arXiv:2301.12182v1 [math.MG] 28 Jan 2023

深层格　　CE点位于zonotope中、孤独跑者与孤独兔　　S

MATTHIAS BECK 和 MATTHIAS SCHYMURA

摘要。设$K \subseteq \mathbb{R}^d$为一个凸体，并设$\mathbf{w} \in \operatorname{int}(K)$为$K$的一个内点。不对称系数 $\operatorname{ca}(K,\mathbf{w}) := \min\{\lambda \geq 1 : \mathbf{w} - K \subseteq \lambda(K - \mathbf{w})\}$ 已在 Hensley猜想的研究中得到广泛探讨。该猜想关注包含固定正数个内部格点的 d 维晶格多面体的最大体积。我们研究格 zonotope的不对称系数，即端点为整数的线段的闵可夫斯基和。我们的主要结果表明，对于任何含有内部格点的格 zonotope，都存在一个内部格点，使其不对称系数有一个明确的上界 $\Theta(d\log\log d)$。我们的研究既受到丢番图逼近领域中 Wills的孤独跑者猜想的启发，也对该猜想有所推进：我们大量运用了该猜想的离散版本，并反过来用 zonotope的不对称系数重新表述了孤独跑者猜想。

1. 引言

我们研究两个看似毫不相关的问题：确定 zonotope 的不对称系数——这是数的几何中的一个概念——以及丢番图逼近中的孤独跑者猜想。正如我们将看到的，这两个问题以不止一种方式相互关联。我们先逐一介绍它们。

这一猜想由 J¨org M. Wills 于 20 世纪 60 年代提出 [29]。

孤独跑者猜想。给定两两不同的整数 $n_0, n_1, \ldots, n_d$，对于每个 $0 \leq i \leq d$，都存在一个实数 t，使得对于所有 $0 \leq j \leq d$ 且 $i \neq j$，$t(n_i - n_j)$ 与最近整数之间的距离至少为 $\frac{1}{d+1}$。

Wills 最初将这一猜想表述为关于实数 $n_0, n_1, \ldots, n_d$ 的猜想，但它可以归约到有理数情形，进而归约到整数情形 [7, 18]。下界 $\frac{1}{d+1}$ 是最佳可能的，这一点可由 $n_j \equiv j$ 对 $0 \leq j \leq d$ 的情形，以及狄利克雷关于丢番图逼近的一项经典结果（例如参见 [8]）得知。Goddyn 在 [6], 引入了孤独跑者猜想这一名称，它源自一个颇具魅力的模型：$d+1$ 名跑者以不同的恒定速度绕着长度为 1 的环形跑道奔跑（他们同时从同一地点出发）；该猜想称，每名跑者在某个时刻与其他跑者的距离都至少为 $\frac{1}{d+1}$。关于孤独跑者猜想的历史、$d \leq 6$ 的证明，以及它与丢番图逼近、视线遮挡问题和图论的联系，参见 [2, 5, 7, 10, 11, 20, 27]。

一个简单的观察带来了对该问题更便捷的表述：任意时刻两名跑者之间的距离仅取决于他们的相对速度。因此，我们可以选定一名跑者，例如速度为 n_0，的那名跑者，将每名跑者的速度都减去 n_0，并且只考察此时处于静止状态的第一名跑者的孤独性。因此

$$\operatorname{Run}(d) := \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \sup_{Q \in \mathbb{R}} \min_{1 \leq i \leq d} \|Q\alpha_i\|_{\mathbb{Z}}, \tag{1}$$

日期：2023年1月28日。感谢 Gennadiy Averkov 的宝贵讨论，以及他指出命题4证明中的论证；同时感谢 J¨org Wills 指引我们查阅参考文献 [21, 22]。

其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ de 记到最近整数的距离，我们可以将孤独跑者猜想重新表述为 s

$$\mathrm{Run}(d) = \frac{1}{d+1}\,.$$

一个相关量源自一个非齐次丢番图逼近问题（我们将在下文第4节中进一步介绍），其定义如下:

$$\mathrm{Rab}(d) := \inf_{\alpha\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^d} \sup_{Q\in\mathbb{Z}} \min_{1\le i\le d} \|Q\alpha_i\|_{\mathbb{Z}}\,. \tag{2}$$

孤独跑者的观点是，现在跑者只能同时进行跳跃，而不能连续移动。（此外，每个跑者的速度都不是整数。）因此，我们将确定 Rab(d) 的难题称为孤独兔子问题。与孤独跑者问题不同，这个问题早已得到解决。Wills [30], 给出了前三个值以及第一个一般界，并证明了

$$\mathrm{Rab}(1) = \frac{1}{3}\,,\ \mathrm{Rab}(2) = \frac{1}{5}\,,\ \mathrm{Rab}(3) = \frac{1}{8} \quad \text{and} \quad \mathrm{Rab}(d) \le \frac{1}{6(d-2)} \ \text{ for } d \ge 4. \tag{3}$$

Cusick [9] 猜测了任意给定d时 Rab(d) 的精确值，并证明其猜想对d $\le$ 7成立。Schark [21]证实了 Cusick 的一般猜想，彻底解决了孤独兔子问题，证明了

$$\mathrm{Rab}(d) = \frac{1}{w(d)} \quad \text{with} \quad w(d) := \max\left\{z\in\mathbb{Z}_{>0} : \tfrac{1}{2}\varphi(z) + h(z) \le d\right\}, \tag{4}$$

其中 $\varphi(z)$ $=\#$ $\{a\in\mathbb{Z}_{>0}\colon\ 1\le a\le z,\ \gcd(a,\ z)\ =1\}$ 是欧拉函数，并且

$$h(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z \text{ is prime,} \\ h & \text{if } z \text{ is composite,} \end{cases}$$

其中 h 表示合数 z的不同素因子个数。在渐近方面，Schark 与 Wills [22] 证明了

$$\lim_{d\to\infty} \mathrm{Rab}(d)\cdot d\cdot \log\log d = e^{-2\gamma}, \tag{5}$$

其中 $\gamma = 0.57721...$ 是欧拉–马歇罗尼常数。

接下来，我们介绍本文的主要几何对象。设 K $\subseteq\mathbb{R}^d$ 为一个凸体，且设$\mathbf{w}$ $\in\in$int(K) 是 K的一个内点。K 内$\mathbf{w}$ 处的不对称系数定义为

$$\mathrm{ca}(K,\mathbf{w}) := \max_{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{\max\{\lambda>0 : \mathbf{w}+\lambda\mathbf{r}\in K\}}{\max\{\lambda>0 : \mathbf{w}-\lambda\mathbf{r}\in K\}} = \min\{\lambda\ge 1 : \mathbf{w}-K\subseteq\lambda(K-\mathbf{w})\}\,. \tag{6}$$

例如，第一种定义见于 [19] ，第二种定义见于 [15]。很容易验证这两个定义是等价的（例如参见 [28, 引理 3.2.3]）。显然，ca(K,$\mathbf{w}$) ≥ 1 ，且当且仅当 K关于$\mathbf{w}$对称时等号成立，也就是说，K $-$ $\mathbf{w}$ $=\mathbf{w}$ $-K$。我们在第2节中总结 ca(K,$\mathbf{w}$) 的另外一些重要性质。

给定$\mathbf{n}$ $=(n_1,\ \ldots,n_d)$ $\in\mathbb{Z}^d_{>0}$个各不相同的条目（我们可以假设它们互质），令

$$Z(\mathbf{n}) := \mathbb{R}\mathbf{n} + [0,1]^d,$$

我们将其称为与$\mathbf{n}$相关联的孤独跑者 *zonotope* ； 这里 $+$表示 Minkowski（即逐点）和。经过平移和伸缩后，孤独跑者 zonotope 于 [3], 被引入； 当时 Cusick [10]给出了孤独跑者问题的视线阻碍表述。本文通过推导（见第3节）以下等价表述，进一步发展这一几何图景。

孤独跑者猜想。 设$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$的各项两两不同。那么存在一个内部格点$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n})) \cap \mathbb{Z}^d$，使得$\mathrm{ca}(Z(\mathbf{n}), \mathbf{w}) \leq d$。

给定$\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m \in \mathbb{R}^d$，令

$$\mathscr{Z}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m) := \sum_{j=1}^{m} [\mathbf{0}, \mathbf{g}_j] \subseteq \mathbb{R}^d,$$

由$\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m$生成的 zonotope；或者，我们可以将$\mathscr{Z}(\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m)$看作$[0,1]^m$在以$\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m$为列向量的矩阵下的投影。若$\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m \in \mathbb{Z}^d$，我们称$\mathscr{Z}(\mathbf{g1}, \ldots, \mathbf{g}_m)$为一个格 *zonotope*。因此，$Z(\mathbf{n})$是孤独跑者分带$\mathscr{Z}(\mathbf{e1}, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{n})$的无限版本，其中 i 是$\mathbf{e}_i$ 个坐标单位向量中的第 i 个。

上述与孤独跑者猜想之间的几何联系，促使我们研究格 zonotope 的不对称系数，以下是我们的主要结果。

定理 1. 令$Z = \mathscr{Z}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m) \subseteq \mathbb{R}^d$为一个格 *zonotope*，有$m \geq d$个生成元，且满足$\mathrm{int}(Z) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing$。则存在一个内部格点$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(Z) \cap \mathbb{Z}^d$，使得

$$\mathrm{ca}(Z, \mathbf{w}) \leq w(d) - 1 \in \Theta(d \log \log d).$$

此外，这个界是最优的。

我们注意到，上述对孤独跑者猜想的重新表述，使其与一个 zonotope（及其无限版本）的不对称系数建立了紧密联系；反过来，定理 1 则揭示了 zonotope 的不对称系数与孤独兔常数$w(d) = \mathrm{Rab}(d)^{-1}$之间的密切联系。

