i_1}+e_{j_1}-e_{k_1},\cdots,e_{i_s}+e_{j_s}-e_{k_s}\}$是 F 的一组基，则

$$(d_1(c_1-1),d_2(c_2-1),\cdots,d_r(c_r-1))=\sum_{p=1}^{s}b_p(e_{i_p}+e_{j_p}-e_{k_p}), \tag{4.2}$$

对某些$b_1,b2,\cdots,b_s\in\mathbb{R}$。令

$$E=\begin{pmatrix} e_{i_1}+e_{j_1}-e_{k_1}\\ e_{i_2}+e_{j_2}-e_{k_2}\\ \vdots\\ e_{i_s}+e_{j_s}-e_{k_s}\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}^{s\times r},$$

则$EE^T\in\mathrm{GL}(s,\mathbb{Z})$,且$(EE^T)^{-1}\in\mathrm{GL}(s,\mathbb{Q})$。 由 (4.2) 及 E 的定义可得

$$\begin{pmatrix} d_1(c_1-1)\\ d_2(c_2-1)\\ \vdots\\ d_r(c_r-1)\end{pmatrix}_{r\times1}=E^T\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix}_{s\times1},\ E\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix}_{r\times1}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{s\times1},\quad E\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{r\times1}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{s\times1}.$$

将 E 左乘于 (4.2)，可得

$$\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{s\times1}-\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{s\times1}=ED^{-1}E^T\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_s\end{pmatrix}_{s\times1},$$

其中$D=\mathrm{diag}(d_1,d2,\cdots,d_r)$。容易看出$(ED^{-1}E^T)\in\mathrm{GL}(s,\mathbb{Q})$。因此

$$D\begin{pmatrix} c_1-1\\ c_2-1\\ \vdots\\ c_r-1\end{pmatrix}_{r\times1}=-E^T(ED^{-1}E^T)^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{s\times1},$$

and

$$\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix}_{r\times1}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{r\times1}-D^{-1}E^T(ED^{-1}E^T)^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}_{s\times1}\in\mathbb{Q}^r.$$

因此，ϕ_μ 的所有特征值都是有理数。

对于最后一个结论，根据推论 3.2 我们知道，对于任意 $\psi\in\mathrm{Der}(\mu)$，都有 $0=\mathrm{tr}\ M_\mu\psi=c^\mu\mathrm{tr}\ \psi+\mathrm{tr}\ D_\mu\psi$。由于 D^μ 是厄米的，我们得出结论：$-\frac{1}{c^\mu}D^\mu$ 是 μ 的 Nikolayevsky导子。 □

由定理 4.1，容易得到以下定理。

定理 4.2。设 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 $F_n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的一个临界点，其中 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，对某个 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 和 $D_\mu \in \mathrm{Der}(\mu)$ 成立。那么存在一个常数 $c > 0$，使得 cD_μ 的特征值是互素的整数，记为 $k_1 < k_2 < \cdots < k_r \in \mathbb{Z}$，重数分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_r \in \mathbb{N}$。

定义 4.3。 定理 4.2 $_1 <$ 中的 $_2 < \cdots <$ 数据集（$_r k k_1, k;\ \cdots d_r d^2 \cdots$，$d_r$）称为临界点 $[\mu]$的类型。

命题 4.4。设 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$ 是 F_n 的一个临界点，其类型为 $\alpha = (k_1 < k_2 < \cdots < k_r; d_1, d2, \cdots, d_r)$。则有

(i) If $\alpha = (0; n)$, then $F_n([\mu]) = \frac{4}{n}$.

(ii) If $\alpha \neq (0; n)$, then $F_n([\mu]) = 4\left(n - \frac{(k_1 d_1 + k_2 d_2 + \cdots + k_r d_r)^2}{k_1^2 d_1 + k_2^2 d_2 + \cdots + k_r^2 d_r}\right)^{-1}$.

证明。我们假设 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu, \|\mu\| = 1$。由于 $\mathrm{tr}\, M_\mu = -2\langle \mu, \mu \rangle = -2$，因此

$$\mathrm{tr}\, M_\mu^2 = \mathrm{tr}\, M_\mu (c_\mu I + D_\mu) = c_\mu \,\mathrm{tr}\, M_\mu = -2c_\mu,$$

和 $F_n([\mu]) = \mathrm{tr}\, M_{\|\mu\|^4}^{\mu^2} = \mathrm{tr}\, M_\mu^2 = -2c_\mu$。

对于 (i)，有 $D_\mu = 0$，因此 $M_\mu = c_\mu I$ 且 $c_\mu n = \mathrm{tr}\, M_\mu = -2$。因此 $c_\mu = -\frac{2}{n}$。$F_n([\mu]) = -2c_\mu = \frac{4}{n}$。

对于 (ii)，我们有 $D_\mu \neq 0$，且 $c_\mu = -\frac{\mathrm{tr}\, D_\mu^2}{\mathrm{tr}\, D_\mu}$ 根据引理 3.6 和注记 3.7。注意到

$$F_n([\mu]) = \mathrm{tr}\, M_\mu^2 = \mathrm{tr}(c_\mu I + D_\mu)^2 = c_\mu^2 n + c_\mu \,\mathrm{tr}\, D_\mu = \frac{1}{4} F_n([\mu])^2 n - \frac{1}{2} F_n([\mu])\,\mathrm{tr}\, D_\mu,$$

因此我们有

$$\frac{1}{F_n([\mu])} = \frac{1}{4} n - \frac{1}{2F_n([\mu])}\,\mathrm{tr}(D_\mu) = \frac{1}{4} n + \frac{1}{4c_\mu}\,\mathrm{tr}\, D_\mu = \frac{1}{4}\left(n - \frac{(\mathrm{tr}\, D_\mu)^2}{\mathrm{tr}\, D_\mu^2}\right).$$

由此可得 $F_n([\mu]) = 4\left(n - \frac{(k_1 d_1 + k_2 d_2 + \cdots + k_r d_r)^2}{r}\right)^{-1} k_1^2 d_1 + k_2^2 d_2 + \cdots + k_r^2$

