arXiv:2301.12186v1 [math.DS] 28 Jan 2023

引力台球——在抛物面腔体内弹跳

Daniel Jaud

摘要。本文推导了点状粒子在理想反射抛物面镜边界内运动时的受限区域。由此证明，所有连续飞行抛物线的焦点都位于半径为 R 的同一个球面上。本文通过多种极限情形阐释主要结果，并将其与二维对应物进行比较。

关键词：台球、重力、焦点、抛物面镜、受限轨迹

MSC 分类：14H81,37C50, 37N05

1. 引言

数十年来，人们从不同角度研究了受恒定引力作用、被限制在某一区域内的点状粒子的动力学，这类系统简称为重力台球。始于 [10] 首次对最简单可想象的系统——楔形——进行数值研究，并发现楔形的某些角度可使系统成为可积系统。此后，人们还在例如 [1,6] 中对该系统进行了进一步研究。在例如 [3,7], 中，研究者将系统扩展至其他二维边界（圆形、椭圆形、卵形）或其他势，并发现对于二次势和库仑势，系统可以成为可积系统。2015 年， [8,9] 首次研究了三维圆锥中的动力学，并发现二维框架中的某些量与 $\mathbb{R}^3$中的量一一对应。

一般而言，粒子的运动极为复杂，无法简洁地写出其在任意时刻的轨迹表达式。因此，依照 [11,12], ，研究者通过几何分析方法推导了点状粒子在均匀引力作用下于二维抛物线形腔体内反弹时的受限区域。近期， [4]中进一步得出了相关的焦点曲线，以及粒子在一般二维边界内反弹时的受限区域。

本文将研究粒子在恒定引力作用下，于旋转对称抛物面内部弹跳时的受限区域；该引力方向与对称轴平行。我们的分析将表明，在 [4, 5, 12] 中得到的一些二维特征，在某些情况下也适用于

德国 Holzkirchen 文理中学电子邮箱地址：Daniel.Jaud.PhD@gmail.com。OrcID：0000-0002-0163-7586。

三维情形。由于沿 z–方向的角动量守恒所伴随的额外旋转运动，与二维情形相比还会出现进一步的限制。

本文结构安排如下：第2节将简要介绍后续分析所需的所有假设和基本思路。在展开一般性分析之前，第 3 节将说明，在某些限制条件下，三维粒子运动可以简化为圆内的二维无力情形。第4节首先证明，所有连续的飞行抛物线焦点都位于半径为 R 的球面上。基于这一结果，我们推导出取决于系统参数的约束区域通用公式。为深入理解这些一般性结果及相关物理问题，第5节将推导相应的包络曲线，从而得到不同球半径 R 和（约化）角动量 l_z 下旋转约束区域的二维截面。最后，第6节将总结本文，并展望与本文相关的潜在未来研究方向。

2. 抛物面台球概述

这里陈述了粒子在腔体内受恒定引力作用时运动的一些一般结果。所有所得结果都是对二维情形的直接推广，该情形已在例如 [4,12] 中讨论过。我们研究质量为 m 的粒子在恒定引力 $F = -mg\vec{e}_z$ 作用下，在抛物面镜内运动的情况，其中引力方向平行于 z– 轴。抛物面边界在笛卡尔坐标系 (x、 y、 z) 中的方程为

