arXiv:2301.12287v1 [math.CV] 28 Jan 2023

关于柯西积分与跳跃分解

James A. C. Young

2021年夏季

引言

序言

本笔记旨在向读者介绍柯西型积分和索科茨基公式（也称为跳跃分解，或简称跳跃问题）。本文分为两个主要章节。第一章基于 F.D. 加霍夫所著《边值问题》前几节的内容[4]。本文的讲解方式面向具有复变函数入门课程水平背景，并且熟悉分析学基本辐角的读者。本文的目标之一是进行阐释性讲解，因此几乎所有证明都会包含经过充分展开的论证和解释。在第一章确立基本思想之后，我们将在第二章跳过大量严格训练，转而（非正式地）讨论该领域中一些尚未解决的问题，以及处于我们理解边缘的进展。我们将看到，许多学科如何协同工作，讲述出更加丰富的故事，其中包括几何函数论、奇异积分算子和边值问题。

特别感谢 Eric Schippers 在2021年夏季提供指导和大量帮助，使本次演示得以完成。

James A. C. Young，2021年9月7日。

记号

在正文中，轮廓线的一般记号为 C。除非另有说明，C 可以是开曲线或闭曲线。我们将讨论的轮廓线性质良好，其确切定义稍后给出。这样做是为了让读者专注于本文的主要表述：跳跃公式。作为对研究问题的预览，探索类似思想在更为特殊且“性质不佳”的曲线上的应用，是该领域分析学家当前的研究工作之一。

我们称轮廓 C 为光滑的，如果它满足以下性质 s:

1. 该轮廓要么是简单曲线，即不与自身相交；要么是简单闭曲线，即仅在端点处相交。

2. 它属于 C^1 类，这意味着存在一种轮廓的参数化，使其连续可微。此外，我们假设轮廓的默认参数化方向为逆时针。

3. 曲线的切向量永不为零，这意味着曲线没有尖点。也可以表述为：参数化的导数永不为零。一个具有尖点的曲线示例是由方程 $y^3 = x^2$ 描述的 xy-平面中的曲线（原点即尖点所在的位置）。

如果轮廓 C 由有限条首尾相连的光滑曲线组成，则称其为分段光滑。例如，平面上顶点为 (0, 0)、(1, 0) 和 (0, 1) 的直角三角形就是一条分段光滑的轮廓。为简单起见，本文所说的光滑曲线均默认也可能是分段光滑的。轮廓的端点既包括开曲线通常意义上的端点（我们称之为实际端点，并始终按照遍历方向列出），也包括分段光滑轮廓定义中某条特定曲线的端点：在该点相接的两条光滑曲线无法被视为一条光滑曲线。以直角三角形为例，我们会将各顶点计作端点，因为它们构成了“角”。

最后，我们的轮廓线将是可求长的，这意味着它们的长度有限（因此有界）。事实上，根据我们对连续可微参数化的假设，这一点已可推出（参见第 6 章 [2]），不过为清晰起见，仍值得明确指出这一性质。轮廓 C 的长度记作ℓ（C）。综上，这些性质概括了我们所采用的良态光滑曲线的概念。

设 C 是复平面中的一条简单闭曲线。回顾一下，若尔当曲线定理指出，这样的曲线将平面分成两个连通分支：一个有界，一个无界。若尔当定理的证明见 Newman 的著作 [11] 。 C 补集中的有界分支称为 C 的内部，记作 D^+；补集中的无界分支称为 C 的外部，记作 D^-。根据我们选择的参数化方向， D^+ 是行进方向左侧的区域，而 D^- 是行进方向右侧的区域。

通常，我们用 z、 w 或 τ 表示复变函数中的变量，用 x 或 t 表示实变量。为加以区分，我们用符号 log 表示复对数，用 ln 表示实对数。函数的导数有两种表示方式：若求导所针对的变量可由上下文明确，则在函数后加撇号；或者在函数符号上加下标，以标明相应的变量。例如，$f(z)$ 的导数可写作 $f'(z)$；而 $g(z,\tau)$ 对 z 求导，则写作 $g_z(z,\tau)$。

目录

引言 iii

1 柯西积分与跳跃问题 1
1.1 柯西型积分 .1 1.2 霍¨尔德条件 .10 1.3 奇异积分的主值 .17 1.4 跳跃公式 .
222 TheR

研究问题 29
2.1 边值问题 .29 2.1.1 狄利克雷问题 .30 2.1.2 全纯边值问题 .30 2.2 拟圆 .32
2.3 狄利克雷空间 .35 2.4 法贝尔多项式与级数 .36 2.5 狄利克雷空间中的柯西积分 .
37 2.6 问题 .39附录 A 解析函数的跳跃公式 41 附录 B S 中的约当曲线与开集
1 43附录 C 法贝尔级数的存在性 47 参考文献 53

第 1 章

柯西积分与跳跃问题

1.1 柯西型积分

首先，我们将重新审视令人惊叹的柯西积分公式。该公式是复变函数理论的基础。我们希望将此公式推广到更广泛的函数类以及更大的域——即轮廓的无界补集。为了精确定义后者的含义，我们需要先了解无穷远点。下面从定义开始。

定义 1.1.1（全纯延拓至无穷远点）。设 C 是一条有界简单闭曲线，且 $f(z)$ 是在 D^- 上解析的函数。若 $f(1/z)$ 在 $z=0$ 处有一个可去奇点，则我们将 f 全纯延拓至无穷远点，定义为

$$f(\infty) \coloneqq \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

无穷远点在复分析的发展中至关重要。平面连同无穷远点称为黎曼球面，它是黎曼曲面的典型例子；黎曼曲面是进行复分析的一般对象。

扩展所涵盖的较广泛函数类包括保持连续性、但在轮廓上不一定具有解析性的函数。只有在研究主要问题及其推论之后，才会发现这种推广的必要性——它不仅仅是为了检验理论的界限。

接下来，我们整理一些预备结果。

命题 1.1.2. 设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列在光滑曲线 C 上一致收敛于函数 f 的连续函数。那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

也就是说，我们可以将极限移入积分号内。

证明。首先，显然极限函数是连续的，因此在 C 上可积。令 $\varepsilon>0$。由于 f_n 在 C 上一致收敛到 f，存在具有如下性质的 $N\in\mathbb{N}$：只要 $n\geq N$，便有 $|f_n-f|<\varepsilon$ 在 C 上成立。应用估值引理可得

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right|=\left|\int_C\left[f_n(z)-f(z)\right]\,dz\right|<\varepsilon\cdot\ell(C)$$

只要 $n\geq N$，结论便成立，证明完成。 □

交换极限与积分是一种常见且重要的解析技巧。我们将遇到这样的情形：希望将极限移入积分中，而被积函数含有一个连续参数；该参数如同一个由实数轴上的某个区间连续索引的序列。下面的引理将说明这一点。

引理 1.1.3。假设实值函数 $f(x,t)$ 在集合 $S\times[a,b]\subset\mathbb{R}^2$ 上一致连续。那么对于任意 $x_0\in S$:

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,t)\,dt=\int_a^b f(x_0,t)\,dt.$$

也就是说，积分关于 x 是一个连续函数。

证明。由 f 在 $S\times[a,b]$ 上的一致连续性可知，对于任意 $\varepsilon>0$，存在满足以下性质的 $\delta>0$：只要 $|x-x_0|<\delta$，且对于每个 $t\in[a,b]$，就有 $|f(x,t)-f(x_0,t)|<\varepsilon/(b-a)$。假设 $x\in S$ 满足此要求，并估计积分之差:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x,t)\,dt-\int_a^b f(x_0,t)\,dt\right|=\left|\int_a^b\left[f(x,t)-f(x_0,t)\right]dt\right|&\leq\int_a^b|f(x,t)-f(x_0,t)|\,dt\\&<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

符合要求。 □

以下是同类型的结果，但具体针对轮廓积分。它同样极其重要，不过其应用方式有所不同。

推论 1.1.4. 假设复值函数 $f(\tau, z)$ 在集合 $C \times D \subset \mathbb{C}^2$ 上一致连续，其中 C 是 τ-平面中的光滑曲线，而 D 是 z-平面中的域。那么对于任意 $z_0 \in D$:

$$\lim_{z \to z_0} \int_C f(\tau, z)\, d\tau = \int_C f(\tau, z_0)\, d\tau.$$

也就是说，积分在 z中作为连续函数发挥作用。

证明。 采用与引理 1.1.3 中几乎完全相同的论证即可。 □

下一个概念是对嵌入某个集合中的曲线的一种等价关系，称为同伦。

定义 1.1.5（同伦曲线）。设 C_1 和 C_2 是两条简单闭合轮廓线，分别由函数 α_1 和 α_2 参数化，且二者具有共同的域 $[a, b]$。设 $D \subset \mathbb{C}$ 是复平面的一个子集，包含 C_1和 C_2。若存在连续函数 h: $[0, 1] \times [a, b] \to D$，使得.....则称 C_1 和 C_2 在 D 中同伦。

i. $h(0, t) = \alpha_1(t)$若 $t \in [a, b]$

ii. $h(1, t) = \alpha_2(t)$若 $t \in [a, b]$

iii. $h(s, a) = h(s, b)$ 对所有 $s \in [0, 1]$。

函数 h 称为同伦。

两条轮廓线同伦的含义是，其中一条可以在不离开集合 D 的情况下连续变形为另一条。对于每个固定的 $s_0 \in (0, 1)$，我们可以把 $h(s_0, t)$ 看作描绘出一条中间曲线 C_{s_0}，当 t 在 $[a, b]$ 上变化时如此。函数 h 的条件断言这些中间轮廓线是闭合的，并且同伦的起始状态和结束状态 h 分别对应于同伦的轮廓线 C_1 和 C_2。

同伦路径也能告诉我们曲线嵌入其中的底层集合的结构。例如，考虑平面中的一个环域。直观地说，它可以看作一个带有同心孔的圆盘。空间中的孔使该集合在同伦意义上区别于普通圆盘。注意，围绕该孔的轮廓无法连续变形为一条不围绕该孔的轮廓，因为任何变形要么需要曲线穿过该孔，从而离开该集合，要么需要将曲线切断。如果一个集合中没有“孔”——或者更形式地说，该集合具有这样的性质：集合中的任意闭曲线都同伦于一个点——那么我们就称该集合为单连通。

接下来，我们将证明一个引理，这是加强版柯西积分公式所需的。我们有必要说明它为何不可或缺。其背后的思路

很简单，即将证明的“新”柯西积分公式的证明思路也很简单。我们从想要对其进行积分的光滑闭曲线出发，将其缩小为一条新的光滑闭曲线，使其严格位于原轮廓内部。在这个内部区域中，由于根据假设被积函数是解析的，我们可以对光滑闭轮廓应用常规的柯西积分公式。然后，我们利用极限论证，通过同伦将内侧轮廓推向边界，这样便无需要求函数在边界上解析，同时仍能保留原有结论。遗憾的是，处理同伦辐角时出现的微妙问题，超出了本文预设的先修知识所能解决的范围。因此，我们决定借助几条著名的高阶定理来证明该引理。

简而言之，以下引理保证了论证所需的同伦存在。

引理 1.1.6. 设 C 是一条光滑闭曲线。那么，在 D^+ 中存在另一条与 C 同伦的光滑闭曲线。此外，这些曲线的同伦 $h(s,t)$ 具有以下性质：

i. 对固定的 s_0，当 t 变化时，$h(s_0,t)$ 描述一条闭合光滑曲线。

ii. 当且仅当 $s=1$ 时，$h(s,t)$ 与 C 有非平凡交集。

证明。 我们需要的第一个结果是黎曼映射定理。该定理指出，存在一个从平面的任意真开子集到开单位圆盘的双射全纯映射。其反函数也是全纯的，这是反函数定理的一个推论（精确表述见附录 C ）。

设 $f:\ D^+ \to \mathbb{D}$ 是从 C 的内部到开单位圆盘的这样一个映射。为了利用这一特殊映射来定义同伦，我们需要将反映射延拓到 $\mathbb{D}$ 的边界，然后证明该延拓属于 $\mathcal{C}^1$ 类。所需的结果之一称为 Carath´eodory 定理。该定理指出，f 可以延拓为 $\overline{D^+}$ 与 $\overline{\mathbb{D}}$ 之间的一个同胚（见 Pommerenke 所著的书 [12]）。从这里开始，当我们写 f 时，指的就是这个同胚。根据定义，进而可得 $f^{-1}(\partial\mathbb{D}) = C$。

现在我们已经得到了连续延拓，接下来需要证明它是连续可微的。这里我们将使用 [12] 中的定理 3.6，该定理指出：如果存在一个从开单位圆盘到一条 $\mathcal{C}^1$ 曲线内部的保角映射，那么该映射的一阶导数可以连续延拓到边界。在我们的情形中，这意味着 f^{-1} 的导数可以连续延拓到边界，从而可知 f^{-1} 的延拓属于 $\mathcal{C}^1$类。若定义$h:\ [0,1]\times[0,2\pi] \to D^+ \cup C$，则

$$h(s,t) = f^{-1}\left(\frac{1+s}{2}e^{it}\right)$$

那么，h 是从 D^+ 中的某条光滑曲线到曲线 C的 $\mathcal{C}^1$ 同伦。

由于 f^{-1} 特别是单射，其导数在 $\mathbb{D}$中的所有点上均不为零，因此在 $\overline{\mathbb{D}}$ 中也如此，这可由 Lang的书中的定理 6.4 得出 [7]。因此，我们已经证明，对于每个固定的 s_0，由 h（s_0，t）描述的轮廓是光滑的。最后，f^{-1} 是单射映射，这意味着由 h（s，t）与轮廓 C 只有在 $s = 1$时才有非平凡交集。 □

现在我们已经具备足够的工具来处理广义柯西积分公式的第一部分。

定理 1.1.7（柯西积分公式 I）。设 C 是 τ 平面中的一条光滑闭曲线。假设 $f(z)$ 在 D^+ 中解析，并在 C 上连续。那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in D^+ \\ 0 & \text{if } z \in D^-. \end{cases}$$

证明。对于第一种情况，设 z 是 D^+ 中的一点。记住引理 1.1.6 ，令$h(s,t)$ 表示一条光滑曲线 C_0 在 D^+ 中的同伦，该曲线将点 z 包含在其内部，并与 C 本身同伦。令 C_s 表示固定 s时由 h 描出的轮廓。我们可以假设 z 位于每条 C_s的内部。现在，我们可以将柯西积分写成如下形式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_s} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(h(s,t))}{h(s,t) - z}\cdot h_t(s,t)\,dt.$$

注意，左侧的被积函数在轮廓 C_s上及其内部解析。因此，我们可以对该表达式应用通常的柯西积分公式。此外，右侧的被积函数在矩形 $[s,1]\times[0,2\pi]$上一致连续。令 $s \to 1^-$ 趋于极限，并应用引理 1.1.3，