$d_\circ$ □

4.2. F_n 的极小值：$\mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$。

引理 4.5. 假设 $[\mu] \in \mathbb{P}V_n$，则 $[\mu]$ 是 $F_n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的临界点，其类型为 $(0; n)$，当且仅当 $F_n([\mu]) = \frac{4}{n}$。此外，$\frac{4}{n}$ 是 $F^n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$ 的最小值。

证明. 对任意 $0, \mu \in V_n$，我们用 $x_1, x2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ 表示 M_μ 的特征值。注意到 $\mathrm{tr}\, M_\mu = -2\|\mu\|^2$，于是有

$$F_n([\mu]) = \frac{\mathrm{tr}\, M_\mu^2}{\|\mu\|^4} = 4\frac{\mathrm{tr}\, M_\mu^2}{(\mathrm{tr}\, M_\mu)^2} = 4\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}.$$

容易看出，$F_n([\mu]) \geq \frac{4}{n}$，且当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号成立。因此，$[\mu]$ 是 $F_n : \mathbb{P}V_n \to \mathbb{R}$（类型为 $(0; n)$）的临界点，当且仅当 M_μ 是 I 的常数倍；这又当且仅当 F_n 在 $[\mu]$处取得其最小值 $\frac{4}{n}$。 □

定理 4.6. 泛函 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 在某点 $[\lambda] \in GL(n)$处取得其最小值，当且仅当$[\mu]$ 是半单结合代数。在这种情况下，$F_n([\lambda]) = \frac{4}{n}$。

证明。考虑整数 $m > 0$ 对应的单结合代数 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$。我们在 $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 上赋予如下厄米内积

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr} AB^*,\ A, B \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}). \tag{4.3}$$

则 $\{E_{ij}: 1 \le i, j \le m\}$ 是一组标准正交基，其中 E_{ij} 表示在 (i, j) 位为 1、其余位置为 0 的矩阵。设 $\nu := (\mathbb{M}_m(\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$。显然

$$(L_A^\nu)^* = L_{A^*}, \quad (R_A^\nu)^* = R_{A^*}$$

对于任意 $A \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$。因此，由（3.7），可得

$$\begin{aligned}
M_\nu &= 2\sum_{ij} L^\nu_{E_{ij}}(L^\nu_{E_{ij}})^* - 2\sum_{ij}(L^\nu_{E_{ij}})^* L^\nu_{E_{ij}} - 2\sum_{ij}(R^\nu_{E_{ij}})^* R^\nu_{E_{ij}} \\
&= 2\sum_{ij} L^\nu_{E_{ij}} L^\nu_{E_{ji}} - 2\sum_{ij} L^\nu_{E_{ji}} L^\nu_{E_{ij}} - 2\sum_{ij} R^\nu_{E_{ji}} R^\nu_{E_{ij}} \\
&= 2\sum_{ij} L^\nu_{E_{ij}E_{ji}} - 2\sum_{ij} L^\nu_{E_{ji}E_{ij}} - 2\sum_{ij} R^\nu_{E_{ij}E_{ji}} \\
&= 2m\sum_{i} L^\nu_{E_{ii}} - 2m\sum_{i} L^\nu_{E_{ii}} - 2m\sum_{i} R^\nu_{E_{ii}} \\
&= 2mL^\nu_I - 2mL^\nu_I - 2mR^\nu_I \\
&= 2mI_{m^2} - 2mI_{m^2} - 2mI_{m^2} \\
&= -2mI_{m^2}.
\end{aligned}$$

因此 $[\nu]$ 是类型 $(0; m^2)$ 的临界点。由于 μ 是复半单结合代数，根据定理 2.6，μ 同构于 $\mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_{n_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_s}(\mathbb{C})$，其中 $n_1, n2, \cdots, n_s$ 是某些正整数。由注记 3.4 可知，存在一点 $[\lambda] \in GL(n).[\mu]$，使得 $[\lambda]$ 是类型 $(0; n)$ 的临界点。因此，泛函 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 在 $[\lambda]$ 处达到其最小值，且根据引理 4.5，$F_n([\lambda]) = \frac{4}{n}$。

反过来，假设 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 在点 $[\lambda] \in GL(n).[\mu]$ 处取得其最小值。证明的第一部分表明 $M_\lambda = c_\lambda I$，其中 $c_\lambda < 0$。要证明 μ 是半单的，只需证明 $\mathcal{L} = (\lambda, \mathbb{C}^n)$ 是半单的。考虑以下正交分解：(i) $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{N}$ 是 λ 的根基；(ii) $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$，其中 $\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{N}: \lambda(A, \mathcal{N}) = \lambda(\mathcal{N}, A) = 0\}$ 是 $\mathcal{N}$ 的湮灭子。显然，$\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{L}$ 的理想。我们有 $\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$。假设 $\mathcal{Z}, 0$。令 $\{H_i\}, \{V_i\}, \{Z_i\}$ 分别为 $\mathcal{H}$、$\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{Z}$ 的标准正交基。设 $\{X_i\} = \{H_i\} \cup \{V_i\} \cup \{Z_i\}$。对于任意 0，$Z \in \mathcal{Z}$，由

假设，我们有

$$\begin{aligned}0 > \langle \mathrm{M}_\lambda Z, Z\rangle =& 2\sum_{ij} |\langle \lambda(X_i, X_j), Z\rangle|^2 - 2\sum_{ij} |\langle \lambda(Z, X_i), X_j\rangle|^2 - 2\sum_{ij} |\langle \lambda(X_i, Z), X_j\rangle|^2 \\ =& 2\sum_{ij} \left\{ |\langle \lambda(Z_i, H_j), Z\rangle|^2 + |\langle \lambda(H_i, Z_j), Z\rangle|^2 \right\} + \alpha(Z) \\ & - 2\sum_{ij} |\langle \lambda(Z, H_i), Z_j\rangle|^2 - 2\sum_{ij} |\langle \lambda(H_i, Z), Z_j\rangle|^2,\end{aligned}$$

