arXiv:2301.12215v1 [math.DG] 28 Jan 2023

黎曼流形上 p-拉普拉斯算子的基本音调及其应用

Francisco G. de S. Carvalho 和 Marcos P. de A. Cavalcante

Abstract. 我们给出了一般的下界，用于估计具有某类特殊函数的黎曼流形上的 p-拉普拉斯算子的基本音调。随后，我们将结果应用于负曲率单连通流形、一类扭曲乘积流形以及一类黎曼浸没。

1. Introduction

设 Ω 是黎曼流形 M、$n \geq 2$ 中的一个有界区域，其维数为 n。区域 Ω 上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的狄利克雷问题的第一特征值可通过变分刻画为

$$\lambda_1(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^2\, dM}{\int_\Omega u^2\, dM} : u \in W_0^{1,2}(\Omega), u \neq 0\right\},$$

其中 $W^1{}_{,2\ 0}$ (Ω) 表示迹属于 $\partial\Omega$ 的索об列夫空间。若 M 非紧致，则 M 的第一特征值定义为极限

$$\lambda_1(M) = \lim_{k\to\infty} \lambda_1(\Omega_k),$$

若该极限存在，其中 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ 是 M 的一种穷竭。容易看出，该极限与所选的穷竭无关。这个数是一个非常重要的几何不变量，一些作者也称之为 M 的基本音调。谱几何中的一个经典问题是，寻找能推出 $\lambda_1(M) > 0$ 的 M 上的条件（见 [23, 第 III 章]）。例如，若 M 的体积无限，则 $\lambda_1(M)$ 为正意味着流形 M 是双曲的（或非抛物的）（见 [13, 命题 10.1]），也就是说， M 存在正格林函数。

从这个意义上说，我们回顾 McKean 的经典论文 [18], ，该论文证明，若 M 是一个单连通黎曼流形，其截面曲率为 $K_M \leq -\kappa^2 < 0$，则

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(n-1)^2\kappa^2}{4}.$$

Date: 2023年1月31日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 35P30，47J10，58C40。*Key words and phrases.* 非线性特征值问题； p-拉普拉斯算子作用于黎曼流形。

请注意，这个下界恰好是 $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ 的第一特征值，其中 $-\kappa^2$ 是曲率为常数负值 $-\kappa^2$ 的双曲空间。随后，许多作者扩展并应用了 McKean 的这一结果。特别是，Veeravalli [25], 运用非常简单的思路，为由扭曲积构成的一大类黎曼流形上的 $\lambda_1(M)$ 证明了一个正的下界估计。

本文将 Veeravalli 关于黎曼流形上 p-拉普拉斯算子的工作加以推广，并给出一些应用。回顾一下， p-拉普拉斯算子 $\Delta_p, 1 < p < \infty$ 是如下定义的非线性算子:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u\right)$$

M 上的光滑函数。 p-拉普拉斯算子具有许多与拉普拉斯-贝尔特拉米算子（$p = 2$）相同的性质，并自然出现在物理学和应用数学中的许多问题里（例如参见 [11, 15, 17] 及其中所引用的文献）。尽管当 $p \neq 2$ 时它是一个非线性算子，但其第一特征值也可以通过变分法以类似的方式刻画:

$$\lambda_{1,p}(\Omega) = \inf\left\{\frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^p \, dM}{\int_\Omega u^p \, dM} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0\right\}.$$

与前文相同，若 M 不紧致，我们将 p-拉普拉斯算子在 M，$\lambda_{1,p}(M)$ 上的基本音调定义为某个紧集穷竭对应的第一特征值的极限。我们的第一个结果给出了一种判据，可在带有某类特殊函数的有界区域上得到 $\lambda_{1,p}$ 的正下界。更确切地说，我们证明:

定理 1.1. 设 Ω 是黎曼流形 M 上的一个有界区域，并假设存在光滑函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ，满足$\|\nabla f\| \leq a$且 $\Delta_p f \geq b$，其中常数为 a、$b > 0$。则 p-拉普拉斯算子的第一特征值满足

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

与线性情形（$p = 2$）类似，在无限体积的完备流形上， Δ_p 的基本音调为正，意味着它是 p-双曲的，即 M 上存在 p-拉普拉斯算子的正格林函数。相关例子可参见 Batista、Santos 和第二作者在 [1] 中的工作。