一般格多胞体内部格点的不对称系数，在 Hensley猜想关于包含固定正数内部格点的d维格多面体最大体积的研究中，已得到广泛探讨。更多信息请参见 [1, 19] 及其中的参考文献。目前已知的最佳界如下：

定理2 (Averkov, Kr¨umpelmann & Nill [1, 定理 1 的证明。4])。 设$P \subseteq \mathbb{R}^d$是一个晶格多面体，且$\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing$。那么存在一个内部格点$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d$，使得

$$\mathrm{ca}(P, \mathbf{w}) \leq d(2d+1)(s_{2d+1} - 1) - 1,$$

其中$s_1 = 2$和$s_i = 1 + s_1 \cdot \cdots \cdot s_{i-1}$对于$i \geq 2$，表示双指数增长的 *Sylvester*数列。

这种界的最优增长速度必然关于维数d呈双指数级，这一点可由所谓的 Zaks-Perles-Wills 单纯形看出（参见 [1]）。

本文组织如下。第2节回顾不对称系数的基本性质。第3节讨论如何推导孤独跑者猜想关于奇诺面体$Z(\mathbf{n})$中深内部格点的等价表述。随后，在第 4 节中，我们详细介绍孤独兔子问题背后的丢番图逼近问题，并讨论达到$\mathrm{Rab}(d)$的非整数向量α示例。在此基础上，我们分两步给出定理 1 的证明。首先，我们在第 5 节中对格平行多面体证明该定理，并构造达到所述上界$w(d) - 1$的示例。其次，在第 6 节中，我们推导出一个适用于 zonotope 的 Carath´eodory/Steinitz 型结果，从而能够将定理 1 归约到平行六面体。作为对与孤独跑者问题相关的格 zonotope 的补充讨论，我们在第 7 节致力于确定孤独跑者 zonotope 的内部格点数量，并为 Tao [27] 关于孤独跑者猜想的有限检验结果推导出几何直觉。最后，我们在第 8 节中展望未来工作并提出一些开放问题。

2. 不对称系数

我们首先汇集不对称系数的基本性质，这些性质将在本文其余部分中持续使用。下面的大多数论述都是众所周知的、约定俗成的，或可由基本原理推出。由于它们在文献中较为分散 [15, 19]，且常常未附证明，我们力求给出完整的论述。

我们的第一个观察是，不对称系数在线性变换下不会增加。

命题3。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $L \subseteq \mathbb{R}^m$ 为凸体，存在一个线性映射 $A:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$，使得 $K = AL$。则对于每个 $\mathbf{w} \in$ 内（K） 以及每个 $\mathbf{v} \in A^{-1}$（$\mathbf{w}$）$\cap$ 内（L），

$$\mathrm{ca}(K,\mathbf{w}) \le \mathrm{ca}(L,\mathbf{v}).$$

此外，如果 $m = d$ 且 $A:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 可逆，那么 ca（K,$\mathbf{w}$） = ca（L,$\mathbf{v}$）。

证明。 我们使用式（6）中 ca(L, $\mathbf{v}$) 的第二个定义，得到

$$\mathrm{ca}(L,\mathbf{v}) = \min\{\lambda \ge 1 : \mathbf{v} - L \subseteq \lambda(L-\mathbf{v})\} \ \ge\ \min\{\lambda \ge 1 : A(\mathbf{v}-L) \subseteq \lambda A(L-\mathbf{v})\} = \mathrm{ca}(K,\mathbf{w}).$$

对于第二个论断，我们将刚刚确立的不等式应用于A 和A^{-1}。 □

现在，设$K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个中心对称凸体，即K 关于$\mathbf{0}$ 对称，因此$K = -K$。每个这样的K都会通过以下方式诱导出一个范数 $\|\cdot\|_K$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。

$$\|\mathbf{x}\|_K := \min\{\lambda \ge 0 : \mathbf{x} \in \lambda K\}, \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

这个范数函数与不对称系数之间满足精确关系：

命题4。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个中心对称凸体，且 $\mathbf{w} \in$ 内部(K) 是一个内点。那么

$$\mathrm{ca}(K,\mathbf{w}) = \frac{1+\|\mathbf{w}\|_K}{1-\|\mathbf{w}\|_K} \qquad \textit{and} \qquad \|\mathbf{w}\|_K = \frac{\mathrm{ca}(K,\mathbf{w})-1}{\mathrm{ca}(K,\mathbf{w})+1}.$$

证明。 这两个关系等价，因此只需证明第二个关系。此外，我们采用（6）中的第二个定义，并回顾 ca(K,$\mathbf{w}$) 等于使得 $\mathbf{w} - K \subseteq \lambda(K - \mathbf{w})$ 成立的最小值 $\lambda \ge 1$。鉴于 $K = -K$ 的对称性，以及凸体的闵可夫斯基加法满足消去律（例如参见 [23, 第 48] 页），以下等价关系对每个 $\lambda \ge 1$ 都成立：

$$\mathbf{w} - K \subseteq \lambda(K-\mathbf{w}) \quad\Longleftrightarrow\quad (1+\lambda)\mathbf{w} + K \subseteq \lambda K \quad\Longleftrightarrow\quad (1+\lambda)\mathbf{w} \in (\lambda-1)K.$$

因此，ca(K,$\mathbf{w}$) $\le \lambda$当且仅当 $\|\mathbf{w}\|_K \le \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$，这意味着 $\|\mathbf{w}\|_K = \mathrm{ca}(K,\mathbf{w})-1\,\mathrm{ca}(K,\mathbf{w})+1$。 □

作为一个有用的推论，我们得到不对称系数在中心对称凸体上单调不递增：

推论 5。 设 K,$L \subseteq \mathbb{R}^d$ 为中心对称凸体，且 $K \subseteq L$，并令 $\mathbf{w} \in$ 内部(K) 为 K 中的内点。则 ca(L,$\mathbf{w}$) $\le$ca(K, $\mathbf{w}$)。

证明。 根据与K 和L相关的范数的定义，我们有 $\|\mathbf{w}\|_L \le \|\mathbf{w}\|_K$。鉴于命题4，这意味着

$$\mathrm{ca}(L,\mathbf{w}) = \frac{1+\|\mathbf{w}\|_L}{1-\|\mathbf{w}\|_L} \le \frac{1+\|\mathbf{w}\|_K}{1-\|\mathbf{w}\|_K} = \mathrm{ca}(K,\mathbf{w}),$$

其中我们还用到了函数 $x \mapsto {}^{1+}{}_{x\,1-x}$ 在 [0,1 上是非递减的这一事实。 □

注意，K和L上的对称条件至关重要。例如，考虑$K=[-1,1]^d$、$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d\setminus K$，并令$L$为$K$和$\mathbf{v}$的凸包。那么对于$K$的中心$\mathbf{w}=\mathbf{0}$，我们有 $\mathrm{ca}(K,\mathbf{w})=1<\mathrm{ca}(L,\mathbf{w})$，因为否则$L$也将是中心对称的。

此外，$\mathrm{ca}(L,\mathbf{v})$ 在 L 和 $\mathbf{v}$ 同时平移和缩放下保持不变。更准确地说：

命题 6. 设 $K\subseteq\mathbb{R}^d$ 是一个具有内点 $\mathbf{w}\in\mathrm{int}(K)$ 的凸体。那么对于任意平移向量 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d$ 和任意缩放因子 $s>0$,

$$\mathrm{ca}(K+\mathbf{t},\mathbf{w}+\mathbf{t})=\mathrm{ca}(K,\mathbf{w}) \quad \textit{and} \quad \mathrm{ca}(sK,s\mathbf{w})=\mathrm{ca}(K,\mathbf{w}).$$

证明。 这直接由 (6) 中的第二个定义得出。 □

在后续各节中，我们经常需要精确描述格平行六面体内点的不对称系数，因此将其作为上述性质的一个推论记录如下：

推论 7. 设 $P=[\mathbf{0},\mathbf{v}_1]+\cdots+[\mathbf{0},\mathbf{v}_d]\subseteq\mathbb{R}^d$ 是一个格平行六面体，且 $\mathbf{w}=\sum_{i=1}^d\alpha_i\mathbf{v}_i\in\mathrm{int}(P)$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in(0,1)^d$。则

$$\mathrm{ca}(P,\mathbf{w})=\frac{\frac{1}{2}+\max_{1\le i\le d}|\alpha_i-\frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}-\max_{1\le i\le d}|\alpha_i-\frac{1}{2}|}.$$

证明。 依次应用命题 3、6 和 4，可得

$$\mathrm{ca}(P,\mathbf{w})=\mathrm{ca}\left([0,1]^d,\alpha\right)=\mathrm{ca}\left([-1,1]^d,2\alpha-\mathbf{1}\right)=\frac{1+\|2\alpha-\mathbf{1}\|_\infty}{1-\|2\alpha-\mathbf{1}\|_\infty}=\frac{\frac{1}{2}+\max_{1\le i\le d}|\alpha_i-\frac{1}{2}|}{\frac{1}{2}-\max_{1\le i\le d}|\alpha_i-\frac{1}{2}|},$$

其中 $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$ 表示全 1 向量，$\|\cdot\|_\infty$而最大范数为。 □

不对称系数在式 (6) 中的第二个定义可扩展到任意闭凸集$C\subseteq\mathbb{R}^d$（包括可能无界的情形），并相对于内点 $\mathbf{w}\in\mathrm{int}(C)$ 定义如下：

$$\mathrm{ca}(C,\mathbf{w})=\min\{\lambda\ge1:\mathbf{w}-C\subseteq\lambda(C-\mathbf{w})\}.$$

如果衰退锥 $\mathrm{rec}(C):=\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^d:\mathbf{x}+\mathbf{r}\in C\text{对所有}\mathbf{x}\in C\}$ 而言是 C的线性子空间 $L\subseteq\mathbb{R}^d$，那么通过投影消去 L，我们可以得到 C 的不对称系数的如下简单描述。