其中 $\alpha(\mathrm{Z}) = 2\mathrm{P}_{ij} |\langle \lambda(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j), \mathrm{Z}\rangle|^2 \geq 0$, $\{\mathrm{Y}_i\} = \{\mathrm{H}_i\} \cup \{\mathrm{V}_i\}$。这意味着

$$0 > \sum_k \langle \mathrm{M}_\lambda Z_k, Z_k\rangle = \sum_k \alpha(Z_k) \geq 0,$$

这与假设矛盾。因此 $\mathcal{Z} = 0$，进而 $\mathcal{N} = 0$。因此， $\mathcal{L}$ 是一个半单结合代数。

定理的证明至此完成。 □

注 4.7。 事实上，由定理 4.6的证明可知，若 $[\mu] \in \mathcal{A}_n$ 存在$[\lambda] \in \mathrm{GL}(n)$。$[\mu]$ 使得 M_λ 为负定，则 μ 是一个半单结合代数。

4.3. F_n 的极大值： $\mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$。我们称代数 λ 退化到 μ，记作 $\lambda \to \mu$，若 $\mu \in \mathrm{GL}(n)$。λ，即相对于~~V_n的通~~常拓扑的 GL(n)。λ 的闭包。若不存在非平凡链： $\lambda \to \nu \to \mu$，则称退化 $\lambda \to \mu$为直接退化。代数的退化层级是直接退化链的最大长度。

定理 4.8（[3]）。一个 n 维结合代数的退化层级为 1，当且仅当它同构于以下某个代数

(1) μ_l: $\mu_l(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_i) = \mathrm{X}_i$, $\mathrm{i} = 1, \cdots,$
n; (2) μ_r: $\mu_r(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_i$, $\mathrm{i} = 1, \cdots,$
n; (3) μ_{ca}: $\mu_s(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_2$,

其中 $\{\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n\}$ 是一组基。

定理 4.9。泛函 $\mathrm{F}_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 在点 $[\mu] \in \mathrm{L}_n$, $\mathrm{n} \geq 3$ 处取得最大值，当且仅当 μ 同构于交换结合代数 μ_{ca}。在这种情况下，$\mathrm{F}_n([\mu]) = 20$。

证明。假设 $\mathrm{F}_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 在点 $[\mu] \in \mathcal{A}_n$, $\mathrm{n} \geq 3$ 处达到其极大值。根据定理 3.3，我们知道 $[\mu]$ 也是 $\mathrm{F}_n : \mathbb{P}\mathrm{V}_n \to \mathbb{R}$ 的一个临界点。因此，由定理 3.5 可知，$\mathrm{F}_n|_{\mathrm{GL}(n).[\mu]}$ 也在点 $[\mu]$，处达到其最小值。由此，$\mathrm{F}_n|_{\mathrm{GL}.[\mu]}$ 是常数，所以

$$\mathrm{GL}(n).[\mu] = \mathrm{U}(n).[\mu] \tag{4.4}$$

关系（4.4）意味着 μ 的唯一非平凡退化是 0（[8, 定理 5.1] ），因此 μ 的退化层级为 1。

容易看出，临界点 $[\mu_l], [\mu_r]$ 均属于 $(0 < 1; 1, n-1)$ 类型，而 $[\mu_{ca}]$ 属于 $(3 < 5 < 6; 1, n-2, 1)$ 类型。根据命题 4.4，我们知道

$$F_n([\mu_{ca}]) = 20 > 4 = F_n([\mu_l]) = F_n([\mu_r]).$$

因此定理得证。 □

4.4. $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的临界点结构。下面，我们根据定理 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 4.2.

定理 4.10. 设 [μ] 是 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的临界点，其中 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$ 属于 $(k_1 < \cdots < k_r; d_1, d_2, \cdots, d_r)$ 类型，且 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 和 $D_\mu \in$ 属于 Der(μ)。考虑正交分解

$$\mathbb{C}^n = \mathfrak{A}_- \oplus \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_+,$$

其中 A_-、A_0 和 A_+ 分别表示 D_μ 的特征值小于零、等于零和大于零的特征子空间的直和。于是有以下条件：

(i) ann(μ) $\subset A_+$，其中 ann(μ) 是 μ 的湮灭子；(ii) $A_+ \subset N(\mu)$，其中 N(μ) 是 μ 的根基。(iii) $A_- \subset (C(\mu) \cap N(\mu)) \setminus \text{ann}(\mu)$，其中 C(μ) 是 μ 的中心。(iv) 对任意 $A \in A_0$，$(L^\mu_A - R^\mu_A)^* \in$ Der(μ)。因此，A_0 的诱导李代数是约化的。

证明。对于 (i)，设 $X \in$ ann(μ) 且 $D_\mu X = cX$，则由 (3.8)

$$\langle M_\mu X, X\rangle = 2\sum_{i,j} |\langle \mu(X_i, X_j), X\rangle|^2 \geq 0.$$

由于 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，因此 $0 \leq \langle M_\mu X, X\rangle = (c_\mu + c)\langle X, X\rangle$。由引理 3.6 可知 $c \geq -c_\mu > 0$。这就证明了 (i)。

对于 (ii)，由注释2.4可立即得到。现在，我们证明 (iii) 如下。假设对于某个 $c < 0$，$D_\mu X = c$。由于 $cL^\mu_X = [D_\mu, L^\mu_X]$, $cR^\mu_X = [D_\mu, R^\mu_X]$, 那么

$$\begin{aligned} c\,\mathrm{tr}(L^\mu_X - R^\mu_X)(L^\mu_X - R^\mu_X)^* &= \mathrm{tr}[D_\mu, (L^\mu_X - R^\mu_X)](L^\mu_X - R^\mu_X)^* \\ &= \mathrm{tr}[M_\mu, (L^\mu_X - R^\mu_X)](L^\mu_X - R^\mu_X)^* \\ &= \mathrm{tr}\, M_\mu[(L^\mu_X - R^\mu_X), (L^\mu_X - R^\mu_X)^*]. \end{aligned}$$