作为我们一般估计的第一个应用，我们可以简洁地得到 McKean 定理的如下推广:

推论 1.1. 设 M^n 是一个完备单连通黎曼流形，其截面曲率满足 $K_M \leq -\kappa^2$。若 $\Omega \subset M$ 是一个有界区域，则

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{(n-1)^p \kappa^p}{p^p} \coth^p R,$$

其中， $R > 0$ 使得 Ω 包含于半径为 R 的测地球内。

In particular, $\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n-1)^p\kappa^p}{p^p} = \lambda_{1,p}(\mathbb{H}^n(-\kappa^2))$.

我们指出，Poliquin 使用 Cheeger常数的估计，在 [20] 中得到了相同的结果。事实上，在 [20, 命题 4.5] 中证明了，对于所有区域 $\Omega \subset M$，都有 $\lambda_{1,\,p}(\Omega) \geq (n-1)_{p^p}^{\frac{p\kappa^p}{\circ}}$

注1.1. 对于黎曼流形上的紧区域，计算 $\lambda_p(\Omega)$ 的精确值是一项困难的工作。例如，对于 $p=2$ 和测地球，Savo [22] 在三维双曲空间 $\mathbb{H}^3$中计算了该值，而 Kristaly [16] 则针对奇数维双曲空间进行了计算。另一方面，推论 1.1 中这类估计对于证明双曲平面上区域的 Berestycki-Caffarelli-Nirenberg猜想的一个版本尤为有用（见 [5, 9]）。

接下来，受 Veeravally [25] 工作的启发，我们给出一类扭曲乘积度量的估计。

推论 1.2. 设 (N^{n-1}, g_0) 是一个黎曼流形，并考虑赋予扭曲度量 $ds^2 = dt^2 + e^{2\rho(t)}g_0$ 的 $M^n = \mathbb{R} \times N$，其中扭曲函数满足 $\rho'(t) \geq \kappa > 0$，某个常数为 κ。那么， M 上 p-拉普拉斯算子的基本音调有如下下界：

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n-1)^p}{p^p}\kappa^p.$$

这类扭曲流形包含双曲空间，因此该估计是尖锐的。另一方面，这类流形中也有一些黎曼流形的例子，其截面曲率在某些方向上为正；例如，若取 $N = \mathbb{S}^{n-1}$ 标准球面以及 $\rho(t) = \kappa t$，便可看出这一点。

正如 [6], 所指出的，对于那些允许存在一个以双曲空间为底空间的黎曼浸没，且其纤维的平均曲率一致有界的黎曼流形，推论 1.2 中给出的这类估计也可以推广。在此背景下，我们有如下关于 p-拉普拉斯算子的定理

$\widetilde{\quad}$定理 1.2. 设 M^m 是一个完备黎曼流形，且允许存在一个以 M^n 为底空间的黎曼浸没，其中 M^n 由推论 1.2 给出。若纤维的平均曲率满足 $\|H^{\mathcal{F}}\| \leq \alpha$，其中某个 $\alpha < (n-1)\kappa^{1/p}$，则

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{\left((n-1)^p\kappa - \alpha\right)^p}{p^p}.$$

我们注意到，这是等距浸入相关结果的对偶版本，类似结果可见于 [2, 7, 25] （针对 $p=2$）和 [8, 10, 24], （针对 $p>1$）。我们指出，在 [10] 和 [24]中，他们使用了 [4], 中提出的由向量场生成的等周常数；而在 [8] 中，他们使用限制在子流形上的距离函数来获得该估计。

最近，Polymerakis 在 [21] 中根据底空间的谱，为黎曼浸没的全空间上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的基本频率建立了一个新的估计。如何为 p-拉普拉斯算子找到类似的估计，是一个值得研究的问题。

本文安排如下。第 2 节给出定理 1.1 的证明及其若干直接推论。第 3 节介绍证明推论 1.1、推论 1.2 和定理 1.2 所需的基本材料。

致谢。第二作者部分经费由巴西国家科学技术发展委员会（CNPq ~ ~ ~资助项目 309733 / 2019-7）以及巴西高等教育人才培养协调局（CAPES-COFECUB 88887.143161/ 2017-0 和 CAPES-MATHAMSUD 88887. 368700/ 2019-00）提供。

