arXiv:2301.12265v2 [math.OA] 8 Feb 2023

Hilbert C*-模上的超循环算子

´Stefan Ivkovic

Abstract. 本文刻画了可分Hilbert空间上紧算子 C^*-代数的标准Hilbert模上的超循环广义双边加权移位算子。此外，我们给出了这些算子具有混沌性的充要条件，并提供了具体例子。

1. Introduction

近几十年来，算子的线性动力学性质已在许多研究论文中得到探讨；参见专著[3, 29], 及近期论文 [51, 48]。在其他概念中，超循环性、拓扑传递性和拓扑混合作为有界线性算子的重要线性动力学性质，已在许多研究工作中得到研究；参见[1, 4, 18, 45, 32] 及其参考文献。特别地，文献 [38, 27], 刻画了 $\ell^p(\mathbb{Z})$上的超循环加权移位。随后，C-C. Chen和C-H. Chu利用局部紧群的非周期元素，将文献[38] 中的结果推广到第二可数群[20]背景下Lebesgue空间上的加权平移。此后，许多与这一主题相关的其他线性动力学问题也得到研究；参见 [13, 14, 23, 24, 25]。

最近，在[50] 中，我们例如刻画了定义在局部紧致、非紧致Hausdorff空间上无穷远处消失的连续函数所构成的交换 C^*-代数上的超循环加权复合算子。此外，在[51] 中，我们刻画了定义在可分Hilbert空间上的紧线性算子空间上的超循环初等算子。此前也研究过一些类似算子的动力学，例如共轭算子，见[35], ； 以及左乘算子，见 [55, 56, 57]。

Date：2023年2月9日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 47A16。
Key words and phrases. 标准Hilbert模、广义移位、算子的超循环序列。

本文第4 节中，我们将先前在[50, 51] 中给出的结果推广到任意非幺 C^*-代数，从而得到代数上的推广。

然而，本文的主要目的是研究标准Hilbert C^*-模上 C^*-紧算子代数上的广义双边加权移位算子的动力学，从而将文献[38, 27]中的结果推广到这一情形。在第3 节中，我们刻画此类算子的超循环性，并给出这些算子具有混沌性的充要条件。此外，我们还给出具体例子。

2. Preliminaries

若 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间，则从 $\mathcal{X}$ 到$\mathcal{X}$的所有有界线性算子构成的集合记为 $B(\mathcal{X})$。此外，记 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。

定义 2.1. [48, 定义 2.1] 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间。若对 $\mathcal{X}$中的任意非空开子集 U、V，$T_n(U)\cap V \neq \varnothing$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$成立，则称算子序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 在 $B(\mathcal{X})$中是拓扑传递的。若 $T_n(U)\cap V \neq\varnothing$ 从某个 n起成立，则称 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是拓扑混合的。

定义 2.2。[48, 定义 2.2] 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间。若算子序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 属于 $B(\mathcal{X})$，且存在一个元素$x \in \mathcal{X}$（称为超循环向量），使其轨道 $\{T_n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ 在 $\mathcal{X}$中稠密，则称该序列为超循环。序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的所有超循环向量组成的集合记为 $HC((T_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$。若 $HC((T_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$在 $\mathcal{X}$中稠密，则称序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$为稠密超循环。若算子 $T \in B(\mathcal{X})$所成的序列 $(T^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是超循环的，则称算子 $T \in B(\mathcal{X})$为超循环算子。

注意，算子序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 属于 $B(\mathcal{X})$，当且仅当它是稠密超循环的[17]。此外，巴拿赫空间存在超循环算子，当且仅当该空间可分且无限维[1, 4]。

定义 2.3。[48, 定义 2.3] 设 $\mathcal{X}$是一个巴拿赫空间，且 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 $B(\mathcal{X})$ 中的一个算子序列。向量 $x \in \mathcal{X}$ 称为 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的周期元素，如果存在常数 $N \in \mathbb{N}$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $T_{kN}x = x$。$(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的所有周期元素组成的集合记为 $\mathcal{P}((T_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$。如果 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是拓扑传递的，并且

$\mathcal{P}((T_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密。若算子 $T \in B(\mathcal{X})$ 满足序列 $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是混沌的，则称其为混沌算子。

3. Generalized weighted bilateral shift operators over C^*-algebras

设 H 是一个可分Hilbert空间。所有从 H 到自身的有界线性算子所构成的 C^*-代数记为 $B(H)$；而所有从 H 到自身的紧算子所构成的C^*-代数记为 $\mathcal{A} := B_0(H)$。对于每个 $T, S \in B(H)$，我们记 $T \leq S$，只要对于所有 $h \in H$，都有 $\langle (T-S)h, h\rangle \geq 0$。假设 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 H 的一组标准正交基；对于每个 $m \in \mathbb{N}$， P_m 是到 $\mathrm{Span}\{e_{-m}, \ldots, e_m\}$ 上的正交投影。设 $W := \{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $B(H)$ 中一列一致有界的可逆算子，且序列 $\{W_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 在 $B(H)$ 中也一致有界。此外，设 U 是作用在 H 上的酉算子。我们定义 $T_{U,\,W}$ 为 $\ell_2(\mathcal{A})$ 上的算子；这里 $\ell_2(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 上的标准右Hilbert模，该算子定义为

$$(T_{U,W}(x))_\xi := W_\xi\, x_{\xi-1}\, U$$

对所有 $\xi \in \mathbb{Z}$ 和 $x := (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathcal{A})$。容易看出，$T_{U,\,W}$ 是一个线性算子。令 $M := \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|W_j\|$。于是，由于对所有 $j \in \mathbb{Z}$，$M^2U^*x_{j-1}^*x_{j-1}U - U^*x_{j-1}^*W_j^*W_jx_{j-1}U$是作用在$H$上的半正定算子，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} U^*x_{j-1}^*W_j^*W_jx_{j-1}U &\leq M^2\sum_{j\in\mathbb{Z}} U^*x_{j-1}^*x_{j-1}U\\ &= M^2\, U^*(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_{j-1}^*x_{j-1})U\\ &= M^2\, U^*\,\langle x, x\rangle\, U,\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Im}T_{U,\,W} \subseteq \ell_2(\mathcal{A})$以及$\|T_{U,\,W}\| \leq M$。此外，$T_{U,\,W}$是可逆的，且其逆算子$S_{U,\,W}$ 由下式给出

$$(S_{U,W}(y))_\xi := W_{\xi+1}^{-1}y_{\xi+1}U^*$$

对所有的 $y := (y_j)_j \in \ell_2(\mathcal{A})$ 和 $\xi \in \mathbb{Z}$。通过一些计算，我们可以看出

$$(T_{U,W}^n(x))_\xi = W_\xi W_{\xi-1}\ldots W_{\xi-n+1}x_{\xi-n}U^n$$

and

$$(S_{U,W}^n(y))_\xi := W_{\xi+1}^{-1}W_{\xi+2}^{-1}\ldots W_{\xi+n}^{-1}y_{\xi+n}U^{*n}$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$、$\xi \in \mathbb{Z}$ 和 $x{:=}(x_j)_j$，$y{:=}(y_j)_j$ 属于 $\ell_2(\mathcal{A})$。

对于每个 $J \in \mathbb{N}$，记 $[J]{:=}\{-J, -J+1, \ldots, J-1, J\}$。在以下结果中，我们给出算子 $T_{U,\ W}$ 的幂序列在 $\ell_2(\mathcal{A})$ 上为稠密超循环的若干等价条件。

命题 3.1. 设 $(t_n)_n$ 是一个由非负整数构成的无界序列。记 $T_{U,\ W,\ n}{:=}\, T_{U,\ W}^{t_n}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。则以下条件等价:

(1) $(T_{U,\ W,\ n})_n$ 是 $\ell_2(\mathcal{A})$ 上的稠密超循环序列。(2) 对于每个 J，$m \in \mathbb{N}$，存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ 以及算子 $\{D_i^{(k)}\}_k$ 和 $\{G_i^{(k)}\}_k$ 的序列，对所有 $i \in [J]$ 均属于 $B_0(H)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \|D_j^{(k)} - P_m\| = \lim_{k\to\infty} \|G_j^{(k)} - P_m\| = 0$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \|W_{j+t_{n_k}} W_{j+t_{n_k}-1} \ldots W_{j+1} D_j^{(k)}\|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \|W_{j-t_{n_k}+1}^{-1} W_{j-t_{n_k}+2}^{-1} \ldots W_j^{-1} G_j^{(k)}\| = 0$$

for all $j \in [J]$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $(T_{U,\ W,\ n})_n$ 是稠密超循环的。假设 J，$m \in \mathbb{N}$，并通过 $x_j{:=}\, P_m$ 对所有 $j \in [J]$ 定义 $x = (x_j)_j \in \ell_2(\mathcal{A})$，以及通过 $x_j{:=}\, 0$ 对所有 $j \notin [J]$ 定义。于是，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在元素 $y^{(k)} \in \ell_2(\mathcal{A})$ 和一项 t_{n_k}，使得 $\|y^{(k)} - x\|_2 < \frac{1}{4^k}$ 和 $\|T_{U,\ W,\ n_k}(y^{(k)}) - x\|_2 < \frac{1}{4^k}$。我们可以假设序列 $(n_k)_k$ 是严格递增的，且 $2J < t_{n_1} < t_{n_2} < \ldots$。因此，

$$\|W_j W_{j-1} \ldots W_{j-t_{n_k}+1} y_{j-t_{n_k}} U^{t_{n_k}} - P_m\| < \frac{1}{4^k}$$

对所有 $j \in [J]$ 均成立。然而，由于 $t_{n_k} > 2J$ 和 $\|y^{(k)} - x\|_2 < \frac{1}{4^k}$，对于所有 $j \in [J]$，我们有 $\|y_{j-t_{n_k}}^{(k)}\| < \frac{1}{4^k}$，因为 $x_{j-t_{n_k}} = 0$。因此

$$\|W_{j-t_{n_k}+1}^{-1} \ldots W_j^{-1} W_j \ldots W_{j-t_{n_k}+1} y_{j-t_{n_k}}^{(k)} U^{t_{n_k}}\| = \|y_{j-t_{n_k}}^{(k)} U^{t_{n_k}}\| = \|y_{j-t_{n_k}}^{(k)}\| < \frac{1}{4^k}$$

对所有 $j \in [J]$ 均成立。类似地，由于 $\|T_U^{t_{n_k},\ W}(y^{(k)}) - x\|_2 < \frac{1}{4^k}$，我们有

$$\|W_{j+t_{n_k}} \ldots W_{j+1} y_j^{(k)} U^{t_{n_k}}\| < \frac{1}{4^k},$$

因此 $\|W_{j+t_{n_k}} \ldots W_{j+1} y_j^{(k)}\| < \frac{1}{4^k}$。令

$$D_j^{(k)} := y_j^{(k)} \qquad \text{and} \qquad G_j^{(k)} := W_j W_{j-1} \ldots W_{j-t_{n_k}+1} y_{j-t_{n_k}}^{(k)} U^{t_{n_k}}$$

对所有 $j \in [J]$。那么，

$$\|D_j^{(k)} - P_m\| < \frac{1}{4^k},\ \|G_j^{(k)} - P_m\| < \frac{1}{4^k},\ \|W_{j+t_{n_k}} \dots W_{j+1} D_j^{(k)}\| < \frac{1}{4^k}$$

以及 $\|W_{j-t_{n_k}+1}^{-1} \dots W_j^{-1} G_j^{(k)}\| < \frac{1}{4^k}$。注意，由于 $y^{(k)}$ 的系数属于 $\mathcal{A} = B_0(H)$，而后者是 $B(H)$ 的一个理想，根据构造，对于所有 $j \in [J]$，$D_j^{(k)}$ 和 $G_j^{(k)}$ 都属于 $B_0(H)$。证明完毕。

(2) $\Rightarrow$ (1)：假设条件 (2) 成立。取 $\ell_2(\mathcal{A})$ 的两个非空开子集 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$。假设 $\mathcal{F}$ 表示所有形如 $x = (x_j)_j \in \ell_2(\mathcal{A})$ 的元素组成的集合，其中对于某个 J，$m \in \mathbb{N}$，并且对于所有 $j \notin [J]$ 和对于所有 $j \in [J]$ 都有 $x_j = 0$。由于 $\mathcal{F}$ 在 $\ell_2(\mathcal{A})$ 中稠密，[34，命题 2.2]，故可找到某些 $x = (x_j)_j \in \mathcal{O}_1$ 和 $y = (y_j)_j \in \mathcal{O}_2$，以及充分大的 J、m，使得对于所有 $j \notin [J]$ 和 $x_j = P_m x_j$，都有 $x_j = y_j = 0$，并且对于所有 $j \in [J]$，都有 $y_j = P_m y_j$。针对这些 J、m，为 $j \in [J]$ 选择序列 $\{D_j^{(k)}\}_k$ 和 $\{G_j^{(k)}\}_k$，以及满足 (ii) 的递增序列 $\{n_k\}_k$。对于每个 k，令 u_k 和 v_k 为 $\ell_2(\mathcal{A})$ 中由 $(u_k)_j$：当 $j \in [J]$ 时为 $= D_j^{(k)} x_j$，$(u_k)_j$：当 $j \notin [J]$ 时为 $= 0$，$(v_k)_j$：当 $j \in [J]$ 时为 $= G_j^{(k)} y_j$，以及 $(v_k)_j$：对于所有 $j \notin [J]$ 时为 $= 0$ 所定义的序列。令

$$\eta_k := u_k + S_{U,W}^{t_{n_k}} v_k.$$

由于 $\|D_j^{(k)} - P_m\| \to 0$ 和 $\|G_j^{(k)} - P_m\| \to 0$ 随着 k 趋于 ∞，且 $x_j = P_m x_j$和 $y_j = P_m y_j$ 对于 $j \in [J]$成立，因此很容易看出，$u_k \to x$ 和 $v_k \to y$在 $k \to \infty$ 时成立。接下来，对于每个 $j \in [J]$，我们有

$$\begin{aligned}\|(S_{U,W}^{t_{n_k}}(v_k))_{j-t_{n_k}}\| &= \|W_{j+1-t_{n_k}}^{-1} \dots W_j^{-1} G_j^{(k)} y_j U^{-t_{n_k}}\| \\ &\le \|W_{j+1-t_{n_k}}^{-1} \dots W_j^{-1} G_j^{(k)}\| \, \|y_j\| \to 0,\end{aligned}$$

当 $k \to \infty$时。另一方面，对于每个 $j \notin [J]$，我们有 $(S_U^{t_{n_k}, W}(v_k))_{j-t_{n_k}} = 0$。因此，$S_U^{t_{n_k}, W}(v_k) \to 0$ 当 $k \to \infty$时。同样，由于

$$\| T_{U,W}^{t_{n_k}}(\mu_k)_{j+t_{n_k}} \| = \| W_{j+t_{n_k}} \dots W_j D_j^{(k)} x_j U^{t_{n_k}} \|$$

$$\le \| W_{j+t_{n_k}} \dots W_j D_j^{(k)} \| \ \ \| x_j \| \to 0$$

当 $k \to \infty$对所有 $j \in [J]$和 $T_U^{t_{n_k}, W}(\mu_k)_{j+t_{n_k}} = 0$成立时，对于 $j \notin [J]$，我们有$T_U^{t_{n_k}, W}(u_k) \to 0$成立。由此可得，$\eta_k \to x$且 $T_U^{t_{n_k}, W}(\eta_k) \to y$成立。因此，序列 $(T_{U,W,n})_n$ 是拓扑传递的，因而在 $\ell_2(\mathcal{A})$上稠密超循环。□

定理 3.2. 设 $(t_n)_n$ 为一个无界的非负整数序列。假设对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，存在 H 的子集 $H_j^{(1)}$ 和 $H_j^{(2)}$，以及一个严格递增序列 $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} W_{j+t_{n_k}} W_{j+t_{n_k}-1} \dots W_{j+1} = 0 \quad \textit{pointwise on } H_j^{(1)}$$

and

$$\lim_{k\to\infty} W_{j-t_{n_k}+1}^{-1} W_{j-t_{n_k}+2}^{-1} \dots W_j^{-1} = 0 \quad \textit{pointwise on } H_j^{(2)}$$