命题8。 设 $C\subseteq\mathbb{R}^d$ 是一个闭凸集，且 $L=\mathrm{rec}(C)$ 是一个线性子空间。那么，对于每个$\mathbf{w}\in\mathrm{int}(C)$,

$$\mathrm{ca}(C,\mathbf{w})=\mathrm{ca}\left(C|L^\perp,\mathbf{w}|L^\perp\right).$$

证明。 为简洁起见，记 $C_L=C|L^\perp$，并记 $\mathbf{w}_L=\mathbf{w}|L^\perp$。由于 L 是一个子空间，$C=C_L+L$ 且$\mathbf{w}=\mathbf{w}_L+\mathbf{y}$，其中某个$\mathbf{y}\in L$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{ca}(C,\mathbf{w})&=\min\{\lambda\ge1:(\mathbf{w}_L+\mathbf{y})-(C_L+L)\subseteq\lambda\left((C_L+L)-(\mathbf{w}_L+\mathbf{y})\right)\}\\&=\min\{\lambda\ge1:\mathbf{w}_L-C_L\subseteq\lambda(C_L-\mathbf{w}_L)\}=\mathrm{ca}(C|L^\perp,\mathbf{w}|L^\perp).\end{aligned}$$ □

3. 孤独跑者与孤独跑者平行多面体

设 $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d_{>0}$ 是一个速度向量，即其$d\ge2$ 个分量互异且互质。对于这样的$\mathbf{n}$，记为

$$\mathrm{gap}(\mathbf{n}):=\max_{\beta\in\mathbb{R}}\min_{1\le i\le d}\|\beta n_i\|_{\mathbb{Z}}=\max_{\beta\in[0,1]}\min_{1\le i\le d}\|\beta n_i\|_{\mathbb{Z}}$$

的 孤独间隙。我们可以将范围限制为 $\beta\in[0,1]$，因为 n_i 都是整数；并且由于它在某个 $\beta=_{a\ n_i+nj}$ 处取得，其中某个 $i\ne j$ 以及某个整数，因此可以通过取最大值来定义 $\mathrm{gap}(\mathbf{n})$

$0 < a < n_i + nj$（见 [12, 定理 6]）。注意，通过使用一个无理数倍 β，我们总有 $\mathrm{gap}(\mathbf{n}) > 0$。威尔斯猜想的原始版本如下。

L孤独跑者猜想。 对于任意速度向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，有 间隙$(\mathbf{n}) \geq {}^1 d_{+1}$。 ——

众所周知（且很容易看出两者等价）的可见性版本如下：

孤独跑者**孤独跑者猜想**。 对于任意速度向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，存在 $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ 使得 t

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}\mathbf{n} + \left[\tfrac{1}{d+1}, \tfrac{d}{d+1}\right]^d . \tag{7}$$

我们希望从几何角度，借助孤独跑者 zonotope 来理解孤独间隙。这将使我们能够通过不对称系数重新表述孤独跑者猜想。为此，我们注意到 (7) 等价于

$$\mathbf{m} \in \mathbb{R}\mathbf{n} + \tfrac{1}{d+1}\mathbf{1} + \tfrac{d-1}{d+1}[0,1]^d = \tfrac{1}{d+1}\mathbf{1} + \tfrac{d-1}{d+1} Z(\mathbf{n}),$$

由此得到如下改写

孤独跑者猜想。 对于任意速度向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，奇诺面体 ${}^1 d_{+1}\mathbf{1} + d_{-1} d_{+1} Z(\mathbf{n})$ 都包含一个格点。

孤独跑者 zonotope $Z(\mathbf{n})$ 关于直线 $\frac{1}{2}\mathbf{1} + \mathbb{R}\mathbf{n}$ 上的任意一点都具有中心对称性，特别是关于$\mathbf{c_n} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{n})$ 对称。下面的刻画给出了孤独间隙 $\mathrm{gap}(\mathbf{n})$ 关于 $Z(\mathbf{n})$ 的几何解释。

命题9。 设 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$ 为一个速度向量，并设 $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$。以下陈述等价：

(i) 存在某个 $\beta \in \mathbb{R}$ 使得 $\|\beta n_i\|_{\mathbb{Z}} \geq \gamma$，$f$ 或永远y $1 \leq i \leq d$.

（*ii*）存在某个 $\mathbf{w} \in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n})) \cap \mathbb{Z}^d$，使得 $\mathbf{w} \in \mathbf{c_n} + (1-2\gamma)(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n})$。

证明。我们首先证明蕴含关系（i）$\Longrightarrow$（ii）：如果 $\gamma = \frac{1}{2}$，那么 $\|\beta \mathrm{n}_i\|_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2}$。这意味着对于每个 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{d}$，$\mathrm{n}_i$为奇数。因此，$\mathrm{w} = \mathbf{c_n} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{n})$ 是满足（ii）的格点。现在令 $\gamma < \frac{1}{2}$。根据假设，存在整数 $\mathrm{z}_i \in \mathbb{Z}$，使得对于 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{d}$，$\mathrm{z}_i + \gamma \leq \beta \mathrm{n}_i \leq \mathrm{z}_i + 1 - \gamma$。因此，存在 α_1、.....、$\alpha_d \in [0,1]$，使得对于 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{d}$，$\beta \mathrm{n}_i = \mathrm{z}_i + \gamma + (1-2\gamma)\alpha_i$。由于 $\gamma + (1-2\gamma)\alpha_i \in [\gamma, 1-\gamma]$，我们写作 $\mathrm{w} = (\mathrm{z1}, \ldots, \mathrm{z}_d) \in \mathbb{Z}^d$并得到

$$\begin{aligned}\mathbf{w} - \mathbf{c_n} \in [\gamma, 1-\gamma]^d - \beta\mathbf{n} - \mathbf{c_n} &= (1-2\gamma)\left([0,1]^d - \tfrac{1}{2}\mathbf{1}\right) - (\beta + \tfrac{1}{2})\mathbf{n} \\ &= (1-2\gamma)\left([0,1]^d + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\beta+\frac{1}{2}}{1-2\gamma}\right)\mathbf{n} - \mathbf{c_n}\right) \subseteq (1-2\gamma)\left(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n}\right).\end{aligned}$$

因为 $\gamma > 0$，我们有 $1 - 2\gamma < 1$，因此 $\mathbf{w} \in \mathbf{c_n} + (1-2\gamma)(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n}) \subseteq \mathrm{int}(Z(\mathbf{n}))$ 如所声称d.

现在，我们证明（*ii*）$\Longrightarrow$（*i*）：令$\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$满足$\mathbf{w} \in \mathbf{c_n} + (1-2\gamma)(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n}) = 2\gamma\mathbf{c_n} + (1-2\gamma) Z(\mathbf{n})$。因此，存在 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 以及 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in [0,1]$，使得

$$\mathbf{w} = \gamma(\mathbf{1} + \mathbf{n}) + (1-2\gamma)\left(\alpha_0 \mathbf{n} + \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{e}_i\right)$$

因此

$$w_i = \gamma + (1-2\gamma)\alpha_i + (\gamma + (1-2\gamma)\alpha_0) n_i \qquad \text{for all } i \in [d].$$

记作 $\beta = \gamma + (1-2\gamma)\alpha_0$，并注意到 $\gamma + (1-2\gamma)\alpha_i \in [\gamma, 1-\gamma]$，我们得到 $\|\beta n_i\|_{\mathbb{Z}} \geq \gamma$，对每个$i \in [d]$, 都成立，因为 $w_i \in \mathbb{Z}$。□

记作

$$\lambda(C,\mathbf{w}) := \min\{\lambda \geq 0 : \mathbf{w} - \mathbf{c} \in \lambda(C-\mathbf{c})\},$$

对于关于$C \subseteq \mathbb{R}^d$对称的任意闭凸集，其中对称中心为$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$，命题9意味着

$$\min_{\mathbf{w}\in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n}))\cap\mathbb{Z}^d} \lambda(Z(\mathbf{n}),\mathbf{w}) = 1 - 2\,\mathrm{gap}(\mathbf{n}). \tag{8}$$

现在，令$L = \mathrm{rec}(Z(\mathbf{n})) = \mathbb{R}\mathbf{n}$。那么，对于每个$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n}))$，根据命题8，我们有 $\mathrm{ca}(Z(\mathbf{n}),\mathbf{w}) = \mathrm{ca}(Z(\mathbf{n})|L^\perp, \mathbf{w}|L^\perp)$，此外，对于每个 $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$

$$\mathbf{w} - \mathbf{c_n} \in (1-2\gamma)\,(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{w}|L^\perp - \mathbf{c_n}|L^\perp \in (1-2\gamma)\left(Z(\mathbf{n})|L^\perp - \mathbf{c_n}|L^\perp\right). \tag{9}$$

由于投影$Z(\mathbf{n})|L^\perp$是一个关于$\mathbf{c_n}|L^\perp$对称的zonotope，式(9)右端可以理解为对向量$\mathbf{w}|L^\perp - \mathbf{c_n}|L^\perp$长度的界，其中长度由$Z(\mathbf{n})|L^\perp - \mathbf{c_n}|L^\perp$所诱导的范数度量。根据命题4和式(8)，这转化为

$$\min_{\mathbf{w}\in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n}))\cap\mathbb{Z}^d} \mathrm{ca}(Z(\mathbf{n}),\mathbf{w}) = \frac{1+(1-2\,\mathrm{gap}(\mathbf{n}))}{1-(1-2\,\mathrm{gap}(\mathbf{n}))} = \frac{1}{\mathrm{gap}(\mathbf{n})} - 1. \tag{10}$$

由于孤独跑者猜想表明，对于每个速度向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，$\mathrm{gap}(\mathbf{n}) \geq \frac{1}{d+1}$，我们建立了关于不对称系数的所需改写。

