arXiv:2301.12310v3 [math-ph] 2 Dec 2023

具有点化表示范畴的二维共形场论的 Wightman 场

Maria Stella Adamo*[1]、Luca Giorgetti †[2] 和 Yoh Tanimoto‡[2]

[1]数学科学系，东京大学，3-8-1 驹场，东京，153-8914，日本[2]数学系，罗马第二大学，Tor Vergata，Via della Ricerca Scientifica 1，I-00133 罗马，意大利

谨以此文献给 Roberto Longo，祝贺他七十岁生日

摘要

二维完整共形场论已在各种数学框架下得到研究，从代数、算子代数到范畴论框架均有涉及。在本文中，我们关注手征分量具有点化辫张量表示子范畴的理论，即具有自同构，且这些自同构的等价类必然构成一个阿贝尔群。对于此类理论，我们明确给出希尔伯特空间结构，并将主场构造为二维完整理论的 Wightman 场。给定一组具有自同构范畴且总编织平凡的有限手征分量，我们还将它们张量积的局部扩张构造为一个手征分量。我们阐明了其与 Longo–Rehren构造之间的关系，并通过包括 U(1)流在内的具体例子说明这些结果。

1 引言

二维共形场论（CFTs）已得到广泛研究 [DMS97]，并因其代数、解析和几何结构而引起数学家的兴趣。特别是，二维闵可夫斯基时空中的共形对称性由光线的微分同胚群描述，因此它是无限维的。这使得人们可以先研究仅依赖于其中一个光线坐标的理论（手征分量），然后再研究它们的二维（完整）扩张。

从算子代数的角度（Haag–Kastler公理）来看，一般的量子场论可以表述为一个与开放时空区域相关联的冯·诺伊曼代数网 [Haa96]。完整理论与手征分量之间的关系

*adamoms@ms.u-tokyo.ac.jp
†giorgett@mat.uniroma2.it
‡hoyt@mat.uniroma2.it

已在例如 [Reh00], 中得到，并由此形成了针对某些类别的二维共形场论的分类方案，参见例如 [KL04b], [BKL15]。在本课程中，重要的一点是：从两个单一手征理论的副本和一族带电扇区出发，可以构造二维理论，将其作为这样一种二维理论的扩张：该理论仅通过对手征分量取张量积而得到；随后再通过引入非手征（体）场对其进行扩张。在这类扩张中，研究最多的是“对角”扩张：它们让手征理论同时作用于其真空表示的多个副本的直和上，然后引入混合不同分量的“带电”场。

由于在算子代数框架中， [LR95], 有限指标（即“相对较小”）扩张可以等价地用待扩张网的酉辫张量表示范畴中的 Q-系统（即 C^*-Frobenius 代数对象）来描述。扩张的局域性也可以通过对相应 Q-系统施加交换性条件来刻画。在算子代数语境中，与有限指标“对角”扩张相关联的 Q-系统称为 Longo–Rehren Q-系统。

值得一提的是，Q-系统方法既适用于手征理论，也适用于二维理论（事实上甚至适用于四维理论）；类似的思想（张量范畴中的交换 Frobenius 代数对象）也独立地出现在其他共形场论的代数方法中，例如顶点算子代数 [HKL15], [KO02], ，这些方法适用于一维和二维，参见例如 [FRS02], [HK07], [Kon07], [RFFS07]。在酉元顶点算子代数 [CKLW18], [DL14], [Gui22] 和酉张量范畴语境 [GLR85], [DR89b], [LR97], 中，最近已证明这些概念（Frobenius 代数、 C^*-Frobenius 代数、用于描述扩张的 Q-系统）彼此等价 [CGGH23]。

手征与完整二维共形场论之间的关系（不局限于单一闵可夫斯基时空）也可以在更一般的局部协变代数量子场论的范畴/拟运算框架中加以表述和研究 [BGS22] [BFV03], [BSW19], [BSW21]。

不过需要指出的是，大多数纯代数框架（例如参见 [HK07],）都是专门为共形场论设计的，因而无法直接应用于有质量理论。另一方面，自然可以预期，二维完整共形场论能够在量子场论的一个更传统框架——Wightman 公理 [SW00]——中得到描述。Wightman 场是希尔伯特空间上的算子值分布，因此，若能对这类场及其希尔伯特空间作出合理描述，将是十分理想的。

拥有明确的 Wightman 场不仅本身具有意义，还可以成为构造非共形场论的起点，例如通过利用这些场对共形场论的动力学进行微扰。在 [Zam89], 中提出了这样一种思想：将某些有质量可积场与共形场论中的带电场联系起来。在同一希尔伯特空间上对自由场的动力学进行微扰，已经在德西特空间中实现 [BJM23]。因此，发展二维 Wightman 场理论将为严格研究共形场论与有质量模型之间的关系奠定基础 [JT23]。

本文研究手征分量的不可约表示（超选择扇区）中包含一组（有限或无限）自同构（用张量范畴的语言来说，即可逆对象）的完整二维共形场论。我们将明确地利用手征分量及其带电扇区的希尔伯特空间，定义并构造二维共形Haag–Kastler网和二维共形 Wightman 场。我们将带电主场引入为不同

带电扇区　手征分量之间的算子，并将它们结合起来以获得局部体场　　s.

更具体地说，设 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ 是定义在 S^1 上的手征共形网，它们的带电表示中包含一个由同一个阿贝尔群 G 参数化的自同构族（包括定义性的真空表示），其含义采用 Doplicher–Haag–Roberts [DHR69a], [DHR69b], [DHR71] [DHR74], 的框架，但维数是一维和二维，而不是四维。这些自同构分别记为 L(g) 和 R(g)，$g \in G$，定义在相同的希尔伯特空间上；不过，为了区分表示，我们将它们记作 $\mathcal{H}^{\mathrm{L}(g)}{}_{\mathrm{L}}\,\mathcal{H}^{\mathrm{R}(g)}{}_{\mathrm{R}}$。在希尔伯特空间 $\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}^{\mathrm{L}(g)}{}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{H}^{\mathrm{R}(g)}{}_{\mathrm{R}}$ 上，手征可观测量 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ 按对角方式作用。我们将在直和中加入能够移动扇区的带电场，并要求其编织满足某些条件（许多情形都满足该条件，参见例如第6节末尾），从而得到完整的二维共形网和共形 Wightman 场。此外，借助类似的技术，我们通过取一族共形网的张量积并对其进行扩张，构造出一些（推测为新的）定义在 S^1 上的局域共形网，使某个平凡总编织条件得到满足。这推广了单个手征 U(1)电流网的众所周知的扩张 [BMT88], ，也可将其视为 [CKM22] 针对顶点算子代数提出的“粘合”构造的一种变体。

我们明确描述了 U(1) 电流代数的场。单个手征分量的带电主场表示为带电扇区之间的形式级数 [TZ12], [TL97]。我们预期，我们的构造也适用于 1 级的环群网（对应单纽、单、单连通的紧群） [Was98], [TL97]。通过以更复杂的方式组合左右手征分量，该构造也应能推广到其他完全有理网（在带电场可用时），包括存在统计维数大于 1 的不可约表示的情形（即非尖点张量范畴的情形）。

本文安排如下。第2节回顾二维共形场论可延拓到爱因斯坦圆柱面这一事实，随后阐述手征分量和完整二维共形场论的算子代数表述。我们还汇总了手征分量表示及其带电场的一些事实，讨论自同构情形。第3节从一族满足特定编织条件、并配有一组自同构的手征分量出发，构造其张量积在 S^1 上的一个扩张。第4节取一对左右手征分量，令其配有一组自同构，并假设它们的编织在某种意义下相互抵消；由此构造一个完整的二维共形场论，使其扩张手征分量的张量积。第5节研究带电主场以形式级数给出的情形。在关于编织的类似假设以及能量界假设下，我们展示了这些 Wightman 场；它们在网的层面上实现前几节所构造的扩张。第6节考察 U(1) 流的具体例子。我们展示其超选择荷结构、相应的编织和带电场，并说明它们符合前几节的一般构造。第7节总结并展望。

记号

为在全文中保持符号统一，我们给手征（一维）对象加上标记，而对二维对象则使用不带标记的符号。

- $\mathcal{A}_\kappa, \phi_{\kappa,\ j}, \psi_\kappa, \mathcal{A}_{\mathrm{L}}\ \mathcal{A}_{\mathrm{R}}\ \psi_{\mathrm{L}}\ \psi_{\mathrm{R}}$：手征网/手征场/手征带电场。
- $\mathcal{A}_K$、ψ_K：手征扩张/手征带电局域场。
- $\mathcal{A}$：二维网。$\sim\ \sim$
- $\mathcal{A}$、ψ：二维网/二维带电局域场。

2 预备知识

2.1 爱因斯坦圆柱

正如 [LM75], 所指出的，研究爱因斯坦圆柱[1]上的四维共形协变 Wightman 场是很自然的。此外，共形群以自然的方式作用在爱因斯坦圆柱上，而场相对于其作用是协变的。在二维情形中，由于二维爱因斯坦圆柱不是单连通的，因此可以通过再多一步来执行类似的过程。为了陈述这些结果，我们先讨论共形几何。我们遵循 [KL04b], ，从 $\mathbb{R}^{1+1}$ 中的光线 $\mathbb{R}$ 开始讨论。

莫比乌斯群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \cong$ M¨ob 作用于 $\mathbb{R}$ 的一点紧化 S^1 上，其中 $\mathbb{R}$ 通过立体投影与 $S^1 \setminus \{-1\}$ 相识别。因此，通过提升这一作用，其万有覆盖群 M¨ob 作用于 $\mathbb{R}$，即 S^1 的万有覆盖。原光线 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 中的区间 $(-\pi,\pi)$ 相识别，后者是 S^1 的万有覆盖。对于满足 $\overline{I} \subset (-\pi,\pi)$ 的区间 I，存在 M¨ob 中单位元的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得若 $\gamma \in \mathcal{U}$，则 $\gamma \cdot I \subset (-\pi,\pi)$。从这个意义上说，群 M¨ob 在光线上局部作用。

二维闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{1+1}$ 的度量为 $(a,b) = a_0b_0 - a_1b_1$，其中 $a,b \in \mathbb{R}^{1+1}$。采用光锥坐标 $(a_-,a_+) = \left(\frac{a_0-a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_0+a_1}{\sqrt{2}}\right)$ 后，闵可夫斯基时空是两条光线 $\mathbb{R}^{1+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的乘积（这里指光锥坐标，而非 (a_0,a_1) 坐标），其度量可写为 $(a,b) = a_-b_+ + a_+b_-$。根据定义，$\mathbb{R}^{1+1}$ 的共形变换是保持度量至多相差一个标量因子的 $\mathbb{R}^{1+1}$ 变换。从上式显然可知，任意一对光线的保向微分同胚的乘积都是共形变换。

菱形区域 $D_0 = \{(a_-,a_+):\ -\pi < a_\pm < \pi\}$ 可通过共形变换 $(a_-,a_+) \mapsto (\tan(\frac{1}{2}a_-), \tan(\frac{1}{2}a_+))$映射到闵可夫斯基时空$\mathbb{R}^{1+1}$。通过这一变换，$\mathbb{R}^{1+1}$可与 D_0等同。在 $D_0 = (-\pi, \pi) \times (-\pi,\pi)$上，群 M¨ob ×M¨ob 按照上述意义局部作用。

令 R_t 为 M¨ob 中旋转 t的提升。在二维共形场论中，关联函数在 M¨ob ×M¨ob 的局部作用下保持不变，而且，类空间的 2π-旋转 $\mathfrak{R} := \{R_{2n\pi} \times R_{-2n\pi} :\ n \in \mathbb{Z}\}$ 通常是平凡的。如果这

[1]更准确地说， [LM75] 证明了：假设存在 Wightman 场，且其欧几里得 n-点函数在欧几里得共形群作用下保持不变，那么庞加莱群的表示可以扩展到 SO(4, 2)。关于最新综述，请参见 [KQR21，第 8 节。3]

一点成立，则场论可以扩展到爱因斯坦圆柱面[2] $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{1+1}/\mathfrak{R}$。在最有利的情形下，该理论可以扩展到 $\mathcal{E}$，并且共形群 $\mathscr{C} = \mathrm{Diff}_+(S^1) \times \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathfrak{R}$ 也具有局部作用。

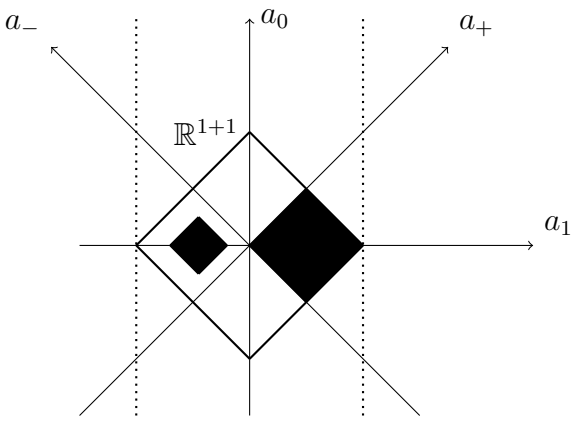

图 1：闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1+1}$，以菱形区域表示。当类空旋转$R_{2\pi} \times R_{-2\pi}$为平凡旋转时，虚线两侧的点会重合，且该区域是爱因斯坦圆柱$\mathcal{E}$的子集。

2.2 手征分量与表示论

2.2.1 圆 S^1 上的共形网

在二维共形场中，有些场不依赖于其中一个光线坐标。它们称为手征场，可限制到光线上，再根据局域性延拓到圆 S^1。尽管我们一次只研究一个手征场论，本节中的对象仍标记为 κ。请注意，我们不使用指标 κ来区分左、右手征分量。此约定在稍后将不同手征场结合到二维共形场论的左右分量上时会很有用；而二维对象则不带指标。

我们先从圆 $\mathbb{R}$ 上的网开始，看看它如何延拓到 S^1。请注意，若希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 的酉射影表示 U_κ 限制到半单子群 $\mathbf{M\ddot{o}b}$，则存在唯一的真正（非射影）表示，其在 $\mathrm{PU}(\mathcal{H}_\kappa)$ 中的商与 U_κ 一致。从这个意义上说，我们可以无歧义地考察 U_κ 在 $\mathbf{M\ddot{o}b}$ 上的限制谱 [Bar54，定理 7.1]。

如果 $\mathcal{A}_\kappa$ 为每个开且稠密性不足的非空区间 $I \subset \mathbb{R}$ 分配一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A}_\kappa(I)$，U_κ 是 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 的酉射影表示，并且 $\Omega_\kappa \in \mathcal{H}_\kappa$，则称三元组 $(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的共形网，满足

(1dCN1) **Isotony:** if $I_1 \subset I_2$, then $\mathcal{A}_\kappa(I_1) \subset \mathcal{A}_\kappa(I_2)$.

(1dCN2) 局域性：如果 I_1 和 I_2 不相交，则 $\mathcal{A}_\kappa(I_1) \subset \mathcal{A}_\kappa(I_2)'$。

[2]这在拓扑上等价于 $S^1 \times \mathbb{R}$，但乘积结构不同于光线分解。

（1dCN3）微分同胚协变性：对于一个有界区间 $I \subset \mathbb{R}$，存在 Diff+(S^1) 的单位元的邻域 $\mathcal{U}$，使得如果 $\gamma \in \mathcal{U}$，那么 $\gamma \cdot I \subset \mathbb{R}$，并且

$$U_\kappa(\gamma)\mathcal{A}_\kappa(I)U_\kappa(\gamma)^* = \mathcal{A}_\kappa(\gamma \cdot I).$$

此外，如果 supp γ 与 I 不相交，则 Ad $U_\kappa(\gamma)(x) = x$ 对于 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$。

(1dCN4) 能量正性：U_κ 对平移子群 $\mathbb{R} \subset$ M¨ob 的限制具有包含于 $\mathbb{R}_+$ 中的谱。

(1dCN5) 真空和 Reeh-Schlieder性质：存在一个唯一的（相差一个相位）向量 $\Omega_\kappa \in \mathcal{H}_\kappa$，使得 $U_\kappa(g)\Omega_\kappa = \Omega_\kappa$ 对于 $g \in$ M¨ob 和 $\mathcal{A}_\kappa(I)\Omega_\kappa = \mathcal{H}_\kappa$。

如果我们只假设关于 M¨ob 的协变性，就称其为 M¨obius 协变网。

如果 U_κ 通过 Diff+(S^1) 分解为射影表示，也就是说，如果 $U_\kappa(R_{2n\pi})$ $n \in \mathbb{Z}$是一个标量，那么 $\mathcal{A}_\kappa$ 可以扩展为定义在 $\mathcal{I}$ S^1 上所有非稠密、非平凡开区间集合上的网，并且满足共形网在 S^1 上的通常公理，即满足等张性、局域性、Diff+(S^1)-协变性、能量正性和真空性质的三元组 ($\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa$)。参见例如 [KL04a，第 2 节。1], [CKLW18，第 3] 章。

我们还要回顾一下，U_κ 可以构成 Diff+(S^1) 的酉乘子表示（而非射影表示），也就是说，对于某个 $c(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{C}$[Car04, Theorem A.2], [FH05, Proposition 5.1]，有 $U_\kappa(\gamma_1)U_\kappa(\gamma_2) = c(\gamma_1, \gamma_2)U_\kappa(\gamma_1\gamma_2)$。这样的 c 称为该乘子表示的余循环。

命题 2.1。设 ($\mathcal{A}_\kappa$、U_κ、Ω_κ) 是 $\mathbb{R}$上的共形网。进一步假设$U_\kappa(R_{2\pi}) = \mathbb{I}$（在 $\mathrm{PU}(\mathcal{H}_\kappa)$ 中），也就是说，2π-旋转的提升是平凡的。那么 ($\mathcal{A}_\kappa$、U_κ、Ω_κ) 可扩张为 S^1。