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{s\to 1^-}\int_{C_s}\frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\lim_{s\to 1^-}\left[\frac{f(h(s,t))}{h(s,t)-z}\cdot h_t(s,t)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(h(1,t))}{h(1,t)-z}\cdot h_t(1,t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \end{aligned}$$

这就证明了区域 D^+ 中各点的结果。

现在，如果 z 位于区域 D^- 中，我们可以执行相同的极限论证，不过这一次要在中间轮廓线上使用柯西-古尔萨定理。在这种情况下，积分的值为 0，取极限后同样如此。证明到此完成。 □

下面的结果是前述柯西积分公式的一个版本，适用于在闭合轮廓外部解析的函数。

定理1.1.8（柯西积分公式 II）。设 C 是 τ平面中的一条光滑闭曲线。假设函数 $f(z)$在 D^-中解析，在无穷远点处有全纯延拓，并且在 C上连续。那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty) & \text{if } z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty) & \text{if } z \in D^-. \end{cases}$$

证明。对于平面中的任意固定 z，以及 C 上的每一点 τ，存在 $R > 0$，使得 $|z| < R$ 和 $|\tau| < R$ 都成立。令 C_R 表示以原点为圆心、半径为 R 的圆。现在，轮廓 C 和点 z 都完全位于圆 C_R 内。写作：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-C_R} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

首先，我们计算右侧在 $C - C_R$ 上的积分。我们用一条不经过点 z 的线连接轮廓 C 和圆 $-C_R$。这条线被视为额外的积分路径；只要沿线分别朝两个方向积分，它对积分的贡献便为零。现在，这个表达式表示沿圆顺时针积分，沿新添的线向下到达轮廓 C，逆时针绕行 C，再沿线向上返回，并继续沿圆积分，直到回到起点。

若 $z \in D^+$，则 z 不被积分路径围住。应用定理 1.1.7，积分结果为 0。若 $z \in D^-$，则按照构造，我们的路径围住该点。反转积分方向并应用定理 1.1.7 所得结果为 $-f(z)$。现在考虑圆 C_R上的积分。设 $\zeta = 1/\tau$。则 $d\zeta = -\zeta^2 d\tau$，可写为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\frac{1}{R}}} \frac{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\left(\frac{1}{\zeta} - z\right)\zeta^2}\,d\zeta.$$

定义 $g(\zeta) := f(1/\zeta)$。由于 f在圆 C_R的无界补集上解析，g 在圆 $C_{1/R}$的有界补集上解析，并且根据我们的假设，f 可以全纯延拓到无穷远点，因此还包括点 0。事实上，g 在轮廓 $C_{1/R}$ 上也是解析的。

当 0 和 ∞相对于平面中的某条轮廓位于不同的连通分支中时，形如 $\tau \mapsto 1/\tau$ 的变换会反转该轮廓参数化的方向。在本例中，这意味着圆 $C_{1/R}$ 按顺时针方向遍历，因此 $-C_{1/R}$ 按逆时针方向遍历。现在可将积分写成：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{-C_{\frac{1}{R}}}\frac{g(\zeta)}{(1-\zeta z)\,\zeta}\,d\zeta. \tag{1}$$

分母 $1-\zeta z$ 中的项在 $-C_{1/R}$的内部非零，这是因为 $1/|z|>1/R$。因此，函数 $g(\zeta)/(1-\zeta z)$ 在积分路径的内部解析。然而，该圆的内部包含原点，因此 $\zeta=0$ 是被积函数在 $-C_{1/R}$内部的一个奇点。应用定理 1.1.7 于 (1)：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{g(0)}{1-0z}=f(\infty).$$

注意，对于第二个积分，其计算与 z 所在的分支无关。结合这些结果，证明即告完成。□

柯西积分公式将函数的边界行为与轮廓 C两侧的两个区域联系起来。接下来，我们希望换个角度看待柯西积分公式：不再仅仅把它视为一种便捷的积分求解方法，而是将其视为一个具有独特再生性质的函数。我们用下面的定义概括这一点：一种称为柯西型积分的特殊奇异积分算子。

定义 1.1.9（柯西型积分）。设 C 是 τ平面上的一条光滑曲线。假设 $\varphi:C\to\mathbb{C}$ 是 C上的连续函数。那么函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

称为柯西型积分。 $\varphi(\tau)$称为其密度，而 $1/(\tau-z)$称为（柯西）核。

展望后文，柯西型积分将是我们研究的主要对象。更具体地说，我们将尝试运用解析技术，理解它在积分路径附近的行为。为此，我们必须先深入了解它在平面上一个更易处理的区域中的性质。

下面的结果表明，函数 $\Phi(z)$ 除轮廓 C 上的点外，在整个平面上都是解析的。我们称这条线为柯西型积分的奇异线。

定理 1.1.10. 设 C 是 τ 平面中的一条光滑曲线， $D\subset\mathbb{C}$ 是 z 平面中的一个域。设 $f:C\times D\to\mathbb{C}$ 是一个关于两个复变函数的复值函数。假设以下条件成立：

i. $f(\tau,z)$ 连续

ii. 关于 z， $f(\tau,z)$ 是解析的

iii. 当 z 变量固定时， $f_z(\tau, z)$ 关于 τ 是连续的。

那么，积分定义函数

$$F(z) = \int_C f(\tau, z)\, d\tau$$

在 D中解析，且 F' 的表达式可通过在积分号下求导得到。

证明。固定 $z_0 \in D$，并设 $K \subset D$ 是以 z_0为中心的闭有界圆盘。定义新函数 g : $C \times K \to \mathbb{C}$ 如下:

$$g(\tau, z) = \begin{cases} \frac{f(\tau,z)-f(\tau,z_0)}{z-z_0} & \text{if } z \neq z_0 \\ f_z(\tau, z_0) & \text{if } z = z_0. \end{cases}$$

首先，显然，当 $z \neq z_0$时， g 在形如（τ， z）的点处连续。对于形如（τ， z_0）的点，我们需要更仔细地检查连续性。

设（τ'， z_0） $\in C \times K$，并给定 $\varepsilon > 0$。根据上述观察以及 f 在 z中的解析性，我们可以选取 $\delta_1 > 0$ ，使得

$$\left|\frac{f(\tau,z)-f(\tau,z_0)}{z-z_0} - \frac{f(\tau',z)-f(\tau',z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{and} \quad \left|\frac{f(\tau',z)-f(\tau',z_0)}{z-z_0} - f_z(\tau',z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

只要 $0 < |z - z_0| < \delta_1$ 且 $|\tau - \tau'| < \delta_1$，便有此结论。由此可得

$$\left|\frac{f(\tau,z)-f(\tau,z_0)}{z-z_0} - f_z(\tau',z_0)\right| < \varepsilon$$

当 z 和 τ 满足这些条件时。现在根据 f_z 在 τ中的连续性，存在 $\delta_2 > 0$使得

$$|f_z(\tau, z_0) - f_z(\tau', z_0)| < \varepsilon$$

只要 $|\tau - \tau'| < \delta_2$。取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，显然该界

$$|g(\tau, z) - g(\tau', z_0)| < \varepsilon$$

只要 $\|(\tau, z) - (\tau', z_0)\| < \delta$。因此 g是连续的，而且由于 $C \times K$ 是紧致的，所以还是一致连续的。因此可以应用推论 1.1.4 得到

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0}\left[\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - \int_C f_z(\tau, z_0)\, d\tau\right] &= \lim_{z\to z_0}\left[\int_C \left[\frac{f(\tau,z)-f(\tau,z_0)}{z-z_0} - f_z(\tau,z_0)\right] d\tau\right] \\ &= \lim_{z\to z_0}\left[\int_C [\, g(\tau,z) - g(\tau,z_0)]\, d\tau\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

证明 F 在 D中的解析性。 □

推论 1.1.11。柯西型积分函数处处解析，但与积分轮廓重合的点除外。

证明。详细内容留给读者。 □

对于轮廓 C 为闭合轮廓的情况，表示柯西型积分的函数 Φ 更准确地说可以看作分裂成两个不同的函数。如果 $z \in D^+$ 我们使用记号 Φ^+，并且如果 $z \in D^-$ 我们使用 Φ^-。作此区分的原因在于，一般而言，我们无法将其中一个函数沿着 C 解析延拓为另一个函数。

目前，柯西型积分在轮廓上的各点处的行为仍然神秘。这一问题类似于初等微积分中遇到的反常积分的收敛性与发散性的判定。在接下来的章节中，我们的主要目标将是阐明这种行为。

在继续之前，让我们先指出以下重要性质：

命题 1.1.12。柯西型积分函数 Φ 可以全纯延拓到无穷远点，并且在那里取值为 0。

证明。我们将在无穷远邻域内构造柯西型积分的级数表示，以推导出该结果。固定 $z \in D^-$，使其充分远离原点，从而对于轮廓 C 上的每一点 τ，它都满足 $|z| > |\tau|$。将核展开为几何级数：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau - z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{z}\right)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{z^n}\end{aligned}$$

对于 $|\tau| < |z|$，该级数将收敛。现在，我们将两边乘以密度除以 $2\pi i$，然后在 C 上关于 τ 积分，得到表达式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\varphi(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{z^n}\right] d\tau.$$

在左侧，我们有柯西型积分 $\Phi(z)$。对于右侧，请注意，当对收敛幂级数与连续函数的积进行积分时，我们可以将和移到被积函数之外（参见[3]第 65 节）。这种技术使我们能够对幂级数逐项积分。鉴于我们对 z 的选择，以及轮廓上密度的连续性 C，我们得到

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

其中

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^{n-1} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

由于 $\Phi(1/z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 0$处有一个可去奇点， Φ 可以全纯延拓到无穷远点，并且 $\Phi(\infty)$具有所述的值。 □

1.2 H¨older 条件

为了处理沿奇异线的柯西型积分，我们需要一个特别好的密度函数。本节将重点讨论此处“好”的含义。正如一致连续性是一种强形式的连续性，因为它要求能够找到一个在整个域上都适用的 δ ，通过限制函数值彼此接近的速度，还可以进一步强化一致连续性。

定义 1.2.1（H¨older 条件）。设 D 是复平面的一个子集，并设 φ: $D \to \mathbb{C}$ 是定义在 D上的复值函数。若存在常数 $A > 0$ 和 $0 < \lambda \leq 1$ ，使其满足以下性质，则称 φ 在 D 上满足 H ¨older 条件:

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq A\,|z - w|^{\lambda}$$

只要 z， $w \in D$。或者，我们称 φ 为 λ-赫尔德连续，或简称赫尔德连续。我们称 A 为赫尔德常数，称 λ 为赫尔德指数。

注。由于存在冗余，不考虑大于 1 的 λ 。事实上，如果 φ 对某个 $\lambda > 1$满足上述条件，那么对不等式变形可得:

$$0 \leq \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{z - w} \right| \leq A\,|z - w|^{\lambda - 1}.$$

当 $z \to w$时，由夹逼定理可知差商趋于 0。这意味着 φ 在 D上可微，其中 $\varphi' \equiv 0$，因此 φ 在 D的每个连通分支上都是常数。

正如命名方式所暗示的，赫尔德指数是该条件的关键特征，而常数则不那么重要。指数的大小决定了赫尔德函数的类别，并最终控制函数的行为。

请注意， λ的值越大，限制就越严格。因此，$\lambda = 1$ 对应于这类函数中最小的一个函数类；这类函数通常称为利普希茨连续函数，或称为满足利普希茨条件的函数。

接下来，我们建立 Hölder 连续函数的一些基本性质。

命题 1.2.2. Hölder 连续函数 φ 特别是一致连续的。

证明。令 λ 和 A 分别表示集合 D中 φ 的 H¨older 指数和常数，并设 $\varepsilon > 0$ 给定。选取 $\delta = (\varepsilon/A)^{1/\lambda}$。若 z、 $w \in D$ 满足 $|z - w| < \delta$，根据 φ在 D 中的 H¨older 连续性，我们有

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq A\,|z - w|^{\lambda} < \varepsilon.$$

□

例 1.2.1。一个不满足 H¨older 条件的一致连续函数的典型例子如下。设 f： 定义 $\left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x)} & \text{if } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

很容易看出 f 构成一个一致连续函数。然而，对于任意常数 $A > 0$ 和指数 $0 < \lambda \leq 1$, 我们总能找到违反定义1.2.1中界限的情形。回忆初等微积分中的结论：对每个 $\lambda > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\lambda} \ln(x) = 0.$$

换言之，在零点附近，正幂函数完全压过对数。因此，对于任意常数 $A > 0$，我们总能找到足够接近 0 的 x，使得

$$\left|x^{\lambda} \ln(x)\right| < \frac{1}{A}$$

由此

$$|f(x) - f(0)| = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| > A\,|x|^{\lambda}.$$

命题 1.2.3. 设 α 和 β 在光滑曲线 C 上满足 H ¨older 条件，其 H ¨older 指数分别为 λ 和 μ。则它们的和与积在 C 上都满足 H ¨older 条件。若进一步假设 β 在 C 上不为零，则它们的商同样满足 H ¨older 条件。在每种情况下，新的 H ¨older 指数将是原来两个指数中较小的一个。

证明。我们将依次证明每个结果，以便利用此前建立的界，而无需重复说明理由。

设 A 和 B 分别表示 α 和 β 的 H¨older 常数。由于我们假设 C 的长度为有限值，根据定义，位于 C 上任意两点之间的距离不大于轮廓 C 的长度，记作

不失一般性，假设 $\lambda \le \mu$。令 $\varepsilon := \mu - \lambda$, $M := \max\{A, B\}$，并设 $z, w \in C$。

首先，我们得到它们的和的估计：

$$\begin{aligned}|(\alpha(z)+\beta(z))-(\alpha(w)+\beta(w))| &\le |\alpha(z)-\alpha(w)| + |\beta(z)-\beta(w)| \\ &\le A\,|z-w|^{\lambda} + B\,|z-w|^{\mu} \\ &\le M\,|z-w|^{\lambda}\,(1+|z-w|^{\varepsilon}) \\ &\le M\,(1+\ell(C)^{\varepsilon})\,|z-w|^{\lambda}\end{aligned}$$

这正是我们要证明的结论。现在，C 是紧致的，因此我们可以找到具有以下性质的 $R > 0$：

$$|\alpha(z)| \le R \quad \text{and} \quad |\beta(z)| \le R$$

对每个 $z \in C$都成立。现在我们可以得到积的估计：

$$\begin{aligned}|\alpha(z)\beta(z)-\alpha(w)\beta(w)| &\le |\beta(z)|\,|\alpha(z)-\alpha(w)| + |\alpha(w)|\,|\beta(z)-\beta(w)| \\ &\le R\,(|\alpha(z)-\alpha(w)| + |\beta(z)-\beta(w)|) \\ &\le RM(1+\ell(C)^{\varepsilon})\,|z-w|^{\lambda}.\end{aligned}$$