对所有 $j \in \mathbb{Z}$。那么，序列 $(T_{U,W,n})_n$ 在 $\ell_2(\mathcal{A})$ 上是稠密超循环的，其中 $T_{U,W,n} := T_{U,W}^{t_n}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。

证明。假设 $m, J \in \mathbb{N}$。由于对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，$H_j^{(1)}$ 和 $H_j^{(2)}$ 在 H 中稠密，我们可以找到序列 $(f_{i\,l}^{(j)})_i \subseteq H_j^{(1)}$ 和 $(g_{i\,l}^{(j)})_i \subseteq H_j^{(2)}$，使得 $f_{(j)\,i,l} \to e_l$ 且 $g_i^{(j)}{}_{,l} \to e_l$ 当 $i \to \infty$ 时，对所有 $j \in [J]$ 和 $l \in [m]$ 均成立。根据假设，可以构造一个子序列 $(n_{k_i})_i$，使得

$$\|W_{j+t_{n_{k_i}}} W_{j+t_{n_{k_i}}-1} \dots W_{j+1} f_{i,l}^{(j)}\| < \frac{1}{2mi}$$

and

$$\|W_{j-t_{n_{k_i}}+1}^{-1} W_{j-t_{n_{k_i}}+2}^{-1} \dots W_j^{-1} g_{i,l}^{(j)}\| < \frac{1}{2mi}$$

对所有 $j \in [J]$ 和 $l \in [m]$。对于每个 $j \in [J]$，定义算子 $D_j^{(i)}$ 和 $G_j^{(i)}$ 如下

$$D_j^{(i)} e_l := \begin{cases} f_{i,l}^{(j)}, & \text{if } l \in [m] \\ 0, & \text{if } l \notin [m] \end{cases} \quad \text{and} \quad G_j^{(i)} e_l := \begin{cases} g_{i,l}^{(j)}, & \text{if } l \in [m] \\ 0, & \text{if } l \notin [m]. \end{cases}$$

利用强收敛与一致收敛在有限维子空间上一致这一事实，我们可以像 [52, 定理 2.10]的证明中那样进行。□

例 3.3. 设 $H := L^2(\mathbb{R})$。假设 $(w_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$，其中每个 w_j 在 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中均为正且可逆，并且还存在一个 $M > 0$，使得对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，$\|w_j\|_\infty$，$\|w_j^{-1}\|_\infty \le M$。此外，假设存在一个 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $j \ge 0$，$|w_j \chi_{[0,\infty)}| \le 1-\epsilon$，并且对于所有 $j < 0$，$|w_j \chi_{(-\infty,0)}| \ge 1+\epsilon$。设 $(r_j)_j$ 是一个正数序列，使得对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，$r_j \ge C$，且某个 $C > 0$ 成立。对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，令 α_j 为 $\mathbb{R}$ 上由 $\alpha_j(t) := t - r_j$ 给出的平移。对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，假设 W_j 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上定义的算子，其定义为

$$W_j(f) := w_j \, (f \circ \alpha_j)$$

对于每个 $f \in L^2(\mathbb{R}) = H$。于是，每个 W_j 在 $B(H)$ 中均可逆，并且 $\|W_j\|\|W_j^{-1}\| \leq M$。经过一些计算，我们得到

$$W_{j+n}W_{j+n-1}\dots W_j f = w_{j+n}(w_{j+n-1}\circ\alpha_{j+n})\dots (w_j\circ\alpha_{j+1}\circ\dots\alpha_{j+n})(f\circ\alpha_j\circ\dots\circ\alpha_{j+n})$$

对于所有 $f \in H$ 和 j， $n \in \mathbb{N}$。由此可得

$$\|W_{j+n}W_{j+n-1}\dots W_j f\| \leq \sup_{t\in \mathrm{supp} f}\big((w_{j+n}\circ\alpha_{j+n}^{-1}\circ\dots\circ\alpha_j^{-1})(w_{j+n-1}\circ\alpha_{j+n-2}^{-1}\circ\dots\circ\alpha_j^{-1})\dots (w_j\circ\alpha_j^{-1})\big)(t)\,\|f\|$$

对于所有 $f \in H$ 和 j， $n \in \mathbb{N}$。同样，由于对每个 j，我们有 $W_j^{-1}(f) = (w_j^{-1}\circ\alpha_j^{-1})\,(f\circ\alpha_j^{-1})$ 对所有 $f \in H$ 均成立，因此可得

$$W_{j-n+1}^{-1}W_{j-n+2}^{-1}\dots W_j^{-1}f = (w_{j-n+1}^{-1}\circ\alpha_{j-n+1}^{-1})\,(w_{j-n+2}^{-1}\circ\alpha_{j-n+2}^{-1}\circ\alpha_{j-n+1}^{-1})\dots (w_j^{-1}\circ\alpha_j^{-1}\circ\dots\circ\alpha_{j-n+1}^{-1})(f\circ\alpha_j^{-1}\circ\dots\circ\alpha_{j-n+1}^{-1})$$

对于所有 $f \in H$ 和 j， $n \in \mathbb{N}$。因此，

$$\|W_{j-n+1}^{-1}W_{j-n+2}^{-1}\dots W_j^{-1}f\| \leq \sup_{t\in \mathrm{supp} f}\Big((w_{j-n+1}^{-1}\circ\alpha_{j-n+2}\circ\dots\circ\alpha_j)\,(w_{j-n+2}^{-1}\circ\alpha_{j-n+3}\circ\dots\circ\alpha_j)\dots w_j\Big)(t)\,\|f\|$$

对于所有 $f \in H$ 和 j， $n \in \mathbb{N}$。由此可知，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，序列（$W_{j+n}\dots W_j$）$_n$和（$W_{j-n+1}\dots W_j^{-1}$）$_n$在 C_c（$\mathbb{R}$）上逐点收敛，该集合在 L^2（$\mathbb{R}$）中稠密。因此，定理3.2 中的条件均得到满足。

事实上，只需假设存在两个严格递增的序列 $\{n_k\}_k$， $\{n_i\}_i \in \mathbb{N}$ 使得对每个 $j \in \{n_k\}_k \cup \{-n_i\}_i$，算子$W_j$ 均按上述方式构造。若对所有 $j \in \mathbb{Z}\setminus(\{n_k\}_k \cup \{-n_i\}_i)$，我们有 $W_j(f) = w_j f$对所有 $f \in H$均成立，其中w_j是定义在 $\mathbb{R}$上的函数，并满足$\frac{1}{M} \leq |w_j| \leq 1$当 $j \geq 0$时，以及 $M \geq |w_j| \geq 1$当 $j < 0$时，那么不难看出，定理3.2 的条件仍然成立。

命题 3.4. 我们有 $(ii) \Rightarrow (i)$。
(i) 算子 $T_{U,W}$ 是混沌的。(ii) 对每个 J， $m \in \mathbb{N}$，都存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ 和一个序列 $\{D_i^{(k)}\}_k$，其 $i \in [J]$ 项为 $B_0(H)$ 中的算子，使得

$$\lim_{k\to\infty} \| D_i^{(k)} - P_m \| = 0$$

and

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\parallel W_{j+ln_k}W_{j+ln_k-1}\dots W_{j+1}D_j^{(k)}\parallel$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\parallel W_{j-ln_k+1}^{-1}W_{j-ln_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}D_j^{(k)}\parallel=0,$$

对所有 $j\in[J]$，其中相应的级数对每个 k. 都收敛

证明。由命题 3.1，只需证明 $\mathcal{P}(T_{U,\ W})_n$ 在 $\ell_2(\mathcal{A})$ 中是稠密的。设 $\mathcal{O}$ 是 $\ell_2(\mathcal{A})$ 的一个开子集，且 $x=(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{O}$. 那么存在某些 J、$m\in\mathbb{N}$，使得 $y\in\mathcal{O}$ 满足

$$y_j=\begin{cases}P_mx_j, & \text{for } j\in[J],\\ 0, & \text{else }.\end{cases}$$