证明。如果 $U_\kappa(R_{2\pi}) = \mathbb{I}$，则其伴随作用是平凡的，而 $\mathcal{A}_\kappa$ 在（$-\pi$，π）上的自然扩张到 $\mathbb{R}$（S^1 的万有覆盖）是周期性的，因此我们可以将其视为 S^1 上的网。已知限制在旋转子群上的能量正性与限制在平移子群上的能量正性是等价的（参见例如 [Wei06, Lemma 3.1]）。[KL04a, Section 2.1] 的其余公理很容易验证。 □

假设 $U_\kappa(R_{2\pi}) = \mathbb{I}$ 是必要的，但我们不知道这是否可以由更一般的假设推出（参见 Bisognano–Wichmann性质是必要且充分的[GLW98，定理 1.4], 但我们尚不清楚它对于$\mathbb{R}$上的共形网是否是自动成立的）。

存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的网，它具有较弱的协变性，且不能扩展到 S^1（U_κ 仅是由 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的平移、膨胀和微分同胚生成的群的射影表示）：带有扰动应力能量张量的 U(1)电流网 [BSM90], 另见 [MT19，第5节2]中的讨论。

2.2.2 手征共形网的表示

共形网 $\mathcal{A}_\kappa$（更准确地说，是 ($\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa$)）在 S^1 上的一个表示，是在同一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\kappa^\rho$上由 $\{\mathcal{A}_\kappa(I)\}_{I\in\mathcal{I}}$ 的表示 $\rho = \{\rho_I\}$ 组成的一个族；它们满足如下相容性条件：若 $I_1 \subset I_2$，则 $\rho_{I_2}|_{\mathcal{A}_\kappa(I_1)} = \rho_{I_1}$。如果 $\mathcal{H}_\kappa^\rho$等于 $\mathcal{H}_\kappa$，且 $\rho_I(\mathcal{A}_\kappa(I)) = \mathcal{A}_\kappa(I)$,

等价地，如果 C^*-张量范畴维数或统计维数 d_ρ 等于 1，我们称 ρ 为 $\mathcal{A}_\kappa$的自同构。

让我们总结自同构情形下表示的一般理论（参见[MTW18，第 6]节）：

• 任意自同构都是不可约的，因此在以下意义下具有微分同胚协变性（对于射影表示，参见 [DFK04，定理 6] ；对于局部乘子表示，参见 [CDVIT21，第3节2] ）：存在 Diff+(S^1) 中单位元的某个邻域 $\mathcal{U}$ 上的局部酉~~乘子表示~~ U^ρ_κ，其余循环与 U_κ 的余循环相同，使得 $U^\rho_\kappa(\gamma) = \rho(U_\kappa(\gamma))$，其中 supp $\gamma \subset I$，对某个 I 成立；并且 伴随作用 $U^\rho_\kappa(\gamma)(\rho(x))$ =ρ(伴随作用 $U_\kappa(\gamma)(x)$)，其中 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$，对某个 $I, \gamma \in \mathcal{U}$ 成立（最后这个限制正是我们称之为局部表示的原因）。 U^ρ_κ 可扩张为 Diff+(S^1) 上的射影表示，因为 Diff+(S^1) 是单连通的。此外，它在 M¨ob 上的限制是一个真正的表示，并且自动具有正能量 [Wei06，定理 3.8]。因此，提升旋转 L^ρ_0 的生成元的最低特征值是唯一确定的，我们将其记为 $D_{\kappa,\rho}$。这称为共形维数。由于 2π-旋转是平凡的， L^ρ_0 的谱包含于 $D_{\kappa,\rho} + (\mathbb{N} \cup \{0\})$。根据 [FH05，定理 5.1]，证明的第一部分，表示 U^ρ_κ 可扩张为 Diff+(S^1) ~~的酉乘~~子表示。

• 如果 ρ、ρ' 是 $\mathcal{A}_\kappa$ 的两个表示，并且存在一个酉元 $V \in \mathrm{U}(\mathcal{H}_\kappa)$，使得$V\rho_I(x) = \rho'_I(x)V$，对每个 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$以及所有 $I \in \mathcal{I}$均成立，我们就称它们是酉等价的。我们还称 V 是 ρ 与 ρ'之间的酉交织算子。

• 如果一个自同构在 I 中局部化，即 $\rho_{I'} = \mathrm{id}$，其中 I' 是 $S^1 \setminus I$的内部，则称其局部化于 I 。在这种情形下，根据 S^1上的 Haag 对偶性、 [GF93，定理 2.19] （即，对每个 $I \in \mathcal{I}$都有$\mathcal{A}_\kappa(I') = \mathcal{A}_\kappa(I)'$ ，参见 [BSM90]） ， ρ_I 将 $\mathcal{A}_\kappa(I)$映射到自身，也就是说，它是 $\mathcal{A}_\kappa(I)$的端同态（在此情形下是一个自同构）。给定局部化于 I_1的 ρ ，总可以找到一个与其酉等价、局部化于另一个区间 I_2的自同构。（更一般地， [GF93，引理 4.6]表明，共形网在可分希尔伯特空间上的每个表示都可以局部化于任意给定的区间。）如果 $I_1 \cup I_2$ 在 S^1 中不稠密，则可以取一个包含 $I_1 \cup I_2$ 的真区间 I ；根据 S^1 上的 Haag 对偶性，实现该等价关系的酉算子 V 属于 $\mathcal{A}_\kappa(I)$。这样的 V 称为荷传输子。

• 算子 $z_{\kappa,\,\rho}(\gamma) := U_\kappa(\gamma)U^\rho_\kappa(\gamma)^*$ 对于 $\gamma \in$ Diff+(S^1) 是 ρ与 ρ^γ之间的荷传输子，其中如果 ρ局部化于I，则 $\rho^\gamma :=$ 伴随作用 $U_\kappa(\gamma) \circ \rho \circ$ 伴随作用 $U_\kappa(\gamma^{-1})$ 局部化于 $\gamma \cdot I$。我们将 $z_{\kappa,\,\rho}(\gamma)$ 称为 ρ的协变余循环，或简称余循环。

• 表示的 DHR 张量（或幺半）积 ρ_1 和 ρ_2 由相应端同态（在此情形下为自同构）在各个 I中的复合定义。请注意，张量积并非通过考虑张量积希尔伯特空间来给出，因为那样无法得到局部代数的良定义表示族。用符号表示为 $(\rho_1)_I \otimes (\rho_2)_I := (\rho_1)_I \circ (\rho_2)_I$，或简写为 $(\rho_1)_I(\rho_2)_I$。所得表示记作 $\rho_1 \otimes \rho_2$，或简记为 $\rho_1\rho_2$。例如参见 [GF93，第 IV 节2]。对于 S^1 上的强可加共形网 $\mathcal{A}_\kappa$ （即对于每个 $I \in \mathcal{I}$ 和 I_1， $\mathcal{A}_\kappa(I_1) \vee \mathcal{A}_\kappa(I_2) = \mathcal{A}_\kappa(I)$，其中 $I_2 \in \mathcal{I}$ 是由 $I \setminus \{p\}$的连通分支产生的，

$p \in I$），或者等价地，对于 $\mathbb{R}$ 满足 $\mathbb{R}$上的Haag 对偶性的共形网，张量积可以在全局上定义，参见 [KLM01，附录 B], [GR18，第 2],节，其在精神上更接近 Doplicher–Haag–Roberts的原始定义 [DHR69a],[DHR69b]。

• 设 ρ_1、ρ_2 是局部化于 I 中的两个自同构。为了定义 ρ_1 与 ρ_2 之间的 DHR 编织[DHR 71], [FRS89] ，我们在 S^1 上选取一点，并通过相应的立体投影将其视为 $\mathbb{R}$ 上的无穷远点。取$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$$\widetilde{\rho}_1$和 $\widetilde{\rho}_2$ 分别局部化于 I_1、I_2，使得 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$、I_1、I_2 远离无穷远点；再分别取 ρ_1 与 $\widetilde{\rho}_1$、ρ_2 与 $\widetilde{\rho}_2$ 之间的荷传输子 V_1、V_2 。算子 $\epsilon^{\pm}_{\rho_1}$、$_{\rho_2} := \rho_2(V_1^*)V_2^*V_1\rho_1(V_2)$ 是 $\rho_1\rho_2$ 与 $\rho_2\rho_1$ 之间的酉交织算子，其中 $\pm$ 取决于 I_1 位于 I_2 左侧还是右侧，并且具备酉张量范畴中酉编织的全部性质。它不依赖于 $\widetilde{\rho}_1$ $\widetilde{\rho}_2$ 的选择，也不依赖于在相同的 I_1、I_2 配置下的 $\sim$ $\sim$ V_1、V_2，亦不依赖于所选取的无穷远点；参见例如 [GF93，第 IV.4] 节。

• 设 ρ 是局部化于 I 的自同构。 ρ 的共轭自同构 $\overline{\rho}$ 是局部化于 I' 的自同构，由 $j \circ \rho \circ j$ 给出，其中 $j = \mathrm{Ad}\, J_I$，而 J_I 是相对于真空的 $\mathcal{A}_\kappa(I)$ 的模共轭。由此可得 $\rho \circ \overline{\rho} \cong \mathrm{id}$，见 [GL92，定理8。3], [GL96，定理2。11]。

设 $(\mathcal{B}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)$ 是定义在 S^1 上的共形网，并设 $\{\mathcal{A}_\kappa\}_{I\in\mathcal{I}}$ 是满足相对于 U_κ 的协变性的冯·诺依曼子代数 $\mathcal{A}_\kappa(I) \subset \mathcal{B}_\kappa(I)$ 的族。那么，在子空间$\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_\kappa(I)\Omega_\kappa$上，$(\mathcal{A}_\kappa|_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa}}, U_\kappa|_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa}}, \Omega_\kappa)$ 是相对于 U_κ 的 M¨obius- 协变网，因为对于 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$， $U_\kappa(\gamma)x\Omega_\kappa = \mathrm{Ad}\ U_\kappa(\gamma)(x)\Omega_\kappa \in \mathcal{A}(\gamma \cdot I)\Omega$，因此 $U_\kappa(\gamma)$ 保持 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa}$。将 $U_\kappa|_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa}}$ 限制到 M¨ob 后，通常可以扩张到 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$，且 $\mathcal{A}_\kappa|_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}_\kappa}}$ 关于其具有协变性；在这种情况下，我们称 $\mathcal{A}_\kappa$ 为 $\mathcal{B}_\kappa$ 的一个（共形）子网，并为简便起见记作 $\mathcal{A}_\kappa \subset \mathcal{B}_\kappa$。在这种情形下，我们称 $\mathcal{B}_\kappa$ 是 $\mathcal{A}_\kappa$ 的一个扩张。

2.2.3 与自同构相关的带电场

设 $\{(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)\}$ 是定义在 S^1 上的共形网。本节假设，在其不可约表示中存在非平凡自同构。用张量范畴的语言来说， $\mathcal{A}_\kappa$ 的表示包含一个（编织 pointed 张量子范畴）。

本节中带电场和扩张的构造受到四维背景下 [DHR69b] 和 [DR89a], [DR90] 的启发，参见 [Bau95，第 3], 章；其中所涉及的幺正张量范畴还具有对称编织结构（因而对偶于一个紧群 [DR90]）。 [DHR69b] 研究了尖点的情形，与我们的情形相同。另见 [M¨ug 01] ，以便与一维和二维背景进行比较。

固定一个区间 $I \in \mathcal{I}$。令 Δ_κ 为 $\mathcal{A}_\kappa$的一组选择，每个酉等价类各取一个两两不等价且局部化于 I的自同构，其中包括 $\mathcal{A}_\kappa$的平凡自同构 id（定义真空表示）。在当前假设下，自同构的等价类在类乘法 $[\rho][\sigma] = [\rho\sigma]$ （其中 $\rho\sigma$ 表示自同构的复合）和求逆 $[\rho]^{-1} = [\rho^{-1}]$下构成一个离散的（有限或无限）阿贝尔群 G。假设 G是有限生成的，其元素记作g、h、g^{-1}，.....，单位元记作 ι。令 $\kappa(g) \in \Delta_\kappa$，对每个 $g \in G$，这是

先前对 $\mathcal{A}_\kappa$的自同构所作的选择。我们假设 $\kappa(\iota) = \mathrm{id}$。一般性不失，适当改变这些自同构在 I中的局域化位置后，可假设对任意 g、$h \in G$，均有 $\kappa(g)\kappa(h) = \kappa(h)\kappa(g)$。注意，我们并未假设$\kappa(g)\kappa(h) = \kappa(gh)$，因为 Δ_κ 未必对复合和求逆封闭。对任意 g、$h \in G$，令 V^g、^{h} 为 $\mathcal{A}_\kappa(I)$ 中一个酉交织算子，它连接 $\kappa(gh)$与 $\kappa(g)\kappa(h)$，并实现等价关系 $[\kappa(gh)] = [\kappa(g)][\kappa(h)]$。也就是说，对每个 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$，$V^{g,h}\kappa(gh)(x) = \kappa(g)(\kappa(h)(x))V^{g,h}$。我们可以假设 $V^{g,h} = V^{h,g}$，且 $V^{g,\iota} = V^{\iota,h} = 1$。

对于每个 $g \in G$，我们定义作用在希尔伯特空间 $\hat{}\,\mathcal{H}_\kappa$ 上的算子 $\psi_\kappa^g := \bigoplus_{g\in G} \mathcal{H}_\kappa^{\kappa(g)}$，其中 $\mathcal{H}_\kappa^{\kappa(g)} := \mathcal{H}_\kappa$ 是 $\mathcal{A}_\kappa$ 的真空希尔伯特空间，定义为

$$(\psi_\kappa^g\Psi)_h := V^{g,h}(\Psi)_{gh},$$

$\hat{}$ 对于每个 $\Psi \in \mathcal{H}_\kappa$。我们称 ψ_κ^g 为带电场算子。它们满足以下性质：

- 每个 ψ_κ^g 在 $\hat{}\,\mathcal{H}_\kappa$ 上都是酉元，并且对于每个 $h \in G$，它将 $\mathcal{H}^{\kappa_{(h)\kappa}}$ 映射为 $\mathcal{H}^{\kappa_{(gh)\kappa}}$。
- 考虑 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$ 在 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的表示 $\hat{}\kappa(x) := \bigoplus_{h\in G} \kappa(h)(x)$。则 $\hat{}$

$$\begin{aligned}
(\psi_\kappa^g\hat{\kappa}(x)\Psi)_h &= V^{g,h}\left(\hat{\kappa}(x)\Psi\right)_{gh} \\
&= V^{g,h}\kappa(gh)(x)\left(\Psi\right)_{gh} \\
&= \kappa(g)(\kappa(h)(x))V^{g,h}\left(\Psi\right)_{gh} \\
&= \kappa(h)(\kappa(g)(x))V^{g,h}\left(\Psi\right)_{gh} \\
&= \kappa(h)(\kappa(g)(x))\left(\psi_\kappa^g\Psi\right)_h \\
&= \left(\hat{\kappa}(\kappa(g)(x))\psi_\kappa^g\Psi\right)_h,
\end{aligned}$$

$\hat{}$ 对于每个 $\Psi \in \mathcal{H}_\kappa$，其中我们在第 4 个等式中使用了 $\kappa(h)$ 与 $\kappa(g)$ 可交换这一事实。

因此，我们得到“带电场交织算子”性质（按照 Doplicher–Roberts [DR72] 的意义），以及其共轭性质（将 x 替换为 $\kappa(g)^{-1}(x^*)$）：

$$\begin{aligned}
\psi_\kappa^g\hat{\kappa}(x) &= \hat{\kappa}(\kappa(g)(x))\psi_\kappa^g, \\
(\psi_\kappa^g)^*\hat{\kappa}(x) &= \hat{\kappa}(\kappa(g)^{-1}(x))(\psi_\kappa^g)^*,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$\hat{}$ 对每个 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$，作为作用于 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的算子。

- 对于 $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$，协变性余圈 $z_{\kappa(g)}(\gamma)$ 是 $\overline{\kappa(g)\text{与 }\kappa(g)}\gamma$之间的酉元带电输运子，并满足以下张量性。

  余圈的张量性：$z_{\kappa(g)}(\gamma)\kappa(g)(z_{\kappa(h)}(\gamma)) = z_{\kappa(g)\kappa(h)}(\gamma)$，或等价地写作$z_{\kappa(g)}(\gamma) \otimes z_{\kappa(h)}(\gamma) = z_{\kappa(g)\otimes\kappa(h)}(\gamma)$。

  参见 [Lon97，附录A], [DG18，第 7], [MTW18，命题6。1]。
- 令 $\hat{}\,U_\kappa(\gamma) := \bigoplus_{h\in G} U^{\kappa_{(h)\kappa}}(\gamma)$ 为 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 的一个表示。~~如在~~ [DG18, Theorem 7.7], [MTW18, 第 6], 节中，我们得到

$$(\hat{U}_\kappa(\gamma)\psi_\kappa^g\hat{U}_\kappa(\gamma)^*\Psi)_h = U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma)(\psi_\kappa^g\hat{U}_\kappa(\gamma)^*\Psi)_h$$

$$
\begin{aligned}
&= U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma) V^{g,h} (\hat{U}_\kappa(\gamma)^* \Psi)_{gh} \\
&= U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma) V^{g,h} U_\kappa^{\kappa(gh)}(\gamma)^* (\Psi)_{gh} \\
&= U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma) U_\kappa^{\kappa(g)\kappa(h)}(\gamma)^* V^{g,h} (\Psi)_{gh} \\
&= U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma) U_\kappa^{\kappa(\iota)}(\gamma)^* U_\kappa^{\kappa(\iota)}(\gamma) U_\kappa^{\kappa(g)\kappa(h)}(\gamma)^* V^{g,h} (\Psi)_{gh} \\
&= z_{\kappa(h)}(\gamma)^* z_{\kappa(h)\kappa(g)}(\gamma) V^{g,h} (\Psi)_{gh} \\
&= \kappa(h)(z_{\kappa(g)}(\gamma)) V^{g,h} (\Psi)_{gh} \\
&= (\hat{\kappa}(z_{\kappa(g)}(\gamma)) \psi_\kappa^g \Psi)_h,
\end{aligned}
$$