最后，我们考察商的情形。假设对轮廓 C 上的每一点z，都有 $\beta(z) \neq 0$。由连续性可知，在轮廓上每一点的某个邻域内，$|\beta(z)|$ 都可以用一个正数与 0 隔开。应用海涅–博雷尔定理，可得 β上的统一下界。也就是说，存在$K > 0$，使得在 C上有 $K \le |\beta|$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha(z)}{\beta(z)} - \frac{\alpha(w)}{\beta(w)}\right| &\le \frac{|\beta(w)|\,|\alpha(z)-\alpha(w)| + |\alpha(w)|\,|\beta(z)-\beta(w)|}{|\beta(z)\beta(w)|} \\ &\le \frac{RM(1+\ell(C)^{\varepsilon})}{K^2}\,|z-w|^{\lambda}\end{aligned}$$

如所需。 □

命题 1.2.4. 设 φ 在光滑曲线 C 上是 λ-H ¨older 连续的。那么对于任意 $0 < \alpha < \lambda$, φ 在 C上是 α-H ¨older 连续的。

证明。由于 C 是可求长的，其长度为 $\ell(C)$，且有限。令 $A > 0$表示 φ 在 C上的 H¨older 常数。对于任意一对点 z、$w \in C$，我们有

$$\begin{aligned}|\varphi(z)-\varphi(w)| &\le A\,|z-w|^{\lambda} \\ &= A\,|z-w|^{\lambda-\alpha}\,|z-w|^{\alpha} \\ &\le A\ell(C)^{\lambda-\alpha}\,|z-w|^{\alpha}.\end{aligned}$$

□

注。上述前两个命题通常对复平面中的任意子集仍然成立，只要这些集合具有有限直径。

例 1.2.2. 命题 1.2.4 已表明，H¨older 连续函数类彼此之间存在某种包含关系：满足较大指数条件的函数也满足较小指数条件。事实证明，这种包含是严格的。例如，取定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 。容易证明， f 是指数为 $1\,2$ 的 H¨older 连续函数。令 $a, b \in [0,1]$。那么

$$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|^2 \leq \left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| = |a-b|.$$

对两边取平方根即可得到所需结果。这恰好是我们在此区间上能够达到的最大 H¨older 指数。因为假设 $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$ 和 $A>0$。那么

$$\begin{aligned}
1 &> \frac{A}{A+1} \\
\Rightarrow \left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right|^{\frac{1}{2}} &> A\left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \\
\Rightarrow \left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{2\varepsilon}}}\right| &> A\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \\
\Rightarrow \left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{2\varepsilon}}}-\frac{1}{2\,(A+1)^{\frac{1}{2\varepsilon}}}\right| &> A\left|\frac{1}{(A+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}-\frac{1}{4\,(A+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

若令 $a=(A+1)^{-1/\varepsilon}$ 和 $b=\left[4\,(A+1)^{1/\varepsilon}\right]^{-1}$，则 $a, b\in[0,1]$，并且由上面的最后一个不等式可得：

$$\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| > A\,|a-b|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

因此，H¨older 条件不满足，从而证明了我们的论断。我们避免将其中一个点选为零，以强调问题点本身并不是零。H¨older 指数的限制因素在于函数在 0 附近的变化速率。

命题 1.2.5. 设 f 在 D 上是 α-H¨older 的，并假设 g 在 f 的像上是 λ-H¨older 的。那么复合 $g\circ f$ 在 D 上是 $\lambda\alpha$-H¨older 的。

证明。令 A、 $B > 0$ 分别表示与 g 和 f 相关联的 H¨older 常数。设 z_1、 z_2 是集合 D 中的点。我们有

$$\begin{aligned} |(g \circ f)(z_1) - (g \circ f)(z_2)| &\leq A\,|f(z_1) - f(z_2)|^{\lambda} \\ &\leq AB^{\lambda}\,|z_1 - z_2|^{\lambda\alpha}. \end{aligned}$$

□

通常，人们认为利普希茨条件和一般的 H¨older 条件都属于局部性质。对于一个性质良好的函数，其域的不同子集可能需要不同的指数或常数，更不用说是否仍满足该条件了。以下定义将这一概念精确化。

定义 1.2.6（局部利普希茨条件）。若存在点 $z \in D$ 的一个邻域 B，使得函数 $f : D \to \mathbb{C}$ 在 $D \cap B$ 中满足利普希茨条件，则称该函数在点 $z \in D$ 处局部 Lipschitz。也就是说，存在 $r > 0$ 和一个常数 $M > 0$ （可能依赖于 z），使得

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M\,|z_1 - z_2|$$

对所有 $z_1, z_2 \in B(z, r) \cap D$ 均成立。若 f 在 D 中的每一点都局部 Lipschitz，则称 f 在 D 上局部 Lipschitz。

注。上述定义以显而易见的方式推广为局部 H ¨older 条件。不过，我们不会明确用到它。

在某些语境中，局部 Lipschitz 与通常所说的 Lipschitz 之间的区别，是通过将后者称为全局利普希茨来体现的，以强调我们可以找到一个利普希茨常数，使其适用于集合中任意一对点。

本节余下部分将用于确定哪些熟悉的函数和域条件可以推出利普希茨连续性。

命题 1.2.7. 如果 f 在复平面的子集 D 上解析，那么 f 在 D 上局部 Lipschitz。

证明。必定存在一个包含 D 的开集 Ω，使得 f 在其中解析，因此固定 $z_0 \in D$，并取 $r > 0$，使得 $B(z_0, r) \subset \Omega$。利用 f 的解析性以及最大模原理的一个推论，我们可以在 $B(z_0, r)$ 的边界上找到 $w_0 > 0$，使得对于每个 $w \in B(z_0, r)$，都有 $|f'(w)| \leq |f'(w_0)|$。取一点 z，使其同时属于 D 和开球 $B(z_0, r)$。由于开球是凸集，我们可以用一条完全包含在 $B(z_0, r)$ 内的直线 L 连接 z_0 和 z。结合围道积分基本定理和估值引理，我们得到

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \int_L f'(z)\,dz \right| \leq |f'(w_0)|\,|z - z_0|\,.$$

□

在表述某个性质的局部版本时，我们通常可以预期，全局条件会立即推出局部条件。人们往往关心的是，要使逆向推论成立，需要哪些条件。也就是说，如果已知局部条件处处成立，还需要哪些额外条件才能保证全局条件成立？本定理针对利普希茨条件回答了这个问题。

定理 1.2.8. 如果函数 f 在复平面的紧子集 K 上局部 Lipschitz，那么它在 K 上全局利普希茨。

证明。反设 f 不是全局利普希茨。那么商

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \tag{1}$$

在集合 $K\times K-\text{diag}(K)$ 上无界，其中 $\text{diag}(K)=\{(\tau,\tau):\tau\in K\}$。这意味着对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们都能找到 $(z_n,w_n)\in K\times K-\text{diag}(K)$，使得

$$\left|\frac{f(z_n)-f(w_n)}{z_n-w_n}\right|\geq n. \tag{2}$$

由于 f 在 K 上局部 Lipschitz，因此 f 特别是在 K 上连续，因而在 K 上有界。因此，(1) 中的分子在 K 上有界。于是，要使不等式 (2) 在 $K\times K$ –diag(K) 上成立，必定有

$$|z_n-w_n|\to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

根据博尔查诺-魏尔施特拉斯定理，我们可以找到 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个收敛到复数 z_0 的子序列。此外，由于 K 是闭集，这个极限点必定属于集合 K。我们断言，子序列 $(w_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 也收敛到 z_0。考虑不等式

$$|w_{n_k}-z_0|\leq|w_{n_k}-z_{n_k}|+|z_{n_k}-z_0|.$$

当 N 足够大且 $n_k\geq N$时，右侧的两项都可以任意小。

我们所建立的结果与假设 f 在 z_0 处局部 Lipschitz 相矛盾。为说明其中的原因，回顾一下，根据假设，存在 $r>0$，使得 f 在 $B(z_0,r)\cap K$ 上是 Lipschitz 的，常数为 $M_{z_0}>0$。我们刚刚证明，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得 $z_{n_k},\ w_{n_k}\in B(z_0,r)\cap K$ 对于 $k\geq N$ 成立。根据阿基米德性质以及子序列的收敛性，我们可以找到一个足够大的指标 $n_{k_0}>M_{z_0}$，使其满足 $k_0\geq N$。由 (2) 可得不等式

$$\left|\frac{f(z_{n_{k_0}})-f(w_{n_{k_0}})}{z_{n_{k_0}}-w_{n_{k_0}}}\right|\geq n_{k_0}$$

特别地

$$\left|f(z_{n_{k_0}}) - f(w_{n_{k_0}})\right| > M_{z_0}\left|z_{n_{k_0}} - w_{n_{k_0}}\right|.$$

因此， f 必须是全局利普希茨的。 □

注。 紧致性对这个定理至关重要。为说明原因，考虑两个解析函数 $z \mapsto 1/z$ 和 $z \mapsto z^2$。它们分别是定义在包含 0 和 ∞的去心邻域的区域上、不一致连续函数的首例。根据命题1.2.2，这两个函数在这些区域上都不是赫尔德连续的，但根据定理1.2.7，它们在每一点都局部利普希茨。事实上，这两个区域都不是紧致的。

推论 1.2.9。解析函数在光滑轮廓上满足利普希茨条件。

推论 1.2.10。设 f 在紧致集合 $K \subset \mathbb{C}$上解析。若 g 在 f的像上是 λ-赫尔德¨连续的，则复合函数 $g \circ f$ 在 K上是 λ-赫尔德¨连续的。

证明。 结论立即由定理1.2.7和命题1.2.5 以及1.2.8得出。

□

由于轮廓的参数化定义在实数轴的紧区间上，但又是复值函数，因此研究专门针对这类函数的一些结果会很有用。

引理 1.2.11. 设 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 是在 (a,b) 上导数有界的可微函数。那么 f 是利普希茨连续的。

证明. 根据假设，我们可以用某个常数 $M > 0$ 在 (a,b) 上一致地界定 f'。对于任意一对满足 $x_2 > x_1$ 的点 x_1、 $x_2 \in [a,b]$ ，应用中值定理可得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

其中某个 $c \in (x_1, x_2)$。因此

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)|\,|x_2 - x_1| \le M\,|x_2 - x_1|$$

结论得证。 □

例 1.2.3。 引理 1.2.11 的逆命题一般并不成立。也就是说，在 $\mathbb{R}$的子集上满足利普希茨条件，并不足以推出在该集合上处处可微。一个简单的例子是实绝对值函数，它显然处处利普希茨连续，但在原点处不可微。然而，可以证明，实利普希茨连续函数是绝对连续的，这足以保证其 几乎处处 可微。

定理 1.2.12。设 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一个实变量的复值函数。假设 α 在 (a,b) 上可微且具有有界导数。那么 α 是利普希茨连续的。

证明。令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示函数 α 的实部和虚部，使得$\alpha(t) = x(t)+iy(t)$。则该函数的导数为 $\alpha'(t) = x'(t)+iy'(t)$。根据假设，该函数存在一个一致有界常数 $M > 0$ 。注意到这个界

$$|x'|, \ |y'| \leq |\alpha'| \leq M \tag{1}$$

在（a, b）上成立。由于 x（t）和 y（t）都是实可微函数，根据引理1。2。11 它们是利普希茨连续的，并且根据（1），可以将 M 用作利普希茨常数。令 t_1, $t_2 \in [a,b]$, 可得

$$\begin{aligned} |\alpha(t_1) - \alpha(t_2)|^2 &= (x(t_1) - x(t_2))^2 + (y(t_1) - y(t_2))^2 \\ &= |x(t_1) - x(t_2)|^2 + |y(t_1) - y(t_2)|^2 \\ &\leq 2M^2 |t_1 - t_2|^2 . \end{aligned}$$

因此结论成立。 □

1.3 奇异积分的主值

本节将讨论一个称为主值的概念：当被积函数包含奇点时，为反常积分赋予有意义数值的一种方法。其目的是确定何时能够沿奇异线为柯西型积分提取出一个可用的值。我们从定义开始。

定义 1.3.1（主值积分）。设 C 是 τ平面中的一条光滑曲线， τ_0 是 C上的一点。令 $C_r := C - B(\tau_0, r)$表示从轮廓 C 中去掉以点 τ_0 为中心、半径为 $r > 0$ 的邻域后得到的曲线。设 φ 是 C_r上的可积函数。对于具有柯西核和 φ 密度的奇异积分

$$\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} \, d\tau$$

我们将其主值定义为

$$P.V. \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} \, d\tau := \lim_{r \to 0^+} \int_{C_r} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} \, d\tau.$$

注：可以证明，对于光滑曲线上的任意点 τ_0 ，都存在一个以 τ_0 为中心的开球，其中包含该曲线的一条弧 C。这是一个微妙但重要的事实，因为我们希望尽可能多地保留这条曲线。

考察极限时，如果不得不考虑这样一种可能性，将曲线中靠近空间中奇点、但沿曲线的距离又足够远因而不影响极限所要刻画内容的部分删去，那将会非常不便。证明需要用到拓扑论证，详见附录*B*。

通常，只有当被积函数中存在奇点时，我们才会讨论积分的主值。不过，如果对没有奇点的函数采用主值的定义，所得结果将与常规围道积分的定义相同。为了解释其中的原因，设 f 在光滑曲线 C 上连续，τ_0 是 C 上的一点，且 $r > 0$ 足够小，使得 $\mathcal{B}_r = B(\tau_0, r) \cap C$ 只包含一个连通分支。根据估值引理：

$$\left| \int_{\mathcal{B}_r} f(\tau)\, d\tau \right| \leq \sup_{\tau \in C} |f(\tau)| \cdot \ell(B_r).$$

当 r 趋于 0 时，$\mathcal{B}_r$ 的长度也趋于 0，因此上面的积分也趋于 0。由此可知，f 沿 C 的围道积分与主值积分相同。

为了建立直观认识，考虑实值函数 $f(x) = 1/x$ 在 $[-1, 0) \cup (0, 1]$ 上。将 f 在此区间上的反常积分理解为曲线下方的面积，我们可以认为，从某种意义上说，f 在 x 轴上方和下方围成的“面积”彼此抵消，因此积分应为 0。然而，正如积分学课程中所学，按照反常积分的标准定义，这是一个发散积分。若改用主值积分，不仅该积分存在，结果也确实为零。读者不妨进一步探究：如果修改定义，允许奇点两侧以不同方式趋近，那么该积分的主值会如何变化。