2. 一般估计

给定 $p > 1$，考虑有界区域 $\Omega \subset M$ 上与 p-拉普拉斯算子相关的狄利克雷特征值问题，即

$$\begin{cases} \Delta_p u + \lambda |u|^{p-2}u = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

众所周知，问题 (2.1) 的第一特征值可通过变分方式刻画为

$$\lambda_{1,p}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^p \, dM}{\int_\Omega u^p \, dM} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

本文中的所有积分均相对于由黎曼度量给出的体积形式进行。为简便起见，以下积分中我们将省略体积形式 dM 。现在我们重述并证明下面的第一个结果。

定理 2.1. 设 Ω 是黎曼流形 M 上的一个有界区域，并假设存在光滑函数 f : Ω $\to \mathbb{R}$ ，满足 $\|\nabla f\| \leq a$ 且 $\Delta_p f \geq b$，其中某些常数为 a 、 $b > 0$。那么， p-拉普拉斯算子的第一特征值满足

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

证明。我们首先注意到，由稠密性，在 $\lambda_{1,p}$(Ω) 的变分刻画中可以使用光滑函数。特别地，给定 $v \in C_0^\infty$(Ω)，我们有

$$\begin{aligned} b\int_\Omega |v|^p &\leq \int_\Omega |v|^p \Delta_p f = -\int_\Omega \langle \nabla |v|^p, \|\nabla f\|^{p-2}\nabla f\rangle \\ &= -p\int_\Omega |v|^{p-1}\langle \nabla |v|, \|\nabla f\|^{p-2}\nabla f\rangle \leq p\int_\Omega |v|^{p-1}\|\nabla v\|\|\nabla f\|^{p-1} \\ &\leq p\int_\Omega |v|^{p-1}a^{p-1}\|\nabla v\|. \end{aligned}$$

现在我们希望在最后一项中应用杨不等式。为此，我们引入一个待定常数 $\theta > 0$ 。因此，若 q 是 p 的共轭指数，则有

$$\begin{aligned} |v|^{p-1}a^{p-1}\|\nabla v\| &\leq \frac{\theta^q |v|^{q(p-1)}}{q} + \frac{a^{p(p-1)}\|\nabla v\|^p}{p\theta^p} \\ &= \frac{(p-1)\theta^{p/(p-1)}|v|^p}{p} + \frac{a^{p(p-1)}\|\nabla v\|^p}{p\theta^p}. \end{aligned}$$

也就是说,

$$p|v|^{p-1}a^{p-1}\|\nabla v\| \leq (p-1)\theta^{p/(p-1)}|v|^p + \frac{a^{p(p-1)}\|\nabla v\|^p}{\theta^p}.$$

现在，令 θ 满足 $b-(p-1)\theta^{p/(p-1)} = \frac{b}{p}$，也就是说， $\theta^p = \frac{b^{p-1}}{p^{p-1}}$。因此我们得到

$$\frac{b}{p}\int_\Omega |v|^p \leq \frac{p^{p-1}a^{p(p-1)}}{b^{p-1}}\int_\Omega \|\nabla v\|^p.$$

重新排列各项可得

$$\int_\Omega \|\nabla v\|^p \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}\int_\Omega |v|^p,$$

由此证明完毕。 □

作为第一个应用，我们利用距离函数，将定理 1.1 应用于空间形式中的区域。

我们用 $M^n(c)$ 表示截面曲率为 c 的单连通空间形式。特别地，若 $c < 0$ ，我们记作 $c = -\kappa^2$ ；若 $M^n(-\kappa^2) = \mathbb{H}^n(-\kappa^2)$ 是双曲空间；若 $c = 0$, 则 $M^n(0) = \mathbb{R}^n$ 是欧几里得空间；若 $c = \kappa^2 > 0$, 则 $M^n(\kappa^2) = \mathbb{S}^n(\kappa^2)$ 是半径为 $\frac{1}{\kappa}$ 的球面