对每个 $\Psi \in \hat{\mathcal{H}}_\kappa$ 都成立。我们在第 4 个等式中使用了当 supp $\gamma \subset I$ 时 $U_\kappa^{\kappa(g)}(\gamma) = \kappa(g)(U_\kappa(\gamma))$（见第 2.2.2 节），在第 6 个等式中使用了$z_{\kappa(g)}(\gamma)$的定义，并在第 7 个等式中使用了余循环的张量性。

因此，我们得到带电场的如下“协变性”：对于每个 $\hat{\gamma} \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$，作为作用于 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的算子，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\, \hat{U}_\kappa(\gamma)(\psi_\kappa^g) &= \hat{\kappa}(z_{\kappa(g)}(\gamma)) \psi_\kappa^g, \\
\mathrm{Ad}\, \hat{U}_\kappa(\gamma)((\psi_\kappa^g)^*) &= \hat{\kappa}(z_{\kappa(g)^{-1}}(\gamma))(\psi_\kappa^g)^*,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

其中我们利用了 $(\psi_\kappa^g)^* \hat{\kappa}(z_{\kappa(g)}(\gamma)^*) = \hat{\kappa}(\kappa(g)^{-1}(z_{\kappa(g)}(\gamma)^*))(\psi_\kappa^g)^* = \hat{\kappa}(z_{\kappa(g)^{-1}}(\gamma))(\psi_\kappa^g)^*$，这是由 $(\psi_\kappa^g)^*$ 的带电场交织算子性质以及余循环的张量性得到的。

注 2.2。注意，上面构造的带电场是高度非典范的，因为它们依赖于例如对每个 $V^{g,h}$ g, $h \in G$ 的选择（每个 $V^{g,h}$ 在酉等价意义下唯一）。还要注意，我们既不要求 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^{gh}$，也不要求 $\psi_\kappa^{g*} = \psi_\kappa^{g^{-1}}$ 对于 $g, h \in G$ 成立，即带电场算子不一定构成一个群，参见 [Reh90a，第 3] 节。然而，根据交织算子性质和协变性，对于每个 $V^{g,h}$ 的选择，它们都产生 $\mathcal{A}_\kappa$ 的相对局部扩张（但可能既不可约，也不具有因子性）。

稍后我们将需要刚刚定义的带电场满足条件 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h \psi_\kappa^g$ （下文命题 2.3 中建立），以便通过“粘合”共形网来构造张量积的局部扩张。注意，仅有 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h \psi_\kappa^g$ 并不意味着该扩张具有局域性。还要注意，由于 G 是阿贝尔的，群乘法条件 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^{gh}$ 将蕴含交换性条件 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h \psi_\kappa^g$。

命题 2.3。在本节的记号下，设 $G = \mathbb{Z}_n$，其元素记作 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$（模 n），并设 $\alpha \in \Delta_\kappa$ 是在 I 中局部化的自同构，使得对所有 $k = 0$、1、...、$n-1$ 以及 $[\alpha^n] = [\mathrm{id}]$。均有 $\alpha^k \in \Delta_\kappa$。选取一个酉元 $V \in \mathcal{A}_\kappa(I)$，将 id 与 α^n 交织，即对每个 $x \in \mathcal{A}_\kappa(I)$，有 $Vx = \alpha^n(x)V$。令 $V^{g,h}$、g、$h \in G$ 定义为：当 $g + h \geq n$ 时，$V^{g,h} := V$，其中 g、$h \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ 被视为代表元；当 $g + h < n$ 时，$V^{g,h} := \mathbb{I}$。则对每个 g、$h \in G$，有 $\psi_\kappa^g \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h \psi_\kappa^g$ 且 $(\psi_\kappa^g)^* \psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h (\psi_\kappa^g)^*$。

证明。仅 在此证明中，我们使用 $g + h$ 表示群运算的加法记号。

我们首先注意到，采用我们的选择 $V^{g,h} \kappa(g + h) = \kappa(g)\kappa(h) V^{g,h}$ 后，取代表元 $g, h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，根据 $g + h \geq n$ 或 $g + h < n$ 的情形分别讨论，并利用 $\kappa(g) = \kappa(1)^g$，即可验证这一点。

根据定义，很容易看出，ψ_κ^1（其中上指标 1 表示群元素，而非指数）是先在 $\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}_\kappa^{\kappa(g)}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}_\kappa$ 上作为希尔伯特空间进行平移，再接着作用 1 或 V 所得到的乘积；并且 $\psi_\kappa^g=(\psi_\kappa^1)^g$，这里仍取 $g\in\{0,1,\dots,n-1\}$。由此可见，ψ_κ^g、$(\psi_\kappa^g)^*$ 和 ψ_κ^h 彼此交换。□

现在令 G 为有限生成阿贝尔群。于是它同构于有限个循环群 $\mathbb{Z}_n$ 或 $\mathbb{Z}$ 的直积。设 Δ_κ 是一组两两不等价的自同构，它们局部化于 $\mathcal{A}_\kappa$ 的 I 中，并且其等价类构成一个群 G。对于 $\mathbb{Z}_n$ 中的每个有限循环群，我们可以在局部化于更小区间 $\underline{I}\subset I$ 的 Δ_κ 中选取一个生成元。对于这些生成元中的每一个，我们按照命题 2.3 选取 V^h、$^g\in\mathcal{A}(\underline{I})$，从而为这样的 h、$g\in\mathbb{Z}_n$ 构造算子 ψ_κ^h。我们可以通过在 I 内选取有限个两两不相交的更小区间，为 $\mathbb{Z}_n$ 的每个副本作出这一选择，从而得到彼此对易的算子 ψ_κ^h、ψ_κ^g，其中 g、h 属于 G 中不同的有限循环群。对于 $\mathbb{Z}$ 的每个无限循环群副本，我们可以取生成元 1，并且可以假设对于所有 $g\in\mathbb{Z}$，$\kappa(g)=\kappa(1)^g$，因此对于每个 g、$h\in\mathbb{Z}$，我们可以令 V^g、$^h:=\mathbb{I}$，以及 $\psi_\kappa^g\psi_\kappa^h=\psi_\kappa^{gh}$。总之，对于每个 $h\in G$，我们得到了带电场 ψ_κ^h，并满足 $\psi_\kappa^h\psi_\kappa^g=\psi_\kappa^g\psi_\kappa^h$。

注 2.4。即使 G 不是有限生成的，若存在对 Δ_κ 的一种选取，使得 $\kappa(g)\kappa(h)=\kappa(gh)$，便可按照 [MTW18 第 6], 节中的做法构造 ψ_κ^h，使其满足 $\psi_\kappa^g\psi_\kappa^h=\psi_\kappa^{gh}=\psi_\kappa^h\psi_\kappa^g$；于是$(\psi^g)^*=\psi^{g^{-1}}$，我们的其余构造也同样适用。带有 $G=\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$的 U(1)电流网就是这种情况。

2.3 二维共形网

在 [KL04b], 中，证明了任何定义在 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上且满足局部共形协变性的 Haag–Kastler 网，都可以扩张到爱因斯坦圆柱面；这一结果是通过对共形自旋统计定理 [GL96], [MT19, Theorem A.5]稍作修改得到的。为准确陈述这一结果，我们先从 $\mathbb{R}^{1+1}$上的一个网开始。我们称三元组 $(\mathcal{A},U,\Omega)$ 为 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上的共形网，若 $\mathcal{A}$ 将每个开区域 $O\subset\mathbb{R}^{1+1}$ 映射到一个冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A}(O)$，该代数作用于希尔伯特空间 ~~$\mathcal{H}$上；U~~ 是 ~~Diff$_+(S^1)\times$~~ Diff$_+(S^1)$ 的酉射影表示，且 $\Omega\in\mathcal{H}$ 满足

(2dCN1) 等张性：如果 $O_1\subset O_2$，那么 $\mathcal{A}(O_1)\subset\mathcal{A}(O_2)$。

(2dCN2) 局域性：如果 O_1 和 O_2 类空分离，那么 $\mathcal{A}(O_1)\subset\mathcal{A}(O_2)'$。

(2dCN3) 微分同胚协变性：对于有界区域 $O\subset\mathbb{R}^{1+1}$，存在单位元在 Diff$_+(S^1)\times$ Diff$_+(S^1)$ 中的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得如果 $\gamma\in\mathcal{U}$，那么 $\gamma\cdot O\subset\mathbb{R}^{1+1}$ 并且

$$U(\gamma)\mathcal{A}(O)U(\gamma)^*=\mathcal{A}(\gamma\cdot O).$$

此外，如果 supp γ与 O不相交，那么对于 $\mathcal{A}(O)$，Ad $U(\gamma)(x)=x$。

(2dCN4) 能量正性：将 U 限制到平移子群 $\mathbb{R}^2\subset$M¨ob $\times$ M¨ob 后，其联合谱包含于闭未来光锥$\overline{V_+}=\{(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^{1+1}:a_0^2-a_1^2\geq 0,a_0\geq 0\}$。

(2dCN5) 真空与 Reeh-Schlieder性质：存在唯一的（相差一个相位）向量 $\Omega\in\mathcal{H}$，使得 $U(g)\Omega=\Omega$ 对于 $g\in$ M¨ob 成立，并且对任意局部代数都是循环的，即 $\mathcal{A}(O)\Omega=\mathcal{H}$。

如果存在如上所述的共形网 $\mathbb{R}^{1+1}$，我们可以将其视为菱形区域 $D_0 = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$ 上的网，如第 2.1 节所述。在这一识别下，群 Diff$_+(S^1)$ $\times$ Diff$_+(S^1)$ 作用于 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，并且我们可以根据协变性扩张该网 $\mathcal{A}$。然而，这种扩张并不十分自然。事实上，共形网往往扩张到 $\mathcal{E}$，而不是扩张到$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。如果 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的共形网，我们称之为 $\mathcal{A}$：对于 $\mathcal{E}$ 中的区域有定义，并且相对于 U 沿 Diff$_+(S^1)$ $\times$Diff$_+(S^1)$ 的自然作用具有协变性；此外，它满足局部性，即当圆柱面存在平移 γ，使得 D_0 包含 $\gamma\cdot O_1, \gamma\cdot O_2$ 且它们在该处是类空间的时，$\mathcal{A}(O_1)$ 与 $\mathcal{A}(O_2)$ 对易。[MT19, 定理 A.5] 给出了一个充分条件（楔形区域上的 Bisognano–Wichmann性质），然而，在我们构造的例子中，检验这一条件并不直接。相反，下面的条件更容易检验，并且能够立即给出所需的扩张。

命题 2.5. 设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{1+1}$上的共形网。进一步假设$U(R_{2\pi}\times R_{-2\pi}) = \mathbb{I}$(属于 $\mathrm{PU}(\mathcal{H})$)，即类空间的 2π-旋转是平凡的。则 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 可扩张为定义在 $\mathcal{E}$上的共形网。

证明。这与命题 2.1 平行。

由于 $U(R_{2\pi}\times R_{-2\pi}) = \mathbb{I}$，表示 U可通过群 $\mathscr{C}$因子化（见第 2.1 节）。此外，由于 $U(R_{2\pi}\times R_{-2\pi}) = \mathbb{I}$，对于任意区域 O，$\mathcal{A}(O)$与 $\mathcal{A}(R_{2\pi}\times R_{-2\pi}\cdot O)$重合。因此，我们可以认同 x上的任意点以及 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$和 $R_{2\pi}\times R_{-2\pi}\cdot x$，从而得到爱因斯坦圆柱 $\mathcal{E}$。协变性由定义可得，而上述意义下的局域性则由协变性以及 D_0中的局域性推出。 □

在命题 2.5 的情形下，我们的网 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 等价于 [KL04b 第 2] 节意义下的一个局域共形网。

Rehren 引入了可扩张到 $\mathcal{E}$ [Reh00] 的二维共形网 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 的极大手征网：令 $I_{\mathrm{L}}\times I_{\mathrm{R}}$ 为 ~~$\mathbb{R}^{1+1}$ 中的~~一个菱形区域。定义 $\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}(I_{\mathrm{L}}) = \mathcal{A}(I_{\mathrm{L}}\times I_{\mathrm{R}}) \cap U(\iota\times \mathrm{Diff}_+(S^1))'$，其中 ι 是 Diff$_+(S^1)$ 的单位元。于是，$\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}$ 起初是定义~~在希尔~~伯特子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{L}} = \mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}\Omega$ 上的 $\mathbb{R}$ 上的一个共形网，并满足命题 2.1 的条件，因此可扩张到 S^1。类似地，可以在 $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ 上定义 $\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{R}}$。原始的整体网 $\mathcal{A}$ 在子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{R}}\subset\mathcal{H}$ 上包含张量积 $\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{R}}$（更准确地说，存在一个从 $\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{R}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的自然单同态）。从这个意义上说，一个一般的二维共形网 $\mathcal{A}$ 是张量积网 $\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}^{\max}_{\mathrm{R}}$ 的扩张。

3 平凡总编织的一维粘合

在本节中，我们从一族满足某些条件的共形网出发，在 S^1 上构造它们的张量积的局部扩张。先考虑有限个共形网 $\{(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)\}_{\kappa\in K}$，它们定义在 S^1 上，并由 $\kappa\in K$, $|K|<\infty$ 标记。固定一个区间 $I\in\mathcal{I}$。我们假设，每个 $\mathcal{A}_\kappa$ 都有一个（不一定有限的）集合 Δ_κ，其中包含彼此不等价且可交换的自同构；这些自同构局部化于 I，并且该集合包含平凡自同构 id_κ。此外，这些自同构的融合规则（在酉等价意义下）同构于同一个阿贝尔群G，如第2.2.3节所述。该群 G 应为有限生成阿贝尔群；或者，我们假设可以像第2.2.3节那样，在 Δ_κ 中选取元素以及带电场 ψ^h_κ，

使其满足命题 2.3 的结论（对每个 $\kappa \in K$）。此外，记 $\kappa\colon G \to \Delta_\kappa$ 为一个双射（不一定是同构，因为每个 Δ_κ 不一定对复合和逆封闭），使得对每个 $\kappa \in K$，$\kappa(\iota) = \mathrm{id}_\kappa$。这里，$\kappa$ 既用作指标，也用作映射，这是对记号的轻微滥用；因此，$\kappa(g)$ 是 $\mathcal{A}_\kappa$ 的一个自同构。此外，我们假设，对所有 $g_1, g_2, g \in G$，

- $\prod_\kappa \epsilon^{\pm}_{\kappa(g_1),\kappa(g_2)} = 1$,
- $\prod_\kappa \epsilon^{\pm}_{\kappa(g_1)^{-1},\kappa(g_2)} = 1$,
- $\sum_\kappa D_{\kappa,\kappa(g)} \in \mathbb{Z}$,

其中 $\pm$ 上述选择对所有 κ均相同，并且我们用同一符号 $\epsilon^{\pm}_{\kappa\ (g_1)\ \kappa(g_2)}$表示 $\amalg$（$\kappa(g_1)\kappa(g_2)$ 与其自身之间的平凡交织算子）在 $\kappa(g_1)$ 与 $\kappa(g_2)$ 的编织下所对应的相位倍数。这由关于 Δ_κ 的交换性假设 $\kappa(g_1)\kappa(g_2) = \kappa(g_2)\kappa(g_1)$ 得到保证。

现在我们如下构造一个共形网 $\mathcal{A}_K$ 在 S^1 上。

- 我们这个网的希尔伯特空间为 $\mathcal{H}_K := \bigoplus_{g\in G} \bigotimes_{\kappa\in K} \mathcal{H}^{\kappa}{}_{(g)\kappa}$。在此空间上，我们令任意形如 $\bigotimes_\kappa x_\kappa \in \bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa(I)$ 的算子按 $\bigoplus_{g\in G} \bigotimes_\kappa \kappa(g)(x_\kappa)$[3] 作用。将张量积网 $\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa$ 的这一表示记为 K。
- 我们还考虑一个辅助张量积空间 $\hat{}\ \mathcal{H}_K := \bigotimes_{\kappa\in K} \bigoplus_{g\in G} \mathcal{H}^{\kappa}{}_{(g)\kappa} \supset \mathcal{H}_K$。$\hat{}$ 在此空间上，元素 $\bigotimes_\kappa x_\kappa$ 的表示记为 $K(\bigotimes_\kappa x_\kappa)$。我们有 $\hat{}\ K(\bigotimes_\kappa x_\kappa)|_{\mathcal{H}_K} = K(\bigotimes_\kappa x_\kappa)$。
- 网 $\mathcal{A}_K$ 的真空向量为 $\Omega_K := \bigotimes_\kappa \Omega_\kappa \in \bigotimes_\kappa \mathcal{H}^{\kappa}{}_{(\iota)\kappa}$，属于 $\mathcal{H}_K$ 的第ι个分量。
- 协变性由 $U_K(\gamma) := \bigoplus_{g\in G} \bigotimes_\kappa U^{\kappa}_{\kappa(g)}(\gamma)$ 给出，它是 Diff+(S^1) 的酉乘子表示。根据条件 $\sum_\kappa D_{\kappa,\kappa(g)} \in \mathbb{Z}$, U_K ~~满足命题~~ 2.1 的假设，且是 Diff+(S^1) 的酉乘子表示。因此，忽略相位后，它是 Diff+(S^1) 的酉射影表示。这个 $\hat{}\ \hat{}$ 也自然地扩张到 $\mathcal{H}_K$ 上的 U_K。
- 对于每个元素 $g \in G$，我们如下引入带电场算子 ψ^g_K。我们的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_K = \bigoplus_{g\in G} \bigotimes_\kappa \mathcal{H}^{\kappa}{}_{(g)\ \kappa}$ 以自然的方式构成辅助希尔伯特空间 $\hat{}\ \mathcal{H}_K = \bigotimes_\kappa \hat{}\ \mathcal{H}_\kappa = \bigotimes_\kappa \bigoplus_{g\in G} \mathcal{H}^{\kappa}{}_{(g)\ \kappa}$ 的一个“对角”子空间。回顾一下，$\hat{}\ \mathcal{H}_\kappa$ 已在第2.2.3节中定义并使用。令

$$\psi^g_K := \bigotimes_\kappa \psi^g_\kappa,$$

[3]再说明一次记号：x_κ 中的 κ 和 Δ_κ 用作指标，以区分不同的张量分量；而 $\kappa(g)$ 中的 κ 表示 Δ_κ 中标记为 $g \in G$ 的自同构的选择。因此，$\kappa(g)(x_\kappa)$ 是 $\mathcal{H}^g_\kappa$ 上的有界算子。一般而言，κ 用作指标，但 $\kappa(g)$ 除外。