注。在主值积分的删除过程中，对称性是一项必要属性，以确保不会偏向某一个方向的逼近；但在极限过程中，删除 τ_0 的一个邻域并非严格必要。正如我们将在接下来的结果中看到的，重要特征是：从 τ_0 到通过删除产生的两个新端点的距离之比趋于 1。也就是说，对称性必须在极限中存在，但不一定在其他任何地方都存在。使用基本开球时，该比值始终为 1。在更高级或更精细的处理方法中，则有必要重新定义。

下述引理给出了最简单奇异积分主值的一个公式。

引理 1.3.2. 设 C 是一条光滑曲线，τ_0 是 C 上一点，且不与其端点重合。则具有柯西核和单位密度的柯西主值奇异积分

$$\int_C \frac{d\tau}{\tau - \tau_0}$$

存在。若 C 为开曲线，其实际端点为 a 和 b，则其主值公式为

$$P.V. \int_C \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} = \log(b - \tau_0) - \log(a - \tau_0) + \pi i.$$

若 C 为闭曲线，其值就是 $i\pi$。

证明。首先注意，所讨论被积函数的原函数涉及复对数，写作 $\log(\tau - \tau_0)$。为了进行计算，我们必须说明应如何选取对数分支。一般而言，应沿一条连接 τ_0 和 ∞的曲线作切割，该曲线相对于轮廓 C的行进方向位于右侧。此外，应使该曲线以这样的方式延伸：它不会再次穿过轮廓。若轮廓是开曲线，这显然可行；若轮廓是闭曲线，则选择在右侧切割可确保存在这样的切割线。

设 C_r 表示定义中去除问题区域后的轮廓，设 z_1 和 z_2 表示从轮廓 C_r 中移除 τ_0周围的邻域后新生成的端点。我们计算：

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} \frac{d\tau}{\tau - \tau_0} &= \log(\tau - \tau_0)\Big|_a^{z_1} + \log(\tau - \tau_0)\Big|_{z_2}^{b} \\
&= \log(b - \tau_0) - \log(a - \tau_0) + \log(z_1 - \tau_0) - \log(z_2 - \tau_0) \\
&= \log(b - \tau_0) - \log(a - \tau_0) + \ln\left(\frac{|z_1 - \tau_0|}{|z_2 - \tau_0|}\right) + \\
&\quad i\left[\arg(z_1 - \tau_0) - \arg(z_2 - \tau_0)\right].
\end{aligned}$$

注意，$|z_1 - \tau_0|$ 和 $|z_2 - \tau_0|$ 的值相等，这也意味着相应的 ln 项消失。此外，如果 C 是闭合轮廓，那么 $a = b$，因此前两个对数项相互抵消。

我们现在关注的是辐角之差在极限中的变化。这一证明大纲依赖于一些几何直觉，也可以用以下推理来替代：由于轮廓是光滑的，它在 τ_0 处有明确的线性近似。因此，随着我们减小 τ_0 周围开球的半径，点 z_1 和 z_2 正趋近于该线性近似。因此，两者之间的角在极限中趋近于 π。这无疑是更直接的，而且

这是一条优雅的推理路线，但对于谨慎的读者，我们将在下一段中给出更深入的概述。

为简单起见，假设 $\tau_0 = 0$，并且在 τ_0 的某个邻域内，轮廓 C 完全位于坐标平面的第一和第三象限中，且在该邻域内的每一点处，C 的切线均有界。通过几何论证可知，我们希望取的极限在平移和旋转下保持不变，因此同样的论证也可应用于一般轮廓。注意，象限条件利用了这样一个事实：C 在 τ_0 的某个邻域内连续可微。令 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ 将轮廓 C 参数化，使得$\gamma(0) = \tau_0 = 0$，并且对于 $t > 0$，$\gamma(t)$ 位于第一象限。令 θ' 为 C 在原点处的切向量与正实轴所成的角。利用反正切函数的连续性和洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \arg\gamma(t) &= \lim_{t\to 0^+} \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)\\ &= \arctan\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{y(t)}{x(t)}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{y'(0)}{x'(0)}\right)\\ &= \theta'.\end{aligned}$$

现在，当 $r \to 0$ 时，$z_1 \to \tau_0$ 和 $z_2 \to \tau_0$ 都成立。由于 z_1 位于第三象限，$\arg(z_1) = \pi + \arg(-\overline{z_1})$。由上可知，这意味着当 $r \to 0$ 时，将 $-\overline{\gamma}$ 代入后，$\arg(z_1)$ 趋近于$\pi + \theta'$。由于 z_2 位于第一象限，直接由极限计算可得，当 $r \to 0$ 时，$\arg(z_2)$ 趋近于 θ'。这表明

$$\lim_{r\to 0}[\arg(z_1 - \tau_0) - \arg(z_2 - \tau_0)] = \pi$$

由此

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{d\tau}{\tau - \tau_0} = \log(b - \tau_0) - \log(a - \tau_0) + \pi i.$$

□

现在我们可以给出柯西核奇异积分主值存在的充分条件。

定理 1.3.3. 设 C 是 τ 平面中的一条光滑曲线。假设函数 $\varphi : C \to \mathbb{C}$ 在 C 上是 H¨older 连续的。那么，对于曲线上任意固定点 τ_0，只要该点不与 C 的端点重合，奇异积分的主值

$$\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0}\, d\tau$$

存在。如果 C 是一条实际端点为 a 和 b 的开曲线，则可以将主值表示为

$$P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\tau_0}\,d\tau = P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\,d\tau + \varphi(\tau_0)\left[\log(b-\tau_0)-\log(a-\tau_0)+\pi i\right].$$

另一方面，如果 C 是一个闭合轮廓，我们可以将主值表示为

$$P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\tau_0}\,d\tau = P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\,d\tau + i\pi\varphi(\tau_0).$$

证明。令 λ 表示 φ 在 C 上的霍尔¨德指数。显然，我们可以将定理陈述中的奇异积分写成

$$P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\tau_0}\,d\tau = P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\,d\tau + \varphi(\tau_0)\cdot P.V.\int_C \frac{d\tau}{\tau-\tau_0}.$$

根据引理 1.3.2，右侧的第二个奇异积分存在，且在两种情形下均具有预期的值。剩下要证明的是，右侧涉及差商的奇异积分以主值的意义存在。令 $\alpha:[0,1]\to\mathbb{C}$ 为轮廓 C的参数化，并令 $t_0\in(0,1)$ 表示 $\alpha^{-1}(\tau_0)$. 将这个主值积分展开为关于实变量的反常积分，可得

$$\begin{aligned} P.V.\int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(z)}{\tau-\tau_0}\,d\tau &= \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha(t))-\varphi(\alpha(t_0))}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\cdot\alpha'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(\alpha(t))-\varphi(\alpha(t_0))}{t-t_0}\cdot\frac{t-t_0}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\cdot\alpha'(t)\,dt. \end{aligned}$$

显然，在点 t_0 之外，这个积分收敛，因此我们只需检查点 t_0 的某个邻域上的积分是否收敛。取 $0<x_1<t_0$ 和 $t_0<x_2<1$，并令 $I=[x_1,x_2]$。问题归结为证明反常积分

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi(\alpha(t))-\varphi(\alpha(t_0))}{t-t_0}\cdot\frac{t-t_0}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\cdot\alpha'(t)\,dt \tag{1}$$

存在。定义函数 $f:I\to\mathbb{C}$ 为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t-t_0}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\alpha'(t) & \text{if } t\neq t_0\\ 1 & \text{if } t=t_0\end{cases}.$$

该函数在 I 上连续，因此可知存在 $M>0$，使其满足 $|f|\le M$ 在 I 上成立。只考虑 α 在 I 上的行为，立即得到

α' 在 I 上连续，因为我们处于 t_0的严格更小邻域内，因此它在 I上是一致有界的。根据定理 1.2.12， α 在 I上是利普希茨连续的；根据定理 1.2.5 该复合 $\varphi \circ \alpha$ 在 λ-H¨older 上是 I的。令 $A > 0$ 表示该复合的 H¨older 指数，则被积函数（1）满足以下估计：

$$\left| \frac{\varphi(\alpha(t)) - \varphi(\alpha(t_0))}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{\alpha(t) - \alpha(t_0)} \cdot \alpha'(t) \right| \leq \frac{AM}{|t - t_0|^{1-\lambda}}.$$

对 I 积分时，不等式右端构成一个收敛的p积分，因此根据实数轴上积分的比较判别法，(1) 中的积分存在，证明完毕。

□

注。请注意，密度 φ 满足赫¨尔德条件仅在局部范围内发挥作用（通常也是如此）。也就是说，为了保证任意给定点处的主值积分存在，只需密度在该点局部满足赫¨尔德条件（当然，在轮廓的其他部分也必须处处可积）。接下来的结果也将如此。

现在，只要密度函数具有相应的性质，我们就可以扩展柯西型积分的定义域。

定义 1.3.4（奇异线上的柯西型积分的值）。设柯西型积分 Φ 的密度 φ 在积分路径上的某点 τ_0 局部满足赫¨尔德条件。则定义 Φ 在 τ_0 处的值为：

$$\Phi(\tau_0) := P.V. \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau.$$

1.4 跳跃公式

在积分路径上柯西型积分的工作定义下，我们可以开始分析函数在奇异线附近的行为。更具体地说，我们关注的是：当取极限趋近奇异线时，轮廓外的原始积分定义与轮廓上的主值定义如何相互作用。本节将通过两个主要步骤完成这一分析。

下面的内容只是一项便于处理的技术细节。

命题 1.4.1. 对于轮廓 C 上的任意固定点 τ_0 （该点不是其端点之一）以及任意 $x_0 > 0$，我们可以用函数 γ 将 C 参数化为：$[-x_0, x_0] \to C$，使得 $\gamma(0) = \tau_0$。

证明。假设 $\alpha : [0, 1] \to C$ 将轮廓 C参数化。注意，区间$[0, 1]$ 始终可以作为任意参数化的定义域，因为映射 $t \mapsto$

$(b-a)t+a$ 在 $[0,1]$ 与任意闭区间 $[a,b]$之间建立了双射。用 $t_0 \in (0,1)$ 表示 $\alpha^{-1}(\tau_0)$。对于 $x_0 > 0$，我们可以如下定义 γ：

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha\left(t_0\left[\frac{t}{x_0}+1\right]\right) & \text{if } -x_0 \le t \le 0 \\ \alpha\left(\frac{t}{x_0}[1-t_0]+t_0\right) & \text{if } 0 < t \le x_0. \end{cases}$$

□

通常情况下，我们会借助一个引理来完成繁重的工作。这个结果被称为“基本引理”，它表明，与定理 1.3.3中相同的稠密性条件足以保证一个密切相关的积分定义函数是连续的。

引理 1.4.2. 设 C 是 τ-平面中的一条光滑曲线。设 τ_0 是 C 上的一点，且不与 C 的端点重合。假设函数 $\varphi\colon C \to \mathbb{C}$ 满足 H¨older 条件。定义 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为

$$\psi(z) = \int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau - z}\, d\tau.$$

那么 ψ 是一个定义良好的函数，并且在点 $z = \tau_0$ 处连续。也就是说，

$$\lim_{z\to\tau_0} \psi(z) = \psi(\tau_0) = P.V. \int_C \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau - \tau_0}\, d\tau.$$

证明。 注意， ψ 是定义良好的函数，这是定理 1.3.3的推论。现在我们需要证明的只是它确实在 τ_0处连续。记

$$|\psi(z)-\psi(\tau_0)| = \left| P.V. \int_C \frac{z-\tau_0}{\tau - z} \cdot \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\, d\tau \right|. \tag{1}$$

令 $\delta > 0$ 表示以 τ_0 为中心且恰好包含曲线 C 的一条弧的圆盘半径。我们将这条弧记为 C_δ。一般来说，我们需要考虑 τ_0 周围更小的邻域。为避免记号混淆，约定根据需要将 δ 的值重置为更小的值。由于奇点包含在弧 C_δ 上，将积分 (1) 分成两部分会很有用：一部分沿该弧积分，另一部分沿曲线 $C - C_\delta$ 的其余部分积分。令 $A > 0$ 和 $0 < \lambda \le 1$ 分别表示曲线 C 上 φ 的 H¨older 常数和指数。

为了估计式 (1) 中被积函数的第一项在 C_δ 上的大小，我们需要考虑两种情况。首先，我们考察非切向极限。考虑顶点为 z、 τ 和 τ_0 的三角形。分别将顶点 τ 和 τ_0 处的角标记为 θ_τ 和 θ_{τ_0}。根据正弦定理，我们有如下关系：

$$\frac{\sin(\theta_{\tau_0})}{|\tau - z|} = \frac{\sin(\theta_\tau)}{|z-\tau_0|}.$$

由于路径 z 趋近 τ_0 时不与轮廓 C 相切，因此存在一个 δ-邻域，以 τ_0 为中心，在该邻域内，角 θ_{τ_0} 与 0 和 π 均保持正距离。因此，存在 $\omega_0 > 0$，使得在 τ_0 的这个邻域内，$\sin(\omega_0) \leq \sin(\theta_{\tau_0})$。由此我们可以得到估计

$$\left|\frac{z-\tau_0}{\tau-z}\right| \leq \frac{1}{\sin(\omega_0)}. \tag{2}$$

利用命题 1.4.1，设 $\alpha : [-1,1] \to C_\delta$ 是该弧的一个参数化，其中 $\alpha(0) = \tau_0$，且域的端点映射到弧的端点。如果我们通过将 δ 从其当前值缩小来限制 α 的像，那么参数化的域也会缩小。因此对于 $0 < \delta' \leq \delta$，限制为$\alpha_{\delta'}$：$[l(\delta')\ u(\delta')] \to C_{\delta'}$，其中函数 l 和 u 满足 $-1 \leq l(\delta') < 0$ 以及$0 < u(\delta') \leq 1$，这两个函数都映射到弧的端点 $C_{\delta'}$，并且当 δ' 趋于零时都趋于零。

令 I_1 表示沿弧 C_δ取的式 (1) 中的积分。应用 (2) 以及通常的轮廓积分比较定理:

$$|I_1| = \left| P.V. \int_{C_\delta} \frac{z-\tau_0}{\tau-z} \cdot \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\, d\tau \right| \leq \frac{1}{\sin(\omega_0)} \int_{l(\delta)}^{u(\delta)} \left| \frac{\varphi(\alpha_\delta(t))-\varphi(\alpha_\delta(0))}{\alpha_\delta(t)-\alpha_\delta(0)} \right| dt.$$