推论 2.1. 设 Ω 是空间形式 $M^n(c)$ 中的一个有界区域。若 Ω 包含于测地球 B_R 中，则

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \tfrac{(n-1)^p(\sqrt{-c})^p}{p^p}\coth^p(\sqrt{-c}\,R), && \text{if } c<0, \\ &\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \tfrac{(n-1)^p}{p^p R^p}, && \text{if } c=0, \\ &\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \tfrac{(n-1)^p(\sqrt{c})^p}{p^p}\cot^p(\sqrt{c}\,R), && \text{if } c>0. \end{aligned}$$

证明。 $M^n(c)$中的度量在极坐标下表示为 $g = dr^2 + f_c^2(r)d\omega^2$，其中 $d\omega^2$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的标准度量，并且

$$f_c(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}\,r), & \text{if } c<0, \\ r, & \text{if } c=0, \\ \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}\,r),, & \text{if } c>0. \end{cases}$$

若记 r_c 为到 B_R中心的距离函数，则我们知道$|\nabla r_c| = 1$ 和 $\Delta_p r_c = \Delta r_c = (n-1) f_c'/f_c$。特别地，

$$\Delta_p r_c \geq \begin{cases} (n-1)\sqrt{-c}\coth(\sqrt{-c}\,R), & \text{if } c < 0, \\ (n-1)/R, & \text{if } c = 0, \\ (n-1)\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}\,R), & \text{if } c > 0, \end{cases}$$

结论直接由定理 1.1 得出。 □

若 $c \leq 0$，我们知道 $M^n(c)$ 的割迹为空，并且对于任意 $R > 0$，都存在测地球 $B_R(p)$。在这种情况下，我们定义函数

$$L : [0, \infty) \to \big(\frac{(n-1)^p(\sqrt{-c})^p}{p^p}, \infty\big)$$

为 $L(R) = \lambda_{1,p}(B_R)$。注意，根据 $\lambda_{1,p}$ 的定义， L 是一个递减函数。另一方面，由于 L 是连续函数（例如参见 [12], [17]），并且根据上面的推论 2.1，我们得到

命题 2.1. 给定任意 $\lambda > {}_{(n-1)_{p^p}}{}^{p}$，存在唯一的 $R_\lambda > 0$，使得 p-拉普拉斯算子在半径为 R_λ 的测地球 $B_{R_\lambda} \subset \mathbb{H}^n$ 上的狄利克雷问题的第一特征值恰为 λ.

3. Applications

3.1. 负曲率流形。本小节证明推论 1.1。由 $\lambda_{1,p}(\Omega)$ 的变分刻画可知，如果 $\Omega_1 \subset \Omega_2$, ，则 $\lambda_{1,p}(\Omega_1) \geq \lambda_{1,p}(\Omega_2)$。特别地，我们只需给出关于测地球的一个估计。

固定 M上的一条测地射线 γ，我们考虑与 γ相关的布塞曼函数 B。更确切地说， $B : M \to \mathbb{R}$ 定义为

$$B(x) = \lim_{t\to\infty}[r(x, \gamma(t)) - t],$$

其中， $r(x, \gamma(t))$ 表示 x 与 $\gamma(t)$ 之间的距离（详情请参见 [3] ）。回顾一下，在非正曲率下，布塞曼函数属于 $C^2(M)$ 类，并且 $\|\nabla B\| = 1$（参见 [14]）。此外，由 [3] 中引理 2.3 的证明可知，在每个半径为 $R > 0$ 的测地球上， $\Delta_p B = \Delta B \geq (n-1)\kappa\coth R$。现在，推论 1.1 便可直接由定理 1.1 得出。

3.2. 一类扭曲积。如引言中所述，考虑 $M = \mathbb{R} \times N^{n-1}$，其中 (N^{n-1}, g_0) 是任意黎曼流形，而 M 配备了扭曲度量 $g = dt^2 + e^{2\rho(t)} g_0$。按照 [2, 6], , 我们考虑 $F\colon M \to \mathbb{R}$, $F(s, x) = s$。这是与测地射线相关联的布塞曼函数，该测地射线对应于事实 $\mathbb{R}$。直接计算可得 $|\nabla F| = 1$，并且