其中 ψ_κ^g 是带电场，它们按照第2.2.3节中的方式作用于 $\hat{}\,\mathcal{H}_\kappa$，因此 ψ_K^g 作用于 $\bigotimes_\kappa \hat{}\,\mathcal{H}_\kappa$，但保持 $\mathcal{H}_K$不变。现在，对于 ψ_κ^g，我们选择 $V^{g,\,h}$ 从而得到命题 2.3 及其后续评论中的结论。具体而言，我们选择带电场，使得 $\psi_\kappa^g\psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h\psi_\kappa^g$和 $(\psi_\kappa^g)^*\psi_\kappa^h = \psi_\kappa^h (\psi_\kappa^g)^*$对每个 g、$h \in G$都成立。

- 由带荷交织算子性质 (2.1) 可知

$$\psi_K^g \hat{K}(\bigotimes_\kappa x_\kappa) = \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa \kappa(g)(x_\kappa)\right)\psi_K^g, \tag{3.1}$$

$$(\psi_K^g)^* \hat{K}(\bigotimes_\kappa x_\kappa) = \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa \kappa(g)^{-1}(x_\kappa)\right)(\psi_K^g)^*. \tag{3.2}$$

- 局部代数如下给出。对于上面固定的区间 I，我们定义

$$\mathcal{A}_K(I) := \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa(I)\right) \vee \{\psi_K^g, (\psi_K^g)^*\}_{g\in G}.$$

对于由微分同胚 γ 的作用给出的任意其他区间 $\gamma\cdot I \subset \mathbb{R}$，我们定义$\mathcal{A}_K(\gamma\cdot I)$: $=$伴随作用 $U_K(\gamma)(\mathcal{A}_K(I))$。下面我们将证明，该网是良定义的、微分同胚协变的、局部的，并且扩展到 S^1。

定理 3.1. 设 $\{(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)\}_{\kappa\in K}$如上，并假设 $\{\Delta_\kappa\}_{\kappa\in K}$、其编织以及 $D_{\kappa,\,\kappa(g)}$ 满足本节开头所述的条件。则网 $(\mathcal{A}_K, U_K, \Omega_K)$ 满足 (1dCN1)–(1dCN5) 以及命题 2.1 的条件，从而在 S^1 上给出一个共形网，并扩展手征张量积网 $\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa$。

证明。尽管计算将与 [MTW18 的第 6], 节类似，但设定有所不同，因为我们在 S^1上构造的是一个手征网，而不是在 $\mathcal{E}$上构造二维网。下面给出证明，以说明这为何适用于 $|K|$ 因子的张量积。

我们首先在辅助希尔伯特空间 $\bigotimes_\kappa \hat{\mathcal{H}}_\kappa$ 上进行计算 $U_K(\gamma) := \bigotimes_\kappa \hat{}\,U_\kappa(\gamma)$，其中 $\hat{}\,U_\kappa(\gamma) = \bigoplus_{h\in G} U_\kappa^{\kappa(h)}(\gamma)$ 已在第2.2.3节中定义并使用。利用带电场的协变性 $\hat{}$ 性质（2.2）（即 $U_\kappa(\gamma)$ 对 ψ_κ^g 的伴随作用公式，其中 $\hat{}$作用于每个 $\mathcal{H}_\kappa$），我们得到

$$\operatorname{Ad}\hat{U}_K(\gamma)(\psi_K^g) = \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g)}(\gamma)\right)\psi_K^g,$$

$$\operatorname{Ad}\hat{U}_K(\gamma)((\psi_K^g)^*) = \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g)^{-1}}(\gamma)\right)(\psi_K^g)^*.$$

此外，我们还有 $\psi_K^g\psi_K^h = \psi_K^h\psi_K^g$，$(\psi_K^g)^*\psi_K^h = \psi_K^h(\psi_K^g)^*$，这是由我们对带电场 ψ_κ^g、ψ_κ^h 以及 $(\psi_\kappa^g)^*$ 所施加的交换条件得到的。

我们必须确保 $\mathcal{A}_K(\gamma\cdot I)$是良定义的，也就是说，该定义不依赖于 γ的选择。这个问题归结为：当 $\gamma\cdot I = I$时，伴随作用 $U_K(\gamma)(\mathcal{A}_K(I)) = \mathcal{A}_K(I)$是否成立。

这是因为我们可以针对具有紧支集的 γ 以及 $\mathcal{A}_K(I)$的生成元检验该包含关系：

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad} U_K(\gamma)\left(K\left(\bigotimes_\kappa x_\kappa\right)\right) &= K\left(\bigotimes_\kappa \operatorname{Ad} U_\kappa(\gamma)(x)\right) \in \mathcal{A}_K(I),\\ \operatorname{Ad}\hat{U}_K(\gamma)(\psi_K^g) &= \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g)}(\gamma)\right)\psi_K^g \in \mathcal{A}_K(I),\\ \operatorname{Ad}\hat{U}_K(\gamma)((\psi_K^g)^*) &= \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g)^{-1}}(\gamma)\right)(\psi_K^g)^* \in \mathcal{A}_K(I).\end{aligned}$$

因为 $z_{\kappa(g)}(\gamma) \in \mathcal{A}_\kappa(I)$。一般的 γ 可写成紧支集微分同胚的乘积，因此得到包含关系 $\operatorname{Ad} U_K(\gamma)(\mathcal{A}_K(I)) \subset \mathcal{A}_K(I)$；反向包含关系则可通过将此结论应用于 γ^{-1}得到。

有了这一良定义性，协变性的第一部分 (1dCN3) 即由定义得出。关于第二部分，若 $\operatorname{supp}\gamma$与 I不相交，则由 $\mathcal{A}_\kappa$的协变性，$U_K(\gamma)$与 $\hat{}K(\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa(I))$ 对易。此外，$U_K(\gamma)$与 ψ_K^g对易，因为逐分量地，ψ_K^g是平移与$\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa(I)$中一个元素的乘积，而 $U_K(\gamma) \in \hat{}K(\bigotimes_\kappa \mathcal{A}_\kappa(I'))$；后者与平移对易，因为 $\kappa(g)$局部化于 I。

能量正性 (1dCN4) 成立，因为 U_K 是正能量表示的直和。真空 Ω_K 在 $U_K|_{\mathrm{Möb}}$ 作用下保持不变，因为它是真空向量 $\mathcal{A}_\kappa$的张量积。它是 $\mathcal{A}_K(I_1)$的循环向量，其中 $I_1 \subset I'$，因为 $\mathcal{A}_K(I_1)\Omega_K$ 张成$\bigotimes_\kappa \mathcal{H}_\kappa$，这源于 $\mathcal{A}_\kappa$的真空向量具有循环性；而整个 $\mathcal{H}_K$，因为 $\mathcal{A}_K(I_1)$包含平移 $\hat{}K(z_g(\gamma))\psi_K^g$ （相差一个作用于左侧的酉元）。根据假设 $\sum_\kappa D_{\kappa,\kappa(g)} \in \mathbb{Z}$ 对每个 $g \in G$，我们可以应用命题 2.1。

至于局域性，我们取 γ 使得 $\gamma\cdot I$ 与 I 不相交。我们必须证明 $\mathcal{A}_K(I)$ 的生成元 $\hat{}K(\bigotimes_\kappa x_\kappa), \psi_K^{g_1}$ 和 $\mathcal{A}_K(\gamma\cdot I)$ 的伴随作用 $U_K(\gamma)\left(\hat{}K(\bigotimes_\kappa y_\kappa)\right)$, 伴随作用 $U_K(\gamma)(\psi_K^{g_2})$ 彼此对易。除了涉及 $\psi_K^{g_1}$ 和伴随作用 $U_K(\gamma)(\psi_K^{g_2})$ 的情形外，这很容易。正如我们所见，伴随作用 $U_K(\gamma)(\psi_K^g) = \hat{}K\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g)}(\gamma)\right)\psi_K^g$。因此，为了计算对易子，

$$\begin{aligned}\psi_K^{g_1}\operatorname{Ad} U_K(\gamma)(\psi_K^{g_2}) &= \psi_K^{g_1}\hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g_2)}(\gamma)\right)\psi_K^{g_2}\\ &= \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa \kappa(g_1)(z_{\kappa(g_2)}(\gamma))\right)\psi_K^{g_1}\psi_K^{g_2},\end{aligned}$$

and

$$\operatorname{Ad} U_K(\gamma)(\psi_K^{g_2})\psi_K^{g_1} = \hat{K}\left(\bigotimes_\kappa z_{\kappa(g_2)}(\gamma)\right)\psi_K^{g_2}\psi_K^{g_1}.$$

现在注意到 $z_{\kappa(g_2)}(\gamma)^*\kappa(g_1)(z_\kappa(g_2)(\gamma)) = \epsilon_\kappa^{\pm}{}_{(g_1)\,\kappa(g_2)}$ （DHR 编织，在自同构 $\kappa(g_1)$ 和 $\kappa(g_2)$ 的情形下是一个标量），其中 $\pm$ 符号仅取决于 γ 向左还是向右移动I，并且所有 κ都共用 $\pm$ 的选择。因此，两个左

端相等当且仅当 $\prod_\kappa \epsilon^{\pm}_{\kappa\ (g_1)\ \kappa(g_2)} = 1$，且对每个 g_1，$g_2 \in G$均成立。通过将 $\kappa(g_1)$ 替换为 $\kappa(g_1)^{-1}$ 并使用条件 $\prod_\kappa \epsilon^{\pm}_{\kappa\ (g_1)^{-1},\kappa(g_2)} = 1$ 和 $(\psi_K^{g_1})^* \psi_K^{g_2} = \psi_K^{g_2}(\psi_K^{g_1})^*$，也可得到 $(\psi_K^{g_1})^*$ 与 $U_K(\gamma)(\psi_K^{g_2})$ 的伴随作用之间的交换关系。一般区间的局域性由上一段和协变性推出。

□

如果所有 $\mathcal{A}_\kappa$ 都具有强可加性，即 $\mathcal{A}_\kappa(I_3) = \mathcal{A}_\kappa(I_1) \vee \mathcal{A}_\kappa(I_2)$，其中 I_1是从 I_3中去掉一个点得到的 I_2，那么 $\mathcal{A}_K$ 也具有强可加性。这可以通过取$I_1 = I$看出；此时，由相同的 $\psi_K^g \in \mathcal{A}_K(I)$ 和 $K(\bigotimes_\kappa x_\kappa)$ 生成 $\mathcal{A}_K(I_3)$，$x_\kappa \in \mathcal{A}_\kappa(I_3) = \mathcal{A}_\kappa(I) \vee \mathcal{A}_\kappa(I_2)$。

即使只有一个指标 κ，只要满足条件$\epsilon^{\pm}_{\kappa\ (g_1)\ \kappa\ (g_2)} = 1$，也可以进行这一构造。将其应用于 U(1)电流网，可得到 [BMT88], 中所考虑的扩张（参见第6节），其中 $G = \mathbb{Z}$，映射 κ 是一个群同构，并且$\kappa(g_1)$、$\kappa(g_2)$ 是同一个固定自同构 $\kappa(h)$ 的幂，该自同构具有 $\epsilon^{\pm}_{\kappa\ (h)\ \kappa\ (h)} = 1$ （玻色自同构）。

4 由消除编织映射产生的二维共形场论

仿照第3节中的思路，我们在 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上构造共形网。这里，我们从左右手征分量出发，将它们的张量积作为二维共形网，然后求其扩张。在张量积理论的基础上，通过添加与自同构的适当子群相关联的“带电场”来构造 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上的扩张，这一问题也已在 [Reh90b 的第 5], 节中得到研究；特别参见 [Reh90b，命题 5。5], 该研究是在约化场丛 [FRS89], [FRS92]的框架下进行的。

4.1 尖点张量范畴中的扩张

先考虑定义在 S^1 上的一对共形网 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$、$\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$。我们固定一个区间 $I \subset S^1$。与第3节一样，我们假设 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ 分别具有一族 Δ_{L}、Δ_{R} 自同构（有限或无限）；这些自同构彼此不等价、可交换且局部化于 I，其中包含平凡自同构 id_{L}、id_{R}，并且它们的融合规则（在酉等价意义下）同构于同一个阿贝尔群 G；参见第2.2.3节。该群 G 应当是有限生成的；或者，我们假设可以在 Δ_{L}、Δ_{R} 中选取元素以及带电场$\psi^g{}_{\mathrm{L}}$ $\psi^g{}_{\mathrm{R}}$，使它们具有命题 2.3 的结论（对于 $\kappa = $L、R）及其后续注释中所述的可交换性质。本节中，我们用 L、R（而非 κ）表示由所选自同构分别对应的从 G 到 Δ_{L}、Δ_{R} 的双射；并用 $D_{\mathrm{L}(g)}$、$D_{\mathrm{R}(g)}$ 表示相应自同构的共形维数，其中 $g \in G$。

我们假设

- Δ_{L} 和 Δ_{R} 包含 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$的平凡自同构 id_{L}、id_{R}，它们对应于 G 经由 ι 所对应的单位元，即 $\mathrm{L}(\iota) = \mathrm{id}_{\mathrm{L}}$、$\mathrm{R}(\iota) = \mathrm{id}_{\mathrm{R}}$。
- 对于每个 $g_1, g_2 \in G$，都有 $\epsilon^{\pm}\,\mathrm{L}(g_1),\overline{\mathrm{L}(g_2) = \epsilon^{\mp}}\,\mathrm{R}(g_1),\mathrm{R}(g_2)$ 和 $\epsilon^{\overline{\pm\,\mathrm{L}(g_1),\mathrm{L}(g_2)}^{-1} = \epsilon^{\mp}}\,\mathrm{R}(g_1),\mathrm{R}(g_2)^{-1}$(编织抵消)，并且 $D\mathrm{L}(g) - D\mathrm{R}(g) \in \mathbb{Z}$ 对于每个 $g \in G$。

我们用同一个符号表示 $\epsilon^{\pm}{}_{\mathrm{L}(g_1),\mathrm{L}(g_2)}$ 与 $\amalg$（平凡交织算子，即 $\mathrm{L}(g_1)\mathrm{L}(g_2)=\mathrm{L}(g_2)\mathrm{L}(g_1)$与其自身之间的平凡交织算子），它对应于 $\mathrm{L}(g_1)$ 与 $\mathrm{L}(g_2)$ 的编织。$\mathrm{R}(g_1)$ 与 $\mathrm{R}(g_2)$ 的情形类似。

备注 4.1. 令 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}=\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$。如果 G 是循环的，那么只要对每个 $g\in G$ 取 $\Delta_{\mathrm{L}}=\Delta_{\mathrm{R}}$ 和 $\mathrm{L}(g)=\mathrm{R}(g)^{-1}$，编织抵消就是自动成立的。事实上，对于可交换自同构，有 $\epsilon^{\pm}\,\mathrm{L}(g_1),\mathrm{L}(g_2)=\epsilon^{\mp}\,\mathrm{L}(g_2)^{-1},\mathrm{L}(g_1)^{-1}$。现在，对于同一个 $\mathrm{L}(h)$ 的幂所给出的自同构 $\mathrm{L}(g_1)$、$\mathrm{L}(g_2)$，即对于 n、$m\in\mathbb{Z}$，有 $\mathrm{L}(g_1)=\mathrm{L}(h)^n$、$\mathrm{L}(g_2)=\mathrm{L}(h)^m$，成立 $\epsilon^{\pm}\,\mathrm{L}(g_1),\mathrm{L}(g_2)=(\epsilon^{\pm}\,\mathrm{L}(h),\mathrm{L}(h))^{nm}=\epsilon^{\pm}\,\mathrm{L}(g_2),\mathrm{L}(g_1)$（即 $\mathrm{L}(h)$ 的统计相位的 nm 次幂）。因此 g_1 和 g_2 可以交换，于是编织抵消成立。

利用这一输入，我们如下构造 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上的共形网 $\mathcal{A}$。