$$M(x,y,z) = z - \frac{x^2+y^2}{4f_M} + f_M = 0. \tag{1}$$

抛物面的焦点位于坐标系原点，f_M 表示这面理想反射镜的焦距（见图1）。

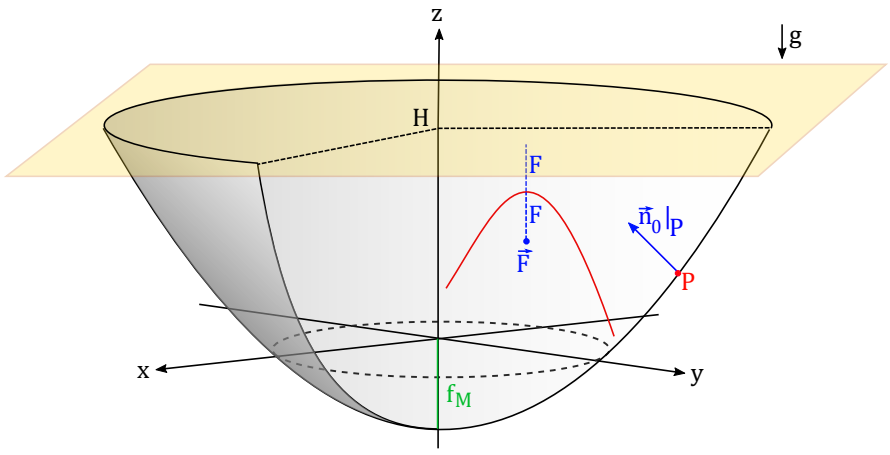


图1. 抛物面引力台球中主要物理量的示意图。

对于镜像边界上的任意点 $P(x,\ y,\ z)$，指向镜面区域内部的对应单位法向量为

$$\vec{n}_0|_P = \frac{1}{|\vec{\nabla}M|}\vec{\nabla}M|_P = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4f_M^2}}}\begin{pmatrix} -\frac{x}{2f_M} \\ -\frac{y}{2f_M} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

通常，某一特定飞行抛物线的轨迹可写成时间 t 的函数，形式如下

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z + \vec{v}t + \vec{r}_0. \tag{3}$$

所有飞行抛物线都有一个焦距 F，它与沿 $x-$ 和 $y-$ 方向的速度分量相关，关系如下

$$F = \frac{v_x^2 + v_y^2}{2g}. \tag{4}$$

能量守恒 $E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + mgz$ 给出了抛物面内所有飞行抛物线的最大可达高度 H。考虑飞行抛物线顶点处的速度 $\vec{v}_S$ 及对应高度 z_S，可得

$$H = \frac{E}{mg} = \frac{v_S^2}{2g} + z_S = const.. \tag{5}$$

类比二维情形（见 [4,12]），H 指的是飞行抛物线的顶点平面（见图1）。由此可直接得出，飞行抛物线焦点的 $z-$ 坐标满足 $F_z = H - 2F$。我们将在第4节中利用这一关系。

最后，我们以向量形式陈述反射定律：当粒子在点 P 撞上镜面边界并发生理想反射时，反射前速度 $\vec{v}$ 与反射后速度 $\vec{v}'$ 满足

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2(\vec{n}_0 \circ \vec{v})\cdot\vec{n}_0|_P = \vec{v} - \frac{2}{|\vec{\nabla}M|^2}(\vec{v}\circ\vec{\nabla}M)\cdot\vec{\nabla}M|_P. \tag{6}$$

反射定律的一个直接推论如下引理所述。在第4节中，我们将利用该引理减少系统的自由参数数量。

引理 2.1. 沿 $z-$ 方向的单位质量角动量，即 $l_z = L_z/m$，下文称为约化角动量，是一个守恒量，特别是在任意反射点 P 处也是如此。

证明。只需在与向量 $\vec{r}$相关的某个一般反射点 P处证明该命题。将反射定律 (6) 用于 $z-$方向上的约化角动量，可得：

$$l_z' = (\vec{r}\times\vec{v}')_z = (\vec{r}\times\vec{v})_z - \frac{2}{|\vec{\nabla}M|^2}(\vec{v}\circ\vec{\nabla}M)\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla}M)_z = (\vec{r}\times\vec{v})_z = l_z.$$

这里在最后一步用到了以下事实：$(\vec{r}\times\vec{\nabla}M)_z = 0$在 P中。因此，$l_z' = x_0v_y - y_0v_x = x_0v_y' - y_0v_x' = l_z$ 守恒。注意，l_z 沿飞行抛物线的守恒是叉积性质的直接结果。□