选取满足以下条件的序列 $\{n_k\}_k$ 和 $\{D_i^{(k)}\}_k$： $i\in[J]$，且它们分别关于 J 和 m. 满足 (ii) 中的假设。对于每个 $k\in\mathbb{N}$，令 $Z^{(k)}=(Z_j^{(k)})_{j\in\mathbb{Z}}$ 定义为

$$Z_j^{(k)}=\begin{cases}D_j^{(k)}y_j, & \text{for } j\in[J],\\ 0, & \text{else },\end{cases}$$

并令

$$q_k=\sum_{l=0}^{\infty}T_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)})+\sum_{l=1}^{\infty}S_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)}).$$

现在，正如命题 3.1 中由部分 (2) 推出 (1) 的证明所示，我们注意到，对于每个 $j\in[J]$ 和 l，$k\in\mathbb{N}$ 都有

$$\parallel T_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)})_{j-ln_k}\parallel\leq\parallel W_{j+ln_k}W_{j+ln_k-1}\dots W_{j+1}D_j^{(k)}\parallel\parallel y_j\parallel,$$

and

$$\parallel S_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)})_{j-ln_k}\parallel\leq\parallel W_{j-ln_k+1}^{-1}W_{j-ln_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}D_j^{(k)}\parallel\parallel y_j\parallel,$$

而对于 $j\notin[J]$，我们有

$$T_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)})_{j-ln_k}=S_{U,W}^{ln_k}(Z^{(k)})_{j-ln_k}=0.$$

So

$$\parallel q_k-y\parallel\leq\parallel D_{(0)}^{(k)}-P_m\parallel\parallel y_0\parallel$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j\in[J]}\parallel W_{j+ln_k}W_{j+ln_k-1}\dots W_{j+1}D_j^{(k)}\parallel\parallel y_j\parallel$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j\in[J]}\parallel W_{j-ln_k+1}^{-1}W_{j-ln_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}D_j^{(k)}\parallel\parallel y_j\parallel$$

$$\leq\parallel D_{(0)}^{(k)}-P_m\parallel\parallel y_0\parallel$$

$$+\sum_{j\in[J]}\parallel y\parallel(\sum_{l=1}^{\infty}\parallel W_{j+ln_k}W_{j+ln_k-1}\dots W_{j+1}D_j^{(k)}\parallel$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\parallel W_{j-ln_k+1}^{-1}W_{j-ln_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}D_j^{(k)}\parallel)$$

对于所有 $k\in\mathbb{N}$，由此可得 $q_k\to y$，因为 $k\to\infty$.
此外，很容易验证 $T_U^{ln_k},\ W(q_k)=q_k$ 对所有 l 和 k 都成立，因此 $q_k\in\mathcal{P}(T_{U,W})_n$ 对所有 k. □都成立

接下来，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们令 $C_{U,\ W}^{(n)}=\frac{1}{2}(T_{U,\ W}^n+S_{U,\ W}^n)$。

命题 3.5。我们有 (ii) 蕴含 (i)。

(i) 序列 $\{C_{U,W}^{(n)}\}_n$ 在 $l_2(\mathcal{A})$ 上是拓扑传递的。(ii) 对于每个 J，$m\in\mathbb{N}$，都存在严格递增序列 $\{n_k\}_k\subseteq\mathbb{N}$ 以及算子序列 $\{D_i^{(k)}\}_k$、$\{G_i^{(k)}\}_k$，它们属于 $B_0(H)$，对于 $i\in[J]$，使得对所有 $j\in[J]$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\parallel D_j^{(k)}-P_m\parallel=\lim_{k\to\infty}\parallel G_j^{(k)}-P_m\parallel=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j+n_k}W_{j+n_k-1}\dots W_{j+1}D_j^{(k)}\parallel$$

$$=\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j-n_k+1}^{-1}W_{j-n_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}D_j^{(k)}\parallel$$

$$=\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j+n_k}W_{j+n_k-1}\dots W_{j+1}G_j^{(k)}\parallel$$

$$=\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j-n_k+1}^{-1}W_{j-n_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}G_j^{(k)}\parallel=0$$

and

$$\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j+2n_k}W_{j+2n_k-1}\dots W_{j+1}G_j^{(k)}\parallel$$

$$=\lim_{k\to\infty}\parallel W_{j-2n_k+1}^{-1}W_{j-2n_k+2}^{-1}\dots W_j^{-1}G_j^{(k)}\parallel=0$$

证明。设 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是 $l_2(\mathcal{A})$ 中两个非空开子集。与命题 3.1 的证明第 2) 部分中 $\Rightarrow$ 1) 一样，我们可以找到某些 J、$m \in \mathbb{N}$、$x = (x_j)_j \in \mathcal{O}_1$ 以及 $y = (y_j)_j \in \mathcal{O}_2$，使得对所有 $j \neq [J]$，$x_j = y_j = 0$，并且对所有 $j \in [J].$，$x_j = P_m x_j$、$y_j = P_m y_j$。取满足关于这些 J、$m.$ 的假设 (ii) 的序列 $\{D_j^{(k)}\}_k$、$\{G_j^{(k)}\}_k$（对应于 $j \in [J]$）以及严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 μ_k、$v_k \in l_2(\mathcal{A})$ 由 $(\mu_k)_j = D_j^{(k)} x_j$、$(v_k)_j = G_j^{(k)} y_j$（对应于 $j \in [J]$ ）以及 $(\mu_k)j = (v_k)_j = 0$（对应于 $j \notin [J].$）给出。令

$$\eta_k = \mu_k + T_{U,W}^{n_k}(v_k) + S_{U,W}^{n_k}(v_k).$$

按照命题 3.1证明中的类似计算，第二部分）$\Rightarrow$ 1），我们可以证明，假设（ii）蕴含

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} T_{U,W}^{n_k}(v_k) &= \lim_{k\to\infty} S_{U,W}^{n_k}(v_k) = 0,\\
\lim_{k\to\infty} T_{U,W}^{2n_k}(v_k) &= \lim_{k\to\infty} S_{U,W}^{n_{2k}}(v_k) = 0,\\
\lim_{k\to\infty} \| \mu_k - x \| &= \lim_{k\to\infty} \| v_k - y \| = 0,\\
\lim_{k\to\infty} T_{U,W}^{n_k}(\mu_k) &= \lim_{k\to\infty} S_{U,W}^{n_k}(\mu_k) = 0.
\end{aligned}$$

由此可得 $\eta_k \to x$ 和 $C^{(n_k)}{}_{U,\ W}(\eta_k) \to y$ 当 $k \to \infty$. □

例 3.6。设 $H = L^2(\mathbb{R})$。给定 $m \in \mathbb{N}$，对每个 j，$k \in \mathbb{N}$ 令算子 $D_j^{(k)}$ 为 $D_j^{(k)} = G_j^{(k)} = \mathcal{L}_{\mathcal{X}_{[-k,k]}} P_m$ 其中 $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{[-k,k]}}$ 表示由 $\mathcal{X}_{[-k,k]}.$ 乘以的乘法算子。由于有限维空间上算子范数收敛与逐点收敛一致，因此可得 $\| D_j^{(k)} - P_m \| \to 0$ 当 $k \to \infty$ 对所有 $j \in \mathbb{N}.$ 如果现在对每个 $j \in \mathbb{N}$ 令W_j 为例 3.3中的算子，则不难看出，本例满足命题 3.4 和命题 3.5 的充分条件。

在本节末尾，我们给出 $T_{U,W}$ 的周期元素集在 $l_2(\mathcal{A})$ 中稠密的一些必要条件。对于算子 $R \in B(H)$，我们定义

$$m(R) := sup\{C > 0 \mid \| Rh \| \geq C \| h \| \text{ for all } h \in H\}.$$

˜此外，对于 $J, m \in \mathbb{N}$ 我们令 $P_{J,m} \in l_2(\mathcal{A})$ 定义为

$$(\tilde{P}_{J,m})_j = \begin{cases} P_m, & \text{for } j \in [J], \\ 0, & \text{else .} \end{cases}$$

我们有如下命题。

命题 3.7. 设 $J, m \in \mathbb{N}.$ 。我们有 (i) 蕴含 (ii)。
(i) $\tilde{P}_{J,\ m}$属于 $\mathcal{P}(T^n_{U,\ W})_n$.的闭包。(ii) 存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ ，使得

$$\lim_{k\to\infty} m(W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1}) = 0$$

对所有 $j \in [J]$.