孤独跑者猜想。设$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$为一个速度向量。则存在一个内部格点$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(Z(\mathbf{n})) \cap \mathbb{Z}^d$，使得$\mathrm{ca}(Z(\mathbf{n}),\mathbf{w}) \leq d$。

我们以这一改写的一个局部化版本作为结束。对于孤独跑者分带，一个自然的选择是 $Z_\mathbf{n} := \mathscr{Z}(e_1, \ldots, e_d, n)$，其中心为 $c_\mathbf{n}$（我们将在第 7 节中更详细地研究这一 zonotope）。但一般而言，我们不能直接将上面的奇诺面体 Z(n) 替换为 $Z_\mathbf{n}$ 并得到一个等价版本，因为整平移 $\overline{kn} + c_\mathbf{n} + d_{-1}\, d_{+1}(Z_\mathbf{n} - c_\mathbf{n})$，$k \in \mathbb{Z}$，可能无法覆盖 $c_\mathbf{n} + d_{-1}\, \overline{d_{+1}(Z(n) - c_\mathbf{n})}$，因此可能会遗漏在关于 $\overline{Z(n)}$ 的表述中存在的格点。例如，对于速度向量 $n = (2, 5)$，可以验证确实会发生这种情况。

不过，只要取$\mathbf{n}$的适当倍数作为最后一个生成向量即可。例如，对于$T_\mathbf{n} := \mathscr{Z}(\mathbf{e}1,\ldots,\mathbf{e}_d$<style>, 3$\mathbf{n})$，我们有

$$\mathbf{c_n} + \tfrac{d-1}{d+1}(Z(\mathbf{n}) - \mathbf{c_n}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\mathbf{n} + \mathbf{c_n} + \tfrac{d-1}{d+1}(T_\mathbf{n} - \mathbf{c_n})\right).$$

因此，孤独跑者猜想等价于：对于任意速度向量$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，zonotope $\frac{1}{d+1}\mathbf{1} + {}_{d-1}\, {}_{d+1}\, T_\mathbf{n}$包含一个格点。用不对称系数表述如下。

孤独跑者猜想。设$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$是一个速度向量。那么存在一个内部格点$\mathbf{w} \in \mathrm{int}(T_\mathbf{n}$<*style*>$) \cap \mathbb{Z}^d$，使得$\mathrm{ca}(T_\mathbf{n},\mathbf{w}) \leq d$。

4. S同时丢番图逼近问题与孤独兔 S

同步丢番图逼近理论中的一个经典结果是狄利克雷逼近定理（例如参见 [17, §11.12]）。该定理指出，对于任意实数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$，存在整数 Q、$P1$、...、$P_d \in \mathbb{Z}$，满足 $Q > 0$，使得

$$|Q\alpha_i - P_i| \leq \frac{1}{Q^{\frac{1}{d}}}, \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq d.$$

受其对我们证明定理 1 的实用价值启发，我们对狄利克雷定理的一个非齐次变体感兴趣。更确切地说，我们将 $\delta_d > 0$ 定义为满足以下条件的最小正数：对于任意α_1、...、 $\alpha_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$，存在整数 Q、$P1$、..、$P_d \in \mathbb{Z}$，满足

$$\left| Q\alpha_i - P_i - \frac{1}{2} \right| \leq \delta_d, \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq d. \tag{11}$$

由于我们假设所有 α_i 都不是整数，因此显然有 $\delta_d < \frac{1}{2}$；当然，我们感兴趣的是更好的界，甚至是 δ_d 的精确值。对于每个d，都有 $\delta_d \leq \delta_{d+1}$；这一点只需重复极值集合中达到 δ_d 的数之一即可看出。

事实证明，确定 δ_d 的非齐次丢番图逼近问题可以表述为孤独跑者猜想的一个离散变体。为此，记 $\mathrm{Rab}(d) := \frac{1}{2} - \delta_d$。那么条件

$$\exists Q, P_1, \ldots, P_d \in \mathbb{Z} \quad \text{such that} \quad \max_{1 \leq i \leq d} \left| Q\alpha_i - P_i - \frac{1}{2} \right| \leq \delta_d = \frac{1}{2} - \mathrm{Rab}(d)$$

等价于说

$$\exists Q \in \mathbb{Z} \quad \text{such that} \quad \|Q\alpha_i\|_{\mathbb{Z}} \geq \mathrm{Rab}(d) \quad \text{for every} \quad 1 \leq i \leq d\,.$$

因此，常数 $\mathrm{Rab}(d)$ 可以简洁地写成 (2) 的形式。$w(d)$、$\mathrm{Rab}(d)$ 和 δ_d 的前 20 个值列于表 1 中。

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$w(d)$	3	5	8	12	18	24	30	36	42	48	60	60	66	72	90	90	90	96	120	120
$\mathrm{Rab}(d)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{120}$
δ_d	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{23}{48}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{22}{45}$	$\frac{22}{45}$	$\frac{22}{45}$	$\frac{47}{96}$	$\frac{59}{120}$	$\frac{59}{120}$

表 1. $w(d)$的前 20 个值、逼近常数 $\mathrm{Rab}(d)$以及 δ_d。

参数$w(d)$的定义 (4) 表明，达到 $\mathrm{Rab}(d)$ 的数 $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_d < 1$的极值集合应当具有怎样的形式。为此，给定一个由非整数构成的向量 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^d$，我们记

$$\psi(\alpha) := \sup_{Q \in \mathbb{Z}} \min_{1 \leq i \leq d} \|Q\alpha_i\|_{\mathbb{Z}}\,.$$

此外，对于$z \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们记

$$\Phi(z) := \left\{ a \in \mathbb{Z} : 1 \leq a \leq \frac{z}{2},\ \gcd(a, z) = 1 \right\}.$$

Cusick [9, 已给出了极值向量（引理 1] 的证明）。为完整起见，我们在此给出论证；此外，在第 5 节中，我们将这些向量转化为格 zonotope，使其达到定理 1 中的界。

命题 10. 设整数 $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的素因数分解为 $z = \prod_{i=1}^{h} p^{c_i} i$，其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$且 $c_i \geq 1$。此外，记 $k = \frac{1}{2}\varphi(z)$，并设 $a_1, a_2, \ldots, a_k$为 $\Phi(z)$ 中按递增顺序排列的元素。我们定义 $\alpha^z \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})^{k+h(z)}$ 为

$$\alpha_i^z = \frac{a_i}{z} \quad \textit{for} \quad 1 \leq i \leq k \quad \textit{and} \quad \alpha_{k+j}^z = \frac{1}{p_j} \quad \textit{for } 1 \leq j \leq h(z).$$

那么 $\psi(\alpha^z) = {}^1 z_{\circ}$

证明。首先，由于 $\|Q\alpha_i^z\|_{\mathbb{Z}} \le \frac{1}{z}$，对于每个 $1 \le i \le k + h(z)$，显然有 $\psi(\alpha^z) \ge \frac{1}{z}$。对于反向不等式，我们需要证明，对于每个整数 $Q \in \mathbb{Z}$，都存在某个 $1 \le i \le k + h(z)$，使得 $\|Q\alpha_i^z\|_{\mathbb{Z}} \le \frac{1}{z}$。对于所有满足 $\gcd(Q, z) > 1$ 的 Q，这显然成立，因为对于 $1 \le j \le h(z)$，有 $\alpha_{k+j}^z = \frac{1}{p_j}$。

因此，令 $Q \in \mathbb{Z}$，使得 $\gcd(Q, z) = 1$。那么 Q 在模 z 下有乘法逆元 $P \in \{1, \dots, z-1\}$，即 $QP \equiv 1$ 模 z。若 $1 \le P \le \frac{z}{2}$，则 $P \in \Phi(z)$。因此，Pz 等于 α 的前 k 个元素之一，并满足 $\|QPz\|_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{z}$。若 $\frac{z}{2} < P < z$，则 $P' = z - P \in \Phi(z)$，从而 $P'z$ 等于 α 的前 k 个元素之一，并满足 $\|QP'z\|_{\mathbb{Z}} = \|-Qz\|_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{z}$。□

现在，如果我们取 $z = w(d)$，那么来自命题 10 的向量 α^z 的维数为 $\frac{1}{2}\varphi(z) + h(z) \le d$。在 $m = d - \frac{1}{2}\varphi(z) - h(z) \ge 1$ 的情况下，我们将第一个坐标 $\frac{1}{z}$ 重复 α^z m 次，得到一个向量 $\bar{\alpha}^z \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})^d$，其 $\psi(\bar{\alpha}^z) = \frac{1}{w(d)} = \mathrm{Rab}(d)$。

5. 格平行六面体中的深格点

在本节中，我们旨在证明定理 1 对格平行六面体的情形成立。我们利用第4节中常数 δ_d 背后的同步丢番图逼近问题，以调整 Pikhurko [19] 的方法；该方法确立了格单形中深内部格点的存在性。

定理 11。设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个格平行六面体，使得 $\text{内部}(P) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing$。则存在一个内部格点 $\mathbf{w} \in \text{内部}(P) \cap \mathbb{Z}^d$ 使得

$$\mathrm{ca}(P, \mathbf{w}) \le \frac{\frac{1}{2} + \delta_d}{\frac{1}{2} - \delta_d} = w(d) - 1.$$

证明。写作 $P = [\mathbf{0}, \mathbf{v}_1] + \cdots + [\mathbf{0}, \mathbf{v}_d] \subseteq \mathbb{R}^d$，其中 $\mathbf{v}1, \dots, \mathbf{v}_d \in \mathbb{Z}^d$ 是合适的生成元，并令 $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d$ 是 P 中的一个内部格点。特别地，这意味着 $0 < \alpha_1, \dots, \alpha_d < 1$。鉴于推论 7，不对称系数 $\mathrm{ca}(P, \mathbf{w})$ 对应于 $\max_{1 \le i \le d} |\alpha_i - \frac{1}{2}|$。如果这个最大值本身尚未被 δ_d 从上方界定，我们就借助 (11) 中的非齐次问题，在 P 内“跳跃”。更精确地说，我们找到整数 $Q, P1, \dots, P_d \in \mathbb{Z}$，使得 $|Q\alpha_i - P_i - \frac{1}{2}| \le \delta_d$，对所有 $1 \le i \le d$ 都成立。我们声称格点

$$\mathbf{w}' = Q\mathbf{w} - \sum_{i=1}^d P_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^d (Q\alpha_i - P_i)\mathbf{v}_i$$