注意到 $(L^\mu_X - R^\mu_X) \in$ 导子代数(μ)，由推论 3.2 可得

$$c\,\mathrm{tr}(L^\mu_X - R^\mu_X)(L^\mu_X - R^\mu_X)^* \geq 0.$$

由此可得 $(L^{\mu} X - R^{\mu} X) = 0$，因为 $c < 0$。因此 $X \in C(\mu)$。根据注 2.4，很容易看出 $X \in N(\mu)$。利用 (i)，我们得出 $A_{-} \subset (C(\mu) \cap N(\mu)) \setminus \mathrm{ann}(\mu)$。这就证明了 (iii)。

对于 (iv)，我们首先注意到

$$[D_{\mu}, L_A^{\mu}] = L_{D_{\mu}A}^{\mu}, \quad [D_{\mu}, R_A^{\mu}] = R_{D_{\mu}A}^{\mu},$$

对任意 $A \in A_0$,，则有 $[D_{\mu}, L^{\mu}{}_A] = [D_{\mu}, R^{\mu}{}_A] = 0$，因此

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} M_{\mu}[(L_A^{\mu} - R_A^{\mu}), (L_A^{\mu} - R_A^{\mu})^*] &= \operatorname{tr}(c_{\mu} I + D_{\mu})[(L_A^{\mu} - R_A^{\mu}), (L_A^{\mu} - R_A^{\mu})^*] \\ &= \operatorname{tr} D_{\mu}[(L_A^{\mu} - R_A^{\mu}), (L_A^{\mu} - R_A^{\mu})^*] \\ &= \operatorname{tr}[D_{\mu}, (L_A^{\mu} - R_A^{\mu})](L_A^{\mu} - R_A^{\mu})^* \\ &= 0. \end{aligned}$$

由推论 3.2 可知，$(L^{\mu}{}_A - R^{\mu}{}_A)^* \in$ 属于 $\mathrm{Der}(\mu)$，因为 $(L^{\mu}{}_A - R^{\mu}{}_A) \in$ 属于 $\mathrm{Der}(\mu)$。这就证明了 (iv)。 □

接下来，我们将临界点描述为幂零临界点。令 $[\lambda]$为 $F_m : \mathcal{A}_m \to \mathbb{R}$ 的一个幂零临界点。定义

$$L(\lambda) := \{\Phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m) : \Phi(\lambda(X, Y)) = \lambda(\Phi X, Y)\},$$

$$R(\lambda) := \{\Psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m) : \Psi(\lambda(X, Y)) = \lambda(X, \Psi Y)\}.$$

此外，令 $\Gamma_l = \{\Phi \in L(\lambda) : [\Phi, \Psi] = 0, \forall \Psi \in R(\lambda)\}, \Gamma_r = \{\Psi \in R(\lambda) : [\Phi, \Psi] = 0, \forall \Phi \in L(\lambda)\}$，并且

$$\Gamma(\lambda) := \{(\Phi, \Psi) \in \Gamma_l \times \Gamma_r : \lambda(\cdot, \Phi(\cdot)) = \lambda(\Psi(\cdot), \cdot)\}.$$

对于任意 $(\Phi_i, \Psi_i) \in \Gamma(\lambda)$，$i = 1, 2$，我们定义 $(\Phi_1, \Psi_1)(\Phi_2, \Psi_2) := (\Phi_1\Phi_2, \Psi_2\Psi_1)$。于是可得，$\Gamma(\lambda)$ 是一个结合代数。

引理 4.11. 假设 $\mathcal{S} \subset \Gamma(\lambda)$ 是一个子代数，且对任意 $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{S}$，均有 $(\Phi^*, \Psi^*) \in \mathcal{S}$，那么 $\mathcal{S}$ 是一个半单结合代数。

证明. 注意，$\mathcal{S}$ 是一个由矩阵构成、且对共轭转置封闭的结合代数。在 $\mathcal{S}$ 上定义一个厄米内积如下:

$$\langle H_1, H_2 \rangle := \operatorname{tr} H_1 H_2^* = \operatorname{tr} \Phi_1 \Phi_2^* + \operatorname{tr} \Psi_1 \Psi_2^*, \ \forall H_i = (\Phi_i, \Psi_i) \in \mathcal{S}, i = 1, 2.$$

于是，对于任意 H、H_1,$H_2 \in \mathcal{S}$，都有 $\langle HH_1, H_2\rangle = \langle H_1, H^*H_2\rangle, \langle H_1H, H_2\rangle = \langle H_1, H_2H^*\rangle$。设 I 是 $\mathcal{S}$ 中的一个理想，$I^{\perp}$ 表示 I 的正交补。容易看出，$I^{\perp}$ 也是 $\mathcal{S}$的理想。令 $\mathcal{S} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{S}$的根基，且 $\mathcal{R} = \mathcal{N}^{\perp}$。由此可知，$\mathcal{R}$和 $\mathcal{N}$都是$\mathcal{S}$的理想。此外，$\mathcal{R}$是半单的，而 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{S}$ 的湮灭子（通过考察导出列可得）。由于 $\mathcal{S}$是一个在共轭转置下封闭的矩阵结合代数，因此对于任意 $H \in \mathcal{N}$，都有 $HH^* = 0$，故 $H = 0$。所以，$\mathcal{N} = 0$，且 $\mathcal{S}$是半单的。□

定理 4.12。设 $[\lambda]$ 是 $\mathrm{F}_m:\ \mathcal{A}_m \to \mathbb{R}$ 中的一个幂零临界点，其中 $\mathrm{M}_\lambda = \mathrm{c}_\lambda \mathrm{I} + \mathrm{D}_\lambda$ 的类型为 $(\mathrm{k}_2 < \cdots < \mathrm{k}_r; \mathrm{d}_2, \cdots, \mathrm{d}_r)$，其中 $\mathrm{c}_\lambda \in \mathbb{R}$，且 $\mathrm{D}_\lambda \in \mathrm{Der}(\lambda)$。假设 $\mathcal{S} \subset \Gamma(\lambda)$ 是一个维数为 d_1 的子代数，使得对于任意 $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{S}$，有 $(\Phi^*, \Psi^*) \in \mathcal{S}, [\mathrm{D}_\lambda, \Phi] = [\mathrm{D}_\lambda, \Psi] = 0$。考虑以下半直和

$$\mu = \mathcal{S} \ltimes \lambda,$$

其中

$$\mu((\Phi_1, \Psi_1) + X_1, (\Phi_2, \Psi_2) + X_2) := (\Phi_1\Phi_2, \Psi_2\Psi_1) + \Phi_1(X_2) + \Psi_2(X_1) + X_1X_2,$$