证明。设给定 J、 $m \in \mathbb{N}$ 。对每个 $k \in \mathbb{N}$ ，根据假设，存在某个 $x^{(k)} \in l_2(\mathcal{A})$ 以及某个 $n_k \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\frac{1}{k^2} \geq \| x^{(k)} - \tilde{P}_{J,m} \|_2 \text{ and } T^{n_k}_{U,W}(x^{(k)}) = x^{(k)}.$$

因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $j \in [J]$ ，我们有

$$\frac{1}{k^2} \geq \| x^{(k)}_j - P_m \| \geq \| x^{(k)}_j P_m - P_m \|,$$

这表明

$$\| x^{(k)}_j P_m \| \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $j \in [J]$ ，我们都可以找到某个 $h^{(k)}_j \in H$ ，使得 $h^{(k)}_j \neq 0$，从而

$$\| x^{(k)}_j P_m h^{(k)}_j \| \geq (1 - \frac{1}{k^2}) \| h^{(k)}_j \| .$$

现在，我们还可以得到

$$\frac{1}{k^2} \geq \| T^{n_k}_{U,W}(x^{(k)}) - \tilde{P}_{J,m} \|_2$$

因为 $T^{n_k}_{U,\ W}(x^{(k)}) = x^{(k)}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}.$ 都成立。事实上，我们可以假设 $J < n_1 < n_2 < \dots$。因此，由于 $J < n_1 < n_2 < \dots$，我们必须有 $\frac{1}{k^2} \geq \| (T^{n_k}_{U,\ W}(x^{(k)}))_j \|$对所有 $j \in [J]$ 都成立，这就给出了对于所有 $j \in [J]$ 和 $k \in \mathbb{N}$ ，

$$\| W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1} x^{(k)}_j \| \leq \frac{1}{k^2}.$$

因此，

$$\frac{1}{k^2} \geq \| W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1} x^{(k)}_j P_m \|,$$

so

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} \| h^{(k)}_j \| &\geq \| W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1} x^{(k)}_j P_m \| \quad \| h^{(k)}_j \| \\
&\geq \| W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1} x^{(k)}_j P_m h^{(k)}_j \| \\
&\geq m(W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1}) \| x^{(k)}_j P_m h^{(k)}_j \| \\
&\geq (1 - \frac{1}{k^2}) \| h^{(k)}_j \| \, m(W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1})
\end{aligned}$$

对于所有 $j \in [J]$ 和 $k \in \mathbb{N}.$，由于 $h_j^{(k)} \neq 0$，我们可以将不等式两边同时除以 $\| h_j^{(k)} \|$，从而得到

$$\frac{1}{k^2-1} \geq m(W_{j+n_k} W_{j+n_k-1} \dots W_{j+1})$$

对于所有 $j \in [J]$ 和 $k \in \mathbb{N}.$ □

类似地，我们可以证明以下命题。

命题 3.8。设 $J, m \in \mathbb{N}.$ 我们有 (i) 蕴含 (ii)。

(i) $P_{J,\ m}$ 属于 $\mathcal{P}(S^n_{U,\ W})_n$. 的闭包 (ii) 存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} m(W_{j-n_k+1}^{-1} W_{j-n_k+2}^{-1} \dots W_j^{-1}) = 0$$

对于所有 $j \in [J]$.

4. Hypercyclic operators on C^*-algebras

设 $\mathcal{A}$ 是一个非含幺的 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$ 是含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}_1$. 中的闭双边理想。设 Φ 是 $\mathcal{A}_1$ 上的等距 $*$-同构，并且满足$\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$。假设存在一个由自伴元素组成的网 $\{p_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$，使得对所有 α 都有 $\| p_\alpha \| \leq 1$，并且 $\{p_\alpha^2\}_\alpha$ 是 $\mathcal{A}.$ 的近似单位。此外，假设对所有 α，存在某个 $N_\alpha \in \mathbb{N}$，使得 $\Phi^n(p_\alpha) \cdot p_\alpha = 0$ 对所有 $n \geq N_\alpha$ 成立（这意味着 $0 = (\Phi^n(p_\alpha) \cdot p_\alpha)^* = p_\alpha \cdot \Phi^n(p_\alpha)$, 因为 Φ 是一个 $*$-同构）。令 $b \in G(\mathcal{A}_1)$，并设 $T_{\Phi,b}$ 为定义在 $\mathcal{A}_1$上的算子，定义为 $T_{\Phi,b}(a) = b \cdot \Phi(a)$，对所有 $a \in \mathcal{A}_1.$ 成立。那么，$T_{\Phi,b}$ 是 $\mathcal{A}_1$ 上的有界线性算子；又由于 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}_1$中的理想，因此有 $T_{\Phi,b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$，因为 $\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$。$T_{\Phi,b}$的逆算子（记作 $S_{\Phi,b}$）为 $S_{\Phi,b}(a) = \Phi^{-1}(b^{-1}) \cdot \Phi^{-1}(a)$，对所有 $a \in \mathcal{A}_1.$ 成立。同样，由于 $\Phi^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}_1$中的双边理想，因此有 $S_{\Phi,b}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$，从而 $T_{\Phi,b}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} = S_{\Phi,b}(\mathcal{A})$。

通过一些计算可以验证，对于所有 $a \in \mathcal{A}.$，$T^n_{\Phi,\ b}(a) = b \cdot \Phi(b) \dots \Phi^{n-1}(b)\Phi^n(a)$ 以及 $S^n_{\Phi,\ b}(a) = \Phi^{-1}(b^{-1})\Phi^{-2}(b^{-1}) \dots \Phi^{-n}(b^{-1}) \cdot \Phi^{-n}(a)$

命题 4.1。以下陈述等价。

(i) $T_{\Phi,\ b}$ 在 $\mathcal{A}.$上是超循环的；(ii) 对于每个 p_α，都存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ 以及

序列 $\{q_k\}_k$、 $\{d_k\}_k$ ，它们属于 $\mathcal{A}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \| q_k - p_\alpha^2 \| = \| d_k - p_\alpha^2 \| = 0$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \| \Phi^{-n_k}(b)\Phi^{-n_k+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)q_k \|$$
$$= \lim_{k\to\infty} \| \Phi^{n_k-1}(b^{-1})\Phi^{n_k-2}(b^{-1})\dots\Phi(b^{-1})b^{-1}d_k \| = 0$$

证明。我们先证明 $i) \Rightarrow ii)$。

给定 p_α。由于$T_{\Phi,\ b}$是超循环的，存在某个 $n_1 \geq N_\alpha$ 和某个$a_1 \in \mathcal{A}$，使得 $\| a_1 - p_\alpha \| < \frac{1}{4}$且 $\| b\cdot\Phi(b)\ \dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1)\ - p_\alpha \| < \frac{1}{4}$.由于 $0 = p_\alpha\Phi^{n_1}(p_\alpha)$ $= \Phi^{n_1}(p_\alpha)\ \cdot p_\alpha$，我们得到

$$\begin{aligned}\| \Phi^{n_1}(a_1)\cdot p_\alpha \| &= \| (\Phi^{n_1}(a_1) - \Phi^{n_1}(p_\alpha))\cdot p_\alpha \| \\ &\leq \| \Phi^{n_1}(a_1 - p_\alpha) \| \\ &= \| a_1 - p_\alpha \| \leq \frac{1}{4},\ \text{so}\end{aligned}$$

$$\| \Phi^{n_1}(a_1)\cdot p_\alpha \| \leq \| a_1 - p_\alpha \| \leq \frac{1}{4} \tag{4.1}$$

此外,

$$\| (a_1 - p_\alpha)p_\alpha \| \leq \| a_1 - p_\alpha \| \leq \frac{1}{4}. \tag{4.2}$$