3. 化简为沿同一圆的反射

在本节中，我们首先讨论这样一种简化情形：所有连续的反射点 P_i 都位于同一个半径为 r_0 的圆上（因此相对于 $z-$轴的高度为$z_0 = \frac{1}{4f_M} r_0^2 - f_M$）。自然地，本节选用极坐标来描述动力学。从上方观察时，该系统可以唯一地由两个连续反射点与高度为 z_0 的“原点”所夹的角度 ϑ 来描述（见图2）。不失一般性，我们可以将初始位置选在极坐标 P_0处（r_0，0，z_0），相应地 P_i（r_0，$i \cdot \vartheta$，z_0）。从上方观察时，我们设粒子沿逆时针方向运动。反射点处新飞行抛物线的速度值为（$v_{r,\,i}$，$v_{\varphi,\,i}$，$v_{z,\,i}$）。

从我们的设定可以清楚看出，($v_{r,\,i}$，$v_{\varphi,\,i}$，$v_{z,\,i}$) 的允许取值受到以下条件限制：所有反射点 P_i 都必须位于同一个圆上。特别是，只有当对应的飞行抛物线都可通过旋转 ϑ 得到同一条基本对称抛物线的副本时，这种行为才可能出现；该旋转角由两个初始反射点 P_0 和 P_1张成。

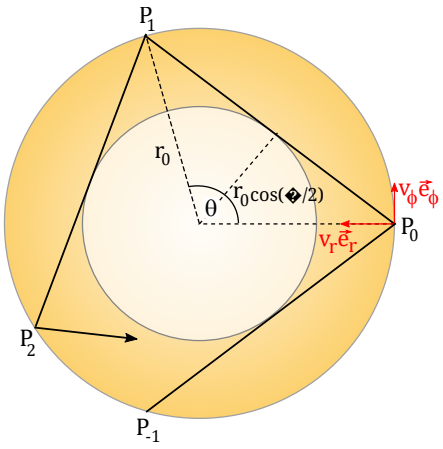


图2. 投影至高度为 z_0 的平行 $x-y-$平面，其中 ϑ 是与圆内无外力台球相关的系统参数。

由于具有旋转对称性，因此只需确定对 ($v_{r,0}$,$v_{\varphi,0}$,$v_{z,0}$) =: (v_r,v_φ, v_z) 的限制。在 P_0 处应用反射定律（6），可得到反射前的表达式 (v_r', v_φ', v_z')。这些速度值对应于从 P_{-1} 出发并传播至 P_0 的飞行抛物线。若所有飞行抛物线均为同一个副本，则可得到以下限制：

$$|v_r| = |v_r'| \text{ and } |v_z| = |v_z'|. \tag{7}$$

当满足以下条件时，这两个条件均成立：

$$v_r \vec{e}_r + v_z \vec{e}_z \parallel \vec{\nabla} M|_{P_0}, \tag{8}$$

也就是说，速度向量的（r，z）$-$分量垂直于反射点处的切平面。再次到达初始高度$t = \frac{2v_z}{g}$所需的飞行时间z_0 由沿 $z-$方向的运动唯一确定。在此期间

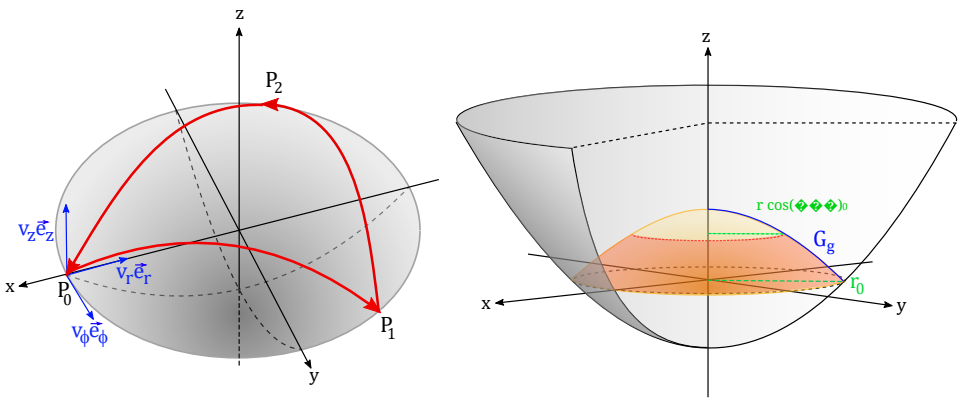


图3。左图：沿同一圆的三周期轨道示例（$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$）。右图：非周期情况下扫掠出的飞行抛物面（浅红色），以及 $\vartheta \neq \pi$。