不等式右侧的积分可以由一个收敛的 p-积分从上面进行界定，正如定理 1.3.3 的证明中所展示的那样。对常数使用相同的记号，我们有

$$\frac{1}{\sin(\omega_0)} \int_{l(\delta)}^{u(\delta)} \left| \frac{\varphi(\alpha_\delta(t))-\varphi(\alpha_\delta(0))}{\alpha_\delta(t)-\alpha_\delta(0)} \right| dt \leq \frac{AM}{\sin(\omega_0)} \int_{l(\delta)}^{u(\delta)} \frac{dt}{|t|^{1-\lambda}}.$$

最后请注意，由于我们可能需要缩小 δ，l 和 u 的取值可能不再关于 0 对称，因此我们将取 $r(\delta)$ 为两者中绝对值较大的一个。因此

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{AM}{\sin(\omega_0)} \int_{-r(\delta)}^{r(\delta)} \frac{dt}{|t|^{1-\lambda}} \\ &= \frac{2AM}{\sin(\omega_0)} \lim_{x\to 0^+} \int_x^{r(\delta)} \frac{dt}{t^{1-\lambda}} \\ &= \frac{2AMr(\delta)^\lambda}{\lambda \sin(\omega_0)}. \end{aligned} \tag{3}$$

设定 $\varepsilon > 0$。根据前面的所有论述，我们可以选择 $\delta > 0$，使得$|I_1| < \varepsilon/2$。令 I_2 表示沿轮廓 $C - C_\delta$ 对（2）中的积分。注意

I_2 的被积函数不具有任何奇点，因此它确实在点 z 处连续。也就是说，存在 δ——不大于之前确定的值——满足 $|I_2| < \varepsilon/2$，当 z δ 接近 τ 时。遗憾的是，我们得到

$$|\psi(z) - \psi(\tau_0)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

对于 $|z - \tau_0| < \delta$。这就处理了非切向情形。

接下来，我们证明当趋近路径沿轮廓本身时， ψ 在 τ_0 处表现为连续函数。请注意，在此前的分析中，我们的估计与轮廓上的点 τ_0 无关。也就是说，当 z 从轮廓的任一侧趋近 τ_0时， ψ 表现为一致连续函数。

设给定 $\varepsilon > 0$ 。那么对于不在轮廓上的 z ，存在一个 $\delta > 0$ ，使得当 $|z - \tau_0| < \delta$时， $|\psi(z) - \psi(\tau_0)| < \varepsilon/2$。这里，我们假设 z 采取非切向趋近。选取轮廓 C 上的一点 τ_1 ，使得 $|\tau_0 - \tau_1| < \delta/2$，并在 C 的一个固定侧选取一点 z ，使得 $|z - \tau_0| < \delta/2$。于是 $|z - \tau_1| < \delta$，鉴于前面提到的非切向趋近的一致性，我们有$|\psi(z) - \psi(\tau_1)| < \varepsilon/2$。因此

$$|\psi(\tau_0) - \psi(\tau_1)| \leq |\psi(\tau_0) - \psi(z)| + |\psi(z) - \psi(\tau_1)| < \varepsilon$$

证明沿轮廓的极限值具有连续性。

最后，我们考察切向极限情形。前面已经证明的两种情形都可以用到。在 Muskhelishvili 所著《奇异积分方程》第 34 页[10], 中指出，我们总能找到一点 τ' 位于轮廓 C 上，使得量$|z - \tau'|$和 $|z - \tau_0|$都可以任意小，其中 τ'沿非切向路径趋近于 τ_0。证明相当复杂，最好留给有兴趣的读者自行探究其细节。结合前两种情形，这一结果保证了

$$|\psi(z) - \psi(\tau_0)| \leq |\psi(z) - \psi(\tau')| + |\psi(\tau') - \psi(\tau_0)| < \varepsilon$$

wh只要 z 充分接近 τ_0。至此，引理的证明完成 ma. □

既然所有困难的工作都已完成，主要结果便相对容易得出，尽管它揭示的内容颇为违背直觉。

定理 1.4.3（光滑轮廓上的跳跃公式）。设 C 是 τ平面上的一条光滑曲线。若柯西型积分的密度 φ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

若在 C 上满足霍尔¨德条件，则 Φ^+ 和 Φ^- 在趋近轮廓上的固定点 τ_0 （不与其端点重合）处均有极限值，其值由下列公式给出：

$$\Phi^{\pm}(\tau_0) = \pm\frac{1}{2}\varphi(\tau_0) + \Phi(\tau_0).$$

这个等式称为跳跃公式，有时也称为索科茨基公式。

证明。 我们可以先假设轮廓 C 是闭合的。如果给定的轮廓是开放的，我们就在 C 的端点处接上一条开放的光滑曲线 C' C ，从而构成一条光滑闭曲线，然后定义 φ 在 C'上恒为零。取一点 τ_0 位于轮廓 C 上，如定理陈述中所述。根据定理 1.3.3， Φ以柯西主值的意义存在。我们用以下记号$\Phi^{+}(\tau_0)$ 和 $\Phi^{-}(\tau_0)$ 简记从 Φ 内部趋近于 D^{+} 和 D^{-} 分别沿着 τ_0取极限。

首先，回顾下列奇异积分可能取的值：

$$\int_C \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } z \in D^{+} \\ 0 & \text{if } z \in D^{-} \\ \pi i & \text{if } z \in C. \end{cases}$$

注意，当 z 位于积分路径上时，该积分的值为主值，其计算见引理 1。3。2。该积分定义了关于 z 的阶跃函数，这一点至关重要。考虑定义在 $\mathbb{C}$上的以下积分定义函数：

$$\psi(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_0)}{\tau - z}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(z)}{\tau - z}\, d\tau - \varphi(\tau_0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau - z}\right].$$

根据基本引理 1.4.2，我们知道该函数 ψ 在 τ_0处连续，因此 $\psi(\tau_0) = \psi^{+}(\tau_0) = \psi^{-}(\tau_0)$。从这三个不同区域中的每一个区域考察 z 趋于 τ_0 时的极限，我们得到以下三个方程：

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\substack{z\to\tau_0 \\ z\in D^{+}}} \psi(z) &= \lim_{\substack{z\to\tau_0 \\ z\in D^{+}}} \left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau - \varphi(\tau_0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau - z}\right]\right] \\ &= \Phi^{+}(\tau_0) - \varphi(\tau_0) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\substack{z\to\tau_0 \\ z\in D^{-}}} \psi(z) &= \lim_{\substack{z\to\tau_0 \\ z\in D^{-}}} \left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau - \varphi(\tau_0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau - z}\right]\right] \\ &= \Phi^{-}(\tau_0) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi(\tau_0) &= P.V.\, \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0}\, d\tau - \varphi(\tau_0)\left[P.V.\, \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau - \tau_0}\right] \\ &= \Phi(\tau_0) - \frac{1}{2}\varphi(\tau_0). \end{aligned} \tag{3}$$

根据前面的注，表达式（1）、（2）和（3）相等：

$$\Phi^+(\tau_0) - \varphi(\tau_0) = \Phi^-(\tau_0) = \Phi(\tau_0) - \frac{1}{2}\varphi(\tau_0).$$

解出两处的 $\Phi^\pm$，即可得到所述公式。 □

注。跳跃公式可重新排列，得到关于 C 减去端点的以下恒等式：

$$\varphi(\tau) = \Phi(\tau)^+ - \Phi(\tau)^-.$$

由此可见，定义在光滑曲线 C 上的霍尔德连续函数，可以写成两个函数边界值之差，而这两个函数分别在 C 的一侧解析。

让我们回到本章开头证明的柯西积分公式。我们可以开始说明为何只需放宽边界上的函数条件。读者或许会怀疑，这一结果是否真的有必要。毕竟，要找到一个在某个域内解析、但在该域边界上仅连续的函数，并非易事（顺带一提，具有霍尔德连续密度的柯西型积分通常就是这样的函数之一）。这里，我们关注的是定理的陈述及其对跳跃公式的含义。下一章的部分内容将进一步彰显其证明中所用技巧的重要性。

令 $f^\pm$ 分别表示 $D^\pm$ 中的解析函数，并假设$f^-(\infty) = 0$。假设这两个函数都可以连续延拓到轮廓C。将函数 φ 定义在 C 上，使其等于这两个延拓之差，我们可以写出：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^+(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{1}$$

注意，函数 f^+和 f^-分别满足定理1.1.7和1.1.8的要求。因此，我们得到以下两个取值：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^+(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f^+(z) & \text{if } z \in D^+ \\ 0 & \text{if } z \in D^- \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{if } z \in D^+ \\ -f^-(z) & \text{if } z \in D^-. \end{cases} \tag{3}$$

利用 (2) 和 (3)，我们可以将 (1) 写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f^+(z) & \text{if } z \in D^+ \\ f^-(z) & \text{if } z \in D^-. \end{cases}$$

这是柯西积分公式的一个版本，可推广到 C 上更一般的一类函数。跳跃公式的一种解释是，大多数“良好”的函数——在本例中指 H¨older 连续函数——都可以表示为解析函数之差。

柯西积分公式最初的表述是：如果在一个闭合轮廓上及其内部给定一个解析函数，那么该公式就能重现这个解析函数。它也能求解解析函数的边值问题，但前提是边界值本身来自某个解析函数。解析函数的刚性意味着，即使是大多数光滑函数，也不是任何解析函数的边界值。这说明这个边值问题并不适定。跳跃公式实际上通过将问题替换为一个新问题来解决这一难题：给定一个密度函数，求两个解析函数，使它们的差等于该密度函数。正如我们所证明的，如果密度函数是 H¨older 连续的，那么柯西型积分就能给出两个解析函数，它们以与柯西积分公式相同的方式重现该密度函数；不过现在，这两个函数分别定义在轮廓的两侧，并且由此求解了边值问题。跳跃公式表明，每个 H¨older 连续函数都是两个解析函数之差。边值问题和适定性将在下一章第一节讨论。

第2章

研究问题

在上一章中，我们研究了柯西型积分，找到了其存在的充分条件，随后又利用跳跃分解扩展了柯西积分公式。要学好本章，必须扎实理解第 1 章中贯穿始终的定义、技巧和结果。这是因为本章的讲述围绕着它们如何汇聚起来，共同描绘这一数学领域的更完整图景，以及其中尚未完善之处。

与第 1 章截然不同，我们的讨论将以非常非正式的数学方式展开。这意味着我们会大幅简化各种思想，细节也会很少，有时甚至完全不涉及。当然，要透彻理解这些主题及其发展脉络，需要多年的训练。本章的目标只是让读者对我们最初为何关注这些问题有所体会。

2.1 边值问题

“边值问题”一词用于描述这样一类问题：其解是满足特定微分方程的函数，并且还必须符合域边界上预先给定的值。书籍《边值问题》[4]——第 1 章的主要灵感来源——探讨的正是这类问题的解。第 1 章所涵盖的全部内容，都是为建立理解一般边值问题及其解所需的知识基而作的铺垫。

在继续讨论之前，我们需要先介绍一些术语。如果某个边值问题存在解，该解唯一，并且解随初始值连续变化，那么这个问题就称为适定。如果一个问题不适定，就需要修改条件，或者彻底提出一个新问题，才能使其成为适定问题。适定问题对数学家和科学家都尤为重要。首先，解的唯一性至关重要，因为这表明已有足够的数据，能够准确刻画该问题的

模型。其次，解随数据连续变化可以确保稳定性。现实中，测量总会存在一定误差，因此我们希望测量值的微小变化不会导致解所揭示的结果发生剧烈变化。

请注意，这只是一般边值问题适定性所规定的最低要求。不同学科，甚至具体问题，可能还需要更多、更强的条件。

2.1.1 狄利克雷问题

让我们聚焦于一个具体的边值问题，它同时也是最重要的问题之一。它被称为狄利克雷问题。

设 D 是复平面中的一个域，其边界是一条若尔当曲线（称为约旦域），并设 $u\colon \partial D \to \mathbb{F}$ 是边界 D 上的连续函数，其中符号 $\mathbb{F}$ 用于表示实数域或复数域。

狄利克雷问题表述如下：是否存在唯一确定的函数 $f\colon \overline{D} \to \mathbb{F}$，满足以下性质：

i. f 是连续的。

ii. $\Delta f = 0$ 在 D上。也就是说， f 是 D上的调和函数。

iii. $f = u$ 在 D的边界上。

事实上，这个问题是适定的。对于某些函数 u 和某些特定区域，存在具体且有趣的例子，而 f 的一般公式为

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} u(w)\frac{\partial g}{\partial n_w}(w,z)\,ds_w$$

其中， n_w 是相对于 w的单位外法向量，也就是说，它是 g 沿曲线法向量方向的方向导数； ds_w 表示我们对变量 w 按弧长积分； g 是拉普拉斯算子的格林函数。这个一般解的细节在后续讨论中并不需要，这里仅作参考。

2.1.2 全纯边值问题

接下来，我们来看一个边值问题的具体例子，其解与跳跃问题有关。

再次，设 D 为一个约旦域。全纯边值问题提出如下问题：给定一个函数 $u\colon \partial D \to \mathbb{C}$，该函数是连续的（或者可能具有更“良好”的性质），是否存在一个全纯函数满足以下条件：

i. f 延拓到 D 的边界

ii. f 在 D上全纯

iii. $f = u$ 在 D的边界上。

这个问题是不适定的！它只对某些 u成立，这说明我们还没有提出正确的问题。例如，函数 $u(z) = 1/z$ 尤其在以原点为中心的单位圆盘的边界上连续。然而，由于全纯函数是唯一确定的，因此函数 f必须等于 u，但这样一来，f 在 $\mathbb{D}$上就不是全纯的。

让我们对 u 施加更严格的条件，看看能得出什么结论。假设u 不仅在边界上连续，而且解析。由于解析性是在开集上定义的性质，u 在边界的某个邻域内有解析延拓。为简单起见，假设 D 的边界是解析的，也就是说，它可以由单位圆上的解析函数参数化（参见附录C）。如果这个全纯边值问题有解，那么该解首先必须是 u 到域 D上的解析延拓。由于解析延拓是唯一的，函数 f 必须由以下柯西型积分给出：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \tag{1}$$

为什么？柯西积分公式告诉我们，对于充分接近边界的点，$f = u$，其中 u 现在指的是 u 在该邻域内的解析延拓。按照上一章的做法，我们将 $f^{\pm}$ 记为，其中加号和减号分别表示内部和外部区域。因此，我们在上面定义的函数 f等于 f^+。根据跳跃分解，我们知道$u = f^+ - f^-$，最后，为了满足该问题的第三个要求，我们必须有 $f^+ = f = u$，从而得到 $f^- \equiv 0$。

总而言之，对于数据函数为 u的全纯边值问题，要使其适定，解必须满足 $f^- \equiv 0$这一性质。这不仅是必要条件，也是充分条件。也就是说，当且仅当 $f^- \equiv 0$时，存在解 f。