类似地，$0 = \Phi^{-n_1}(p_\alpha)\cdot\ p_\alpha = p_\alpha\cdot\Phi^{-n_1}(p_\alpha)$，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\| \Phi^{-n_1}(b)\Phi^{-n_1+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)a_1p_\alpha \| \\ =&\| \Phi^{-n_1}(b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1) - p_\alpha)p_\alpha \| \\ \leq&\| \Phi^{-n_1}(b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1) - p_\alpha) \| \\ =&\| b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1) - p_\alpha \| \leq \frac{1}{4},\ \text{so}\end{aligned}$$

$$\| \Phi^{-n_1}(b)\Phi^{-n_1+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)a_1p_\alpha \| \leq \frac{1}{4}. \tag{4.3}$$

最后，我们得到

$$\begin{aligned}&\| b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1)p_\alpha - p_\alpha^2 \| \\ =&\| (b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1) - p_\alpha)\cdot p_\alpha \| \\ \leq&\| b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1) - p_\alpha \| \leq \frac{1}{4},\ \text{so}\end{aligned}$$

$$\| b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1)p_\alpha - p_\alpha^2 \| \leq \frac{1}{4}. \tag{4.4}$$

由（4.1）我们还可以得到

$$\| \Phi^{n_1-1}(b^{-1})\Phi^{n_1-2}(b^{-1})\dots\Phi(b^{-1})b^{-1}b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1)p_\alpha \|$$

$$= \| \Phi^{n_1}(a_1)p_\alpha \| \leq \frac{1}{4}$$

令 $q_1 = a_1 p_\alpha$和 $d_1 = b\Phi(b)\dots\Phi^{n_1-1}(b)\Phi^{n_1}(a_1)p_\alpha$.那么 $\| q_1 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4}$, $\| d_1 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4}$, $\| \Phi^{-n_1}(b)\Phi^{-n_1+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)q_1 \| \leq \frac{1}{4}$和

$$\| \Phi^{n_1-1}(b^{-1})\Phi^{n_1-2}(b^{-1})\dots\Phi^{-1}(b^{-1})b^{-1}d_1 \| \leq \frac{1}{4}.$$

接下来，由于 $T_{\Phi,b}$ 是超循环的，我们可以找到一个超循环向量 a_2 以及某个 $n_2 > n_1$，使得 $\| a_2 - p_\alpha \| < \frac{1}{4^2}$和$\| T_\Phi^{n_2},_b(a_2) - p_\alpha \| < \frac{1}{4^2}$，并如上继续，找到 q_2和 d_2属于 $\mathcal{A}$，使得 $\| q_2 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4^2}$, $\| d_2 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4^2}$和

$$\| \Phi^{-n_2}(b)\Phi^{-n_2+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)q_2 \| \leq \frac{1}{4^2},$$

$$\| \Phi^{n_2-1}(b^{-1})\Phi^{n_2-2}(b^{-1})\dots\Phi(b^{-1})d_2 \| \leq \frac{1}{4}.$$

通过归纳，我们可以构造出具有 $ii)$ 中性质的序列 $\{n_k\}_k$、$\{q_k\}_k$ 和 $\{d_k\}_k$，因此 $i) \Rightarrow ii)$。

现在我们证明逆向蕴含。

设 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是 $\mathcal{A}$. 中的两个非空开子集。由于 $\{p_\alpha^2\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个近似单位，我们可以找到某些 $x \in \mathcal{O}_1$、$y \in \mathcal{O}_2$，使得当 α. 足够大时，$x = p_\alpha^2 x$ 和 $y = p_\alpha^2 y$。选择满足关于 p_α. 的条件（ii）的序列 $\{n_k\}_k$、$\{q_k\}_k$、$\{d_k\}_k$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $x_k = q_k x + S_\Phi^{n_k},_b(d_k y)$。

我们有

$$\begin{aligned}
\| S_{\Phi,b}^{n_k}(d_k y) \| &= \| \Phi^{-1}(b^{-1})\dots\Phi^{-n_k}(b^{-1})\Phi^{-n_k}(d_k y) \| \\
&= \| \Phi^{n_k}(\Phi^{-1}(b^{-1})\dots\Phi^{-n_k}(b^{-1})\Phi^{-n_k}(d_k y)) \| \\
&= \| \Phi^{n_k-1}(b^{-1})\dots\Phi(b^{-1})\cdot b^{-1}d_k y \| \\
&\leq \| \Phi^{n_k-1}(b^{-1})\dots\Phi^{-1}(b^{-1})b^{-1}d_k \| \| y \| \to 0 \text{ as } k \to \infty.
\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\| T_{\Phi,b}^{n_k}(q_k y) \| &= \| b\Phi(b)\dots\Phi^{n_k-1}(b)\Phi^{n_k}(q_k y) \| \\ &= \| \Phi^{-n_k}(b\Phi(b)\dots\Phi^{n_k-1}(b)\Phi^{n_k}(q_k y)) \| \\ &\le \| \Phi^{-n_k}(b)\Phi^{-n_k+1}(b)\dots\Phi^{-1}(b)q_k \| \| y \| \to 0 \text{ as } k\to\infty.\end{aligned}$$

由此可得 $x_k \to x$ 和 $T_{\Phi,\ b}^{n_k}(x_k) \to y$，因为 $k\to\infty$，所以 $T_{\Phi,\ b}$ 在拓扑上是传递的，因而在 $\mathcal{A}$. 上是超循环的 □

注记 4.2。我们注意到，对于所有 α 存在某个N_α 使得 $\Phi^n(p_\alpha)p_\alpha = 0$ 对所有 $n \ge N_\alpha$ 成立这一假设，实际上对于命题 4.1 中蕴含关系 (ii) 蕴含 (i) 的证明并非必要。

例 4.3。设 H 是一个可分Hilbert空间，U 是 H 上的一个酉算子，并且相对于标准正交基 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. 满足来自 [51] 的条件 (2)。令 Φ 为 $B(H)$ 上由 $\Phi(F) = U^*FU$.给出的 $*$-同构。然后，根据 [51], 中的条件 (2)，给定 $m\in\mathbb{N}$，存在一个 $N_m \in \mathbb{N}$ 使得对于 $n \ge N_m$ 有 $P_m U^n P_m = 0$ （其中 P_m 是如 [51] 中所述的到 $Span\{e_{-m},\dots,e_m\}$ 上的正交投影）。此外，根据 [34, 命题 2.2, $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $B_0(H)$ 的一个近似单位。因此，对于所有 $n \ge N_m$，我们有 $\Phi^n(P_m)P_m = U^{*n}P_mU^nP_m = 0$. 。这里，$\mathcal{A}_1 = B(H)$ 且 $\mathcal{A} = B_0(H)$。通过一些计算可见，命题 4.1 中部分 (ii) 的条件与 [51]中的条件 (3) 和 (4) 相同。来自 [51] 的算子 $T_{U,W}$ 实际上就是算子 $T_{\Phi,WU}$（因为对于所有 $F\in B_0(H)$, $WFU = WU(U^*FU)$）。关于满足这些条件的具体例子，请参见 [51]和 [52] 中的例子。事实上，在 [52] 中已经证明，这些条件等价于算子 W 在 H.上满足超循环性判据这一条件。关于该判据的更多细节，请参见 [10]。

例 4.4. 设 $H = L^2(\mathbb{R})$。对于每个 $j,k,m\in\mathbb{N}$，我们令 $D_j^{(k)}, P_m$ 为 H 上如例 3.6 中所述的˜算子；对于每个 $J\in\mathbb{N}$，我们令 $P_{J,m}$ 为由 P_m 和 $[J]$ 诱导的 $l_2(B_0(H))$ 上的正交投影，具体定义见第 3 节第 10 页。令 $\mathcal{K}(l_2(B_0(H)))$ 表示按第 2 节 [34, 的含义，$l_2(B_0(H))$ 上的紧算子 C^*-代数。于是，不难˜看出，$\{P_{J,m}\}_{J.m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{K}(l_2(B_0(H)))$ 的近似单位。对于 $j\in\mathbb{Z}$，我们令 W_j 为例 3.3 中 H 上的算子。令 $T_{U,W}$ 为第 3 节中定义的 $l_2(B_0(H))$ 上的算子，其中 $W = \{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. 如果 $U = I$，则 $T_{I,W}$ 是