从 P_0 出发的粒子必须到达 P_1。在 $x-y-$平面内，连续两个反射点之间的角度 ϑ（见图2）与速度值（v_r, v_φ）之间的关系为

$$\vartheta = \pi - 2\arctan\left(\left|\frac{v_\varphi}{v_r}\right|\right). \tag{9}$$

要求所有反射点都位于半径为 r_0 的同一圆上，会对给定飞行时间 t 内从 P_i 到 P_{i+1} 的系统施加进一步限制。直接计算表明，允许的速度分量完全由角度 ϑ、公共反射点所在圆的半径 r_0，以及抛物面镜的焦距 f_M 决定：

$$v_r = -\frac{r_0}{2f_M}\cdot\sqrt{gf_M\cdot[1-\cos(\vartheta)]}, \tag{10}$$

$$v_\varphi = \frac{r_0}{2f_M}\cdot\sqrt{gf_M\cdot[1+\cos(\vartheta)]}, \tag{11}$$

$$v_z = \sqrt{gf_M\cdot[1-\cos(\vartheta)]}. \tag{12}$$

根据 ϑ 的取值（参见例如 [5,13]），我们得到周期或非周期轨道，其中所有飞行抛物线都位于绕 $z-$ 轴的同一旋转曲面上（见图3），该曲面的径向函数完全由镜面参数决定。

$$g(r) = \frac{r_0^2}{4f_M} - \frac{f_M\cdot r^2}{r_0^2},\ \text{with}\ r\in[r_0\cos(\vartheta/2); r_0]. \tag{13}$$

考虑飞行抛物线依次将旋转飞行曲面 $g(r)$ 划分为更小子区域的情形，可以将其映射到圆形情形；如 [5] 所示，对于 ϑ 的特定取值，曲面的划分序列由一个整数序列给出。

作为说明，对于 $\vartheta = \pi$，$\varphi-$速度分量等于零，即 $v_\varphi = 0$。在这种情况下不存在旋转运动（角动量为零），粒子沿着 $g(r)$反弹，形成一个二周期轨道，重现了例如 [4,7]中获得的二维结果。

4. 一般飞行抛物线域

在本节中，我们将推导出粒子在给定初始条件下运动时无法离开的受限区域。我们将使用第2节中引入的相同符号。显然，对于某些初始条件的选择，实际的飞行轨道不会填满整个受限区域。特别地，我们考虑的是非周期轨道，在这些轨道中，被扫过的区域会变得稠密。获得受限区域表达式的一个主要组成部分在下面的定理中给出。

定理4.1。 所有在给定 H 和 l_z 处的飞行抛物线焦点 F_i 均位于一个球面上，该球的半径为 R ，球心位于原点 O，即抛物面的焦点。

证明。 不失一般性，设反射点位于笛卡尔坐标中的 $P(r_0,\ 0,\ z_0)$处，并令反射前的相应速度向量为 $\vec{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)^T$。于是，飞行抛物线的焦点为

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 2z_0 - H \end{pmatrix} + \frac{v_z}{g} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \tag{14}$$

在 P 中应用反射定律，可得到反射后的速度向量 $\vec{v}'$ ，从而得到 $\vec{F}'$。经过直接但冗长的计算可得

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}'|^2 = R^2 = const.,$$

也就是说，两个焦点都位于半径为 R的同一个球面上。由于系统具有旋转对称性，且能量守恒，并且沿 z–方向满足约化角动量守恒，因此所有连续的焦点都位于半径为 R的同一个球面上。由于 $\vec{r}_0$和初始速度 $\vec{v}_0$ 均为任意选取（假设总能量相同），所有连续的焦点都必须使这一等式取等。请注意，这是对二维情形的直接推广。

□

现在，利用定理4.1、能量守恒、约化角动量守恒以及旋转不变性，我们可以将六维相空间约化为两个自由参数；对于给定的数值（$H,\ l_z,\ R$），粒子只能处于相应的受限区域内。