我们已经建立了证明这一点所需的工具！假设 $f^- \equiv 0$。根据推论 1.2.9和跳跃公式，我们知道

$$u = f^+ - f^-$$

在 D的边界上。注意，根据定理 1.1.10，右侧的两个函数都是解析的，并且可以解析延拓到边界。我们可以利用路径变形原理，将轮廓稍微向外移动，同时保持在 u 的全纯性区域内，从而证明这一点。假设 $f^- \equiv 0$ 迫使

边界上的关系 $u = f^+$。这表明 f^+解决了全纯边值问题（有关全纯密度函数的跳跃问题的详细信息，请参见附录 A）。

回到我们的例子，注意当 $u(z) = 1/z$ 时，经过快速计算可知 $f(2)$ 不为零，因此 $f^- \neq 0$。

请注意，我们为理解柯西积分和跳跃公式所做的一切，让我们清楚地了解了全纯边值问题何时适定。具体表述如下：

给定定义在 D 的边界上的解析函数 u，是否存在一对函数 $f^{\pm}$，它们在 $D^{\pm}$ 上全纯，并且在 D 的边界上满足 $u = f^+ - f^-$？

我们现在知道答案是肯定的。对 u 和 D 的边界施加的解析条件也很灵活。例如，我们可以假设 D 的边界是光滑的，并且 u 是 H¨older 连续的，就像上一章中所做的那样。这样一来，我们最终解决了这个问题的一个更强版本。我们刚才讨论的较弱版本是： D 的边界是解析的，并且 u 在该边界的某个邻域内是解析的。我们现在已经看到，这两个问题都是适定问题。

跳跃问题也与狄利克雷问题有关。Fredholm利用一个相关跳跃问题的解来求解狄利克雷问题，而该跳跃问题涉及实函数。

2.2 拟圆

在上一章中，我们只讨论了光滑曲线，也就是说，具有连续可微参数化且切向量处处非零的轮廓线。这些就是我们在平面中所举的“良好”曲线示例。自然地，我们可能会问：“我们能为多么糟糕的曲线推导出跳跃公式？”这里所说的糟糕，是指在某种明确定义的意义下行为最不良或最不规则的曲线。这就引出了拟圆。关于拟圆理论的技术细节远远超出了本文的范围，但我们会尝试为读者提供一个直观的理解。为了说明这一动机，我们先来思考数学总体上的一个目标。

非常宽泛地说，数学中的每个领域都有一个试图捕捉某种有趣性质或物理现象的基本对象。随后，数学家们共同推演细节，逐步确立一组公理，为这些对象以及整个领域奠定基础。例如，群论旨在理解讨论对称性所需的最小结构。这个对象就是群本身，而群公理与二元运算相结合，所捕捉的是

以抽象方式表达的对称性。类似地，拓扑学旨在理解讨论连续性所需的最小结构。其对象是一族构成空间的“开”集合；如果一个空间到另一个空间的函数将开集的原像映射为开集本身，我们就称该函数是连续的。复分析的核心也没有不同。它旨在理解讨论复可微映射所需的最小结构；我们通常将这类映射交替称为解析函数或全纯函数（不过通常会选择其中一个术语，以强调我们所考虑的函数所具有的某个特定等价性质）。复分析中的基本对象称为黎曼曲面。到目前为止，我们只研究了这类对象的两个非常基本的例子：平面 $\mathbb{C}$，以及加上无穷远点的平面，后者称为黎曼球面。理解黎曼曲面的一种方式，是把它们看作配备了角这一概念的集合。注意，一一对应的全纯函数称为保角映射，它们是局部保角的函数。从某种意义上说，全纯映射之于黎曼曲面，正如同胚之于拓扑空间、群同态之于群，或线性变换之于向量空间。这些全都是保结构映射的例子，对于讨论和比较各自领域中的基本对象实例至关重要。与其他学科相比，复分析存在一处差异，尤其是与这里给出的两个例子相比更是如此。我们预计读者并不熟悉一般的黎曼曲面——即使具备足以阅读上一章的背景知识也是如此——而许多其他领域的学习几乎都是从定义其基本对象开始的。

现在可以回到本节的主题：拟圆。按照上文的定义，保角映射有一种非常令人满意的几何解释。回顾一下，可微函数的雅可比矩阵是在某一点对该函数作最佳线性近似的矩阵，其元素是该函数的偏导数。满射保角映射的雅可比矩阵将圆映射为圆。这意味着保角映射在局部相当于旋转和缩放。利用解析函数的偏导数满足柯西-黎曼方程这一事实，可以证明这一点。结果表明，对雅可比矩阵的这一刻画等价于映射本身保角。若一个映射不是保角映射，但连续、实可微、双射且保向，那么它会将圆映射为椭圆。所谓保向，是指域中任意曲线的参数化方向在映射下保持不变。映射$z \mapsto 1/z$就是一个不保向的例子。在此映射下，单位圆的遍历方向会反转。将单位圆的标准参数化代入该映射，即可轻易看出这一点： $e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$。

这种不太保角的映射会将圆映射为椭圆，这意味着它通常并不保角。拟保角映射大致上是一种函数，其雅可比矩阵会将圆映射为椭圆，并且像中椭圆的长轴与短轴之比在全局上有界。这些映射实际上会通过扭曲角结构来变形黎曼

s曲面，从而创建出一个新的黎曼曲面 e.

拟圆可以定义为单位圆在从平面到自身的拟保角映射下的像。拟保角映射背后的技术定义允许拟圆极其粗糙、参差不齐，如同分形一般。两个实际上属于拟圆的粗糙曲线的著名例子是科赫雪花，以及常数项位于曼德布罗集主分支中的二次朱利亚集。

拟圆不一定是可求长的，这意味着它们在局部可能具有无限长度。由此产生的一个耐人寻味的结论是：它们可能以无限长的周界围成有限面积。要彻底阐述拟圆为何会令复分析，甚至令我们所关注的各个子领域的交叉领域如此感兴趣，或许未免过于雄心勃勃。相反，我们将在此指出其中几个原因，并在稍后详细展开第三个原因。

首先，有一种方法可以将拟圆与黎曼曲面的模空间建立一一对应关系[8]。这里的技术细节并不重要，重要的是，确实存在一个与包含复分析基本对象的空间之间的对应关系。其次，它们会作为物理过程中的理想极限出现，包括随机布朗运动、渗流和共形场论。最后（也是对我们而言最重要的一点），许多涉及柯西型积分的结果成立，当且仅当曲线是拟圆。请注意，与其他领域相比，“当且仅当”陈述在实分析中并不常见。定理的逆命题通常会有病态的反例，尤其是在实分析中（见 [5]）。发现这样的对应关系可能意味着某些重要的事情正在发生。读者可能熟悉的一些著名结果包括海涅–博雷尔定理，该定理刻画了 n维欧几里得空间中的紧集； $\mathbb{R}$中的开集刻画；以及 $\mathbb{R}$中序列收敛性与柯西准则的等价关系。请注意，这些基本结果都与完备性和紧致性相关。这些性质在分析中极其重要，并且与存在性和唯一性密切相关。

遗憾的是，复分析入门课程中的许多基本定理表述都无法讨论拟圆。迄今为止，我们所积分的轮廓始终由有限条首尾相接的分段光滑弧组成。我们所依赖的定理，例如柯西积分公式，在对曲线施加如此宽松的约束时便不再适用。该领域现代研究的目标之一就是解决这个问题。我们将把这部分讨论推迟到本章末尾。这里先简要介绍一种目前用于处理拟圆的变通方法。我们用来证明定理 1.1.7 的一般方法，也可用于研究边界为拟圆的域。在证明中，我们实质上通过同伦对曲线进行逼近，并取极限得到结果。这样做是为了弥补边界上解析性的缺失。对于拟圆，采用的总体思路相同，但目标有所不同：用更规则的曲线逼近边界，再取极限。

2.3 狄利克雷空间

微分方程遍布数学的各个领域。它们往往出现在意想不到的地方，远离我们通常认为它们起源于的物理学。数学中的一个一般问题是求解形如 $Lu = f$ 的方程，其中 L 是一个微分算子（例如拉普拉斯算子 Δ），u 是我们要寻找的函数，而 f 是一个大致表示某种条件的函数。构造方程解的一般过程是证明解的存在性与唯一性，而这通常通过近似来构造解（例如取一列函数的极限）实现。存在性与唯一性都依赖于完备性和紧致性的思想，因此我们会问：在函数空间中，完备性和紧致性是什么样的？尝试回答这一问题，引出了对泛函分析的研究。概括而言，泛函分析旨在将存在性、唯一性和近似问题转化为函数空间的完备性与紧致性问题。它通过运用线性代数的工具研究函数空间来实现这一点。不同的微分方程有各自自然的函数空间，适合用于研究相应方程。二者之间的这种联系，是分析学当前的研究领域之一。

在数学和物理学中，希尔伯特空间是一类非常重要的函数空间。希尔伯特空间是完备的内积空间。空间完备的含义与我们所说的实数或复数完备时相同：空间中的每个柯西序列都收敛于该空间。内积空间是配备了内积的向量空间；内积是一种将“长度”和“正交性”的概念推广到抽象向量空间的方法。我们将讨论的这个特定函数空间是希尔伯特空间的一个例子，称为狄利克雷空间。

函数空间需要一种度量函数的方法，这样我们不仅可以定义它们在空间中的大小，还可以定义它们与空间中其他函数之间的距离。我们将使用一种称为狄利克雷能量的度量。更准确地说，若 D 是黎曼球面上的一个域，且 f 在 D上解析，则我们称下列量为

$$\frac{1}{\pi}\iint_{D-\{\infty\}} |f'|^2\, dA$$

f的狄利克雷能量，其中 dA 是勒贝格面积测度。直观地说，集合上的单射函数的狄利克雷能量度量的是该函数的像的面积，就像本例中的 $\det Df = |f'|^2$ 一样。如果 f不是单射函数，这一直观就会失效，而且通常无法完全恢复。可以说，在这种情况下，该能量度量的是一个多层黎曼曲面的面积，但可能存在无限多层、行为不良的奇点等因素，从而限制了这种直观理解的适用范围。

开集 Ω 在复平面中的狄利克雷空间 $\mathcal{D}(\Omega)$ 是一个函数空间，其元素是在 Ω 上具有有限狄利克雷能量的全纯函数。

虽然对狄利克雷能量的非正式描述已足够应对我们的讨论，但仍需处理一个技术问题。由于常函数的狄利克雷能量始终为 0（为什么？），它只能在该空间上定义一个半范数。我们可以对该空间施加归一化限制，使其只包含在某处取零值的函数，从而将能量转化为范数。从某种意义上说，我们并没有“丢失”任何函数，因为总可以为一个函数加上某个常数，使其在某处取零值。施加这种限制所带来的影响尚未得到充分研究，但到目前为止看来是可行的。用于指称在某一点取零值的函数子空间的记号是 p $\mathcal{D}_p(\Omega)$。

另一种常用的类似函数空间是调和狄利克雷空间$\mathcal{D}_{\text{harm}}(\Omega)$，由 Ω 上具有有限狄利克雷能量的调和函数组成。

在黎曼球面上的约旦域的调和狄利克雷空间中，每个元素都可以延拓到边界上，但有一个可忽略的子集除外；这是一个技术条件，指某个集合具有“零容量”。作为参考，这种集合甚至比零测集还要小。该延拓比简单地“趋近”复杂得多。我们考虑能够避开问题角的楔形趋近方式（回想一下引理 1.4.2 的证明中不同的趋近情形）。现在，如果空间中的两个函数按照上述定义的意义具有相同的边界值，那么事实证明，这两个函数必然相同。

2.4 法贝尔多项式与级数

如前所述，复分析的主要目标是理解复可微映射。这些映射的一个显著事实是，它们可以在每个全纯点处写成以该点为中心的收敛幂级数，这一性质通常称为解析性。反过来同样成立。复幂级数的和在其收敛圆内部的每一点处都是全纯的。从某种意义上说，全纯函数表现得像“无限多项式”，因为只要级数收敛，就可以像处理多项式那样对其级数表示进行运算。这也许能进一步说明我们为何如此重视复可微映射。多项式是性质最良好、最易于处理的函数。

幂级数的一个缺点是它们仅在圆盘上收敛。如果域的形状并非恰好是圆盘，我们就不得不推导新的级数表示，并将它们拼接起来以覆盖该域。即使只有一个奇点，收敛幂级数也会受到限制，只能在以中心到该奇点的距离为半径的圆盘上收敛，即便函数在其他所有地方都是全纯的。这正是法贝尔多项式与级数背后的动机。回想一下，函数空间是由函数作为元素构成的向量空间，并且赋予了一个范数；范数是一种衡量函数之间距离的方法。经过一些更为技术性的处理，我们可以“完备化”该空间，从而能在空间内按照我们熟悉的方式进行分析。请注意，这些空间是无限维的，并且

其行为与有限维对应物有所不同。我们可以将函数的幂级数视为该函数相对于形如 $(z-a)^n$ 的多项式基的表示，其中 a 是 Ω 中的一个点。虽然很有用，但通常情况下，函数的常规幂级数表示无法体现其真正的解析域。法贝尔多项式背后的思想是，它们为狄利克雷空间 $\mathcal{D}_\infty(\Omega)$ 提供了一个基，该基的构造适配 Ω 的“形状”。更具体地说，它们使我们能够将空间中的函数写成在 Ω 上收敛的多项式级数。此外，这种表示可以证明是唯一的；事实上，当且仅当 Ω 的边界是拟圆时，存在性与唯一性才成立。法贝尔多项式可以通过许多不同的方式推导，但 [16] 中所采用的方法实际上源自跳跃公式的一个版本（有关此应用的详情，请参见附录 C）。

2.5 狄利克雷空间中的柯西积分

柯西积分在复分析中的重要性是显而易见的。一个一直隐约存在于背景中、使我们能够证明许多定理的思想，就是积分路径的正则性。为简单起见，我们假设积分路径是光滑的，即连续可微、简单且具有处处非零的切向量。此外，入门教材中介绍的许多标准复分析结果也都假设了这样的正则性。如前所述，拟圆是如此不规则，以至于我们甚至没有一个可用于其上积分的定义。在本节中，我们将概述一些关于柯西积分的成果；这些成果是在尚未给出适当定义的情况下取得的。

令 $\mathcal{H}(\Gamma,\Omega)$ 表示约旦域 Ω 的调和狄利克雷空间中各元素的边界值集合。回顾第一章中用于证明柯西积分公式的同伦论证：我们曾调用黎曼映射定理，将单位圆盘中的同心圆映射到轮廓内部的光滑闭曲线。我们希望将这一过程用于约旦域。对于 $\mathcal{H}(\Gamma,\Omega)$ 中给定的调和函数 h，我们将柯西积分定义为：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|\tau|=r)}\frac{H(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