作用于 $l_2(B_0(H))$ 的有界可伴算子，并且相对于 C^*-代数 $B_0(H)$ 线性。（回忆一下，我们将 $l_2(B_0(H))$ 视为右 Hilbert C^*-模。）对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 D_k 为 $l_2(B_0(H))$ 上由 $\tilde{D}_k(\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}) = \{D_j^{(k)}x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 对所有 $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_2(B_0(H))$ 给出的算子。由于对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\| D_j^{(k)} \| \leq 1$ 关于 $\tilde{}$，因此对于所有 $k \in \mathbb{N}.$， D_k 是 $l_2(B_0(H))$ 上有界的 $B_0(H)$-线性可伴算子。通过与例 3.6 中类似的论证，我们可以推得

$$\lim_{k\to\infty} \| \tilde{D}_k \tilde{P}_{J,m} - \tilde{P}_{J,m} \| = 0$$

对所有 $J, m \in \mathbb{N}.$ 此外，对所有 $k, J, m \in \mathbb{N}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \| T_{I,W}^n \tilde{D}_k P_{J,m} \| = \lim_{n\to\infty} \| T_{I,W}^{-n} \tilde{D}_k \tilde{P}_{J,m} \| = 0$$

因此，对所有 $J, m \in \mathbb{N}$，我们可以构造一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$0 = \lim_{k\to\infty} \| T_{I,W}^{n_k} \tilde{D}_k \tilde{P}_{J,m} \| = \lim_{k\to\infty} \| T_{I,W}^{-n_k} \tilde{D}_k \tilde{P}_{J,m} \| = 0$$

现在令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(l_2(B_0(H)))$，并令 $\mathcal{A}_1$ 为所有在 $l_2(B_0(H))$ 上有界的 $B_0(H)$-$\tilde{}$ 线性、可伴算子所构成的 C^*-代数。若 U 是作用在 $\tilde{}$ $l_2(B_0(H))$ 上的酉算子，我们令 Φ 为由 $\Phi(F) = U^*FU\tilde{}$ 对所有 $F \in \mathcal{A}_1.$ 给出的 $\mathcal{A}_1$ 上的 $*$-同构。于是置 $b = T_{I,W}U \in G(\mathcal{A}_1)$。通过与例 4.3 中相同的论证，我们可以推得本例满足命题 4.1 的条件。

例 4.5. 令 X 为局部紧豪斯多夫空间，给定 $\mathcal{A} = C_0(X), \mathcal{A}_1 = C_b(X)$，并令 Φ 由 $\Phi(f) = f \circ \alpha$ 对所有 $f \in C_b(X)$ 给出，其中 α 是 $X.$ 的一个同胚。置

$$S = \{f \in C_c(X) \mid 0 \leq f \leq 1 \text{ and } f_{|_K} = 1 \text{ for some compact } K \subset X\}.$$

若 $\tilde{S} = \{f^2 \mid f \in S\}$，则 $\tilde{S}$ 是 $C_0(X)$ 的近似单位。设 α 具有无周期性，即对于每个紧子集 K of X，存在常数 $N > 0$，使得对于每个 $n \geq N$，都有 $K \cap \alpha^n(K) = \varnothing$。通过一些计算不难看出，在这种情况下，命题4.1 中的条件等价于：对于 Ω 的每个紧子集 K，都存在一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$0 = \lim_{k\to\infty} (\sup_{t\in K} \prod_{j=0}^{n_k-1} (b \circ \alpha^{j-n_k})(t)) = \lim_{k\to\infty} (\sup_{t\in K} \prod_{j=0}^{n_k-1} (b \circ \alpha^j)^{-1}(t)),$$

关于满足这些条件的具体例子，请参见文献[50]中的例子。

若 $a \in \mathcal{A}_1$，在下文中我们将用 L_a 表示由 $a.$ 给出的左乘子

推论 4.6. 若存在 $\mathcal{A}$ 的稠密子集 Ω_1 和 Ω_2 ，以及一个严格递增序列 $\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}$ ，使得

$$L_{\Phi^{-n_k}(b)\Phi^{-n_k+1}(b)\ldots\Phi^{-1}(b)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

在 Ω_1 上逐点成立，并且

$$L_{\Phi^{n_k-1}(b^{-1})\Phi^{n_k-2}(b^{-1})\ldots\Phi(b^{-1})b^{-1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

在 Ω_2，上逐点成立，则 $T_{\Phi,\ b}$ 在 $\mathcal{A}.$ 上是超循环的

证明。设给定 p_α 。由于 Ω_1 和 Ω_2 在 $\mathcal{A}$ 中稠密，存在某些 $q_1 \in \Omega_1$ 和 $d_1 \in \Omega_2$ ，使得

$$\| q_1 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4} \text{ and } \| d_1 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4}.$$

根据假设，我们可以找到某个n_{k_1} 使得

$$\| \Phi^{-n_k}(b)\Phi^{-n_k+1}(b)\ldots\Phi^{-1}(b)q_1 \| < \frac{1}{4}$$

and

$$\| \Phi^{n_k-1}(b^{-1})\Phi^{n_k-2}(b^{-1})\ldots\Phi(b^{-1})b^{-1}d_1 \| < \frac{1}{4}$$

对所有 $k \geq k_1.$ ，我们可以找到某个 $q_2 \in \Omega_1$， $d_2 \in \Omega_2$ 使得

$$\| q_2 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4^2} \text{ and } \| d_2 - p_\alpha^2 \| < \frac{1}{4^2}.$$

根据假设，我们可以找到某个 $k_2 \geq k_1$ 使得

$$\| \Phi^{-n_k}(b)\Phi^{-n_k+1}(b)\ldots\Phi^{-1}(b)q_2 \| < \frac{1}{4^2}$$

and

$$\| \Phi^{n_k-1}(b^{-1})\Phi^{n_k-2}(b^{-1})\ldots\Phi(b^{-1})b^{-1}d_2 \| < \frac{1}{4^2},$$

对所有 $k \geq k_2.$ ，归纳地，我们可以构造严格递增序列 $\{n_{k_i}\}_i$ 以及序列 $\{q_i\}_i$ 属于 $\{d_i\}_i$ 属于 $\mathcal{A}$ ，满足命题4.1的条件。□