因此，用球坐标表示的每条飞行抛物线的顶点 S 可写为

$$\vec{S}(R,\varphi,\vartheta) = \vec{F}(R,\varphi,\vartheta) + F\vec{e}_z = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} + F\vec{e}_z = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ R\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ \frac{H+R\cos(\vartheta)}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

由此我们用到了第2节焦距满足 $F = {}^{H-R}{}_{\cos(\vartheta)\ 2}$ 。请注意，此处的 ϑ 对应于极角（参见图4），与第 3 节中 ϑ 的定义不同。能量守恒给出了顶点处速度绝对值 $|\vec{v}_S|$ 的表达式

$$H = \frac{\vec{v}_S^2}{2g} + z_S \ \leftrightarrow\ v_S = |\vec{v}_S| = \sqrt{2g(H - z_S)} = \sqrt{g(H - R\cos(\vartheta)}, \tag{16}$$

其中， H 是准线平面的高度， z_S 是对应的顶点高度（参见图4）。我们取 v_S 为正；负值仅对应于一个时间反演系统。由于上面的方程没有确定 $\vec{v}_S$ 的方向，我们可以采用一般的试探形式 $\vec{v}_S = v_S(\cos(\varphi'), \sin(\varphi'), 0)^T$。沿 $z-$ 轴的约化角动量守恒（参见引理 2.1）

$$l_z = (\vec{S} \times \vec{v}_S)_z = R\sqrt{g(H - R\cos(\vartheta))} \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi' - \varphi) = const., \tag{17}$$

将 $\vec{v}_S$ 相对于旋转角φ' 的取向限制在以下允许范围内

$$\varphi' = \varphi + \arcsin\left(\frac{l_z}{R\sin(\vartheta) \cdot \sqrt{g(H - R\cos(\vartheta))}}\right). \tag{18}$$

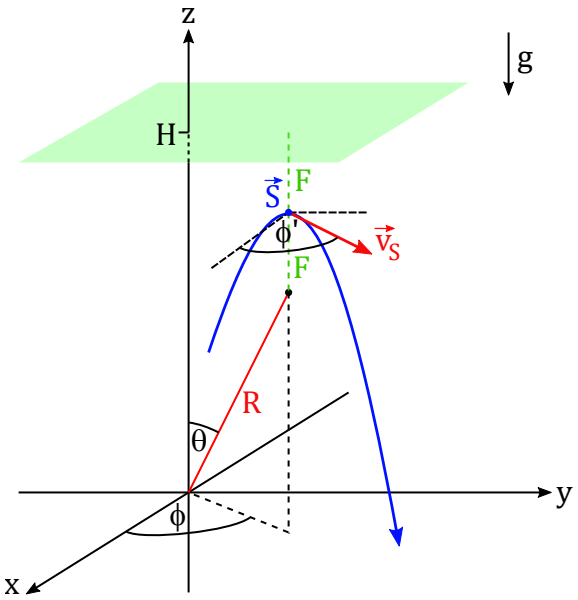


图4. 飞行抛物线设置。

由于具有旋转对称性，后续只需考虑 $\varphi = 0$ 的情况。相应的允许飞行抛物线

$$\vec{r}(t, \vartheta) = \begin{pmatrix} R\sin(\vartheta) + t \cdot \sqrt{g(H - R\cos(\vartheta)) - \frac{l_z^2}{R^2\sin^2(\vartheta)}} \\ t \cdot \frac{l_z}{R\sin(\vartheta)} \\ -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{H + R\cos(\vartheta)}{2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

在固定的（H， l_z， R）下，在 $\mathbb{R}^3$ 中构成一个单参数族的曲线。注意，$x-$分量的速度项根据（参见图 5）限制了在给定 l_z 值下 ϑ 的允许取值

$$J(H, R, \vartheta) = gR^2\sin^2(\vartheta) \cdot (H - R\cos(\vartheta)) \geq l_z^2 \;\leftrightarrow\; \vartheta \in [\vartheta_0; \vartheta_1]. \tag{20}$$