对于任意的 $(\Phi_1, \Psi_1), (\Phi_2, \Psi_2) \in \mathcal{S}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \in \mathbb{C}^m$。那么 μ 是一个结合代数。若通过如下方式扩展 $\mathbb{C}^m$ 上的厄米内积

$$\langle H, K\rangle = -\frac{2}{c_\lambda}(\operatorname{tr} L_H^{\mathcal{S}} L_{K^*}^{\mathcal{S}} + \operatorname{tr} HK^*),\ H, K \in \mathcal{S},$$

则 $[\mu]$ 是泛函 $\mathrm{F}_n:\ \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$的一个类型为 $(0, \mathrm{k}_2 < \cdots < \mathrm{k}_r; \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \cdots, \mathrm{d}_r)$ 的临界点，其中 $\mathrm{n} = \mathrm{d}_1 + \mathrm{m}$。

证明。对于任意 $\mathrm{H} = (\Phi, \Psi) \in \mathcal{S}$，我们有

$$L_H^\mu = \begin{pmatrix} L_H^{\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}, \quad R_H^\mu = \begin{pmatrix} R_H^{\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix},$$

其中，$\mathrm{L}^\mu\ \mathrm{H}$、$\mathrm{R}^\mu\ \mathrm{H}$（分别地，$\mathrm{L}_H^{\mathcal{S}}$、$\mathrm{R}_H^{\mathcal{S}}$）表示代数 μ（分别地，$\mathcal{S}$）中由 H 给出的左乘与右乘。由引理 4.11 可知，$\mathcal{S}$是一个半单结合代数。因此存在一个正交归一基 $\{\mathrm{H}_i = (\Phi_i, \Psi_i)\} \subset \mathcal{S}$，使得 $\Phi_i{}^* = -\Phi_i, \Psi_i{}^* = -\Psi_i$，且对于每个 i，$\mathrm{L}^\mu\ \mathrm{H}_i$、$\mathrm{R}^\mu\ \mathrm{H}_i$都是斜厄米的。令 $\{\mathrm{H}_i\} \cup \{\mathrm{X}_i\}$ 为 $\mathbb{C}^n = \mathcal{S} \oplus \mathbb{C}^m$的一个标准正交基。那么对于任意 $\mathrm{H} = (\Phi, \Psi) \in \mathcal{S}$ 及 $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^m$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{M}_\mu X, H\rangle &= -2\sum_{i,j}\langle \mu(X_i, X), X_j\rangle\overline{\langle \mu(X_i, H), X_j\rangle} - 2\sum_{i,j}\langle \mu(X, X_i), X_j\rangle\overline{\langle \mu(H, X_i), X_j\rangle} \\
&= -2\sum_{i,j}\langle \lambda(X_i, X), X_j\rangle\overline{\langle \Psi(X_i), X_j\rangle} - 2\sum_{i,j}\langle \lambda(X, X_i), X_j\rangle\overline{\langle \Phi(X_i), X_j\rangle} \\
&= -2\sum_i\langle \lambda(X_i, X), \Psi(X_i)\rangle - 2\sum_i\langle \lambda(X, X_i), \Phi(X_i)\rangle \\
&= -2\operatorname{tr}\Psi^* R_X^\lambda - 2\operatorname{tr}\Phi^* L_X^\lambda \\
&= -2\operatorname{tr} R_{\Psi^*(X)}^\lambda - 2\operatorname{tr} L_{\Phi^*(X)}^\lambda \\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中，L_X^λ、R_X^λ 分别表示代数 λ中由X定义的左乘与右乘，最后两个等式则是因为 λ 是幂零的，且$(\Phi^*, \Psi^*) \in \mathcal{S}$。此外，由于 $\Phi_i{}^* = -\Phi_i, \Psi_i{}^* = -\Psi_i$ 对于

每个i，则 $[\Phi_i, \Phi_i^*] = 0$，$[\Psi_i, \Psi_i^*] = 0$。因此，由（3.8）可得

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}_\mu X, Y\rangle &= 2\sum_{i,j}\overline{\langle\mu(H_i, X_j), X\rangle}\langle\mu(H_i, X_j), Y\rangle + 2\sum_{i,j}\overline{\langle\mu(X_i, H_j), X\rangle}\langle\mu(X_i, H_j), Y\rangle\\ &\quad + 2\sum_{i,j}\overline{\langle\mu(X_i, X_j), X\rangle}\langle\mu(X_i, X_j), Y\rangle - 2\sum_{i,j}\langle\mu(H_i, X), X_j\rangle\overline{\langle\mu(H_i, Y), X_j\rangle}\\ &\quad - 2\sum_{i,j}\langle\mu(X_i, X), X_j\rangle\overline{\langle\mu(X_i, Y), X_j\rangle} - 2\sum_{i,j}\langle\mu(X, H_i), X_j\rangle\overline{\langle\mu(Y, H_i), X_j\rangle}\\ &\quad - 2\sum_{i,j}\langle\mu(X, X_i), X_j\rangle\overline{\langle\mu(Y, X_i), X_j\rangle}\\ &= \langle \mathrm{M}_\lambda X, Y\rangle + 2\sum_i\langle[\Phi_i, \Phi_i^*](X, Y\rangle + 2\sum_i\langle[\Psi_i, \Psi_i^*](X), Y\rangle\\ &= \langle \mathrm{M}_\lambda X, Y\rangle,\end{aligned}$$