$$\Delta_p F = \Delta F = (n-1)\rho'(t).$$

因此，假设 $\rho'(t) \geq \kappa > 0$，我们便得到推论 1.2 中的结论。

3.3. 黎曼浸没。设 M^m 和 M^n 是黎曼流形， $m \geq n$成立，并设 $\pi\colon M^m \to M^n$是一个黎曼浸没，也就是说， π 是满射，其微分 $d\pi_p\colon T_pM \to T_xM$ 是满射对所有 $p \in M$ 均成立，并且保持水平向量的长度（见 [19]）。黎曼浸没的结构为垂直和水平向量场提供了自然的概念。给定 $x \in M$，我们用 $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ 表示 π 在 x上的纤维，它是一个维数为 $k = m-n$的子流形。若一个向量场在 M上处处与纤维相切，则称其为垂直向量场；若处处与纤维正交，则称其为水平向量场。另一方面，黎曼度量使我们能够将向量场 $X \in TM$ 分解为垂直和水平分量，记作 $X = X^{\mathcal{V}} + X^{\mathcal{H}}$。使用这些记号，纤维 $\alpha^{\mathcal{F}}\colon T\mathcal{F} \times T\mathcal{F} \to T^{\perp}\mathcal{F}$的第二基本形式为

$$\alpha^{\mathcal{F}}(V,V) = (\widetilde{\nabla}_V V)^{\mathcal{H}},$$

其中 $\widetilde{\nabla}$ 表示 $\widetilde{M}$上的 Levi-Civita 联络。 $\mathcal{F}$ 的平均曲率 $H^{\mathcal{F}}$定义为第二基本形式的迹，即它是由下式给出的水平向量场

$$H^{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha^{\mathcal{F}}(e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{k} (\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i)^{\mathcal{H}},$$

其中 $\{e_1,\dots,e_k\}$是纤维的局部正交标架。现在，给定 M 上的光滑函数 B ，我们令 $B\colon M \to \mathbb{R}$， $B(p) = B \circ \pi(p)$ 为 B到 M的提升。由 [6] 中的引理 3.2 可得

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{B} = \Delta B + \langle \widetilde{\nabla}\widetilde{B}, H^{\mathcal{F}} \rangle. \tag{3.2}$$

假设函数 $B\colon M^n \to \mathbb{R}$ 满足 $\|\nabla B\| = 1$ 且$\Delta B \geq b > 0$。如上所述，当 $K_M \leq \kappa^2 < 0$ 时，或者当 M由推论 1.2 中的扭曲积给出且我们选择 B 为布塞曼函数时，情况就是如此。显然，在这些条件下我们也有 $\Delta_p B > b$。最后，注意到， B 的梯度是 B的梯度的水平提升，特别是 $|\nabla B| = 1$ ，因此 $\Delta_p B = \Delta B$。于是，假设$\|H^{\mathcal{F}}\| \leq \alpha$，由 3.2 得到 $\widetilde{\Delta}_p \widetilde{B} \geq b - \alpha$。应用定理 1.1 可得

$$\lambda_{1,p}(\widetilde{M}) \geq \frac{(b-\alpha)^p}{p^p}.$$

这就证明了定理 1.2。

References

1. M. Batista、M. P. Cavalcante 和 N. L. Santos, *ends and applications* 《Geom. Dedicata》（），–。MR 2

Philippe Castillon 和 Marcos Cavalcante, *hypersurfaces in* $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ *and applications* Pacific J. Math.（），第 – 期。MR 2869432