也位于 P 的内部，并满足 $\mathrm{ca}(P, \mathbf{w}') \le \frac{\frac{1}{2} + \delta_d}{\frac{1}{2} - \delta_d}$。前者成立，因为我们必须有 $0 < Q\alpha_i - P_i < 1$，这是因为 $\delta_d < \frac{1}{2}$。后者根据推论 7 成立，因为 $\max_{1 \le i \le d} |Q\alpha_i - P_i - \frac{1}{2}| \le \delta_d$。□

受命题 10 中达到 $w(d)$ 的示例启发，对于每个整数 $z \ge 3$，我们构造一个格平行多面体，使其所有内部格点的不对称系数都等于 $z - 1$。

命题 12。对于整数 $z \ge 3$，记 $k = \frac{1}{2}\varphi(z)$ 和 $d(z) = k + h(z)$。令 $\alpha^z \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})^{d(z)}$ 按命题 *10* 中的定义，并令 $P^z = [\mathbf{0}, \mathbf{v}^z] + [\mathbf{0}, \mathbf{e}_2] + \cdots + [\mathbf{0}, \mathbf{e}_{d(z)}] \subseteq \mathbb{R}^{d(z)}$ 为其第一个生成向量如下给出的格平行多面体

$$\mathbf{v}^z := \left(z, z\alpha_2^z, \dots, z\alpha_k^z, z\alpha_{k+1}^z, \dots, z\alpha_{k+h(z)}^z\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Z}^{d(z)}.$$

有 $\varphi(z)$ 中 P^z 中的内部格点，并且每个这样的 $\mathbf{w} \in \mathrm{int}(P^z) \cap \mathbb{Z}^{d(z)}$ 都满足 $\mathrm{ca}(P^z, \mathbf{w}) = z - 1$。

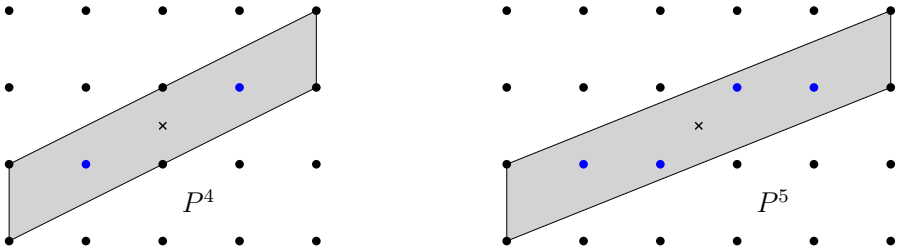


图 1. 格点平行四边形P^4 和P^5 及其内部格点。

证明。 设$\mathbf{w} = (w_1, w2, \ldots, w^{d(z)})$ $\intercal \in \mathrm{int}(P^z) \cap \mathbb{Z}^{d(z)}$是一个内部格点。根据构造，$a := w_1 \in \{1, 2, \ldots, z - 1\}$，并且存在唯一确定的系数 $\beta_2, \ldots, \beta_{d(z)} \in (0, 1)$，使得

$$\mathbf{w} = \frac{a}{z}\mathbf{v}^z + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \beta_{d(z)}\mathbf{e}_{d(z)} = \left(a, \beta_2 + a\alpha_2^z, \ldots, \beta_{d(z)} + a\alpha_{d(z)}^z\right)^\intercal. \tag{12}$$

现在，若 $\gcd(a, z) \geq 2$，则 $h(z) \geq 1$，因为z不可能是素数，而z的素因子$p1, \ldots, p^{h(z)}$中有一个（设为p_j）整除a。由于 $\alpha_{k+j}^z = \frac{1}{p^j}$，这意味着$a\alpha_{k+j}^z \in \mathbb{Z}$，因而 $\beta_{k+j} \in \mathbb{Z}$，这与所有$\beta_i \in (0,1)$矛盾。因此，我们必有 $\gcd(a, z) = 1$。

另一方面，对于给定的$a \in \{1, 2, \ldots, z-1\}$ 且 $\gcd(a, z) = 1$，存在唯一的内部格点$\mathbf{w}$位于P^z中。事实上，根据 (12)，使$\mathbf{w}$为整数的系数 β_j只有一种选择，即 $\beta_j = 1 - \{a\alpha_j^z\}$，其中 $\{\ldots\}$表示小数部分。根据关于a的假设以及 α^z的定义，我们得到 $0 < \beta_j < 1$，正如所需。

现在我们证明，每个内部格点 $\mathrm{w} \in \mathrm{int}(\mathrm{P}^z) \cap \mathbb{Z}^{d(z)}$ 都满足 $\mathrm{ca}(\mathrm{P}^z, \mathrm{w}) = \mathrm{z} - 1$。根据推论 7，$\mathrm{ca}(\mathrm{P}^z, \mathrm{w})$ 对应于 $\max\left\{\left|\frac{a}{\mathrm{z}} - \frac{1}{2}\right|, \max_{2 \leq i \leq d(z)} \left|\beta_i - \frac{1}{2}\right|\right\}$。我们需要证明这个数始终等于 $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{z}}$。再次使用 w 的表示式 (12)，我们首先注意到这个最大值至多为$\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{z}}$，因为根据 α^z 的定义，对于 $2 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{d(z)}$，有 $\beta_i = 1 - \{\mathrm{a}\alpha_i^z\} \in (\frac{1}{\mathrm{z}}, \mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$。另一方面，由于 a 和 z 互素，存在一个整数 $\mathrm{r} \in \mathbb{Z}$，使得 $\mathrm{ar} \equiv 1 \bmod \mathrm{z}$。回忆一下，$\alpha^z$ 的前 $\mathrm{k} = \frac{1}{2}\varphi(\mathrm{z})$ 个元素为 $\alpha_i^z = \mathrm{a}^i/\mathrm{z}$，$1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$，其中 $1 \leq \mathrm{a}_1 < \cdots < \mathrm{a}_k \leq \mathrm{z}/2$ 构成了与 z 互素的整数的一半。这意味着存在一个指标 $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$，使得 $\mathrm{r} \equiv \pm \mathrm{a}_i \bmod \mathrm{z}$，也就是说，对于某个 $\ell \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{a}_i = \pm \mathrm{r} + \ell \mathrm{z}$。因此

$$\{a\alpha_i^z\} = \left\{\frac{aa_i}{z}\right\} = \left\{\pm\frac{ar}{z} + \ell\right\} = \left\{\pm\frac{ar}{z}\right\} = \left\{\pm\frac{1}{z}\right\}.$$

对于相应的系数 β_i，这意味着 $|\beta_i - \frac{1}{2}| = |1 - \{a^{\alpha_i^z}\} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$。 □

命题 12 中关于平行多面体P^z 的一些数据汇总于表 2，图 1 展示了具体实例P^4 和P^5 及其内部格点。

处理好关于P^z维数的一个微妙之处后，我们就可以将它们转化为示例，说明对于任意给定的维数d，定理 11 中的界都是最佳可能的。这个微妙之处源于这样一个事实：存在整数d，使得对于最大的$z \in \mathbb{Z}$，当$d(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + h(z) \leq d$时，我们有严格不等式$d(z) < d$。例如，这种情况首次出现在$d = 12$时。此时$w(12) = 60$，但$d(60) = \frac{1}{2}\varphi(60) + h(60) = 11$（见表 1）。不过，在这种情况下，我们可以适当地将P^z提升到正确的维数。

命题 13. 设 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且令 $z = w(d)$。那么格平行多面体的每个内部格点$\mathbf{w}$

$$P(d) := P^z + [\mathbf{0}, 2\mathbf{e}_{d(z)+1}] + \cdots + [\mathbf{0}, 2\mathbf{e}_d] \subseteq \mathbb{R}^d$$

满足 $\mathrm{ca}(P(d), \mathbf{w}) = w(d) - 1$，其中我们将 P^z 视为嵌入子空间 $\mathbb{R}^{d(z)} \times \{\mathbf{0}\}^{d-d(z)}$ 中

z	$k=\frac{1}{2}\varphi(z)$	$h(z)$	α^z	$\mathbf{v}^z$	$\dim(P^z)=d(z)$
3	1	0	$(\frac{1}{3})$	(3)	1
4	1	1	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$	$(4,\ 2)$	2
5	2	0	$(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$	$(5,\ 2)$	2
6	1	2	$(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$	$(6,\ 2,\ 3)$	3
7	3	0	$(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7})$	$(7,\ 2,\ 3)$	3
8	2	1	$(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{2})$	$(8,\ 3,\ 4)$	3
9	3	1	$(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{3})$	$(9,2,\ 4,\ 3)$	4
10	2	2	$(\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{1}{2},\frac{1}{5})$	$(10,\ 3,\ 5,\ 2)$	4
11	5	0	$(\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11})$	$(11,2,3,4,5)$	5
12	2	2	$(\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{2},\frac{1}{3})$	$(12,\ 5,\ 6,\ 4)$	4
13	6	0	$(\frac{1}{13},\frac{2}{13},\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{5}{13},\frac{6}{13})$	*(13, 2, 3, 4, 5, 6)*	6
14	3	2	$(\frac{1}{14},\frac{3}{14},\frac{5}{14},\frac{1}{2},\frac{1}{7})$	$(14,3,5,7,2)$	5
15	4	2	$(\frac{1}{15},\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{7}{15},\frac{1}{3},\frac{1}{5})$	$(15,\ 2,\ 4,\ 7,\ 5,\ 3)$	6
16	4	1	$(\frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{7}{16},\frac{1}{2})$	$(16,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8)$	5
17	8	0	$(\frac{1}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{4}{17},\frac{5}{17},\frac{6}{17},\frac{7}{17},\frac{8}{17})$	*(17, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)*	8
18	3	2	$(\frac{1}{18},\frac{5}{18},\frac{7}{18},\frac{1}{2},\frac{1}{3})$	$(18,5,7,9,6)$	5
19	9	0	$(\frac{1}{19},\frac{2}{19},\frac{3}{19},\frac{4}{19},\frac{5}{19},\frac{6}{19},\frac{7}{19},\frac{8}{19},\frac{9}{19})$	$(19,\ 2,\ 3,4,\ 5,\ 6,7,\ 8,\ 9)$	9
20	4	2	$(\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{7}{20},\frac{9}{20},\frac{1}{2},\frac{1}{5})$	$(20,\ 3,7,\ 9,\ 10,\ 4)$	6