- 完整的希尔伯特空间为 $\widetilde{\mathcal{H}}:=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}_{\mathrm{L}(g)\,\mathrm{L}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{R}(g)\,\mathrm{R}}$。在 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上，任何形如$x_{\mathrm{L}}\otimes x_{\mathrm{R}}\in\mathcal{A}_{\mathrm{L}}(I_{\mathrm{L}})\otimes\mathcal{A}_{\mathrm{R}}(I_{\mathrm{R}})$ 的算子都作用为 $\bigoplus_{g\in G}\mathrm{L}(g)(x_{\mathrm{L}})\otimes\mathrm{R}(g)(x_{\mathrm{R}})$（关于此记号，参见脚注 3）。将此表示记为 $\widetilde{\tau}$。
- $\widetilde{\mathcal{A}}$ 的真空向量为 $\Omega_{\mathrm{L}}\otimes\Omega_{\mathrm{R}}\in\mathcal{H}_{\mathrm{L}(\iota)\,\mathrm{L}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{R}(\iota)\,\mathrm{R}}$。
- 协变性由 $\widetilde{U}(\gamma_{\mathrm{L}}\times\gamma_{\mathrm{R}})$ 给出：$=\bigoplus_{g\in G}U_{\mathrm{L}(g)\,\mathrm{L}}(\gamma_{\mathrm{L}})\otimes U_{\mathrm{R}(g)\,\mathrm{R}}(\gamma_{\mathrm{R}})$，这是 $\mathrm{Diff}_+(S^1)\times\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 的酉射影表示。根据假设，~~$D_{\mathrm{L}(g)}-D_{\mathrm{R}(g)}\in\mathbb{Z}$, U 中~~满足命题 2.5 的条件。
- 注意到，$\widetilde{\mathcal{H}}$ 可以自然地视为 $\mathcal{H}_{\mathrm{L}}\,\hat{\otimes}\,\mathcal{H}_{\mathrm{R}}=\left(\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}_{\mathrm{L}(g)\,\mathrm{L}}\right)\hat{\otimes}\left(\bigoplus_{g\in G}\mathcal{H}_{\mathrm{R}(g)\,\mathrm{R}}\right)$ 的子空间。记 $\mathrm{L}:=\bigoplus_{g\in G}\mathrm{L}(g)$，$\mathrm{R}:=\bigoplus_{g\in G}\mathrm{R}(g)$。
- 设 $\psi^g{}_{\mathrm{L}}\ \psi^g{}_{\mathrm{R}}$ 如第2.2.3节中所述，其中 $V^{g,h}$ 按命题 2.3 选取。对于每个$g\in G$，定义荷算符 ψ^g 如下

$$\widetilde{\psi}^g:=\psi^g_{\mathrm{L}}\otimes\psi^g_{\mathrm{R}}\in\mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}})\otimes\mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{R}}).\tag{4.1}$$

显然，$\widetilde{\psi}^g$ 保持 $\mathcal{H}$不变。

由此定义和（2.1）可知

$$\widetilde{\psi}^g\hat{\mathrm{L}}(x_{\mathrm{L}})\otimes\hat{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})=\hat{\mathrm{L}}(\mathrm{L}(g)(x_{\mathrm{L}}))\otimes\hat{\mathrm{R}}(\mathrm{R}(g)(x_{\mathrm{R}}))\widetilde{\psi}^g,\tag{4.2}$$

正如（3.1）中一样。

- $\mathcal{A}$的局部代数如下：对于菱形区域 $I\times I$，令 $\mathcal{A}(I\times I):=\widetilde{\ }\ \widetilde{\tau}(\mathcal{A}_{\mathrm{L}}(I)\otimes\mathcal{A}_{\mathrm{R}}(I))\vee\{\widetilde{\psi^g},(\psi^g)^*\}_{g\in G}$。对于任意其他菱形区域 $\gamma_{\mathrm{L}}\cdot I\times\gamma_{\mathrm{R}}\cdot I$，令$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\mathcal{A}(\gamma_{\mathrm{L}}\cdot I\times\gamma_{\mathrm{R}}\cdot I):=$ 伴随作用 $U(\gamma_{\mathrm{L}}\times\gamma_{\mathrm{R}})(\mathcal{A}(I\times I))$。

定理 4.2. 网 $(\mathcal{A},U,\Omega)$ 满足 (2dCN1)–(2dCN5) 以及命题 2.5 的条件，因此在 $\mathcal{E}$ 上给出一个共形网，扩张了二维共形网$\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$。

~证明. 大多数性质，包括 $\mathcal{A}$ 的良定义性、除 (2dCN2) 外的 (2dCN1)–(2dCN5)，以及命题 2.5 的条件，均可在假设 $D_{\mathrm{L}(g)} - D_{\mathrm{R}(g)} \in \mathbb{Z}$ 下按照 [MTW18, 第 6], 节中的方法验证。至于局域性，在 [MTW18, 第 6], 节的证明中，唯一重要的是 $\epsilon^{\pm}$ L(g_1),L(g_2) $= \epsilon^{\mp}$ R(g_1),R(g_2) 为标量，这一点我们作此假设。($\widetilde{\psi}^{g_1}$)* 与 伴随作用 $U(\gamma_{\mathrm{L}} \times \gamma_{\mathrm{R}})$($\widetilde{\psi}^{g_2}$) 之间的对易关系由 $\epsilon^{\pm}$L(g_1)$^{-1}$,L(g_2) $= \epsilon^{\mp}$R(g_1)$^{-1}$,R(g_2) 得出。因此，局域性 (2dCN2) 的证明同样成立。 □

4.2 与 Longo–Rehren 扩张的比较

在本节中，我们回顾在 [LR95，命题 4.10], 另见 [Mas00], [KLM01，附录 A], [BKLR15, 第 3 节.3]及其中参考文献中引入的所谓 Longo–Rehren 扩张，并将其诠释为“广义移位构造”。稍后，我们将把它们与前几节中介绍的扩张联系起来。

设 $\mathcal{N}$ 为一个无限因子（例如， $\mathcal{N} = \mathcal{A}_{\kappa}(I)$ 为定义在 S^1上的共形网的局部代数）。设 $\mathcal{C}$ 为一个酉融合范畴（暂时不必带编织的），并将其实现为 End($\mathcal{N}$) 的一个全子范畴；End($\mathcal{N}$) 是 $\mathcal{N}$的正规单射幺 *-端同态的集合。关于酉融合范畴的预备知识（不失一般性地实现为冯·诺伊曼代数的端同态），我们可参阅例如 [BKLR15], [EGNO15]。我们用 Hom$_{\mathcal{C}}(\rho,\sigma)$ 表示 $V \in \mathcal{N}$ 之间的交织算子空间，其中 ρ 和 σ 是 $\mathcal{C}$中的对象，即对于每个 $x \in \mathcal{N}$，有 $V\rho(x) = \sigma(x)V$；这些是我们的端同态子范畴中的态射。

对于 $\mathcal{C}$ 中每个不可约对象的幺正等价类，选取一个代表元ρ_i, $i = 0, \ldots, n$，其中 $\rho_0 =$ id，并记作 $\Delta := \{\rho_0, \ldots, \rho_n\}$。注意，若 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset$ End($\mathcal{N}$) 是两个酉融合范畴，则 Deligne 张量积 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ [BK01, Definition 1.1.15] 可在 End($\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}$) 中实现，其中 $\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}$ 是冯·诺伊曼代数的空间张量积[4]。接下来，设 $\mathcal{J}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\mathcal{J}}$ 是冯·诺伊曼代数之间的反线性同构，其中 $\mathcal{N}^{\mathcal{J}} := \mathcal{J}(\mathcal{N})$，例如自然对合 $\mathcal{J}\colon x \mapsto x^*$，其中 $\mathcal{N}^{\mathcal{J}} \cong \mathcal{N}^{\mathrm{opp}}$。考虑酉融合范畴 $\mathcal{C}^{\mathcal{J}} \subset$ End($\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$)，其对象为 $\rho^{\mathcal{J}} := \mathcal{J} \circ \rho \circ \mathcal{J}^{-1} \in$ End($\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$)，其中 ρ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象；其态射为 $t^{\mathcal{J}} := \mathcal{J}(t)$，其中 t 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。

空间张量积冯·诺伊曼代数$\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}}$（因子的一种不可约有限指标含单位包含 $\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M}$）的 Longo–Rehren 扩张，由 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \subset$ End($\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}}$) 中如下定义的不可约 Q-系统（$\Theta_{\mathrm{LR}}, W_{\mathrm{LR}}, X_{\mathrm{LR}}$）指定。设

$$\Theta_{\mathrm{LR}} := \bigoplus_{i=0,\ldots,n} \rho_i \bar{\otimes} \rho_i^{\mathcal{J}} \in \mathrm{End}(\mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}}).$$

直和通过选取一族 $n+1$等距算子 $T_{i,i} \in \mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}}$, $i = 0, \ldots, n$ 来定义，它们在 $T_{i}^{*},_{i} T_{i'},_{i'} = \delta_{i,i'} \mathbb{I}$ 的意义下“彼此正交”，并且在 $\sum_{i=0,\ldots,n} T_{i,i} T_{i}^{*},_{i} = \mathbb{I}$ 的意义下“完备”；再令 $\Theta_{\mathrm{LR}}(x) := \sum_{i=0,\ldots,n} T_{i,i} \rho_i \bar{\otimes} \rho_i^{\mathcal{J}}(x) T_{i}^{*},_{i}$对每个 $x \in \mathcal{N} \bar{\otimes} \mathcal{N}^{\mathcal{J}}$ 都成立。因此，根据定义，对每个 $i = 0, \ldots, n$，都有 $T_{i,i} \in$ Hom$_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(\rho_i \bar{\otimes} \rho_i^{\mathcal{J}}, \Theta_{\mathrm{LR}})$。注意，端同态 Θ_{LR} 在 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 中并非“简单张量”，除非 $n = 0$。

[4]在本节中，我们用 $\bar{\otimes}$ 表示算子的空间张量积，以便将其与范畴张量积函子 $\otimes$ 区分开来，后者将在下文中作用于交织算子。

令 $W_{\mathrm{LR}} := T_{0,\ 0} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(\mathrm{id}\ \bar{\otimes}\mathrm{id}\ \Theta_{\mathrm{LR}})$ 为 Q-系统的单位，并令

$$X_{\mathrm{LR}} := \sum_{i,j,k=0,\dots,n} \sqrt{\frac{d(\rho_i)d(\rho_j)}{d(\rho_k)}} (T_{i,i} \otimes T_{j,j})(\sum_{V} V\bar{\otimes}V^{\mathcal{J}}) T^*_{k,k} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(\Theta_{\mathrm{LR}}, \Theta^2_{\mathrm{LR}})$$

为该 Q-系统的余乘法，其中 $V \in \mathcal{N}$ 遍历N_i^k的一个选定正交归一基，$_j$（=是 $\rho_i\rho_j$中 ρ_k的重数，可能为 0）是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_k, \rho_i\rho_j)$ 的等距算子（其维数确实等于 $N_i^k{}_{,j}$），对每个固定的 $i, j, k = 0, \dots, n$，相对于内积$V^*V' = \delta_{V,V'}1$而言。 X_{LR}的定义与此选择无关，因为 $\mathcal{J}$是反线性的。注意，$T_{i,i} \otimes T_{j,j}$ 表示自同态范畴中态射的张量积，并且 X_{LR}和 W_{LR}都属于 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$。规范化条件为$W^*_{\mathrm{LR}}W_{\mathrm{LR}} = \mathbb{I}$和$X^*_{\mathrm{LR}}X_{\mathrm{LR}} = (\sum_i d(\rho_i)^2)\ 1$。由于（$\Theta_{\mathrm{LR}}, W_{\mathrm{LR}}, X_{\mathrm{LR}}$）是一个 Q-系统，参见 [LR95，命题 4.10] 中的证明，并比较 [BKLR15，定义 3.8], [及 BKLR15，命题 3.19], ，则根据 [Lon94]$\Theta_{\mathrm{LR}} \in \mathrm{End}(\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}})$ 是一个不可约有限指数含幺扩张的对偶典范端同态 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M}$；如果 $\mathcal{N}$和 $\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$分别实现于 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}^{\mathcal{J}}$上，则该扩张实现于希尔伯特空间 $\mathcal{H}\bar{\otimes}\mathcal{H}^{\mathcal{J}}$上。Jones/正则隧道的起始部分，参见 [LR95，第 2.5],节，写作

$$\mathcal{M}_{-2} \subset \mathcal{M}_{-1} \subset \mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M},$$

其中 $\mathcal{M}_{-2} := \Theta_{\mathrm{LR}}(\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}})$ 是 Θ_{LR} 的像，而 $\mathcal{M}_{-1} := \langle \Theta_{\mathrm{LR}}(\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}})\ X_{\mathrm{LR}} \rangle$ 是与 X_{LR} 一起生成的冯·诺伊曼代数。两个子因子 $\mathcal{M}_{-2} \subset \mathcal{M}_{-1}$和 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M}$ 空间同构。Q-系统 (Θ_{LR}, $W_{\mathrm{LR}}, X_{\mathrm{LR}}$) 还指定了一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$ 的（由不可约性唯一确定的正规忠实）条件期望 E，其 Jones 投影为 $e \in \mathcal{M}_1$（相对于 E 的 $\mathcal{M}$ 的 Jones 扩张），或者等价地，指定了从 $\mathcal{M}_{-1}$ 到 $\mathcal{M}_{-2}$ 的 $E_{-2}(\cdot) := \Theta_{\mathrm{LR}}(W^*_{\mathrm{LR}} \cdot W_{\mathrm{LR}})$，其 Jones 投影为 $e_{-2} := W_{\mathrm{LR}}W^*_{\mathrm{LR}}$。

注记 4.3。选取 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}}$ 上的一个态 ω（例如，在量子场论语境中的真空态），并在 ($\mathcal{M}$, $\omega \circ E$) 的 GNS 希尔伯特空间中进行处理，便得到量子场论中对扩张 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}} \subset \mathcal{M}$ 更为常见的描述：它带有一个真空向量 Ω（对于 $\mathcal{M}$ 循环且分离，并诱导一个 E-不变态），使得 $e = [\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}}\Omega],$；参见 LR95 的定理 4.9] 的证明 [。

令 $\psi_{j,j} := \Theta_{\mathrm{LR}}(T^*_{j,j})X_{\mathrm{LR}} \in \mathcal{M}_{-1}$，对每个 $j = 0, \dots, n$。每个 $\psi_{j,j}$在 $\mathcal{M}_{-2} \subset \mathcal{M}_{-1}$ 上都具有“带电场交织算子”性质，其含义是 Doplicher–Roberts [DR72], ，即

$$\psi_{j,j}\Theta_{\mathrm{LR}}(x) = \Theta_{\mathrm{LR}}(\rho_j\bar{\otimes}\rho_j^{\mathcal{J}}(x))\psi_{j,j}, \quad x \in \mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}}.$$

我们将 $\psi_{j,j}$ 称为 Longo–Rehren Q-系统（$\Theta_{\mathrm{LR}}, W_{\mathrm{LR}}, X_{\mathrm{LR}}$）的带电场。对于其他任意端同态的Q-系统，也可以定义此类带电场。

由于 $X_{\mathrm{LR}} = \sum_{j=0,\dots,n} \Theta_{\mathrm{LR}}(T_{j,j})\psi_{j,j}$，且 $\sum_{j=0,\dots,n} T_{j,j}T^*_{j,j} = \mathbb{I}$，因此成立

$$\mathcal{M}_{-1} = \langle \mathcal{M}_{-2}, \psi_{0,0}, \dots, \psi_{n,n} \rangle.$$

注意，$\psi_{0,0} = \Theta_{\mathrm{LR}}(T^*_{0,0})X_{\mathrm{LR}} = \Theta_{\mathrm{LR}}(W^*{}_{\mathrm{LR}})X_{\mathrm{LR}} = \mathbb{I}$。

令 $\mathcal{H}_{j,j} := T_{j,j}T^*_{j,j}\mathcal{H} \bar{\otimes}\mathcal{H}^{\mathcal{J}}$，对于每个 $j = 0$、.....、 n，得到一个正交分解

$$\mathcal{H}\bar{\otimes}\mathcal{H}^{\mathcal{J}} = \bigoplus_{j=0,\dots,n} \mathcal{H}_{j,j}. \tag{4.3}$$

注意，$\mathcal{H}_{0,\ 0}$是 Jones 投影 $e_{-2}=T_{0,\ 0}T_{0,\ 0}^{*}=W_{\mathrm{LR}}W^{*}{}_{\mathrm{LR}}$的值域。此外，根据 X_{LR} 和 $T_{i,\ i}\otimes T_{j,\ j}=\Theta_{\mathrm{LR}}(T_{j,\ j})T_{i,\ i}$ 的定义，可得

$$\psi_{j,j}=\sum_{i,k=0,\ldots,n}\sqrt{\frac{d(\rho_i)d(\rho_j)}{d(\rho_k)}}T_{i,i}(\sum_{V}V\bar{\otimes}V^{\mathcal{J}})T_{k,k}^{*},$$

其中，第一个求和遍历所有满足 $\mathrm{Hom}(\rho_k,\rho_i\rho_j)\neq\langle 0\rangle$ 的 i,k，其中 j 固定；第二个求和遍历所选的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_k,\rho_i\rho_j)$ 中等距算子的正交归一基里的 V。注意，虽然根据 Θ_{LR} 的定义，$\mathcal{M}_{-2}$ 对 $\mathcal{H}\bar{\otimes}\mathcal{H}^{\mathcal{J}}$ 的作用是对角的，但带电场 $\psi_{j,j}$ 会混合不同分量。

注 4.4. 在尖点幺正融合范畴 $\mathcal{C}$ 的特殊情形下（特别是 $d(\rho_i)=d(\rho_j)=d(\rho_k)=1$，且融合环是一个有限群），所有向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_k,\rho_i\rho_j)$ 的维数都为 1 或 0。在这种情形下，每个 $\psi_{j,j}$ 都作为 $\mathcal{H}\bar{\otimes}\mathcal{H}^{\mathcal{J}}$ 的分次上的“右移算子”运行，将每个子空间 $\mathcal{H}_{k,k}$, $k=0,\ldots,n$ 映射到子空间 $\mathcal{H}_{i,i}$，使得 $[\rho_k]=[\rho_i\rho_j]$，即 $[\rho_k\rho_j^{-1}]=[\rho_i]$。此外，对于每个 $j,j'=0,\ldots,n$,

$$\psi_{j,j}\psi_{j',j'}=\sum_{i,k=0,\ldots,n}T_{i,i}(V\bar{\otimes}V^{\mathcal{J}})T_{k,k}^{*}\sum_{i',k'=0,\ldots,n}T_{i',i'}(V'\bar{\otimes}V'^{\mathcal{J}})T_{k',k'}^{*}$$