致谢

我感谢Dragan S. ¯Dor¯devi´c教授，感谢他建议我将HilbertC^*-模作为主要研究领域，并向我介绍了

相关文献。此外，我感谢S.M. Tabatabaie教授，感谢他建议我将算子的线性动力学作为研究课题，并向我介绍了相关文献。

References

[1] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. 148 (1997) 384-390。[2] R.M. Aron、V.I. Gurariy 和 J.B. Seoane-Sep´ulveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, **133** 3 2005 795 803 Proc. Amer. Math. Soc. ( ) ( ) - 。[3] F. Bayart 和 E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Tracts in Math. 179, Cambridge University Press, Cambridge, 2009。[4] L. Bernal-Gonz´alez, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 1003-1010。[5] L. Bernal-Gonz´alez, *Disjoint hypercyclic operators*, Studia Math. 182 (2007) 113-131。[6] J. B`es 和 ¨O. Martin, *Compositional disjoint hypercyclicity equals disjoint supercyclicity*, Houston J. Math. 38 (2012) 1149-1163。[7] J. B`es、¨O. Martin 和 A. Peris, *Disjoint hypercyclic linear fractional composition operators* , **381** 2011 843 856 J. Math. Anal. Appl. ( ) - 。[8] J. B`es、¨O. Martin、A. Peris 和 S. Shkarin, *Disjoint mixing operators*, J. Funct. Anal. 263 (2012) 1283–1322。[9] J. B`es、¨O. Martin 和 R. Sanders, *Weighted shifts and disjoint hypercyclicity*, J. Oper-ator Theory 72 (2014) 15-40。[10] J. B`es 和 A. Peris, *Disjointness in hypercyclicity*, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007) 297-315。[11] G. Botelho、D. Diniz、V.V. Fávaro 和 D. Pellegrino, *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces* , **434** 5 2011 1255 1260 Linear Algebra Appl. ( ) ( ) - 。[12] G. Botelho、V.V. Fávaro、D. Pellegrino 和 J.B. Seoane-Sep´ulveda, $L_p[0,1]\setminus\bigcup_{q>p} L_q[0,1]$ *is spaceable for every* $p > 0$, Linear Algebra Appl. 436 (2012) 2963-2965。[13] C-C. Chen, *Chaotic weighted translations on groups*, Arch. Math. 97 (2011) 61-68。[14] C-C. Chen, *Chaos for cosine operator functions generated by shifts*, Int. J. Bifurcat. Chaos 24 (2014) Article ID 1450108, 7 pages。[15] C-C. Chen, *Disjoint hypercyclicity and weighted translations on discrete groups*, Cana-dian Math. Bull. 60 (2017) 712-720。[16] C-C. Chen, *Disjoint hypercyclic weighted translations on groups*, Banach J. Math. Anal. 11 (2017) 459-476。[17] K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Am. Math. Soc. 36 (1999) 345-381。[18] K-Y. Chen, *On aperiodicity and hypercyclic weighted translation operators*, J. Math. Anal. Appl. 462 (2018) 1669-1678。[19] C-C. Chen、K-Y. Chen、S. ¨Oztop 和 S.M. Tabatabaie, *Chaotic translations on weighted Orlicz spaces* , **122** 2019 129 142 , Ann. Polon. Math. ( ) - 。[20] C-C. Chen 和 C-H. Chu, *Hypercyclic weighted translations on groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 2839-2846。[21] C-C. Chen 和 W-S. Du, *Some characterizations of disjoint topological transitivity on Orlicz spaces* , **2018** 2018 88 , J. Inequalities and Applications: 。[22] C-C. Chen、S. ¨Oztop 和 S. M. Tabatabaie, *Disjoint dynamics on weighted Orlicz spaces*, Complex Anal. Oper. Theory 14(7):72 (2020) DOI:10.1007/s11785-020-01034-x。[23] C-C. Chen 和 S.M. Tabatabaie, *Hypercyclic weights on hypergroups*, Int. J. Pure Appl. Math. 117(1) (2017) 125-142。

[24] C-C. Chen 和 S.M. Tabatabaie, *Chaotic operators on hypergroups*, Oper. Matrices, 12(1) (2018) 143-156。[25] C-C. Chen 和 S.M. Tabatabaie, *Topological transitivity for sequences of operators on the C^*–algebra-valued Lebesgue spaces*, Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci. (doi.org/10.1007/s40995-017-0459-7)。[26] C-C. Chen、S.M. Tabatabaie 和 A. Mohammadi, *Dynamics of weighted translations generated by group actions* **34** 7 2020 2131 2139 ,

Filomat, ( ) ( ) - 。[27] K.-G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, Studia Math. 139 (2000) 47-68。[28] K.-G. Grosse-Erdmann 和 R. Mortini, *Universal functions for composition operators with non-automorphic symbol* **107** 1 2009 355 376 , J. Anal. Math. ( ) ( ) - 。[29] K.-G. Grosse-Erdmann 和 A. Peris, *Linear Chaos*, Universitext, Springer, 2011。[30] S-A. Han 和 Y-X. Liang, *Disjoint hypercyclic weighted translations generated by aperiodic elements* **67** 2016 347 356 , Collect. Math. ( ) - 。[31] E. Hewitt 和 K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979。[32] M. Kosti´c, *Hypercyclic and chaotic integrated C-cosine functions*, Filomat 26 (2012) 1-44。[33] C.B. Morrey, *On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 126-166。[34] [MT] V. M. Manuilov、E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, In: Translations of Mathe-matical Monographs. 226, Journal of the American Mathematical Society。Amer. Math. Soc., Providence, RI。ISSN 0894-0347, Providence, RI, 2005。[35] H. Petersson, *Hypercyclic conjugate operators*, Integral Equations Operator Theory, 57(3) (2007) 413-423。[36] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$*, J. Func. Anal. 4 (1969) 71-87。[37] A. Przestacki, *Dynamical properties of weighted composition operators on the space of smooth functions* **445** 2017 1097 1113 , J. Math. Anal. Appl. ( ) - 。[38] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 993-1004。[39] H. Salas, *Dual disjoint hypercyclic operators*, J. Math. Anal. Appl. 374 (2011) 106-117。[40] H. Salas, *The strong disjoint blow-up/collapse property*, J. Funct. Spaces Appl. 2013, Article ID 146517, 6 pages。[41] R. Sanders 和 S. Shkarin, *Existence of disjoint weakly mixing operators that fail to satisfy the Disjoint Hypercyclicity Criterion* **417** 2014 834 855 , J. Math. Anal. Appl., ( ) - 。[42] Y. Sawano, *A non-dense subspace in $\mathcal{M}^p_q$ with $1 < q < p < \infty$*, Trans. A. Raz madze Math. Inst. 171(3) (2017) 379-380。[43] Y. Sawano、S. Sugano 和 H. Tanaka, *Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 363(12) (2011) 6481-6503。[44] Y. Sawano 和 S. M. Tabatabaie, *Hypercyclic operators on a closed subspace of Morrey spaces*, submitted。[45] J-C. Chen 和 S-Y. Shaw, *topological mixing and hypercyclicity criterion for sequences of operators* **134** 11 2006 3171 3179 , Proc. Amer. Math. Soc. ( ) ( ) - 。[46] S. Shkarin, *A short proof of existence of disjoint hypercyclic operators*, J. Math. Anal. Appl. 367 (2010) 713-715。[47] H. Triebel, *Hybrid function spaces, heat and Navier–Stokes equations*, tracts in Mathe-matics 24 (2014), European Mathematical Society。[48] [tsi] ´ *Linear dynamics of discrete cosine func-* Tabatabaie, *tions on solid Banach function spaces.* 25, 1437 1448 2021 S.M., Ivkovic, S., , Positivity – ( )。https://doi.org/ 10 1007 11117 021 00823 8 。/s - [49] - - Y. Sawano 、 S.M. Tabatabaie 和 F. Shahhoseini, *Disjoint dynamics of weighted translations on solid spaces* **298**, 107709, 14 2021 , Topology Appl. pp. ( ) DOI:10.1016/J.TOPOL.2021.107709

[50] Ivkovi´c, S., *Hypercyclic operators on Segal algebras and spaces of measures*, https://doi.org/ 10 48550 2205 05485 。/arXiv。。Ivkovic S., Tabatabaie S.M. [51] ´ *Hypercyclic Translation Operators on the Algebra of Compact Operators* 45, 1765 1775 2021 。Iran J Sci Technol Trans Sci – ( )。https://doi.org/ 10 1007 40995 021 01186 1 。/s - - - Ivkovic S., Tabatabaie S.M. [52] *Disjoint linear dynamical properties of elementary operators* 10 48550 2108 09825 , https://doi.org/ 。/arXiv。。[53] V. Vlachou, *Disjoint universality for families of Taylor-type operators*, J. Math. Anal. Appl. 448 (2017) 1318-1330。[54] L. Zhang, H-Q. Lu, X-M. Fu and Z-H. Zhou, *Disjoint hypercyclic powers of weighted translations on groups* **67** 2017 839 853 , Czechoslovak Math. J. ( ) - 。[55] CHAN, KIT C. "可分希尔伯特空间上的算子代数的超循环性。" Journal of Operator Theory 42, no. 2 (1999年): 231–44。http://www.jstor.org/stable/24715210。[56] Zhang, L., Zhou, ZH. *Disjointness in supercyclicity on the algebra of Hilbert-Schmidt operators* 46, 219 228 2015 10 1007 13226 。Indian J Pure Appl Math – ( )。https://doi.org/ 。/s - 015-0116-9[57] Yousefi, B., Rezaei, H. *Hypercyclicity on the Algebra of Hilbert-Schmidt Operators.* 结果。Math. 46, 174–180 (2004年)。https://doi.org/10.1007/BF03322879

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, p.p.367, Kneza Mihaila 36, 11000 Beograd, Serbia*Email address*: stefan.iv10@outlook.com