表 2。对于 $3\le z\le 20$，平行多面体 P^z 的定义数据及其维数。

特别是，定理 *11* 中的界是最优的。

证明。 每个内部格点 $\mathbf{w}\in\mathrm{int}(P(d))\cap\mathbb{Z}^d$都具有以下形式：$\mathbf{w}=(w'_1,\ldots,w'_{d(z)},1,\ldots,1)$，其中$\mathbf{w}'=(w'_1,\ldots,w'_{d(z)})$ 是 P^z 的一个内部格点。在 $P(d)$ 的生成元基中，与最后 $d-d(z)$ 个坐标相对应的系数均等于 1 2，与$\mathbf{w}$的具体选择无关。因此，根据推论 7 和命题 12，

$$\mathrm{ca}(P(d),\mathbf{w})=\mathrm{ca}(P^z,\mathbf{w}')=z-1=w(d)-1\,,$$

如所期望的。 □

注 14. 命题 *13* 中的平行六面体 $P(d)$具有更强的极值性质。也就是说，我们可以问，能否根据给定格平行六面体 $P\subseteq\mathbb{R}^d$ 中的内部格点数$\ell=\#\big(\text{内}(P)\cap\mathbb{Z}^d\big)\ge 1$，改进并细化定理 *11* 中的界。然而，由于 $P(d)$恰有 $\varphi(w(d))$个内部格点（见命题 *12*）——该数量随 d 增大而渐近趋于无穷——因此，当我们要求参数 ℓ与维数 d 无关时，这种细化是不可能的。

6. 任意格 zonotope 中的深层格点

本节中，我们将定理 11 中针对格平行六面体的界推广到任意格 zonotope，从而完成定理 1 的证明。我们的论证基于 Steinitz 下述定理的 zonotope 版本。

定理 15 (Steinitz 1914年)**.** 设 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，并设$\mathbf{w}$ 为 S 的凸包内部一点。那么 S 中至多有$2d$ 个点，使$\mathbf{w}$ 位于它们的凸包内部。

Steinitz 的工作 [26, §20] 采用“全侧射线族”的表述；Gustin [16]则用上述表述给出了另一种证明。关于 Steinitz 结果在各种其他语境中的不同体现，我们还请读者参阅 Gr¨unbaum [14] 。我们的 zonotope 版本现在表述如下:

定理 16. 令 $Z = \mathscr{Z}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m)$ 为由 $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m \in \mathbb{R}^d$生成的 *zonotope*，并令 $\mathbf{c}$ 为其中心。对于每个 $\mathbf{v} \in \operatorname{int}(Z)$，存在一个 $(d-1)$维平行六面体 Q，它是由 $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m\}$ 的一个子集生成的平行六面体的平移，使得 $\mathbf{v}$ 包含于平行六面体 $P \subseteq Z$ 的内部，其中 $P = \operatorname{conv}(Q, 2\mathbf{c} - Q)$。

此外，如果 Z 是格 *zonotope*，那么 P 就是格平行多面体。

证明。 令$\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 + \cdots + \mathbf{g}_m)$为$Z$的中心。考虑经过$\mathbf{c}$和$\mathbf{v}$的直线 ℓ。在$\mathbf{v} = \mathbf{c}$的特殊情形下，我们令 ℓ 为经过$\mathbf{c}$的任意直线。现在， ℓ 与Z 的边界相交于一对相对点$\mathbf{p}$ 和$\mathbf{p}'$。令F 为Z 的一个面，且该面包含p。zonotope 的面本身也是 zonotope，特别地，我们可以写成

$$F = \mathscr{Z}(\mathbf{g}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{g}_{\sigma(s)}) + \varepsilon_{s+1}\mathbf{g}_{\sigma(s+1)} + \cdots + \varepsilon_m \mathbf{g}_{\sigma(m)}, \tag{13}$$

对于某个 $s \in [m]$, 某个置换 σ的 $[m]$, 以及某个 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ （例如参见 [24]）。

根据 Shephard 的一个结果 [24] (另见 [4, 第 7] 章)，zonotope F 可以镶嵌为形如 (13) 的平行六面体，其中s、 σ和 ε_i 取适当值。取 Q 为F 的这种镶嵌中的一个平行六面体，且满足$\mathbf{p} \in Q$，我们发现，以 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 为端点的线段内部包含于d维平行六面体 $P = \operatorname{conv}(Q, 2\mathbf{c} - Q) \subseteq Z$ 的内部，特别地，$\mathbf{v} \in \operatorname{int}(P)$。

如果Z 是格 zonotope，则形如 (13) 的每个 zonotope 本身都是格 zonotope，特别地，Q 也是如此。此外，$2\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d$，因此 $2\mathbf{c} - Q$是格平行六面体，这意味着所构造的平行六面体$P \subseteq Z$ 同样是格平行六面体。□

定理 *1* 的证明。 设$\mathbf{v} \in$属于Z的内部$\cap \mathbb{Z}^d$。于是，根据定理 16，我们找到一个格平行六面体$P \subseteq Z$，其与Z 具有相同的中心，并且$\mathbf{v} \in$属于P的内部。将定理 11 应用于P，我们得到一个内部格点$\mathbf{w} \in$属于P的内部，且 $\operatorname{ca}(P, \mathbf{w}) \leq w(d) - 1$。由于$P$和$Z$关于同一点对称，我们可以利用不对称系数的平移不变性（见命题 6），得到 $\operatorname{ca}(Z, \mathbf{w}) \leq \operatorname{ca}(P, \mathbf{w}) \leq w(d) - 1$，根据推论 5。

渐近行为 $w(d) - 1 \in \Theta(d \operatorname{loglog} d)$ 可由式（5）中的 $\operatorname{Rab}(d)$ 的渐近行为推出。所得界的最优性已在命题 13 中得到证明。□

7. 孤独跑者 zonotope 的整点枚举

本部分旨在为 Tao [27] 提出的孤独跑者猜想的“有限检验”结果提供几何直观。

定理 17 (Tao [27, 定理 1。4])。 存在一个绝对且可显式计算的常数 $C_0 > 0$，使得对于每个自然数 $d_0 \geq 1$, 以下陈述等价:

(i) 孤独跑者猜想对每个维数 $d \leq d_0$ 都成立。*(ii)* 界 间隙$(\mathbf{n}) \geq \frac{1}{d+1}$ 对每个速度向量 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$ （其中 $d \leq d_0$ 且$n_i \leq d^{C_0 d^2}, i \in [d]$）都成立。

我们采用孤独跑者 zonotope $Z_{\mathbf{n}} = \mathscr{Z}(\mathbf{e}1,\ldots,\mathbf{e}_d,\mathbf{n})$ 的观点；我们在第3节末尾引入了这一观点。根据前一节对孤独跑者猜想的重新表述，即考察奇诺面体$Z(\mathbf{n})$中深内部格点的存在性，其启发式思路如下：如果 $Z(\mathbf{n})$ 的任意局部化版本中存在足够多的内部格点，那么其中一个格点就会位于$Z(\mathbf{n})$足够深的位置，从而满足猜想中的界。

事实证明，$Z_{\mathbf{n}}$ 中的（内部）格点数量可以明确计算。

定理18。 设 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$为一个速度向量。则 体积$(Z_{\mathbf{n}}) = 1+n_1+\cdots+n_d$且

$$\#(\operatorname{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) \;=\; \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ such that}\\ \ell\mid n_j \text{ for some } j\in[d]}} \varphi(\ell) \qquad \textit{and} \qquad \#(Z_{\mathbf{n}}\cap\mathbb{Z}^d) = 2^d + \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}_{>0} \text{ such that}\\ \ell\mid n_j \text{ for some } j\in[d]}} \varphi(\ell)\left(2^{\#J_\ell}-1\right),$$

其中，J_ℓ 是满足以下条件的按包含关系极大的子集 $J \subseteq [d]$：对于所有 $j \in J$，都有 $\ell \mid n_j$。

证明。我们记作

$$Z_{\mathbf{n}} = \sum_{j=1}^{d+1} [\mathbf{0},\mathbf{v}_j], \quad \text{where} \quad V = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{d+1}) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d,\mathbf{n}).$$

我们现在运用埃尔哈特理论；例如参见 [4]。格点计数函数 $\#(kZ_{\mathbf{n}}\cap\mathbb{Z}^d)$ 是关于正整数变量k的多项式，我们将其写作

$$\#(kZ_{\mathbf{n}}\cap\mathbb{Z}^d) = \sum_{j=0}^{d} g_j(Z_{\mathbf{n}})\,k^j.$$