对于任意 X、Y $\in \mathbb{C}^m$。因此 $\mathrm{M}_\mu|_{\mathbb{C}^m} = \mathrm{M}_\lambda = \mathrm{c}_\lambda \mathrm{I} + \mathrm{D}_\lambda$。另一方面，注意到对于每个 i，$\mathrm{L}^\mu{}_{H_i}$ 和 $\mathrm{R}^\mu{}_{H_i}$ 都是斜厄米的，因此对于任意 $\mathrm{H} = (\Phi, \Psi) \in \mathcal{S}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}_\mu H, H\rangle &= 2\sum_{i,j}\overline{\langle\mu(H_i, H_j), H\rangle}\langle\mu(H_i, H_j), H\rangle\\ &\quad - 2\sum_{i,j}\langle\mu(H_i, H), H_j\rangle\overline{\langle\mu(H_i, H), H_j\rangle} - 2\sum_{i,j}\langle\mu(X_i, H), X_j\rangle\overline{\langle\mu(X_i, H), X_j\rangle}\\ &\quad - 2\sum_{i,j}\langle\mu(H, H_i), H_j\rangle\overline{\langle\mu(H, H_i), H_j\rangle} - 2\sum_{i,j}\langle\mu(H, X_i), X_j\rangle\overline{\langle\mu(H, X_i), X_j\rangle}\\ &= -2(\operatorname{tr} L_H^{\mathcal{S}} L_{H^*}^{\mathcal{S}} + \operatorname{tr}\Phi\Phi^* + \operatorname{tr}\Psi\Psi^*)\\ &= -2(\operatorname{tr} L_H^{\mathcal{S}} L_{H^*}^{\mathcal{S}} + \operatorname{tr} HH^*)\\ &= c_\lambda\langle H, H\rangle.\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{M}^\mu = \mathrm{c}^\mu \mathrm{I} + \mathrm{D}^\mu$，其中 $\mathrm{c}^\mu = \mathrm{c}_\lambda$，且

$$D_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Der}(\mu).$$

证明至此完成。 □

注4.13. 设记号与定理 4.10 中相同。若 $(\mathrm{L}^\mu \mathrm{A})^* \in \{\mathrm{L}^\mu \mathrm{A} : \mathrm{A} \in \mathrm{A}_0\}$ 且 $(\mathrm{R}^\mu \mathrm{A})^* \in \{\mathrm{R}^\mu \mathrm{A} : \mathrm{A} \in \mathrm{A}_0\}$对于任意 $\mathrm{A} \in \mathrm{A}_0$均成立。则由引理 4.11 的类似证明可知，$\mathrm{A}_0$ 是一个半单结合^代数。此外，根据定理 4.12，$[\mu]$ 的根基对应于一个类型为 $(\mathrm{k}_1 < \cdots < \mathrm{k}_s < \cdots <\hat{}\mathrm{k}_r; \mathrm{d}1, \cdots, \mathrm{d}_s, \cdots, \mathrm{d}_r)$ 的临界点，其中 $\mathrm{k}_s = 0$。

5. 例子

本节分别对 $\mathrm{n} = 2$ 和 3 时 $\mathrm{F}_n : \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的临界点进行分类。结果表明，每个二维结合代数都同构于 F_2, 的一个临界点，并且仅存在

一个三维结合代数不同构于 F_3的任何临界点。最后，基于前几节的讨论，我们提出一些自然且有趣的问题。

为方便读者，我们回顾 [2] 中的记号。令 $\{e_1,e2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基。定义双线性映射 $\psi^{i\,j}_{\cdot,\,k}\colon \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 如下:

$$\psi^{i,j}_{k}(e_m e_n)=\delta^i_m\delta^j_n e_k.$$

因此，任意代数都可表示为 $d = P_{ijk}c^k_{ij}\psi^{i}_{,jk}$，其中 $c^{k}_{ij}\in\mathbb{C}$为结构常数。

5.1. 二维情形。二维结合代数的分类见[2, 表 1]。我们给出 $F_2\colon \mathcal{A}_2\to\mathbb{R}$ 的临界点分类如下。

表 I. 二维结合代数、临界类型及临界值。

乘法关系	临界类型	临界值
$\begin{cases} d_1=\psi^{1}_{,1\,1} \end{cases}$	$(0<1;1,1)$	4
$\begin{cases} d_2=\psi^{1}_{,\,1}+\psi^{1,2\,2} \end{cases}$	$(0<1;1,1)$	4
$\begin{cases} d_3=\psi^{1}_{,\,1}+\psi^{2,1\,2} \end{cases}$	$(0<1;1,1)$	4
$\begin{cases} d_4=\psi^{1}_{,\,1}+\psi^{2,2\,2} \end{cases}$	$(0;2)$	2
$\begin{cases} d_5=\psi^{1}_{,1\,2} \end{cases}$	$(1<2;1,1)$	20
$\begin{cases} d_6=\psi^{1}_{,\,1}+\psi^{1,\,2}_{\,2}+\psi^{2,1\,2} \end{cases}$	$(0<1;1,1)$	4

事实上，赋予这些代数厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使得 $\{e_1,e_2\}$ 构成标准正交基，便可轻易得到表 I。例如，$\mu := (d6,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的乘法关系为：$e_1e_1 = e_1, e_1e_2 = e_2, e_2e_1 = e_2$。相对于给定的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$，μ 的左乘与右乘表示为

$$L^{\mu}_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad L^{\mu}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad R^{\mu}_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad R^{\mu}_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

由（3.7）可得

$$M_{\mu}=\begin{pmatrix}-6&0\\0&0\end{pmatrix}$$

设 $c_\mu := \operatorname{tr}\underline{M^2_\mu}\operatorname{tr}M_\mu$，则 $c_\mu = -6$。由此可得 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，其中

$$D_{\mu}=\begin{pmatrix}0&0\\0&6\end{pmatrix}$$

显然是 μ 的导子。因此，$[\mu]$ 是 F_2 的临界点：$\mathcal{A}_2\to\mathbb{R}$ 其临界类型为（$0<1;1,1$），且 $F_2([\mu]) = 4$。

5.2. 三维情形。 三维结合代数的完整分类可见于 [2, 表 2]。下表给出了以下对象临界点的分类

$F_3 : \mathcal{A}_3 \to \mathbb{R}$.