The p-hyperbolicity of infinity volume **171** 2014 397 406 3226802 ，

。Pierre Berard、*Eigenvalue estimates for* **253** 2011 1, 19 35 ，

3. G. Pacelli Bessa、Jorge H. de Lira、Stefano Pigola 和 Alberto G. Setti, *Curvature estimates for submanifolds immersed into horoballs and horocylinders* , 《数学分析与应用杂志》 **431** 2015 2, 1000 1007 3365851 （ ）， 第 – 期。MR 。G. Pacelli Bessa 和 J. Fabio Montenegro, *Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature* **24** 2003 3, 279 290 ，《全球分析与几何年刊》（ ），第 – 期。MR 1996771 5. F. G. Carvalho 和 M. P. Cavalcante, *Overdetermined problems for the p-laplacian operador on unbounded domains* 2021 ，准备中。（ ）。6. Marcos P. Cavalcante 和 Fernando Manfio, *On the fundamental tone of immersions and submersions* **146** 2018 7, 2963 2971 ，《美国数学会会刊》（ ），第 – 期。MR 3787357 7. Leung-Fu Cheung 和 Pui-Fai Leung, *Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space* **236** 2001 3, 525 530 ，《数学杂志》（ ），第 – 期。MR 1821303 8. Feng Du 和 Jing Mao, *Estimates for the first eigenvalue of the drifting Laplace and the p-Laplace operators on submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space* **456** 2017 2, 787 795 ，《数学分析与应用杂志》（ ），第 – 期。MR 3688451 9 。Jose M. Espinar 和 Jing Mao, *Extremal domains on Hadamard manifolds*, 《微分方程》265 3804728 10 2018 6, 2671 2707（ ），第 – 期。MR 。Israel Evangelista 和 Keomkyo Seo, *p-fundamental tone estimates of submanifolds with bounded mean curvature* **52** 2017 3, 269 287 ，《全球分析与几何年刊》（ ），第 – 期。MR 3711601 11. J. P. García Azorero 和 I. Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues* **12** 1987 12, 1389 1430 912211 –期。MR 。Jorge García Melian 和 Jose Sabina de Lis, *On the perturbation of eigenvalues for the p-Laplacian* **332** 2001 10, 893 898 ，《偏微分方程通讯》（ ），第 12 C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.（ ）第 – 期。MR 1838765 13. Alexander Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* , 《美国数学会通报》（新辑）36 1659871 14 1999 2, 135 249（ ），第 – 期。MR 。Ernst Heintze 和 Hans-Christoph Im Hof, *Geometry of horospheres*, 《微分几何杂志》12 512919 15 1977 4, 481 491 1978（ ），第 – 期（ ）。MR 。Yin Xi Huang, *Existence of positive solutions for a class of the p-Laplace equations*, 《澳大利亚数学会杂志B辑》 **36** 1994 2, 249 264 1312235 （ ），第 – 期。MR 。Alexandru Kristaly, *New features of the first eigenvalue on negatively curved spaces*, 《变分法进展》，即将出版（2021年）。17. Idrissa Ly, *The first eigenvalue for the p-Laplacian operator*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 6 2164332 18 2005 3, 91 12 （ ）第文章号。MR 。H. P. McKean, *An upper bound to the spectrum of ∆ on a manifold of negative curvature* **4** 1970 359 366 ，《微分几何杂志》（ ），– 。MR 266100 19 . Barrett O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, 《密歇根数学杂志》 13 （ 1966年 200865 20 459 469），– 。MR 。Guillaume Poliquin, *Bounds on the principal frequency of the p-Laplacian*, 《几何与谱分析》，《当代数学》，第630卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年，3328551 21 349 366pp. – MR 。Panagiotis Polymerakis, *Spectral estimates and discreteness of spectra under Riemannian submersions* **57** 2020 2, 349 363 ，《全球分析与几何年刊》（ ），第 – 期。MR 4070167 22. Alessandro Savo, *On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian on compact, negatively curved domains* **35** 2009 1, 39 62 ，《全球分析与几何年刊》（ ），第 – 期。MR 2480663 23 . R. Schoen 和 S.-T. Yau, *Lectures on differential geometry*, 《几何与拓扑会议论文集及讲义》I，International Press，马萨诸塞州剑桥，1994年，讲义由 Wei Yue Ding、Kung Ching Chang [Gong Qing 编写

Zhang], Jia Qing Zhong 和 Yi Chao Xu，由 Ding 和 S. Y. Cheng 从中文翻译，前言由 Kaising Tso 从中文翻译。MR 1333601 24. He-Jun Sun、Chengyue Han 和 Lingzhong Zeng, *Lower bounds for the first eigenvalues of the p-Laplacian and the weighted p-Laplacian* **23** 2020 ，《数学不等式与应用》（），第 2 期，585–596。MR 4089470 25. Alain R. Veeravalli, *Une remarque sur l'inégalité de McKean*，《瑞士数学评论》78（2003），第 4 期，884–888。MR 2016701

Universidade Federal do Piauí, Picos, PI, Brazil
Email address: franciscogsc.mat@ufpi.edu.br

Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, Brazil
Email address: marcos@pos.mat.ufal.br