由于 $n_i \neq 0$，对于每个$i \in [d]$,，由Stanley公式（例如参见 [25, 练习 31，第 272] 页）可得，$g_i(Z_{\mathbf{n}})$ 的埃尔哈特系数满足$Z_{\mathbf{n}}$

$$g_i(Z_{\mathbf{n}}) = \sum_{J\in\binom{[d+1]}{i}} \gcd\left(i\text{-minors of } V_J\right) = \binom{d}{i} + \sum_{J\in\binom{[d]}{i-1}} \gcd\left(n_j : j\notin J\right), \tag{14}$$

其中V_J 表示V 中由J索引的子集。用埃尔哈特系数表示，我们要研究的三个泛函可写为 [4,第 5]章

$$\operatorname{vol}(Z_{\mathbf{n}}) = g_d(Z_{\mathbf{n}}), \quad \#(\operatorname{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) = (-1)^d\sum_{i=0}^{d}(-1)^i g_i(Z_{\mathbf{n}}) \quad \text{and} \quad \#(Z_{\mathbf{n}}\cap\mathbb{Z}^d) = \sum_{i=0}^{d} g_i(Z_{\mathbf{n}}).$$

因此，公式 $\operatorname{vol}(Z_{\mathbf{n}}) = 1+n_1+\cdots+n_d$可直接由（14）得出，而格点计数还需要多做一些工作。我们先考虑$Z_{\mathbf{n}}$的内部格点数：

$$\begin{aligned}\#(\operatorname{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) &= (-1)^d\sum_{i=0}^{d}(-1)^i g_i(Z_{\mathbf{n}}) = (-1)^d\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\binom{d}{i} + (-1)^d\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\sum_{J\in\binom{[d]}{i-1}}\gcd\left(n_j : j\notin J\right)\\ &= \sum_{i=1}^{d}(-1)^{d+i}\sum_{J\in\binom{[d]}{i-1}}\gcd\left(n_j : j\notin J\right) = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+1}\sum_{J\in\binom{[d]}{i}}\gcd\left(n_j : j\in J\right).\end{aligned} \tag{15}$$

现在，我们对欧拉函数使用高斯恒等式 $m = \sum_{\ell\mid m}\varphi(\ell)$，其中求和遍历给定正整数$m$的所有因子 ℓ。为了将其应用于 $m = \gcd(n_j : j \in J)$，其中某个$J \subseteq [d]$,，我们使用记号 $\ell \mid n_J$ 来表示对于每个$j \in J$，都有 $\ell \mid n_j$。此外，记作 $\gcd(n_J) := \gcd(n_j : j \in J)$ 时，我们得到

$$\gcd(n_J) = \sum_{\ell\mid\gcd(n_J)}\varphi(\ell) = \sum_{\ell\mid n_J}\varphi(\ell).$$

结合（15）可得

$$\begin{aligned}\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) &= \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+1}\sum_{J\in\binom{[d]}{i}}\gcd(n_J) = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+1}\sum_{J\in\binom{[d]}{i}}\sum_{\ell\mid n_J}\varphi(\ell)\\ &= \sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+1}\sum_{\ell=1}^{\max(\mathbf{n})}\varphi(\ell)\cdot\#\left\{J\in\binom{[d]}{i}:\ell\mid n_J\right\}\\ &= \sum_{\ell=1}^{\max(\mathbf{n})}\varphi(\ell)\underbrace{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{i+1}\cdot\#\left\{J\in\binom{[d]}{i}:\ell\mid n_J\right\}}_{=:s_\ell(\mathbf{n})}.\end{aligned}$$

为继续进行，我们令$D_\ell(\mathbf{n}) := \{i\in[d]:\ \ell\mid n_i\}$。显然，如果$\mathbf{n}$的各个坐标都不能被$\ell$整除，也就是说，$D_\ell(\mathbf{n})=\varnothing$，那么我们得到$s_\ell(\mathbf{n})=0$。如果$D_\ell(\mathbf{n})\neq\varnothing$，那么

$$s_\ell(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{\#D_\ell(\mathbf{n})}(-1)^{i+1}\cdot\#\left\{J\in\binom{D_\ell(\mathbf{n})}{i}:\ell\mid n_J\right\} = \sum_{i=1}^{\#D_\ell(\mathbf{n})}(-1)^{i+1}\binom{\#D_\ell(\mathbf{n})}{i}=1$$

由此得到

$$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) = \sum_{\ell=1}^{\max(\mathbf{n})}\varphi(\ell)\,s_\ell(\mathbf{n}) = \sum_{\substack{\ell=1\\ D_\ell(\mathbf{n})\neq\varnothing}}^{\max(\mathbf{n})}\varphi(\ell)\,s_\ell(\mathbf{n}) = \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}_{>0}\text{ such that}\\ \ell\mid n_j\text{ for some }j\in[d]}}\varphi(\ell),$$

正如所需。

对于 $\mathbf{ZZ_n}$ 中的晶格点总数，我们采用类似的论证，并注意到，根据（14 ）

$$\begin{aligned}\#(Z_{\mathbf{n}}\cap\mathbb{Z}^d) &= \sum_{i=0}^{d}g_i(Z_{\mathbf{n}}) = 2^d+\sum_{i=0}^{d}\sum_{J\in\binom{[d]}{i-1}}\gcd(n_j:j\notin J) = 2^d+\sum_{i=1}^{d}\sum_{J\in\binom{[d]}{i}}\gcd(n_J)\\ &= 2^d+\sum_{i=1}^{d}\sum_{J\in\binom{[d]}{i}}\sum_{\ell\mid n_J}\varphi(\ell) = 2^d+\sum_{\ell=1}^{\max(\mathbf{n})}\varphi(\ell)\cdot\#\{J\subseteq[d]:J\neq\varnothing,\ell\mid n_J\}\\ &= 2^d+\sum_{\substack{\ell\in\mathbb{Z}_{>0}\text{ such that}\\ \ell\mid n_j\text{ for some }j\in[d]}}\varphi(\ell)\left(2^{\#J_\ell}-1\right),\end{aligned}$$

如上所述。 □

让我们暂时关注孤独跑者问题中据称为极值的实例 $\mathbf{d}=(1,\ 2,\ \ldots,\ d)$。根据定理18中的公式，我们得到 $\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{d}})\cap\mathbb{Z}^d) = \sum_{\ell=1}^{d}\varphi(\ell) =:\ \Phi(d)$ – 欧拉函数求和函数。 $\Phi(d)$ 的前几个值见表3，其渐近行为为$\Phi(d)=\frac{3}{\pi^2}d^2+\mathcal{O}(d\log d)$（例如参见 [17, 第18节5]）。

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\Phi(d)$	1	2	4	6	10	12	18	22	28	32	42	46	58	64	72

表3. 欧拉函数求和函数 Φ（d）的前几个值。

推论 19。 设$\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$为一个速度向量。那么

$$\max_{1\le i\le d} n_i \le \#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) \le \sum_{i=1}^{d} n_i.$$

此外，如果$\max_{1\le i\le d} n_i \ge \Phi(d)$，那么$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) \ge \#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{d}})\cap\mathbb{Z}^d)$，其中$\mathbf{d}=(1,2,\ldots,d)$。

证明。 根据定理18，我们有$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d)=\sum_{\ell|n_j}$，其中某个$j\in[d]\,\varphi(\ell)$。因此，对于每个$i\in[d],$，由高斯恒等式可得$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) \ge \sum_{\ell|n_i}\varphi(\ell) = n_i$。同样，我们得到

$$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d) \le \sum_{i=1}^{d}\sum_{\ell|n_i}\varphi(\ell) = \sum_{i=1}^{d} n_i\,. \qquad \square$$

该推论详细说明了本节开头所述陶哲轩的结果背后的几何启发。事实上，根据第二部分，如果速度n_i超过$\Phi(d)$，那么$Z_{\mathbf{n}}$中的内部晶格点数量至少与被认为是极端情形的$Z_{\mathbf{d}}$中一样多。

注记 20。 速度向量$\mathbf{d}$并不是孤独跑者猜想中唯一被认为是极值的情形。*Goddyn* 与 *Wong [13]* 确定了许多非典范的极值实例，例如$(1,3,4,7)$和$(1,3,4,5,9)$，并且还描述了如何通过仔细修改$\mathbf{d}$，针对任意给定的d获得这样的实例。对于这些极值实例$\mathbf{n}$的数量$\#(\mathrm{int}(Z_{\mathbf{n}})\cap\mathbb{Z}^d)$而言，典范速度向量$\mathbf{d}$始终是具有最少内部格点的唯一此类实例。从这个意义上说，$Z_{\mathbf{n}}$的内部格点数量可以区分这些极值实例。

对于$2\le d\le 5$，$Z_{\mathbf{d}}$中的$\Phi(d)$个内部格点分别由下列矩阵的各列给出。相应列的不对称系数写在最末的附加行中：

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 2\\ \hline 2 & 2\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 3\\ \hline 3 & 4 & 4 & 3\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4\\ \hline 4 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4\end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5\\ \hline 5 & 8 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 8 & 5\end{array}\right).$$

由于$\mathbf{d}$是一个极值速度向量，对于每个内部格点$\mathbf{w}\in\mathrm{int}(Z_{\mathbf{d}})$，我们必须有$\mathrm{ca}(Z_{\mathbf{d}},\mathbf{w}) \ge d$。正如小维数中的数据所表明的那样，在任意维数$d$中，这个界实际上都由$\mathbf{w}=\mathbf{1}\in\mathrm{int}(Z_{\mathbf{d}})$取得。

命题 21。 对于每个$d\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们有$\mathrm{ca}(Z_{\mathbf{d}},\mathbf{1}) = d$。

证明。 鉴于命题4，只需证明$\|\mathbf{1}-\mathbf{c}\|_{Z_{\mathbf{d}}-\mathbf{c}} = d-1\,d+1$，这等价于证明点$\mathbf{c}+d+1\,d-1(\mathbf{1}-\mathbf{c})$位于$Z_{\mathbf{d}}$的边界上，其中$\mathbf{c}=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{d})$是$Z_{\mathbf{d}}$的中心。经过初等计算可得

$$\mathbf{c}+\frac{d+1}{d-1}(\mathbf{1}-\mathbf{c}) = \left(1,\frac{d-2}{d-1},\ldots,\frac{1}{d-1},0\right)^{\mathsf{T}},$$