表 II. 三维结合代数、临界类型和临界值。

乘法关系	临界类型	临界值
$d_1 = \psi^{1,1}_{1\,1}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_2 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,2}_{\ 3}$	$(0 < 1 < 2; 1, 1, 1)$	$\frac{10}{3}$
$d_3 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_4 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_5 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,\ 3}_{\ 3} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_6 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{3,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 2, 1)$	2
$d_7 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{1,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_8 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_9 = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{1,\ 3}_{\ 3} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_{10} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{3,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 2, 1)$	2
$d_{11} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{2,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 2, 1)$	2
$d_{12} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{2,\ 3}_{2\ \ 3} + \psi^{3,2}_{\ 3}$	$(0 < 1; 2, 1)$	2
$d_{13} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{2,\ 3}_{2\ \ 3} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 2, 1)$	2
$d_{14} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{3,3}_{\ 3}$	$(0; 3)$	$\frac{4}{3}$
$d_{15} = \psi^{1,1}_{1\,2}$	$(3 < 5 < 6; 1, 1, 1)$	20
$d_{16} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 2} + \psi^{1,\ 2}_{3\ \ 1} + \psi^{2,1}_{\ 3}$	$(1 < 2 < 3; 1, 1, 1)$	$\frac{20}{3}$
$d_{17} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{1,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 2} + \psi^{1,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_{18} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{1,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{2,\ 1}_{2\ \ 2} + \psi^{1,\ 3}_{3\ \ 3} + \psi^{3,1}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
$d_{19} = \psi^{3,\ 3}_{1\ \ 3} + \psi^{1,\ 1}_{2\ \ 1} + \psi^{1,\ 3}_{1\ \ 3} + \psi^{3,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{2,\ 3}_{2\ \ 3} + \psi^{3,2}_{\ 2}$	$(0 < 1 < 2; 1, 1, 1)$	$\frac{10}{3}$
$d_{20} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,\ 2}_{2\ \ 2} + \psi^{1,3}_{\ 3}$	$(0 < 1; 1, 2)$	4
不是$_{21} = \psi^{1,\ 1}_{1\ \ 1} + \psi^{1,\ 2}_{3\ \ 2} - \psi^{2,1}_{\ 3}$	–	–
$d_{22} = x\psi^{1,\ 2}_{1\ \ 3} + y\psi^{2}_{\ 3}$	$(1 < 2; 2, 1)$	12

事实上，在这些代数上赋予厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使得 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 构成一个正交归一基，便很容易得到表 II 中的所有情形，除了 $d_2,d_{10},d_{11},d_{12},d_{13},d_{17},d_{18},d_{21}$。对于 $d_2, d_{10}, d_{11}, d_{12}$，这些情形，可由注记 3.4 和表 I 得出。对于 d_{13},d_{17},d_{18}，这些情形，则由 [5] 可得 $d_{13} \cong U_1^3, d_{17} \cong W_{10}^3$ 和 $d_{18} \cong U_0^3$，，其中 U_1^3, W_{10}^3 和 U_0^3 定义如下:

$$
\begin{aligned}
U_1^3: &\quad \psi_1^{1,1} + \psi_1^{3,3} + \psi_2^{1,2} + \psi_2^{2,1} + \psi_2^{2,3} + \psi_3^{1,3} + \psi_3^{3,1} - \psi_3^{3,2}.\\
W_{10}^3: &\quad \psi_1^{1,2} + \psi_1^{2,1} + \psi_2^{2,2} + \psi_3^{2,3}.\\
U_0^3: &\quad \psi_2^{1,1} + \psi_2^{1,2} + \psi_2^{2,1} + \psi_3^{1,3} + \psi_3^{3,1}.
\end{aligned}
$$

在 U_1^3, W_{10}^3 和 U_0^3 上赋予厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使得 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 构成标准正交基，则很容易得到 d_{13}, d_{17},d_{18} 对应的临界类型和值。

接下来，我们采用与 [6, 16] 中类似的步骤，对 d_{21}，上的所有厄米内积进行分类，然后证明，对于 d_{21}，上的任意厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，$(d21,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 都不可能是 F_3 的临界点。首先，注意到 d_{21} 的乘法关系如下：

$$e_1e_1 = e_3, \quad e_1e_2 = e_3, \quad e_2e_1 = -e_3.$$

记 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 为 d_{21} 上的厄米内积，使得 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 正交归一。相对于这组基 $\{e_1,e_2,e_3\}$，d_{21} 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(d_{21}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a^2 \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}), \tag{5.1}$$

其中 0，$a \in \mathbb{C}$，且 b、c、$d \in \mathbb{C}$ 任意。

引理 5.1. 对于 d_{21}，上任意厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，存在 $k > 0$ 和 $\phi \in \mathrm{Aut}(d_{21})$，使得$\{a\phi e_1, \phi e_2, \phi e_3\}$ 相对于 $k\langle\cdot,\cdot\rangle$ 正交归一，其中 $a > 0$

证明. 只需证明

$$\mathfrak{U} = \{\mathrm{diag}(a,1,1) : a > 0\} \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$$

是作用 $\mathbb{C}^\times\mathrm{Aut}(d_{21})$ 在 M 上的一组代表元，即 d_{21}，上所有厄米内积构成的空间，该空间可识别为基点 $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 \in M$ 处的齐性空间 $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})/\mathrm{U}(3)$（见[6]）。事实上，由于

$$\bigcup_{g\in\mathfrak{U}} \mathbb{C}^\times\mathrm{Aut}(d_{21})\cdot g\cdot \mathrm{U}(3) = \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}),$$

因此，U 是一组代表元。对于 d 上任意的厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，我们知道存在 $g_0 \in U$，使得