显然， l_z 是 ϑ 的主要限制因素；较大的 l_z 与远离 $z-$轴的运动相关，就像 l_z 较小时的情况一样，从而产生了接近

z–轴的可能性。此外， l_z 的上限由J的最大值决定（H， R， l_z），该最大值在以下情况下达到饱和：

$$\cos(\vartheta_{max}) = \frac{H - \sqrt{H^2 + 3R^2}}{3R}, \tag{21}$$

因此取值为

$$J(H, R, \vartheta_{max}) = \frac{2}{27} g \left(\sqrt{H^2 + 3R^2} + 2H\right) \left(H \left(\sqrt{H^2 + 3R^2} - H\right) + 3R^2\right). \tag{22}$$

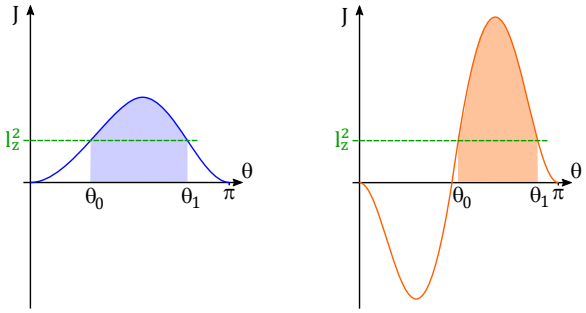


图 5. 给定 l_z^2时，允许的 ϑ 值的定性限制。左侧对应 $H > R > 0$，右侧对应 $0 < H < R$。

定理 4.2. 给定径向距离 r 和角度 ϑ 时，粒子的旋转对称的允许传播高度 h 为

$$h_{\pm}(r, \vartheta) = \frac{H + R\cos(\vartheta)}{2} - \frac{g}{2} \left(\frac{\sqrt{r^2 \cdot g(H - R\cos(\vartheta)) - l_z^2} \pm \sqrt{R^2 \sin^2(\vartheta) \cdot g(H - R\cos(\vartheta)) - l_z^2}}{g(H - R\cos(\vartheta))} \right)^2,$$

并对半径 $r \geq \frac{l_z}{\sqrt{g(H - R\cos(\vartheta))}}$ 施加限制。

证明。 方程（19）定义了给定 (H, R, l_z) 时可能的轨迹。考虑相应的径向距离 $r^2 = x(t, \vartheta)^2 + y(t, \vartheta)^2$，可以用 r 和 ϑ 表示变量 t。将该表达式代入方程（19）的 $z-$ 分量，可得允许高度 $h_{\pm}$ 的表达式，其中两个不同的解分别对应从最小距离 $r_{min} = l_z/\sqrt{g(H - R\cos(\vartheta))}$ 起算的左、右抛物线弧。□

为了得到相应包络曲线的表达式，我们定义一个新量

$$K(z, r, \vartheta, H, R, l_z) := z - h_{\pm}(r, \vartheta). \tag{23}$$

通过求解以下方程组消去 ϑ，即可得到限制受限区域的包络曲线（参见 [2]）

$$K(z, r, \vartheta, H, R, l_z) = 0 \text{ and } \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = 0. \tag{24}$$