其中 i、k、i'、k' 满足 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_k,\rho_i\rho_j))=1$，且 $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_{k'},\rho_{i'}\rho_{j'}))=1$。注意，由于 Δ 已固定，V、V' 都是在相位因子意义下唯一的，而 $\mathcal{J}$ 是反线性的，因此在尖点的情形下，其选择无关紧要是显而易见的。如果我们可以选择使 Δ 成为一个群（即在乘法下闭合，如 $\rho_0=\mathrm{id}$），那么利用 T_{k}^{*}、${}_{k}T_{i'}$、${}_{i'}=\delta_{k}$、${}_{i'}\mathbb{I}$ 以及对某个满足 $\rho_j\rho_{j'}=\rho_h$ 的 $\rho_h\in\Delta$ 而言的 $VV'\in\mathrm{Hom}(\rho_{k'},\rho_i\rho_j\rho_{j'})=\mathrm{Hom}(\rho_{k'},\rho_i\rho_h)$，便可推出 ψ_j、${}_{j}\psi_{j'}$、${}_{j'}=\psi_h$、${}_{h}$。如果我们将某个 ρ_j 的逆元（在自同构的情形下即为共轭）选为某个 $\rho_l\in\Delta$，并与 $\rho_0=\mathrm{id}$ 一起使用，那么 ψ_j^{*}、${}_{j}=\psi_l$、${}_{l}$。

如果 $\mathcal{C}$ 还带有编织结构（不一定是尖点的），且 $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 配备了由 $\mathcal{J}$ 诱导的编织，那么 Longo–Rehren Q-系统是交换的。参见 [LR95 命题 4.10] 的证明之后的讨论，并参照 [BKLR15 命题 4.21]。令 $\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_j}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的编织及其对偶，则交换性条件写作 $\epsilon^{\pm}_{\Theta_{\mathrm{LR}},\Theta_{\mathrm{LR}}}X_{\mathrm{LR}}=X_{\mathrm{LR}}$，即对每个 i、$j=0$、……、n,

$$\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_j}\bar{\otimes}\,\epsilon^{\pm,\mathcal{J}}_{\rho_i,\rho_j}\,\psi_{i,i}\psi_{j,j}=\psi_{j,j}\psi_{i,i},\tag{4.4}$$

其中 $\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_j}\bar{\otimes}\,\epsilon^{\pm}{}_{,\rho_i}{}^{\mathcal{J}}{}_{,\rho_j}$ 是 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 中 $\rho_i\bar{\otimes}\rho_i^{\mathcal{J}}$ 与 $\rho_j\bar{\otimes}\rho_j^{\mathcal{J}}$ 之间的编织，也是 Θ_{LR} 的不可约直和项。

注 4.5. 若 $\mathcal{C}$ 是带编织的且为尖点的，则每个编织 $\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_j}$ 都是任意固定酉交织算子 $U\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\rho_i\rho_j,\rho_j\rho_i)$ 的相位倍数（$\rho_i\rho_j$ 和 $\rho_j\rho_i$ 均为自同构，因而不可约）。因此，对于 $i=j$，取 $U=\mathbb{I}$ 并利用 $\mathcal{J}$ 的反线性，即得 $\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_i}\bar{\otimes}\,\epsilon^{\pm}{}_{,\rho_i}{}^{\mathcal{J}}{}_{,\rho_i}=\mathbb{I}\bar{\otimes}\mathbb{I}$。等价地，每个 $\rho_i\bar{\otimes}\rho_i^{\mathcal{J}}$ 的统计相位都是 $+1$（$\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 中所有玻色自同构的统计相位相同，等于自同构情形下的自编织（所对应的相位））。此外，若对每个 $i\neq j$ 都有 $\rho_i\rho_j=\rho_j\rho_i$，其中这些自同构作用于 $\mathcal{N}$（例如，在 DHR 自同构和 $\mathcal{N}=\mathcal{A}_{\kappa}(I)$ 的情形下通过类空局域化得到；或者 ρ_i 和 ρ_j 是同一自同构的不同次幂，如循环群的情形），则也可以取 $U=\mathbb{I}$，并且

$\epsilon^{\pm}_{\rho_i,\rho_j}\bar{\otimes}\epsilon^{\pm}{}^{\mathcal{J}}_{,\rho_i,\rho_j} = {}_{\mathbb{I}}\bar{\otimes}_{\mathbb{I}}$ 对每个 $i,j=0,\dots,n$ 都成立。在后一种可交换自同构的情形下，带编织的 pointed 融合范畴的 Longo–Rehren Q-系统的可交换性表述为

$$\psi_{i,i}\psi_{j,j} = \psi_{j,j}\psi_{i,i}.$$

如果我们取 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 S^1上一个（完全）有理共形网的表示范畴，那么根据 [KLM01]的结果， $\mathcal{C}$ 必然是酉融合（有限多个扇区）且带编织的（也是模的，参见例如 [BK01]），并配备 DHR 编织。于是，Longo–Rehren Q-系统通过选择 $\mathcal{N}\bar{\otimes}\mathcal{N}^{\mathcal{J}} = \mathcal{A}_\kappa(I)\bar{\otimes}\mathcal{A}_\kappa(I)^{\mathcal{J}}$，其中 I 是 $\mathbb{R}$ 上关于原点对称的一个区间， $\mathcal{J}$ 是相对于 $\mathcal{A}_\kappa(\mathbb{R}_+)$的模共轭，$\Omega_\kappa$（通过这一选择， $\rho_i^{\mathcal{J}} \cong \bar{\rho}_i$，因此在尖点的情形下尤其有 $\rho_i^{\mathcal{J}} \cong \rho_i^{-1}$ ），为 $\mathcal{A}_\kappa\bar{\otimes}\mathcal{A}_\kappa^{\mathcal{J}}$上$\mathbb{R}^{1+1}$的张量积共形网（左右手征分量相同）提供了一个不可约、有限指标的局部（由交换性性质 (4.4) 得出）且“对角”的扩张 $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{LR}}$。参见 [LR95，定理 4.9], ；关于从局部网的表示范畴中的任意 Q-系统构造扩张的一般方法，参见 [DG18，定理 6.8], ；关于 Longo–Rehren Q-系统，参见 [LR95，命题 4.10] 证明之后的评论。

5 由带电主场构造的共形 Wightman 场

5.1 共形 Wightman 公理

这里我们说明，对于第 3 节和第 4 节中讨论的某些扩张，可以赋予如下定义的共形 Wightman 场。自然可以预期，这类在 $\mathbb{R}^{1+1}$ 上的 Wightman 场也会像共形网那样扩张到 $\mathcal{E}$ ，因此我们在 $\mathcal{E}$上表述 Wightman 场。

为简单起见，我们先从 S^1上的手征场开始。设 $S^1\subset\mathbb{C}$ 以及逆时针方向为光状方向，其中 S^1 被视为 $\mathbb{R}$的一点紧化，如第 2.1 节所述。

在 S^1 上的、共形维数为 D 的共形 Wightman 场，是一种在微分同胚作用下按照下方 (1dW2) 式变换为张量场 $f\frac{d}{d\theta}^{\otimes D-1}$ 的量子场；这类场称为主场：对于 $D\in\mathbb{N}$、$\gamma\in$ Diff+(S^1) 和 $f\in C^\infty(S^1)$，我们定义（参见 [RTT22]）

$$X_\gamma(e^{i\theta}) := -i\frac{d}{d\theta}\log(\gamma(e^{i\theta})),$$
$$(\beta_D(\gamma)f)(z) := (X_\gamma(\gamma^{-1}(z)))^{D-1}f(\gamma^{-1}(z)).$$

注意， γ 是保向的，因此 X 严格为正，并且$(X_\gamma(\gamma^{-1}(z)))^{D-1}$ 对固定的 γ有某个正下界。

S^1 上的共形 Wightman 场论是一族取值于算子的分布 $\{\phi_{\kappa,j}\}$ （κ 是固定标签，而 j 为该族编索引），定义在 S^1上，并在取共轭后保持封闭（$\phi^\dagger_{\kappa,\,j}$也属于该族）；它们具有相应的共形维数 $\{D_{\kappa,j}\}$，定义在公共不变稠密定义域 $\mathscr{D}\subset\mathcal{H}_\kappa$上，并配有 Diff+($S^1$)的酉射影表示 U_κ 以及一个向量 $\Omega_\kappa\in\mathcal{H}_\kappa$ ，使得

(1dW1) 局域性：对于具有不相交支集的 $f, g \in C^\infty(S^1)$，$[\phi_{\kappa,j_1}(f)\,\phi_{\kappa,\,j_2}(g)] = 0$ 在 $\mathscr{D}$ 上成立。

(1dW2) 微分同胚协变性：$U_\kappa(\gamma)$ 保持 $\mathscr{D}$，并且满足

$$\mathrm{Ad}\,U_\kappa(\gamma)(\phi_{\kappa,j}(f)) = \phi_{\kappa,j}(\beta_{D_{\kappa,j}}(\gamma)f), \qquad \text{for } \gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1).$$

(1dW3) 能量正性：U_κ 的旋转谱包含于 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 中。

(1dW4) 真空与 Reeh-Schlieder性质：存在唯一的（相差一个相位因子）向量 $\Omega_\kappa \in \mathcal{H}_\kappa$，使得 $U_\kappa(\gamma)\Omega_\kappa = \Omega_\kappa$ 对于 $\gamma \in \mathbf{M}^{\cdot\cdot}\mathbf{ob}$ 成立；以及形如 $\phi_{\kappa,j_1}(f_1)\cdots\phi_{\kappa,j_\ell}(f_\ell)\Omega_\kappa$ 的向量，其中 f_1、$\cdots$、$f_\ell \in C^\infty(S^1)$ 在 $\mathcal{H}_\kappa$ 中稠密。

由于场 $\phi_{\kappa,j}$ 是算子值分布，因此可以用函数$\mathfrak{e}_n(\theta) = e^{in\theta}$ 对其进行涂抹，从而得到它们的傅里叶分量 $\phi_{\kappa,j,n} = \phi_{\kappa,j}(\mathfrak{e}_n)$。令 $L_{\kappa,0}$ 为 $U_\kappa(R_t)$ 的生成元，其中 $R_t \in \mathbf{M}^{\cdot\cdot}\mathbf{ob}$ 是旋转。我们假设 $\mathscr{D} = C^\infty(L_{\kappa,0}) := \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}}\mathrm{Dom}(L^\ell_{\kappa,0})$。此外，

(1dW5) 多项式能量界：存在 r_j、p_j、$C > 0$，使得对于 $\Psi \in C^\infty$（$L_{\kappa,0}$），

$$\|\phi_{\kappa,j,n}\Psi\| \le C(1+|n|)^{r_j}\|(L_{\kappa,0} + \mathbb{I})^{p_j}\Psi\|$$

根据 [CKLW18 第 6], 节，多项式能量界使得我们能够定义涂抹场。对于其傅里叶分量为 $f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{-in\theta})d\theta$ 的 $f \in C^\infty(S^1)$，我们定义

$$\phi_{\kappa,j}(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\phi_{\kappa,j,n}.$$

这在任意向量 $\Psi \in C^\infty(L_{\kappa,0})$ 上都收敛，并且 $_j(f)$ 保持定义域 $C^\infty(L_{\kappa,0})$ 不变。我们从 [CKLW18 的（证明）中知道 , 命题6 .4, 定理8 .3]如下：

引理 5.1. 设 $\{\phi_{\kappa,j}\}$ 满足关于 $p_j \le 1$ 的多项式能量界。则对于 f、g 具有不相交支集时，Ad $U(\gamma)(\phi_{\kappa,\,j}(f)) = \phi_{\kappa,\,j}(\beta_{D_{\kappa,\,j}}(\gamma)(f))$ 以及 $\phi_{\kappa,\,j_1}(f)$ 和 $\phi_{\kappa,\,j_2}(g)$ 强对易。

一般的二维共形场不是手征的，并且依赖于两个类光变量。存在称为主场的场，它们由共形维数 $(D_\mathrm{L}, D_\mathrm{R})$ 区分，其中 D_L、$D_\mathrm{R} > 0$ 可以是非整数。对于 $\gamma = \gamma_\mathrm{L} \times \gamma_\mathrm{R} \in \mathrm{Diff}_+(S^1) \times \mathrm{Diff}_+(S^1)$，我们令 $\beta_{D_\mathrm{L},\,D_\mathrm{R}}(\gamma) = \beta_{D_\mathrm{L}}(\gamma_\mathrm{L})\beta_{D_\mathrm{R}}(\gamma_\mathrm{R})$。如果 $D_\mathrm{L} - D_\mathrm{R} \in \mathbb{Z}$，则该定义可以扩展到 $\mathscr{C}$，这是我们始终作出的假设（参见第4.1节）。令 H 为 $\{R_t \times R_t$ 的生成元：$t \in \mathbb{R}\}$ 属于 U，其作用类似于手征场中的 L_0。

$\mathcal{E}$ 上的共形 Wightman 场论是一族算子值分布 $\{\psi_j\}$，定义于 $\mathcal{E}$，在共轭下闭合，并具有相应的共形维数$\{(D_{\mathrm{L},\,j},\ D_{\mathrm{R},\,j})\}$，定义在一个共同的不变定义域 $\mathscr{D} \subset \mathcal{H}$ 上，该定义域由形如 $\psi_{j_1}(f_1)\cdots\psi_{j_n}(f_n)\Omega$ 的向量组成；此外还有一个 $\mathscr{C}$的酉射影表示 U以及一个向量 $\Omega \in \mathcal{H}$，满足

(2dW1) 局部性 ~ ~y：对于具有类空分离支集的 $f, g \in C^\infty(\mathcal{E})$，$[\psi_{j_1}(f)\ \psi_{j_2}(g)] = 0$.

(2dW2) 微分同胚协变性： $U(\gamma)$ 保持 $\mathscr{D}$，并且成立

$$\mathrm{Ad}\,U(\gamma)(\widetilde{\psi}_j(f)) = \widetilde{\psi}_j(\beta_{D_{\mathrm{L},j},D_{\mathrm{R},j}}(\gamma)f), \qquad \text{for } \gamma \in \mathscr{C}$$

（2dW3）能量正性： $\mathbb{R}^{1+1}$ in$U$ 中的平移子群的联合谱包含于闭未来光锥 $\overline{V_+} = \{(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^{1+1} : \ a_0^2 - a_1^2 \geq 0, a_0 \geq 0\}$。

（2dW4）真空与 Reeh-Schlieder性质：存在唯一的（相差一个相位）向量 $\Omega \in \mathcal{H}$，使得 $U(\gamma)\Omega = \Omega$，对于$\gamma \in$M¨ob $\times$M¨ob/$\mathfrak{R}$，且 $\mathcal{H}$ 由形如 $\psi_{j_1}(f_1) \cdots \overline{\psi_{j_k}(f_k)\Omega}$的向量~ ~张成。

（2dW5）多项式能量界：满足 $\mathscr{D} = C^\infty(H)$，并且存在 $p_j > 0$，使得对于 $\Psi \in C^\infty(H)$,

$$\|\psi_j(f)\Psi\| \leq C_f \|H^{p_j}\Psi\|,$$

对于某个仅依赖于 f的 $C_f > 0$。

众所周知，线性能量界（$p_j = 1$）保证共形 Wightman 场强可交换。

~ ~ ~ ~引理5.2. 设 $\{\psi_j\}$ 满足界 $\|\psi_j(f)\Psi\| \leq C_{f,j}\|H\Psi\|$。那么，对于具有类空支集的 f, g，$\psi_{j_1}(f)$与$\psi_{j_2}(g)$强对易。

证明。由于 H 是M¨ob $\times$ M¨ob中单参数群 $R_t \times R_t$ 的生成元，我们有~ $\overline{\quad}$ $\overline{\sim[H, \psi_j(f)]} = i\psi_j(f')$，如 [CDVIT21, (3.7)],所示，其中 f'是 f关于圆柱面 $\mathcal{E}$的平移~ ~ $R_t \times R_t$ 的导数。此外，我们有 $\|[H, \psi_j(f)]\Psi\| = \|\psi_j(f')\Psi\| \leq C_{f',j}\|H\Psi\|$。将对易子与 H, $\|\delta^k(\widetilde{\psi}_j(f))\Psi\| = \|\widetilde{\psi}_j(f^{(k)})\Psi\| \leq C_{f^{(k)},j}\|H\Psi\|$,~ ~$k = 2$作用，得到3，其中 $\delta(A) = i[H, A]$。因此，$\psi_1(f)$与 $\psi_2(g)$满足定理 A.2的假设，其中 H 为参照算子，并且二者强对易。

□

5.2 算子的形式级数

设 A_s 是一个由 $s \in \mathbb{R}$ 参数化的算子族。形式级数是指形如 $\sum_s A_s z^s$ 的符号，其中求和实际上没有意义。我们称 A_s 为形式级数的傅里叶分量。可以对这类形式级数进行求和和数乘：$\sum_s A_s z^s + \sum_s B_s z^s = \sum_s (A_s + B_s) z^s$, $c\sum_s A_s z^s = \sum_s cA_s z^s$。两个形式级数的乘积并非总是有定义，但在某些情形下存在自然的乘积。只要这些和有意义，我们便将 $\sum_s A_s z^s$ 与 $\sum_s B_s z^s$ 的乘积定义为形式级数 $\sum_s C_s z^s$，其系数为 $C_s = \sum_{t\in\mathbb{R}} A_{s-t}B_t$。

类似地，我们考虑含两个或更多变量的形式级数。若有两个分别关于不同变量 z、w 的形式级数，则乘积 $\sum_s A_s z^s \sum_t B_t w^t = \sum_{s,\ t} A_s B_t z^s w^t$ 总是有意义的。此类二元形式级数的乘积定义方式与上文类似。