其中，H 是 $\mathcal{D}_{\text{harm}}(\Omega)$中边界值为 h的唯一元素，z 是不在曲线 Γ上的一点，而 $f:\mathbb{D}\to\Omega$是从圆盘到该域的双全纯映射，由黎曼映射定理保证存在。令Ω^+ 和Ω^- 分别表示若尔当曲线 Γ的有界和无界分支。定义积分算子 $J_\Gamma:\mathcal{D}_{\text{harm}}(\Omega^+)\to\mathcal{D}_\infty(\Omega^+\cup\Omega^-)$如下：

$$h\mapsto \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|\tau|=r)}\frac{h(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

它将调和函数 h 映射为柯西积分。由于黎曼映射是解析的，逼近边界的曲线将是解析曲线，因此积分是良定义的。对于任意约旦域，极限都存在，并且映射本身有界，这意味着存在一个 $c > 0$ ，使得

$$\|J_\Gamma h\|_{\mathcal{D}_\infty(\Omega^+\cup\Omega^-)} \leq c\,\|h\|_{\mathcal{D}_{\mathrm{harm}}(\Omega_+)}$$

对于每个函数 $h \in \mathcal{D}_{\mathrm{harm}}(\Omega)$。在泛函分析理论中，映射的有界性是最重要且最理想的性质之一。

简单补充说明： J_Γ 的陪域可以写成直和 $\mathcal{D}(\Omega^+)\oplus\mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$。这样写是为了方便，因为映射的输出取决于曲线 z 位于哪个补域中。

可以证明， J_Γ 是同构——也就是说，它有界且双射——当且仅当 Γ 是拟圆。进一步说，这实际上等价于：对于每个函数 $h \in D_\infty(\Omega^-)$，都存在唯一且收敛的法贝尔级数表示。

下面简要介绍一种特殊类型的函数。反全纯函数 f 就是全纯函数 f的复共轭。这些函数与全纯函数类似，具有保角性；但与全纯函数相反，它们是反向定向的。事实证明，每个复调和函数都可以在局部写成一个全纯函数与一个反全纯函数的和。就我们的讨论而言，它们很重要，因为调和狄利克雷空间可以写成狄利克雷空间与在 0 处规范化的共轭空间的直和：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{harm}}(\Omega^+) = \mathcal{D}(\Omega^+) \oplus \overline{\mathcal{D}_0(\Omega^+)}.$$

现在假设 $0 \in \Omega^+$ 且 $\infty \in \Omega^-$。定义积分算子 $J_{+-} : \mathcal{D}_0(\Omega^+) \to \mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$，其定义为

$$\bar{h} \mapsto \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi i}\int_{f(|\tau|=r)} \frac{h(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

该算子取 h 的调和共轭，并对其应用柯西积分。在此情况下， $z \in \Omega^-$。有一个定理表明，当且仅当 Γ 是拟圆时，映射 J_{+-} 才是同构。也就是说，给定 φ 作为 $\mathcal{D}_{\mathrm{harm}}(\Omega^+)$ 中某个调和函数的边界值，该映射的满射性意味着， φ 分别是 $\mathcal{D}_\infty(\Omega^+)$ 和 $\mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$ 中解析函数之差，而该映射的单射性则保证了分解的唯一性。这与跳跃问题的相似性并非巧合。

总而言之，只有当曲线是拟圆时，所有这些涉及柯西积分的映射才具备分析学家所认为的“理想”性质。

现在，设 f 是从 Ω^+ 映射到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的黎曼映射。由下式定义的映射 $\overline{C_{f^{-1}}} : \mathcal{D}_0(\mathbb{D}) \to \mathcal{D}_p(\Omega^+)$

$$h \mapsto h(f^{-1})$$

是一个等距映射，也就是说，它保持范数且是同构。作为推论，可以证明复合 $I_f := J_{+-} \circ C_{f^{-1}} : \mathcal{D}_0(\mathbb{D}) \to \mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$ 是一个同构。这个特定的映射很重要，因为它可用于获得该域的法贝尔多项式。首先，单项式基在该映射下变为集合 Ω^+ 的法贝尔多项式，即

$$I_f(\bar{z}^n) = F_n$$

其中，F_n 是 Ω^- 的第 n 个法贝尔多项式。对于在空间 $\mathcal{D}_0(\mathbb{D})$ 中收敛的函数 $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{z}^n$，我们可以使用映射 I_f，得到 Ω^- 上元素 $\mathcal{D}_\infty$ 的法贝尔级数：

$$I_f(\bar{h}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n.$$

该级数的存在性源于 I_f 的满射性，唯一性则源于其单射性。该法贝尔级数的收敛性源于 I_f 的有界性以及 h 的 $^-$ 收敛性。只有当 Γ 是拟圆时，$\mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$ 中的每个函数才都有唯一一个在该空间中收敛的法贝尔级数。结合这些观察以及 I_f 易于求逆这一事实，我们可以用它推导出 $\mathcal{D}_\infty(\Omega^-)$ 中任意元素的法贝尔级数。类似的方法也可用于内部域的狄利克雷空间。

这里的重点并非让读者深入理解本文所展示的结果，而是说明拟圆、跳跃问题、狄利克雷空间和法贝尔级数彼此相关，尤其是说明拟圆是适用于这些对象的自然曲线类。

2.6 问题

在本章中，我们讨论了如何推广柯西积分和跳跃问题，以及为在更广泛的背景下阐明这些对象所取得的一些进展。值得注意的是，该领域数学家所开展的全部工作，都没有使用柯西积分的主值定义。我们提出的问题是：

如何在拟圆上定义主值积分？

截至本文撰写之时，我们尚不清楚这是否可能实现。拟圆的性质非常糟糕，以至于即使在同一条拟圆上取任意两个不同的点，沿着连接这两点的曲线所经过的路径也可能具有无限长度。为了初步理解这为何会成为问题，不妨考虑黎曼积分的定义——这是分析学学生接触到的第一个积分。当我们考察黎曼和中的各项时，会将某一点处的函数值乘以

标签选择区间的长度。更一般的积分定义也无法解决这一问题。因此，一般而言，对拟圆进行积分甚至没有意义。这种情况颇为奇怪，因为拟圆是复分析中的基本对象之一，而积分则是我们进行分析时最基本的方法之一。

解决这一特定问题同样十分重要，因为它可能在现有对象之间建立新的联系，更不用说这一过程中还可能产生新的、富有成果的数学成果。首先，拟圆的跳跃问题在某种意义上是不完整的，除非对其作出适当定义，因此我们目前掌握的只是其中的一部分图景。从历史上看，良好曲线上的跳跃问题曾被用于解决狄利克雷问题。逐步建立对这种关系的理解，也影响了许多其他重要的解析对象，尤其是积分算子。如今，人们正利用狄利克雷问题（以及其他技术）来理解拟圆上的跳跃公式。反向推进无疑会让我们更好地理解其中涉及的工具，尽管其影响的全部范围仍难以预测。

与复解析对象的情况一样，如果我们能够解决一个问题的复数版本，就有助于我们更清楚地理解该问题的实数版本。这里也是如此。利用跳跃问题的实数版本来解决狄利克雷（以及诺伊曼）边值问题需要分两步进行。首先，要在域的边界上求解一个涉及主值积分的积分方程。该方程的解是一个函数。借助这个函数，可以使用其他积分来得到所求的解。如果没有主值积分，就不可能完成第一步，因此在边界为拟圆的情况下无法继续进行。

附录 A

解析函数的跳跃公式

使用光滑曲线和 H¨older 连续函数来推导第 1.4 节中的跳跃公式并非偶然。这些特定的正则性条件对于使该论证成立至关重要。很自然地，我们会想知道如何削弱这些条件，以便为更一般的对象获得跳跃公式。分析学家一直都在做这类事情：弄清楚一个定理成立所需的本质性质，并在移除过多条件后寻找反例。随着时间的推移，我们能够共同逐渐确定什么是“最佳”且“正确”的定理。

要获得比我们最终得到的结果更实质性的结论，需要运用更多高级技巧，因此我们不打算在这里完全这样做。相反，我们将研究，如果仅仅改变假设，论证会发生怎样的变化。更具体地说，我们要求密度函数在整个轮廓上都是解析的。解析性的条件非常强，因此我们基本上可以舍弃关于轮廓的所有条件，只保留最合理的那些条件。虽然这一结果远没有第 1 章中推导出的结果有趣，但证明很简单，而且具有这些更强条件的跳跃公式结果有助于激发我们对第1章中更强定理的研究。

定理 A.0.1（闭可求长曲线的跳跃公式）。设 C 是 τ 平面中的可求长简单闭曲线，并设 $\varphi\colon\ C \to \mathbb{C}$ 是在 C 上解析的函数。若 $\Phi^{\pm}\colon\ D^{\pm} \to \mathbb{C}$ 是在 C 上、密度为 φ 的柯西型积分，则 Φ^{+} 和 Φ^{-} 都可以解析延拓到 C，并且恒等式

$$\varphi(\tau) = \Phi^{+}(\tau) - \Phi^{-}(\tau)$$

对每个 τ 在 C上都成立。

证明。由于 φ 在 C 上解析，特别地，它在包含 C 的某个开集上解析，而该开集通常构成一个双连通区域。在此区域内，我们定义

两条分别位于 D^+ 和 D^- 内的新的可求长简单闭曲线 C^+ 和 C^-。设 τ_0 是 C 上的一点。对于 $z \in D^+$，根据路径变形原理，我们有

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

右侧在 C^- 的内部解析，并且限制在 D^+ 上时等于 Φ^+。因此，Φ^+ 在 $D^+ \cup C$ 上解析。由于 τ_0 位于此区域内，因此可以推出，当沿 D^+ 内部趋近时，Φ^+ 在 τ_0 处连续。同样地，我们可以利用 C^+ 证明 Φ^- 在 $D^- \cup C$ 上解析，因此它在 τ_0 处也连续，这次是从 D^- 内部趋近。

接下来，用一条不经过 τ_0 的直线段 L 连接 C^+ 和 C^-。我们将从 L 开始积分，沿 C^+ 顺时针方向，沿 L 向上至 C^-，再沿 C^- 逆时针方向，最后沿 L 向下返回。沿 L 两个方向积分对积分没有贡献，并构成一条完全包围 τ_0 的积分路径。令 $\gamma := -C^+ + L + C^- - L$，并应用柯西积分公式，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z \to \tau_0 \\ z \in D^+}} \Phi^+(z) - \lim_{\substack{z \to \tau_0 \\ z \in D^-}} \Phi^-(z) &= \Phi^+(\tau_0) - \Phi^-(\tau_0) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \tau_0}\, d\tau \\
&= \varphi(\tau_0).
\end{aligned}$$

□

注。读者不妨查阅 Apostol 的著作 *[2]*，以确认本证明中使用的基本围道积分性质，在处理可求长曲线（而非光滑曲线）时仍然成立。

附录 B

S^1 中的约当曲线与开集

这里我们证明：对于光滑曲线上的每一点，都可以找到一个足够小的邻域，使其只包含该曲线的一个连通分支，或称一段“弧”。我们在第 1.3 节奇异值积分定义之后的注中提到过这一性质；这一性质是积分非常理想的伴随性质。事实上，这一性质对平面中一类更广泛的曲线也成立，这类曲线称为 约当曲线。这是一个通过推广使论证更加简洁、易于理解的例子。我们只需要恰当的定义。

本附录需要用到点集拓扑学的一些基本知识，而这些并非阅读正文的先决条件。如需参考资料，请参见 [6], [9], 和 [11]。理解主值积分和跳跃问题并非一定要绕这个弯，读者可酌情略过。不过，为了内容的完备性，我们仍将其收入本附录；其中涉及的一些概念，对继续学习这一领域的读者十分重要。

我们先回顾实数轴上开集的著名表示定理。

定理 B.0.1（ $\mathbb{R}$ 中开集的表示）。 $\mathbb{R}$ 中每个非空开集都可以唯一地写成至多可数个互不相交的连通分支之并。

证明见 Apostol《数学分析》[2]。事实证明，单位圆 S^1 中的开集也有同类型的表示。以下假设， $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的子集都自动赋予子空间拓扑。容易看出， S^1 的基本开集具有如下形式： $\{e^{it} : \ a < t < b\}$，其中 a 和 b 是实数。我们将这种形式的集合称为 S^1 的开区间，这与我们对 $\mathbb{R}$ 中基本开集的称呼相同。

定理 B.0.2（ S^1 中开集的表示）。 S^1 中的每个开集都可以唯一地表示为可数个两两不相交的连通分支的并，这些分支位于 S^1 中。

证明。设 U 是 S^1 中的一个开子集。若 U 是整个空间，则无需证明任何内容，因此以下假设 $U \neq S^1$。定义函数 $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ 如下：

$$f(t) = e^{it}$$

并选取一点 t_0 使得 $f(t_0) = e^{it_0}$ 不属于 U。显然，限制 $f|_{(t_0, t_0+2\pi)}$ 是一个双射。由 f 的连续性可知，集合 $f^{-1}(U) \cap (t_0,\ t_0 + 2\pi)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集，因此根据定理B.0.1，我们可以唯一地写成

$$f^{-1}(U) \cap (t_0, t_0 + 2\pi) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

其中，I_n 两两不交，且是 $\mathbb{R}$ 中的连通分支。此外，每个 I_n 都是 f 下 S^1 中某个开区间的原像，而 U 中的每个开区间在 f^{-1} 下都有一个位于（t_0，$t_0 + 2\pi$）中的不同原像。我们所做的就是在 $\mathbb{R}$ 与 S^1 中的连通分支之间建立了一一对应关系，结论由此得证。 □

作为比较，我们回顾一下简单闭曲线的通常定义（例如见[3], ）。

定义 B.0.3（简单闭曲线）。简单闭曲线 C 是连续函数 $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ 的像，该函数在（a，b）上是单射，并且 $\alpha(a) = \alpha(b)$。

接下来，我们给出 $\mathbb{C}$ 中简单闭曲线的拓扑定义（类似于 [11] 中的定义）。

定义 B.0.4（约当曲线）。约当曲线是连续映射 α 的像：$S^1 \to \mathbb{C}$，且该映射到其像上是一个同胚。

光滑曲线性质良好且相对容易处理，而约当曲线则是平面曲线中最糟糕的一类，甚至比拟圆还要棘手（见第 2.2 节）。例如，Pommerenke 在其关于共形映射的著作中 [12], 探讨了拟圆的一些特征性性质，其中之一是拟圆不能有尖点。约当曲线当然可以有尖点，这使得对它们的分析复杂得多。

尽管如此，我们要证明的结果本质上是拓扑性的，因此可以预期，使用约当曲线来论证会更加自然。严格来说，我们确实需要证明，约当曲线的这一拓扑定义与简单闭曲线通常采用的解析定义相吻合。下面的命题对此作了概述。