图 6 展示了允许的飞行抛物线的计算机动画图像。在下一节中，我们将通过各种极限情形来阐释所得结果。

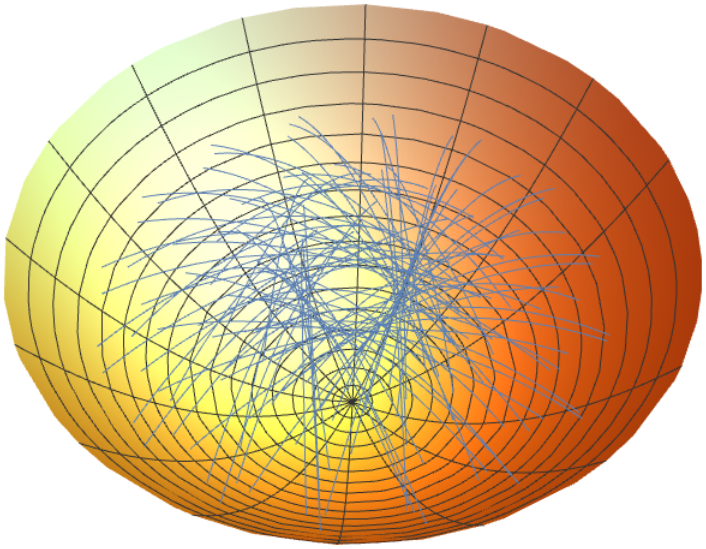


图 6. 计算机动画飞行轨迹。

5. 极限情形的讨论

本节将讨论约化角动量 l_z 的四种极限情形。对于所有情形，我们都根据定理 4.2 确定相应的高度函数，并在可能的情况下，计算限制粒子运动的相应包络曲线；一般而言，粒子的运动被限制在一个旋转对称区域内。本节的所有结果均展示在图 7 中，以供说明。

5.1. 该 $l_z = 0$ 情形。 在没有约化角动量（$l_z = 0$）的最简单情形下，定理 4.2 的高度函数可大幅简化为

$$h_{\pm}(r,\vartheta) = \frac{H + R\cos(\vartheta)}{2} - \frac{(r \pm R\sin(\vartheta))^2}{2(H - R\cos(\vartheta))}. \tag{25}$$

求解方程组 (24) 可得包络曲线

$$c_{\pm}(r) = \frac{H \pm R}{2} - \frac{r^2}{2(H \pm R)}. \tag{26}$$

这重现了在 [12] 中通过几何方法以及在 [4]中通过解析方法得到的结果。由于运动位于包含 z–轴的公共平面内，显然 $r$cantake valuesin $\mathbb{R}$。

5.2. 小 l_z 情形。对于 l_z 较小的情况，与 $l_z = 0$情形的偏差微乎其微。因此可以得出结论，初步近似下得到的包络曲线 $c_{\pm}(r)$ 与之前相同。另一项限制来自这样一个事实： r的允许取值下限为 $r \geq \frac{l_z}{\sqrt{g(H - R\cos(\vartheta))}}$。若该不等式取等号，也就是说，考虑以 ϑ 表示的最小径向距离情形，则可解出 r 关于 cos(ϑ) 的表达式，并将其代入

定理 4.2 的高度函数，从而得到一条与角动量势垒相关的额外（近似）包络曲线，其形式为

$$c_0(r) = \frac{(H^2 - R^2)g}{2l_z^2} \cdot r^2 + \frac{gr^4}{2l_z^4}. \tag{27}$$

这条包络曲线让人联想到粒子物理学中的希格斯势，在 $R > H$ 的情况下，可以得到众所周知的墨西哥帽状函数。

5.3. 大 l_z 情形。 在大 l_z 极限下，由于 $l_z^2 \approx J(H, R, \vartheta_{max})$，可以忽略定理 4.2 的高度函数中出现的第二个平方根的最低阶项。因此，相应的包络曲线近似类似于 ϑ 的微小变化所对应的高度函数

$$\tilde{c}_\pm = \frac{H + R\cos(\vartheta)}{2} - \frac{r^2 - R^2\sin^2(\vartheta_{max})}{2(H - R\cos(\vartheta))}, \tag{28}$$

其中 $\vartheta \in [\vartheta_{max} - \delta;\ \vartheta_{max} + \delta]$ 当 δ 较小时。

5.4. 最大 l_z 情形。 l_z 的最大值由式 (22) 得出，为

$$l_z = \sqrt{J(H, R, \vartheta_{max})}. \tag{29}$$

在这些情形下，定理 4.2 的高度函数中的第二个平方根消失，因而 $\vartheta = \vartheta_{max}$ 对应的高度函数仅剩一个，形式如下

$$d(r) = \frac{H + R\cos(\vartheta_{max})}{2} - \frac{r^2 - R^2\sin^2(\vartheta_{max})}{2(H - R\cos(\vartheta_{max}))}, \tag{30}$$

其中 $r \geq R\sin(\vartheta_{max})$。请注意，对于 $R < H$，这将重现第 3 节的结果。对于 $R > H$，$r \geq R\sin(\vartheta_{max})$这一条件能否达到取决于镜像边界；在某些情况下，由于镜像边界的限制，无法达到最大 l_z–值。