本文采用的一种典型情形是，向量空间按 $V^j = \bigoplus_{t\in\mathbb{N}+h_j} V_t^j$ 分级，其中 $j = 1$、2、$h_j \in \mathbb{R}$ 和 A_s 是算子 $V_t^1 \to V_{t-s}^2$，并且对于某些 $D \in \mathbb{R}$ 和 $t - s \in \mathbb{N} + h_2$，它们仅在 $s \in \mathbb{Z} + D$ 时非零。我们还考虑这样的情形：

$V = \bigoplus_j V^j$ 和 $\sum_s A_s$ 是 V 上的一个形式级数，对于上述每一对 V^{j_1}、V^{j_2}，它具有相应的形式（并且 $D_{j_1,\ j_2}$ 可能取决于 j_1、j_2）。

令 $\sum_s A_s z^s, \sum_s B_s z^s$ 为这样的两个形式级数，且对所有 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ 都有 $[A_{s_1}, B_{s_2}] = 0$。在上一段所述情形下，我们可以定义乘积 $\sum_s A_s z^s \sum_t B_s z^s = \sum_s z^s \sum_t A_{s-t} B_t$（这是正规乘积的一个特例，见 [CTW23，第 2.1] 节）：事实上，对每个向量 $\Psi \in V$，关于 t 的求和都是有限的，因为当 $|t|$ 足够大时，$A_{s-t}\Psi$ 或 $B_t\Psi$ 会消失。因此，求和 $\sum_t A_{s-t} B_t$ 定义了 V 上的一个算子，并且这是 V 上的形式级数。

5.3 带荷初级场

我们继续研究单个手征分量，但对于后文不会出现的某些参数，省略 κ。我们假设，在 S^1 上的共形网（$\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa$）由共形 Wightman 场 $\{\phi_{\kappa,j}\}$ 生成；当用支集不相交的测试函数进行涂抹时，这些场强对易。

酉算子 $e^{i\phi_{\kappa,j}(f)}$ 具有紧支集的 f 在表示 ρ 中表示为酉算子，由此产生一个问题：算子 $\rho(\phi_{\kappa,j}(f))$ 是否有意义，以及它是否是 $\rho(e^{i\phi_{\kappa,j}(f)})$ 的生成元。此性质称为强可积性，在实例中验证这一点是一个非平凡问题（尽管它在一些有趣的情形中成立，例如 U(1) 流 [CWX, Gui20]）。此外，我们还可以考虑表示之间局部化的无界交织算子，并且存在它们之间的对易关系是否强成立的问题（强交织性质和强编织） [Gui20], 另见 [Ten19b, Ten19a]。这些性质应有助于比较网的扩张与 Wightman 场，参见注记 5.8。

令 $\kappa(g)$ 为共形网 $\mathcal{A}_\kappa$ 关于 $g \in G$ 的自同构，如第 2.2 节所述。我们考虑手征场的傅里叶分量，并假设它们在表示空间 $\mathcal{H}^{\kappa(g)}{}_{,\kappa}{}^{\text{fin}}$ 上有相应的算子 $\phi_\kappa^{\kappa(g)}{}_{,j,n}$，其中 $\mathcal{V}^{\text{fin}}$ 表示算子 $L_\kappa{}_{,0}$ 的特征子空间 $\mathcal{V}_t = \ker(L_\kappa{}_{,0} - t)$ 的线性张成；$L_\kappa{}_{,0}$ 在 $\mathcal{V}$ 上表示为无界算子。我们将 $\phi_\kappa^{\kappa(g)}{}_{,j,n}$ 在 $g \in G$ 上的代数直和记为 $\hat{}\phi_{\kappa,j,n}$，其定义在 $\bigoplus_{g\in G} \mathcal{H}^{\kappa(g)}{}_{,\kappa}{}^{\text{fin}}$ 中 $\bigoplus_{g\in G}^{\text{alg}} \mathcal{H}^{\kappa(g)}{}_{,\kappa}{}^{\text{fin}}$ 的（代数）线性张成上。同样，我们将 $\hat{}L_{\kappa,n} = \bigoplus_{g\in G} L_\kappa^{\kappa(g)}{}_n{}_{,}{}_{,}$ 记为，其中 $L_\kappa^{\kappa(g)}{}_n{}_{,}$ 是 $\mathcal{H}^{\kappa(g)}{}_{,\kappa}{}^{\text{fin}}$ 上的 Virasoro 代数表示。

设 $(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)$ 是定义在 S^1 上的共形网，由上述共形维数为 $\{D_j\}$ 的场 $\{\phi_{\kappa,j}\}$ 生成，并配有一组自同构 Δ_κ，以及从群 G 到该组自同构的双射映射 κ。带电主场 $\{\psi_\kappa^h(\xi, s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ 是一族算子（由某个依赖于 κ 和 h 的指标集[5] Ξ 中的 $h \in G$ 和 ξ 标记），作用于定义域 $\bigoplus_{g\in G}^{\text{alg}} \mathcal{H}^{\kappa(g)}{}_{,\ \kappa}{}^{\text{fin}}$，并具有相应的形式级数 $\psi_\kappa^h(\xi, z) = \sum_{s\in\mathbb{R}} \psi_\kappa^h(\xi, s) z^{-s-D_h}$，其中 $D_h > 0$ 是共形维数，z 是形式变量，且满足

- $\psi_\kappa^h(\xi, s)$ 将 $\mathcal{H}^{\kappa}{}_{(g),\text{有限}_\kappa}$ 映射到 $\mathcal{H}^{\kappa}{}_{(hg),\text{有限}_\kappa}$，并且存在 $\ell_{h,g} \in \mathbb{R}$，使得 $\psi_\kappa^h(\xi, s) \neq 0$ 仅当 $s \in \ell_{h,g} + \mathbb{Z}$。

[5]需要所有这些标记的例子包括与 1 级的单纽、单连通、单、连通紧群 G（不同于上述群）相关联的 WZW 模型。扇区由中心 $Z(G)$ 参数化，它可以与 Λ_W/Λ_R 等同，即权格模掉根格 [TL97，引理 I.2.1.1]。主场的形式为 $\Phi_\mu(z)$，其中 μ 是 G [的一个极小权 TL97，第 V.5 节3]。在此例中，h 是 $\mu + \Lambda_R \in \Lambda_W/\Lambda_R$，而 μ 是极小权之一，在我们的记号中起 ξ 的作用。关于这些场的相对局域性，参见 [TL97，定理 V.5.3. 2] 。

- (原初性) $[\hat{L}_{\kappa,m}, \psi^h_\kappa(\xi,s)] = ((D_h-1)m-s)\psi^h_\kappa(\xi,m+s)$。
- （相对局域性） $[\hat{\phi}_{\kappa,\ j,\ m}, \psi^h_\kappa(\xi,s)] = \sum_{\xi'} X^{\xi}_{j,\ \xi'} \psi^h_\kappa(\xi', m+s)$，其中 $X^{\xi}_{j,\ \xi'} \in \mathbb{C}$。

- 作为形式级数，编织关系成立：

  $(1-\frac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)} w^{\alpha(h_1,h_2)} \psi^{h_1}_\kappa(\xi_1,w)\psi^{h_2}_\kappa(\xi_2,z) = (1-\frac{w}{z})^{\alpha(h_1,h_2)} z^{\alpha(h_1,h_2)} \psi^{h_2}_\kappa(\xi_1,z)\psi^{h_1}_\kappa(\xi_2,w)$
  其中 $\alpha(h_1,h_2) \in \mathbb{R}$。回忆一下，$(1-u)^\beta = \sum_{n\geq 0} \binom{\beta}{n}(-u)^n$ 作为形式级数，其中 $\binom{\beta}{n} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!}$。

- 我们假设带电主场的族在共轭下是封闭的，其含义是，对于给定的 h,ξ，存在 $\bar{h},\bar{\xi}$，使得 $\psi^h_\kappa(\xi,z)^* = \psi^{\bar{h}}_\kappa(\bar{\xi},z)$，并约定在形式级数展开中使用 $z^* = z^{-1}$。

我们进一步假设多项式能量界：

- 对于每个 h，存在 r_ξ，p_ξ，$C_\xi \geq 0$ 使得 $\|\psi^h_\kappa(\xi,\ s)\Psi\| \leq C_\xi(1+|s|)^{r_\xi}\|(L_{\kappa,\ 0}+\mathbb{I})^{p_\xi}\Psi\|$ 对于 $\Psi \in C^\infty(L_{\kappa,\ 0})$。

这使我们能够定义涂抹带电主场：对于 $f \in C^\infty(S^1\setminus\{-1\})$，令 $f_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-is\theta}d\theta$ 并且

$$\psi^h_\kappa(\xi,f) := \sum_{s\in\mathbb{R}} f_s \psi^h_\kappa(\xi,s),$$

这定义了作用在 $C^\infty(\hat{L}_{\kappa,\ 0})$ 上的算子（由于 $\psi^h_\kappa(\xi,s)=0$，除了每个 $\mathcal{H}^{\kappa(g)}_{\kappa\ t}$ 上的可数个 s 之外，该和是有意义的）。

令[6] $\epsilon^+_{\kappa\ (h_1)\ \kappa(h_2)} :=$ 极限$_{\Im\zeta>0,\ \zeta\to -1}\zeta^{\alpha(h_1,h_2)}$，其中 $\Im\zeta$ 是 ζ 的虚部，$w^{\alpha(h_1,h_2)} = e^{\alpha(h_1,h_2)\log w}$，并且我们在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 上取 log w 的分支，使得在 $(0,\infty)$ 上 log $w\in\mathbb{R}$。

引理 5.3. 设 f、$g \in C^\infty$（$S^1\setminus\{-1\}$）满足 arg supp $f <$ arg supp g，即它们在 $S^1\setminus\{-1\}$ 上按逆时针顺序排列。则有 $\psi^{h_1}_\kappa(\xi_1,f)\psi^{h_2}_\kappa(\xi_2,g) = \epsilon^+_{\kappa\ (h_1)\ \kappa(h_2)}\psi^{h_2}_\kappa(\xi_2,g)\psi^{h_1}_\kappa(\xi_1,f)$。

证明. 设 $z_0 \in S^1$、$z_0 \neq -1$ 满足 arg supp $f <$ arg $z_0 <$ arg supp g，并令 I_+ 为 S^1 上从 z_0 到 -1（逆时针方向）的区间，而 I_- 为 S^1 上从 -1 到 z_0 的区间，因此我们有 supp $f\subset I_-$、supp $g\subset I_+$（见图 2），并置 $f_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-is\theta}d\theta$、$g_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{-it\theta}d\theta$。由于 f、g 光滑，这些系数快速衰减。

乘积 $\psi^{h_1}_\kappa(\xi_1,w)\psi^{h_2}_\kappa(\xi_2,z)$ 是关于 w,z 的形式级数。对于某个 $\mathcal{H}^{\kappa(h_3)}fin_\kappa, \mathcal{H}^{\kappa(h_4)}fin_\kappa$ 中的有限能量向量 Ψ_1,Ψ_2，标量积 $\varphi_1(w,z) := \langle\Psi_1, \psi^{h_1}_\kappa(\xi_1,w)\psi^{h_2}_\kappa(\xi_2,z)\Psi_2\rangle$ 可视为一个关于 w,z 的形式级数，其系数属于 $\mathbb{C}$；根据关于带电主场的第一个假设，这只是一个可数和。此外，$w^s z^t$ 的这些系数在 s 取较大值且 t 取较小值时会消失，因为每个 $\mathcal{H}^{\kappa(h_j)}_\kappa$fin 都是 Virasoro

[6]我们对带荷场的编织和第 2.2 节中扇区的编织使用相同的记号。我们计划在另一篇出版物中证明，在强编织等假设下，它们确实相等 [Gui20] 。

代数的正能量表示。根据多项式能量界，它可视为关于 w,z 的分布，我们仍将其记为 $\varphi_1(w,z)$。于是有 $\varphi_1(f,g)=\sum\varphi_1(s,t)f_sg_t$，其中 $\varphi_1(s,t)$ 是 w^sz^t 的形式级数 $\varphi_1(w,z)$ 的系数（这里稍微滥用了记号）。

设 $a<1$ 和 $b>1$。我们引入 $\varphi^{a,\ }{}_1{}^b(z,w):=\langle\Psi_1,\psi_\kappa^{h_1}(\xi_1,bw)\psi_\kappa^{h_2}(\xi_2,az)\Psi_2\rangle$，那么它在 z 中只有有限项含负幂，在 w中只有有限项含正幂，因此，根据多项式能量界以及选择 $a<1,b>1$，它是一个关于 $|z|=|w|=1$ 的收敛级数。现在可以将其视为 $I_-\times I_+$上的函数，从而定义一个分布，并且 $\varphi^{a,\ }{}_1{}^b(f,g)=\sum\varphi^{a,\ }{}_1{}^b(s,t)f_sg_t$，其意义如上所述。此外，由于$a\to1,b\to1$，它收敛到 $\varphi_1(f,g)$。

形式级数 $(1-\frac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}$ 在 w 中只有负幂，在 z中只有正幂，因此，乘积

$$\langle\Psi_1,(1-\tfrac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}\psi_\kappa^{h_1}(\xi_1,w)\psi_\kappa^{h_2}(\xi_2,z)\Psi_2\rangle$$

再次可以视为形式级数（参见上文关于形式级数的注释）。同样由多项式能量界可知，这些系数关于 s,t 至多呈多项式增长。因此，可以将其视为关于两个变量 $w\in I_-,z\in I_+$ 的分布，记作 $\varphi_2(w,z)$。另外定义 $\varphi^{a,\ }{}_2{}^b(w,z)=\varphi_2(bw,az)$。当 $a\to1,b\to1$ 时，各系数均收敛，并且由多项式能量界可知，$\varphi^{a,\ }{}_2{}^b(f,g)$ 作为分布收敛到 $\varphi_2(f,g)$。

注意，展开式 $(1-u)^\beta=\sum_{n\geq0}\binom{\beta}{n}(-u)^n$ 在 $|u|<1$ 收敛，并且可以解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$。该展开式与定义 $(1-u)^\beta=e^{\beta\log(1-u)}$ 一致，作为 $u\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$ 上的解析函数，其中 $\log w$ 定义在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$上，并且当 $w\in(0,\infty)$ 时 $\log w\in\mathbb{R}$（最后一个条件唯一确定了 $\log w$ 的一个分支）。当将 $\log w$ 视为函数时，我们对 $w^\beta=e^{\beta\log w}$ 使用相同的延拓。若将 $(1-\frac{w}{z})^{\alpha(h_1,h_2)}$ 视为关于 w,z 的函数，就可以将其与上述分布φ_1 相乘，从而得到 $I_-\times I_+$ 上的一个分布，记作 $\varphi_3(w,z)$。我们还引入 $\varphi^{a,\ }{}_3{}^b(w,z)=\varphi_3(bw,az)$。于是，当 $a\to1,b\to1$ 时，$\varphi^{a,\ }{}_3{}^b(f,g)$ 收敛到 $\varphi_3(f,g)$，因为 $\varphi^{a,\ }{}_1{}^b(w,z)$ 和 $(1-\frac{bw}{az})^{\alpha(h_1,h_2)}$ 分别作为 $I_-\times I_+$ 上的分布和光滑函数收敛。

这表明 $\varphi_2(f,g)=\varphi_3(f,g)$。也就是说，$(1-\frac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}\psi_\kappa^{h_1}(\xi_1,w)\psi_\kappa^{h_2}(\xi_2,z)$可以看作是算子值分布乘以一个光滑函数 $(1-\frac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}$，定义在$I_-\times I_+$上。

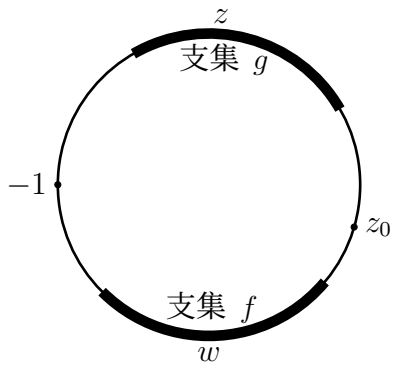

图 2：圆、无穷远点（−1）以及两个支集不相交的函数。

类似地，$(1-\frac{w}{z})^{\alpha(h_1,h_2)}\psi_\kappa^{h_2}(\xi_1,z)\psi_\kappa^{h_1}(\xi_2,w)$可以看作一个算子值分布。因此，根据主场的编织关系，我们有等式

$$(1-\tfrac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}w^{\alpha(h_1,h_2)}\psi_\kappa^{h_1}(\xi_1,w)\psi_\kappa^{h_2}(\xi_2,z)=(1-\tfrac{w}{z})^{\alpha(h_1,h_2)}z^{\alpha(h_1,h_2)}\psi_\kappa^{h_2}(\xi_1,z)\psi_\kappa^{h_1}(\xi_2,w)$$

在算子值分布的意义下，并在对 f 和g的支集施加限制的情况下。视为函数时，$(1-\frac{w}{z})^{\alpha(h_1,h_2)}z^{\alpha(h_1,h_2)}$与$(1-\frac{z}{w})^{\alpha(h_1,h_2)}w^{\alpha(h_1,h_2)}$的商恰好是$\lim_{\Im\zeta>0,\zeta\to-1}\zeta^{\alpha(h_1,h_2)}$。因此，将该方程除以前一个因子，我们得到

$$\psi_\kappa^{h_1}(\xi_1,w)\psi_\kappa^{h_2}(\xi_2,z)=\epsilon^+_{\kappa(h_1),\kappa(h_2)}\psi_\kappa^{h_2}(\xi_1,z)\psi_\kappa^{h_1}(\xi_2,w)$$