由此可清楚看出其包含于$Z_{\mathbf{d}}$的边界中。 $\square$

8. 展望与问题

我们在定理 1 中关于不对称系数的界适用于任意格 zonotope。对于孤独跑者猜想而言，这些对象过于一般；而从中心对称格多面体这一类的角度来看，它们又过于特殊。展望未来的研究，我们将在这两种情形下分别讨论一个尚未解决的问题。

8.1. **立方格 zonotope**。如果一个 zonotope 的每个面（因此也包括其每个真面）都是平行六面体，则称其为立方型。等价地，一个d维 zonotope 是立方型的，当且仅当其任意d 个生成元都是线性无关的（参见例如 [24]）。

给定一个速度向量 $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^d_{>0}$，孤独跑者奇诺面体 Z(n) 沿 $\mathbb{R}$n 投影到一个具有 d 个生成元的立方 (d $-$ 1) 维 zonotope。相对于投影格 $\mathbb{Z}^d|\mathrm{n}^\perp$，它是一个格 zonotope，并且根据命题8，对于每个内点 $\mathrm{w} \in \mathrm{int}(\mathrm{Z(n)})$，我们有 $\mathrm{ca}(\mathrm{Z(n)},\mathrm{w}) = \mathrm{ca}(\mathrm{Z(n)}|\mathrm{n}^\perp,\mathrm{w}|\mathrm{n}^\perp)$。根据 (10) 和 Wills界 $\mathrm{gap(n)} \geq \frac{1}{2}\mathrm{d}$ [29], ，我们总能找到一个内部格点 $\mathrm{w} \in \mathrm{int(Z(n))}$，使得 $\mathrm{ca}(\mathrm{Z(n)}, \mathrm{w}) \leq 2\mathrm{d} - 1$。与定理 1 中的界相比，这是一个关于维数 d 的线性界。

Wills 关于 gap(**n**) 的下界虽随时间推移逐渐得到改进，但即使是目前已知的最佳界 $\mathrm{gap(\mathbf{n})} \geq \frac{1}{2}d + c\log(d)\, d^{2}(\log\log d)^{2}$（其中某个 $c > 0$），由 Tao [27] 给出，也无法将 1 2d 中的因子 2 降低。因此，若以下问题的答案为肯定，将是孤独跑者问题的一项重大进展：

问题22. 是否存在一个通用常数 $\gamma < 2$，使得每个具有 $d+1$个生成元的立方格 *zonotope* $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ 都包含一个内部格点 $\mathbf{w}$，满足 $\mathrm{ca}(Z,\mathbf{w}) \leq \gamma d$?

8.2. **任意对称格多胞体**。 定理 1 中关于格 zonotope 的略超线性上界，与定理2 中关于任意格多胞体必然具有的双指数上界形成鲜明对比。人们或许会想知道，对称格多胞体这一类处于这两个极端之间的什么位置。这里所说的对称格多胞体，是指满足 $P \subseteq \mathbb{R}^d$关于 $P - \mathbf{c} = \mathbf{c} - P$ 的多胞体，其中 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$是某个不一定为整数的点。与格 zonotope 一样，P 的中心必为半整数点，即 $\mathbf{c} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$。

问题 23. 满足$\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing$ 的每个中心对称格多面体 P，是否都包含一个内部格点 $\mathbf{w} \in \mathrm{int}(P)$，使得 $\mathrm{ca}(P,\mathbf{w}) \leq v_d$？我们至少能确定 v_d的渐近行为吗？

利用 Carath´eodory 定理，在P的边界上，可以采用与定理 16 类似的论证方式，得到适用于中心对称格多面体的斯坦尼茨结果的一个特化版本，其中这 2d 个点在P中张成一个格交叉多面体。这便将上述问题归结为格交叉多面体的情形。正如定理 11 将孤独兔子问题与具有内部格点的格平行六面体联系起来一样，问题 23 中的常数 v_d也与交叉多面体背后的一个丢番图逼近问题相关。更确切地说，我们发现 $v_d \leq \frac{1+\kappa_d}{1-\kappa_d}$，其中

$$\kappa_d := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^d \\ \|\alpha\|_1 < 1}} \inf_{\mathbf{P} \in \mathbb{Z}^d} \min_{\varepsilon \in \{-1,1\}^d} \|\alpha - (\varepsilon^{\mathsf{T}}\mathbf{P})\alpha - \mathbf{P}\|_1 .$$

此处，$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^d |v_i|$ 表示$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$的 ℓ_1-范数。对于$d \leq 2$，格平行六面体类与格交叉多面体类一致，因此出现 $\kappa_1 = 2\delta_2 = \frac{1}{3}$ 和 $\kappa_2 = 2\delta_2 = \frac{3}{5}$（见定理 11）也就不足为奇。然而，对于$d \geq 3$，我们不知道任何 κ_d的确切值，也不知道 κ_d 关于d的渐近行为。

参考文献

1. Gennadiy Averkov, Jan Kr¨umpelmann, and Benjamin Nill, 《具有固定正数内部格点的格单纯形：近乎最优的体积界》, Int. Math. Res. Not. 2020 (2020), no. 13, 3871–3885. 2. Javier Barajas and Oriol Serra, 《七名跑者的孤独跑者问题》, Electron. J. Combin. 15 48, 18 2008 1, ( ), no. Research paper pp. (electronic). 3. Matthias Beck, Serkan Hos¸ten, and Matthias Schymura, 《孤独跑者多面体》, Integers 19 (2019), #A29, 13 pp. 4. Matthias Beck and Raman Sanyal, 《组合互反定理：枚举几何组合学导论》, Grad. Stud. Math., vol. 195, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2018. 5. Ulrich Betke and J¨org M. Wills, 《两个丢番图逼近函数的下界》, Monatsh. Math. 76 (1972), 214–217. 6. Wojciech Bienia, Luis Goddyn, Pavol Gvozdjak, Andr´as Seb˝o, and Michael Tarsi, 《流、视线阻碍与孤独跑者问题》, J. Combin. Theory Ser. B 72 (1998), no. 1, 1–9. 7. Tom Bohman, Ron Holzman, and Dan Kleitman, 《六名孤独跑者》, Electron. J. Combin. 8 (2001), no. 2, Research Paper 3, 49 pp. (electronic), 为庆祝 Aviezri Fraenkel 七十寿辰而作。8. John W. S. Cassels, 《数的几何导论》, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 1971 年版的修订重印本。9. Thomas W. Cusick, 《有理数的同步丢番图逼近》, Acta Arith. 22 (1972), 1–9. 10., 《视线遮挡问题》, Aequat. Math. 9 (1973), 165–170. 11. Thomas W. Cusick and Carl Pomerance, 《视线遮挡问题 III》, J. Number Theory 19 (1984), no. 2, 131–139. 12. Sebastian Czerwi´nski and Jarosław Grytczuk, 《有限域中的隐形跑者》, Inf. Process. Lett. 108 (2008), no. 2, 64–67. 13. Luis Goddyn and Erick B. Wong, 《孤独跑者问题的紧实例》, Integers 6 (2006), #A38, 14 pp. 14. Branko Gr¨unbaum, 《凸集交集的维数》, Pac. J. Math. 12 (1962), 197–202. 15., 《凸集的对称性度量》, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, pp. 233–270. 16. William Gustin, 《欧几里得集合凸包的内部》, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), no. 4, 299–301. 17. Godfrey H. Hardy and Edward M. Wright, 《数论导论》, 第 5 版, Oxford at the Clarendon Press, 1979. 18. Matthias Henze and Romanos-Diogenes Malikiosis, 《格 zonotope 的覆盖半径及其与视线阻碍和孤独跑者猜想的关系》, Aequat. Math. 91 (2017), no. 2, 331–352. 19. Oleg Pikhurko, 《格多面体中的晶格点》, Mathematika 48 (2001), no. 1-2, 15–24. 20. J´erˆome Renault, 《视线阻碍：六名孤独跑者问题的一个更简短证明》, Discrete Math. 287 (2004), no. 1-3, 93–101. 21. Rainer Schark, 《一个丢番图逼近函数》, Monatsh. Math. 78 (1974), 131–146. 22. Rainer Schark and J¨org M. Wills, 《一个丢番图逼近函数的渐近行为》, Acta Arith. 22 (1973), 129–136. 23. Rolf Schneider, 《凸体：Brunn–Minkowski 理论》, 第 2 版, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. 24. Geoffrey C. Shephard, 《相关拟阵多面体的组合性质》, Canad. J. Math. 26 (1974), 302–321. 25. Richard P. Stanley, 《枚举组合学：第 1 卷》, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 26. Ernst Steinitz, 《条件收敛级数与凸系（续）》, J. Reine Angew. Math. 144 (1914), 1–40. 27. Terence Tao, 《关于孤独跑者猜想的一些评述》, Contrib. Discrete Math. 13 (2018), no. 2, 1–31. 28. Gabor Toth, 《凸集的对称性度量与稳定性》, Universitext, Cham, Springer, 2015. 29. J¨org M. Wills, 《关于同步齐次丢番图逼近 I》, Monatsh. Math. 72 (1968), 254–263. 30., 《关于同步齐次丢番图逼近 II》, Monatsh. Math. 72 (1968), 368–381.

数学系，旧金山州立大学，旧金山，加利福尼亚州 94132，美国电子邮件地址：becksfsu@gmail.com

罗斯托克大学数学系，Ulmenstrasse 69 校区，D-18051 罗斯托克，德国电子邮件地址：matthias.schymura@uni-rostock.de