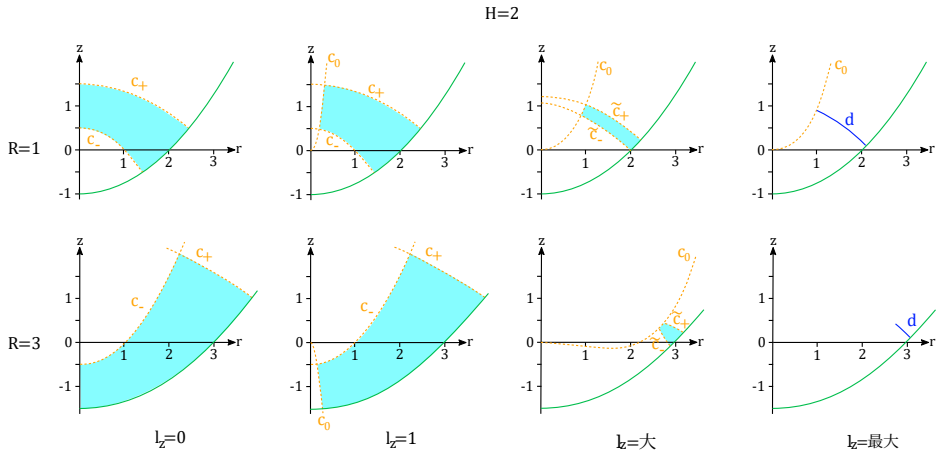


图 7. 与所讨论的四种极限情形相关的受限区域的二维截面。三维受限区域可通过绕 z– 轴旋转得到。

6. 结论与展望

在本文中，推导了均匀引力场作用下，点状粒子在抛物面腔体内弹跳时，以准线高度 H、约化角动量 l_z 和焦点球半径 R 表示的旋转对称约束区域。研究表明，部分二维结果可以一一对应到三维情形。此外，约化角动量守恒（二维中不存在）在三维中带来了一些额外的物理现象。

未来的研究可以将我们的结果推广到其他旋转对称区域，这将很有意义。此外，研究非恒定场（例如库仑场）中的运动也值得关注。

致谢

我们感谢 Dan Reznik 与我们进行的启发性讨论，这促成了本研究。

参考文献

[1] K.D. Anderson. 旋转正交引力楔形台球的动力学。 https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.04997 2022 ，。

[2] J. W. Bruce 和 P. J. Giblin。《曲线与奇点：奇点理论的几何学导论》。剑桥大学出版社，第2版，1992年。[3] D.R. da Costa、C.P. Dettmann 和 E.D. Leonel。引力场中的圆形、椭圆形和卵形台球。《非线性科学与数值模拟通讯》，22(1- 3):731–746，2015年。[4] D. Jaud。一般区域中的引力台球——焦点曲线与受限区域。 https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18685.44000，2022年。[5] Daniel Jaud。由有理台球轨道划分圆而产生的整数序列。载于 Liang- Yee Cheng 编，《ICGG 2022——第20届国际几何与图形学会议论文集》，第95–106页，Cham，2023年。施普林格国际出版公司。[6] H. J. Korsch 和 H.-J. Jodl。《引力台球：楔形》，第67–88页。施普林格柏林海德堡，柏林、海德堡，1999年。[7] H J Korsch 和 J Lang。一种新的可积引力台球。《物理学A辑：数学与通论》，24(1):45，1991年1月。[8] Cameron K. Langer。二维和三维引力台球系统的非线性动力学，论文，2015年。[9] Cameron K. Langer 和 Bruce N. Miller。圆锥中的三维引力台球，2015年。[10] H.E. Lehihet 和 B.N. Miller。引力场中台球的数值研究。《物理学D辑》，21:93–104，1986年。[11] S. Masalovich。抛物面镜在引力场中对中子的显著聚焦性质：几何证明。《核仪器》&《物理研究方法/A辑》，763:517 – 520，2014年。[12] S. Masalovich。引力场中的台球：粒子在抛物面镜和直角镜上的反弹。 https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.04730，2020年。[13] Utkir A. Rozikov。《数学台球导论》。世界科学出版社，新泽西州，2018年。含参考文献和索引；英文。