命题 B.0.5。若尔当曲线和简单闭曲线的定义是等价的。

证明。L 令 $f:\ [0,1]\to S^1$ 表示单位圆的以下参数化:

$$f(t)=e^{i2\pi t}.$$

首先，假设 J 是一条若尔当曲线，且 $\alpha:\ S^1\to J$ 是一个同胚。那么 $\alpha\circ f:\ [0,1]\to J$ 是 J 的连续参数化，除端点外是单射，因此 J 是一条简单闭曲线。

现在假设 C 是一条简单闭曲线，且 $\beta:\ [0,1]\to C$ 是 C 的参数化。对于 $[0,1]$, 的任意闭子集，其在 β 下的像都是紧致的，因此也是闭集，因为 C 是豪斯多夫空间（见 [6] 第 161 页），所以 β 是闭映射。定义 $\sim_\beta$ 上的等价关系 $[0,1]$: 当且仅当 $\beta(a)=\beta(b)$ 时， $a\sim_\beta b$ 。由此可得， $[0,1]/\sim_\beta$ 同胚于 C（见 [6] 第 77 页）。我们可以对映射 f 使用相同的论证，证明 $[0,1]/\sim_f$ 同胚于 S^1。因此，C 是一条若尔当曲线。

□

推论 B.0.6. 每条闭光滑曲线都是一条若尔当曲线。

对于光滑曲线是开曲线的情形，我们只需将另一条简单曲线连接到它的端点，并使其不在其他任何位置与原曲线相交，即可构造出一条若尔当曲线。现在我们已经具备证明本节主要结果的条件。

定理 B.0.7. 设 Γ 是复平面中的一条若尔当曲线。对于 Γ上的每个 τ_0 ，都存在一个包含 τ 的开邻域，其中恰好包含 Γ的一个连通分支。

证明。 设 $f:\ S^1\to\Gamma$ 是一个同胚。选取 $r>0$ 充分小，使得开球 $B(\tau_0,\ r$至少排除 Γ 中的一个点。考虑开集 $f^{-1}(B(\tau_0,\ r)\cap\Gamma)$ 中的 S^1。根据定理 B.0.2，我们可以写成

$$f^{-1}(B(\tau,r)\cap\Gamma)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$$

其中 I_n 是 S^1 的两两不相交的连通分支。令 $t_0=f^{-1}(\tau_0)$。如有必要，重新标记这些区间，使得 I_1 是包含 t_0 的唯一连通分支。由于 f 是一个同胚，因此对于每个 $n\in\mathbb{N},\ f(I_n)$ 都是 Γ 的一个开连通分支，并且各个 $f(I_n)$ 两两不相交。特别地，存在一个开集 $V\subset\mathbb{C}$，使得 $f(I_1)=\Gamma\cap V$；又由于当 $i\neq j$ 时， $f(I_i)\cap f(I_j)=\varnothing$，因此对于每个 $n>1$，都有 $f(I_n)\cap V=\varnothing$ 。选取 $0<\delta<r$ 足够小，使得 $B(\tau_0,\delta)\subset V$，则 $\Gamma\cap B(\tau_0,\delta)$ 恰好包含一个连通分支，从而证明完毕。

□

附录 C

法贝尔级数的存在性

在第2.4节中，我们介绍了一种适用于特定域的幂级数。其思路是找到一组能体现域“形状”的多项式，并以某种方式构成解析函数级数表示的“基”，使其在整个域上都收敛（而不只是收敛于开圆盘上）。接下来，我们将借鉴 H. Tietz 的一篇论文 [16], ，尝试应用跳跃公式，证明对于一类特殊的域，这样的多项式确实存在，并由此得到该域内解析函数的一种级数表示（称为法贝尔级数）。

这里给出的定理对于第2章讨论的研究领域十分重要，同时也是一个很好的例子，展示了更复杂理论如何应用于实际；尽管这些理论并不简单，却是读者进一步研究该领域不可或缺的基础。与正文不同，本附录不会展开这套理论，而是为读者提供相关参考资料，以弥补其中的知识缺口。至少，读者可以通过熟悉 Lang的书 [7], 中关于形式幂级数的第二章内容而有所收获。

首先，我们来介绍一些基本术语。

定义 C.0.1（保角映射）。设 D 是复平面中的一个域。若函数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ 既解析又是单射，则称其为保角映射。

定义 C.0.2（无穷远点的极点）。对于解析函数 f，若 f 在无穷远点有 n 阶极点，则称其在无穷远点有 n 阶极点，当且仅当 $f(\frac{1}{z})$ 在 0 处有 n 阶极点。

以下命题刻画了在无穷远点有极点的整函数。证明很简短，留给读者自行验证。

命题 C.0.3。整函数 $p(z)$ 在无穷远点有 n 阶极点，当且仅当 $p(z)$ 是一个次数为 n 的多项式。

我们只研究边界特别规整的区域。这类新轮廓正是为此而设。

定义 C.0.4（解析 Jordan 曲线）。若存在 $r > 1$ 以及定义在环域 $\{z$ 上的保角映射 α，使得 $\frac{1}{r} < |z| < r\}$满足 $\alpha|_{|z|=1} = \gamma$，则称简单闭曲线 γ 为解析曲线。

对于域 D，若其边界是一条解析 Jordan 曲线，我们称 D 为解析 Jordan 域。

证明中使用的主要工具是黎曼映射定理。该定理是几何函数论的基石。我们仅在此陈述该定理以供参考，因为证明并不简单，且可在许多地方找到（例如参见[7] ）。

定理 C.0.5（黎曼映射定理）。如果 U 是复平面中的一个单连通子集，且不等于整个平面，那么存在一个保角映射$f : U \to \mathbb{D}$。

还可以证明，黎曼映射定理中的函数 f 具有共形逆映射。现在我们可以陈述并证明所需的法贝尔级数定理。

定理 C.0.6（解析 Jordan 域上法贝尔级数的存在性）。设 C 是一条解析 Jordan 曲线。对于在 $D^+ \cup C$上解析的任意函数 f，它都可以在 D^+ 中表示为以下形式的收敛级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(z)$$

其中， Ψ_n 是一个 n 次多项式，称为 D^+ 的第 n 个法贝尔多项式。

证明。由黎曼映射定理，存在一个共形映射 $w = g(z)$，它将 D^- 映到单位圆 S^1 的外部，我们将其记为 $\mathbb{D}^{-1}$。这是因为，根据约定， $z \mapsto 1/z$ 本身是一个将 $\mathbb{D}$ 映到 $\mathbb{D}^{-1}$的共形映射，即 $0 \mapsto \infty$。现在，我们利用一个推广施瓦茨反射原理的结果：当域及其像的边界均为解析 Jordan 曲线时，该结果允许将共形映射解析延拓到其边界的一个邻域内。参见书籍 [15] 中的命题 1.3。因此， g 可以解析延拓到 C 的一个邻域内。由此可知， f^{-1} 在 $\overline{\mathbb{D}}^{-1}$ 的一个邻域内解析，因此 $f \circ g^{-1}$ 在 $\mathbb{D}^{-1}$ 的某个邻域内解析。于是，我们知道 $f \circ g^{-1}$ 可以在 S^1 上表示为洛朗展开:

$$f \circ g^{-1}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n.$$

注意，洛朗系数 a_i 由 $f \circ g^{-1}$唯一确定。将w 替换为 g，我们得到 f 在 C上的以下表达式:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n [g(z)]^n.$$

根据柯西积分公式，对于 $z \in D^+$，我们有 $f(z) = \Phi^+(z)$。逐项积分后，我们可以将上述 f 级数改写为

$$f(z) = \Phi^+(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n L^+(g(z)^n) \tag{1}$$

现收敛于 D^+，并采用记号

$$L^{\pm}(\varphi(z)) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

表示在 $D^{\pm}$ （分别地）上关于特定密度函数 φ 的柯西型积分。接下来，我们计算 g 在 D^-中的洛朗级数。由于 g 在∞附近是单射的，我们必须有 $g(\infty) = \infty$，因此函数 $H(z) := [g(1/z)]^{-1}$ 在 0 附近是单射的，这意味着 $H'(0) \neq 0$。此外，注意到 $H(0) = 0$。总而言之，这就是说H 在 0 处具有如下形式的幂级数展开

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

w这里 b_1 非零。现在我们将 g 作为形式幂级数进行处理，使用 H:

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{H\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots} \\ &= \frac{z}{b_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b_2}{b_1 z} + \frac{b_3}{b_2 z} + \cdots} \\ &= \frac{z}{b_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{b_2}{b_1 z} + \frac{b_3}{b_2 z} + \cdots \right) + \left(\frac{b_2}{b_1 z} + \frac{b_3}{b_2 z} + \cdots \right)^2 - \cdots \right]. \end{aligned}$$

将此表达式展开，我们得到 g的如下表示:

$$g(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots$$

对于某些复系数 c_i, $i \leq 1$，且其中 c_1 不为零。之所以可行，是因为g 在无穷远邻域内解析，因此考虑 $|z|$ “足够大”时，根据幂级数的唯一性，我们可以从形式幂级数切换到通常解析意义下的收敛幂级数。

现在我们计算 $g(z)^n$ 关于 $n > 0$的幂级数展开。令 $\omega := 1/z$。利用形式幂级数运算，$\operatorname{ord}\,[g(1/\omega)^n] = n(\operatorname{ord}\,[g(1/\omega)]) = -n$，这意味着 $g(1/\omega)^n$ 具有如下形式

$$g\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{d_n}{\omega^n} + \cdots + \frac{d_1}{\omega} + d_0 + d_{-1}\omega + \cdots$$

其中 d_i、 $i \leq n$为某些复系数，且 d_n 非零。通过变量替换，我们可以写成

$$g(z)^n = d_n z^n + \cdots + d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \cdots .$$

接下来，对于每个整数 n，跳跃公式指出恒等式

$$g^n = L^+(g^n) - L^-(g^n)$$

在 C 上成立。由于等式两边在 C 的某个开邻域内都是解析的，因此该关系在 C 的某个邻域内也成立。又因为 g^n 和 $L^-(g^n)$ 在 D^- 上解析，且我们已知它们在一个开集上相等，所以可以将 $L^+(g^n)$ 解析延拓到整个平面，从而

$$L^+(g^n) = g^n + L^-(g^n) \tag{2}$$

回忆定理 1.1.12， $L^-(g^n)$ 在无穷远点处趋于零。对于 $n < 0$， $g(\infty)^n = 0$，由 (2) 可知 $L^+(g^n)$ 在无穷远点处趋于零，特别是无穷远点处没有极点。因此它必为常数，这就迫使 $L^+(g^n) \equiv 0$。

当 $n \geq 0$，由命题 C.0.3， $L^+(g^n)$ 必为次数为 n的多项式（即所求的与域 D^+ 相对应的法贝尔多项式），记为 Ψ_n。因此可将 (1) 写作

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(z)$$

对于每个 $z \in D^+$。 □

注。证明对于 $n \geq 0$， $L^+(g^n)$ 是一个多项式，并且对于 $n < 0$ 消失的一种更加繁琐但仍然可行的方法，是继续采用形式幂级数运算的方法。

首先，我们证明对于 $n \geq 0$， $L^+(g(z)^n)$ 是一个 n 次多项式。由于被积函数具有解析性，我们可以将轮廓 C 向外移动到满足 $|\zeta| > |z|$ 的圆 C'，对于每个 $\zeta \in C'$ 均如此。展开核可得

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots$$

对于 $|\zeta| > |z|$。现在乘以密度 g^n:

$$\frac{g(\zeta)^n}{\zeta - z} = \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots\right) \cdot \left(d_n \zeta^n + \cdots + d_1 \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \cdots\right).$$

*Dist*在左侧进行分配并逐项积分，可得 t

$$L^+(g(z)^n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{g(\zeta)^n}{\zeta - z}\, d\tau = d_n z^n + \cdots + d_1 z + d_0$$

利用对每个整数 n成立这一事实:

$$\int_{C'} \tau^n\, d\tau = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = -1 \\ 0 & \text{if } n \neq -1. \end{cases}$$

其次，我们证明对于每个 $n < 0$， $L^+(g(z)^n) \equiv 0$ 。固定 $n > 0$，并记

$$\begin{aligned} [g(z)^n]^{-1} = \frac{1}{g(z)^n} &= \frac{1}{d_n z^n + \cdots + d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \cdots} \\ &= \frac{1}{d_n z^n} \cdot \frac{1}{1 + \cdots + \frac{d_0}{d_n z^n} + \frac{d_{-1}}{d_n z^{n+1}} + \cdots} \\ &= \frac{1}{d_n z^n} \cdot \left[1 - (\textit{powers of } 1/z) + (\textit{powers of } 1/z)^2 - \cdots\right] \\ &= \frac{\omega_n}{z^n} + \frac{\omega_{n+1}}{z^{n+1}} + \cdots \end{aligned}$$

对于某些系数 ω_i、 $i \geq n$和 $\omega_n \neq 0$。因此，当 $n < 0$时，按照上文对核所作的类似计算可得

$$L^+(g(z)^n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{g(\zeta)^n}{\zeta - z}\, d\tau = 0.$$

参考文献

[1] Robert A. Adams 和 Christopher Essex。《微积分：完整课程》第九版。培生加拿大，2017年。[2] Tom M. Apostol。《数学分析：高等微积分的现代方法》第二版。1974年。[3] James W. Brown 和 Ruel V Churchill。《复变函数及其应用》第八版。麦格劳-希尔图书公司，2009年。[4] F. D. Gakhov。《边值问题》。爱思唯尔，2014年。[5] Bernard R. Gelbaum 和 John M.H. Olmsted。《分析学中的反例》。多佛出版社，2003年。[6] Sasho Kalajdzievski。《拓扑学与同伦的图解导论》。CRC出版社，2015年。[7] Serge Lang。《复分析》。第103卷。施普林格；第四版，2013年。[8] Olli Lehto。《单叶函数与 Teichm ¨uller 空间》。第109卷。施普林格科技与商业媒体，2012年。[9] James R. Munkres。《拓扑学》。培生；第二版，2017年。[10] Nikola Muskhelishvili。《奇异积分方程：函数论的边值问题及其在数理物理中的应用》。Courier Corporation，2008年。[11] M. H. A. Newman。《平面点集拓扑学基础》。剑桥，1939年。[12] Christian Pommerenke。《共形映射的边界行为》。第299卷。施普林格

r

科学与商业媒体，2013年。[13] Karen Saxe。《泛函分析入门》。施普林格，2002年。[14] Eric Schippers。《共形映射讲义》。[15] Harold S Shapiro。《施瓦茨函数及其向更高维的推广》。第4卷。约翰·威立父子公司，1992年。[16] H. Tietz。“法贝尔级数与洛朗分解”。载于：《密歇根数学杂志》4.2（1957年），第175–179页。