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \in (\mathbb{C}^\times\mathrm{Aut}(d_{21})).(g_0.\langle\cdot,\cdot\rangle_0)$$

因此，存在 $c \in \mathbb{C}^\times, \phi \in \mathrm{Aut}(d_{21})$，使得

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = (c\phi).(g_0.\langle\cdot,\cdot\rangle_0) = (c\phi g_0).\langle\cdot,\cdot\rangle_0)$$

令 $k = |c|^2$，则

$$k\langle\cdot,\cdot\rangle = k\langle(c\phi g_0)^{-1}(\cdot),(c\phi g_0)^{-1}(\cdot)\rangle_0 = kc^{-1}\bar{c}^{-1}\langle(\phi g_0)^{-1}(\cdot),(\phi g_0)^{-1}(\cdot)\rangle_0 = \langle(\phi g_0)^{-1}(\cdot),(\phi g_0)^{-1}(\cdot)\rangle_0$$

由于 $g_0 \in U$，因此 $g_0 = \mathrm{diag}\{a,1,1\}$，其中某个 $a > 0$。由此可知，$\{a\phi e1, \phi e2, \phi e_3\}$ 关于 $k\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是正交归一的 □

命题 5.2. 对于 d_{21}，上的任意厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，$d_{21}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 不可能是 $F_3 : \mathcal{A}_3 \to \mathbb{R}$ 的临界点。

证明. 假设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 d_{21} 上的厄米内积，且 $(d21,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是 $F_3:\mathcal{A}_3 \to \mathbb{R}$ 的临界点。由定理 4.1 和 (5.1)，临界类型必为 $(1 < 2; 2, 1)$。此外，对于 d_{21}, 上的厄米内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，由引理 5.1 可知，存在 $k > 0$ 和 $\phi \in \mathrm{Aut}(d_{21})$，使得 $\{x_1 = a\phi e_1, x_2 = \phi e_2, x_3 = \phi e_3\}$ 关于 $k\langle\cdot,\cdot\rangle$正交归一，其中 $a > 0$。关于基 $\{x_1,x_2,x_3\}$，d_{21} 的乘法关系如下

$$x_1x_1 = a^2x_3, \quad x_1x_2 = ax_3, \quad x_2x_1 = -ax_3.$$

由（3.7），引理3.6 以及直接计算可知，临界类型为

$$(3a^4 + 6a^2 + 8, 5a^4 + 10a^2 + 8, 2(3a^4 + 8a^2 + 8))$$

其类型永远不会是（$1 < 2;2, 1$），对任意$a > 0$均如此。根据定理4.1，这就产生了矛盾，因此命题得证。□

5.3. 评论。根据前面的讨论，我们知道 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}, n = 2, 3$ 的临界类型必定是非负的。因此，自然会提出以下问题：设 $[\mu] \in \mathcal{A}_n$ 是 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$ 的一个临界点，且 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，其中 $c_\mu \in \mathbb{R}$ 为某个数，$D_\mu \in \in \mathrm{Der}(\mu)$。$D_\mu$的所有特征值是否必定非负?

另一方面，如果上述问题的答案是否定的，那么构造或分类满足 D_μ 具有负特征值的 $F_n: \mathcal{A}_n \to \mathbb{R}$临界点 $[\mu]$ 也很有意思。我们注意到，二步幂零李代数自动也是结合代数，因此由[13, 例子 1] 可知，确实存在其 Nikolayevsky 导子具有负特征值的结合代数。

6. 声明

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] B¨ohm, C.; Lafuente, R：永生齐性里奇流，《数学发明》212 (2018), 461–529。[2] Fialowski, A.; Penkava, M.：三维结合代数的模空间，《通讯代数》37(10) (2009) 3666–3685。[3] Khudoyberdiyev, A.; Omirov, B.：一级代数分类，《线性代数及其应用》439(11) (2013), 3460–3463。[4] Kirwan, K.：代数几何中的动量映射与约化，《微分几何及其应用》9 (1998), 135–172。[5] Kobayashi, Y; Shirayanagi, K; Tsukada, M; Takahasi, S.：关于 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$上的三维代数的完整分类——（温故而知新），《亚洲—欧洲数学杂志》14 (2021)。[6] Kubo, A; Onda, K; Taketomi, Y; Tamaru, H.：关于李群上左不变伪黎曼度量的模空间，《广岛数学杂志》46 (2016), 357–374。[7] Lauret, J.：李代数簇的矩映射，《函数分析杂志》202 (2003), 392–423。[8] Lauret, J.：李代数退化与李群几何，《微分几何及其应用》18 (2003), 177–194。[9] Lauret, J.：爱因斯坦可解流形是标准的，《数学年刊》172 (2010), 1859–1877。[10] Lauret, J.：里奇孤子可解流形，《纯粹与应用数学杂志》650 (2011), 1–21。[11] Lauret, J.：寻找孤子，《美国数学会通讯》67 (2020), 647–657。[12] Ness, L.：通过矩映射对零锥进行分层，《美国数学杂志》106 (1984), 1281–1329（附录作者：D. Mumford）。

[13] Nikolayevsky, Y.：爱因斯坦可解流形的幂零根，arXiv:math/0612117v1 [math.DG] (2006)。[14] Nikolayevsky, Y.：爱因斯坦可解流形与预爱因斯坦导子，《美国数学会汇刊》363 (2011), 3935–3958。
[15] 1982 Pierce, R.S.：《结合代数》，施普林格出
[16] 版社，纽约、海德堡、柏林；Taketomi, Y; Tamaru, H.：关于左不变里奇孤子不存在的猜想及例子，《变换群》23 (2018), 257–270。[17] Zhang, H.; Chen, Z.; Li, L.：3-Lie代数簇的矩映射，《函数分析杂志》283 (2022), 第11期，文章编号109683。

(Hui Zhang) 东南大学数学学院，中华人民共和国南京 210096 电子邮箱：
2120160023@mail.nankai.edu.cn

宁波大学数学与统计学院，中华人民共和国浙江省宁波市 315211 电子邮箱：yanzaili@nbu.edu.cn