作为算子值分布，这正是所需的结果。 □

下面的结果本质上归因于 [CKL08，第6节。3], 其中讨论了 $D=\frac{1}{2}$ 情形，另见 [CKLW18，命题6。4], [TL99]。

引理5.4。设带电主场ψ_κ^h 的共形维数为 D ，并满足上述多项式能量界（我们省略其对 ξ的依赖）。那么它具有微分同胚协变性，即，设 U_κ为Diff+(S^1)的射影酉表示，则有 Ad ˆ$U_\kappa(\gamma)$($\psi_\kappa^h(f)$) = $\psi_\kappa^h(\beta_D(\gamma)(f))$。

ˆ 证明。我们简述 [CKL08，第6节3]中的论证。注意，$L_{\kappa,\,n}$ 是在希尔伯特空间ˆ $\mathcal{H}_\kappa$的稠密定义域ˆ $\mathcal{H}_\kappa^{\mathrm{fin}}$上作用的 Virasoro代数表示。根据ˆ多项式能量界，它们可延拓至 $C^\infty(L_{\kappa,\,0})$。此外，在该定义域上我们有对易关系

$$i[\hat{L}_\kappa(f_1),\psi_\kappa^h(f_2)]=\psi_\kappa^h(Df_1'f_2-f_1f_2').$$

由此可得以下关系:

$$\frac{d}{dt}\psi_\kappa^h(\beta_D(\exp(tf_1))f_2)|_{t=0}=i[\hat{L}_\kappa(f_1),\psi_\kappa^h(f_2)].$$

ˆ 同样根据 $L_{\kappa,\,n}$的能量界，有 $U_\kappa(\exp(tf))$ 保持定义域 $C^\infty(L_{\kappa,\,0})$ 不变。ˆ对于 $\Psi\in C^\infty(L_{\kappa,\,0})$，我们可以考虑关于 $t\in\mathbb{R}$ 的两个向量值函数

$$\Psi_1(t)=\psi_\kappa^h(\beta_D(\exp(tf_1)f_2)\hat{U}_\kappa(\exp(tf_1))\Psi,$$
$$\Psi_2(t)=\hat{U}_\kappa(\exp(tf_1))\psi_\kappa^h(f_2)\Psi,$$

ˆ 它们都满足微分方程 $\Psi'(t) = iL_\kappa(f)\Psi(t)$。由于它们满足相同的初始条件 $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = \psi_\kappa^h(f_2)\Psi$，因此二者必然相同。所以，我们有 Ad ˆ$U_\kappa(\exp(tf_1))(\psi(f_2)) = \psi_\kappa^h(\beta_D(\exp(tf_1))f_2)$。

回顾一下，Diff+(S^1) 是代数上单纯的 [Thu74] ，而由单参数群生成的子群是 Diff+(S^1) 的正规子群。因此，二者必然相同。这意味着，Diff+(S^1) 中的任意元素都可以表示为某个单参数群中的元素与中心 $\{R_{2\pi n}\}$ 中的元素之积。

现在，该关系对所有 $\gamma\in$ Diff+(S^1)均成立，而后者是单参数群中元素的乘积；显然，该关系对 $R_{2\pi}$也成立。因此，我们得到了所需的协变性。

□

5.4 由平凡总编织产生的一维 Wightman 场

首先假设在 S^1 上有两个共形网 $\mathcal{A}_1$、$\mathcal{A}_2$，以及这些共形网的带电主场 ψ_1、ψ_2（此处省略对 $h \in G$ 和 $\xi \in \Xi$ 的依赖）。

引理 5.5. 设 $\psi_1(z)^{\otimes} \mathbb{I}, _{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(z)$ 是相对于算子 $\hat{} \ L_0 \otimes _{\mathbb{I}} + _{\mathbb{I}} \otimes \hat{} L_0$满足多项式能量界的带电主场。则 $\psi_1(z) \otimes \psi_2(z)$ 满足多项式能量界。

证明。假设多项式能量界成立：存在 r_j、p_j、$C > 0$，对于 $j = 1$，使得

$$\|\psi_j(s)\Psi\| \leq C(1+|s|)^{r_j} \|(\hat{L}_0 + _{\mathbb{I}})^{p_j}\Psi\|$$

对于 $\Psi \in C^{\infty}(L_0)$。注意

$$\begin{aligned}(\hat{L}_0 + _{\mathbb{I}})\psi_2(t-s) &= [\hat{L}_0, \psi_2(t-s)] + \psi_2(t-s)\hat{L}_0 + \psi_2(t-s) \\ &= (s-t+1)\psi_2(t-s) + \psi_2(t-s)\hat{L}_0 \\ &= \psi_2(t-s)(\hat{L}_0 + (s-t+1)),\end{aligned}$$

因此 $(L_0 + _{\mathbb{I}})^q \psi_2(t-s) = \psi_2(t-s)(L_0 + (s-t+1)\mathbb{I})^q$。接着，对于固定的 s 和 Ψ，使得 $H\Psi = \ell\Psi$，其中 $H = \hat{} L_0 \otimes _{\mathbb{I}} + _{\mathbb{I}} \otimes \hat{} L_0$,

$$\begin{aligned}\|\sum_t \psi_1(s-t) \otimes \psi_2(t)\Psi\| &\leq \sum_t C(1+|s-t|)^{r_1} \|(H + _{\mathbb{I}})^{p_1}(_{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(t))\Psi\| \\ &\leq \sum_t C(1+|s-t|)^{r_1} \|(H + _{\mathbb{I}})^{\lceil p_1 \rceil}(_{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(t))\Psi\| \\ &\leq \sum_t C(1+|s-t|)^{r_1} \|(_{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(t))(H + (t+1)_{\mathbb{I}})^{\lceil p_1 \rceil}\Psi\| \\ &= \sum_t C(1+|s-t|)^{r_1} (\ell + (t+1))^{\lceil p_1 \rceil} \|(_{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(t))\Psi\| \\ &\leq \sum_t C^2(1+|s-t|)^{r_1}(1+|t|)^{r_2}(\ell + (t+1))^{\lceil p_1 \rceil} \|(H + _{\mathbb{I}})^{p_2}\Psi\| \\ &\leq C^2(1+|s|)^{2r_1+r_2+\lceil p_1 \rceil} \|(H + _{\mathbb{I}})^{r_1+r_2+2\lceil p_1 \rceil + p_2}\Psi\|,\end{aligned}$$

其中，$\lceil p \rceil$ 是大于或等于 p的最小整数。在最后一行中，我们估计了 $1+|s-t| \leq 1+|s|+\ell \leq (1+|s|)(1+\ell)$，因为当 $t < -s-\ell$时，$(\psi_1(s-t)^{\otimes} \mathbb{I})\Psi = 0$；或者当 $t > \ell$时，$(_{\mathbb{I}} \otimes \psi_2(t))\Psi = 0$。

对于一般的$\Psi = \sum_\ell \Psi_\ell$，不同 ℓ对应的$\sum_t \psi_1(s-t) \otimes \psi_2(t)\Psi_\ell$ 彼此正交。因此，对于 $\psi_1(z) \otimes \psi_2(z)$，可以得到多项式能量界。 □

显然，这一估计并非最优。正如我们将通过具体例子看到的那样，两个傅里叶分量有界的带电主场之积 $\|\psi(s)\| \leq C$ 再次具有有界的傅里叶分量。

引理 5.6. 设 $\psi_1(z)$ $\psi_2(z)$ 是具有多项式能量界的网 $(\mathcal{A}_1, U_1, \Omega_1)$、$(\mathcal{A}_2, U_2, \Omega_2)$ 上的带电主场。那么 $\psi_1(z) \otimes \psi_2(z)$ 关于 $\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad} U_1 \otimes U_2$ 是微分同胚协变的。

证明。 根据引理 5.5， $\psi_1(z) \otimes \psi_2(z)$ 相对于 $\hat{}\,\hat{}H = L_{1,0} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes L_{2,0}$满足多项式能量界。然后根据引理 5.4 可得微分同胚协变性。 □

如第3节所述，令 $\{(\mathcal{A}_\kappa, U_\kappa, \Omega_\kappa)\}_{\kappa\in K}$为由场 $\{\phi_{\kappa,j}\}_{\kappa\in K}$ 生成的 S^1 上的有限共形网族，并配有一组 Δ_κ 在某个区间内的局域化自同构，以及一个具有共同（有限生成的）阿贝尔群结构 G 的双射族 κ：对每个指标 $\kappa \in K$ 都有 $G \to \Delta_\kappa$。令 $\{\psi^h_\kappa(\xi, z)\}_{\kappa\in K,\ h\in G,\ \xi\in\Xi_\kappa}$ 为满足第 5.3 节条件的带电主场族。

我们假设，对于所有对 $h_1, h_2 \in G$，均有 $\prod_\kappa \epsilon^+_{\kappa\ (h_1)\ \kappa\ (h_2)} = 1$，如第3节所述。我们为每个 κ 选取ξ_κ。然后考虑形式级数 $\psi^h_K(\xi_K, z) := \bigotimes_\kappa \psi^h_\kappa(\xi_\kappa, z)$ 在$\hat{}$辅助空间 $\bigotimes_\kappa \mathcal{H}_\kappa$ 上的作用，其中 $\xi_K = (\xi_1, \cdots, \xi_K)$ 是一个指标，用于标记 K 因子的张量积所对应的形式级数。这是两个相互对易的形式级数的（正规）乘积，因此作为形式级数是有意义的，参见第 5.2节。由引理 5.5 可知，只要每个场满足多项式能量界，它作为算子值分布就是有意义的。

定理 5.7。场 ψ^h_K, $h \in G$ 与手征场 $\phi_{\kappa,\ j}$ 一起构成一个作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_K = \bigoplus_{g\in G} \bigotimes_\kappa \mathcal{H}^{\kappa(g)}_\kappa$ 上的共形 Wightman 场论。此外，如果 $\psi^h_K\hat{}$ 关于 $\sum_\kappa \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \otimes \underset{\kappa\text{-}th}{L_0} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}$ 对所有 $h \in G$ 满足线性能量界，那么 $\{\psi^h_K : h \in G\}$ 在 S^1 上生成一个共形网。

证明。形式级数 ψ^h_K 定义在希尔伯特空间 $\bigotimes_\kappa \hat{}\,\mathcal{H}_\kappa$ 上。它从真空生成 $\mathcal{H}_K = \bigoplus_{g\in G} \bigotimes_\kappa \mathcal{H}^{\kappa(g)}_\kappa$ 中的向量。然后，$\phi_{\kappa,j}(f)$ 在这些直和项中的每一项中生成稠密的向量集。另一方面， ψ^h_K 和 $\phi_{\kappa,j}$作用于真空时，不会生成其他向量。

下面证明局域性。对于两个测试函数 f_1、f_2，若 arg supp f_1 < arg supp f_2，根据引理 5.3，我们有

$$\begin{aligned}\psi^{h_1}_K(f_1)\psi^{h_2}_K(f_2) &= \prod_\kappa \epsilon^+_{\kappa(h_1),\kappa(h_2)} \psi^{h_2}_K(f_2)\psi^{h_1}_K(f_1)\\ &= \psi^{h_2}_K(f_2)\psi^{h_1}_K(f_1),\end{aligned}$$

从而作为算子值分布得到局域性。场 ψ^h_K 和 $\phi_{\kappa,j}$ 是相对局域的。表示 U_K 是正能量表示的张量积，因此其自身也具有正能量。

若假设存在能量线性界，则根据定理 A.2，这些场强对易，并在 S^1 上生成一个共形网。 □

注记 5.8。我们预期，定理 5.7 中由共形 Wightman 场生成的 S^1 上的共形网，与定理 3.1 中构造的网扩张 $\mathcal{A}_K$ 酉等价。至少对于 $|K| = 2$，这应可通过类似于定理 5.9 证明中的论证得出。更一般地，假设 VOA 交织算子具有

交织 DHR 扇区的性质（强可积性、强交织性质和强编织[CWX、Gui20]），那么应当可以证明这两个网相同。我们将在未来的出版物中讨论这个问题。

5.5 通过消除编织映射构造二维Wightman场

由一对编织满足特定条件的带电主场，我们可以构造一个二维共形Wightman场。特别地，若我们取同一个共形网 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}} = \mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ 的两个副本，其自同构构成一个带点编织融合子范畴，且其融合环同构于有限阿贝尔群 G，并取左带电场 ψ^h_{L} 与 $\psi^{h^{-1}}{}_{\mathrm{L}}$ 的张量积，其中 $h \in G$ 类似于（ 4.1 ），即 $\widetilde{\psi}^h := \psi^h_{\mathrm{L}} \otimes \psi^{h^{-1}}{}_{\mathrm{L}}$ 作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{L}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{L}}$。

如果我们假设编织以如下意义抵消：[7] 即 $\epsilon^+{}_{\mathrm{L}(g),\mathrm{L}(h)} = \epsilon^-{}_{\mathrm{R}(g),\mathrm{R}(h)}$，我们就可以证明组合Wightman场的局域性。我们证明，这对应于相对于一个带点编织融合范畴的（有限指标）Longo–Rehren 扩张， [LR95], 见第4.2节。这些构造背后的基本思想在二维量子场论的语境中同样存在，例如 [Reh97]，特别参见 [Reh97，第2节。3]

设 $\{(\mathcal{A}_{\mathrm{L/R}}, U_{\mathrm{L/R}}, \Omega^{\mathrm{L/R}})\}$ 是由场 $\{\phi_{\mathrm{L/R},j}\}$生成的定义在 S^1 上的一对共形网，其中包含一组 $\Delta_{\mathrm{L/R}}$ 在某个区间内的（彼此可交换且不等价的）局域化自同构（并且在酉等价意义下对复合和逆封闭），如第4节所述；该组具有公共的有限阿贝尔群结构 G，并带有双射 L/R：$G \to \Delta_{\mathrm{L/R}}$。设 $\{\psi^h_{\mathrm{L/R}}(\xi, z)\}_{h\in G,\xi\in\Xi_{\mathrm{L/R}}}$ 是一族满足第 5.3 节条件的主场。简记 $\epsilon^+ := \epsilon^+{}_{\mathrm{L}(g),\mathrm{L}(h)}$ and $\epsilon^- := \epsilon^-{}_{\mathrm{R}(g),\mathrm{R}(h)}$。于是，我们的编织抵消假设写作 $\epsilon^+ = \overline{\epsilon^-}$。对于 w_1, $w_2 \in S^1 \setminus \{-1\}$，$\arg w_1 < \arg w_2$，由引理 5.3 可得

$$\begin{aligned}\psi^g_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}}, w_1)\psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}}, w_2) &= \epsilon^+\psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}}, w_2)\psi^g_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}}, w_1),\\ \psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_2)\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_1) &= \epsilon^-\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_1)\psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_2)\\ &= \overline{\epsilon^+}\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_1)\psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, w_2).\end{aligned}$$

For 固定 ξ_{L} 和 ξ_{R}，我们引入一个二维形式幂级数 by

$$\widetilde{\psi}^h(w, z) := \psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}}, w) \otimes \psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}}, z).$$

~定理 5.9。 场 ψ^h 是希尔伯特空间 $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{h\in G} \mathcal{H}^{\mathrm{L}(h)}{}_{\mathrm{L}} \otimes \mathcal{H}^{\mathrm{R}(h)}{}_{\mathrm{R}}$ 上的二维共形Wightman场。如果该场相对于^ ^$L_0 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes L_0$满足线性能量界，那么它生成一个二维共形网。如果 G 是有限的，则该网与 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 在情形 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}} = \mathcal{A}_{\mathrm{R}}$下由定理 4.2 构造的网一致（在酉等价意义下）。

~证明。场 ψ^h 满足二维局域性：若 $\arg w_1 < \arg w_2$ 且 $\arg z_1 > \arg z_2$（或反向关系）成立，则点 (w_1, z_1) 与 (w_2, z_2) 类空间分离；在此情形下，

[7]这里，我们不再像第4节那样额外假设 $\epsilon^+{}_{\mathrm{L}(g)^{-1},\mathrm{L}(h)} = \epsilon^-{}_{\mathrm{R}(g)^{-1},\mathrm{R}(h)}$，而是假设带电主场的集合在取共轭运算下封闭，且其中每个场都满足编织关系。

$\epsilon^+ := \epsilon^+{}_{\mathrm{L}(h),\mathrm{L}(g)}$),

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}^h(w_1,z_1)\widetilde{\psi}^g(w_2,z_2) &= \psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_1)\otimes\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_1)\cdot\psi^g_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_2)\otimes\psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_2)\\ &= \epsilon^+\overline{\epsilon^+}\psi^g_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_2)\otimes\psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_2)\cdot\psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_1)\otimes\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_1)\\ &= \psi^g_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_2)\otimes\psi^g_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_2)\cdot\psi^h_{\mathrm{L}}(\xi_{\mathrm{L}},w_1)\otimes\psi^h_{\mathrm{R}}(\xi_{\mathrm{R}},z_1)\\ &= \widetilde{\psi}^{h_2}(w_2,z_2)\widetilde{\psi}^{h_1}(w_1,z_1).\end{aligned}$$

它是一个二维算子值分布，因为它是两个一维算子值分布的张量积。其他公理、能量正性、微分同胚-˜morphism 协变性以及真空在 $\mathcal{H}$ 中的循环性，都可以按照定理 5.7 加以证明。若假设线性能量界，则涂抹场的强交换性随之成立。

令 G为有限群。由于真空表示的分解 $\mathcal{H}=\bigoplus_{h,g}\mathcal{H}^{\mathrm{L}(h)}\otimes\mathcal{H}^{\mathrm{R}(h)}$ 关于 $\mathcal{A}_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{A}_{\mathrm{R}}$ 作用的分解，与 Longo–Rehren 扩张 $\mathcal{A}_{\mathrm{LR}}$ (4.3) 的真空˜表示的分解相同；根据 [LR95，命题 3.4], ，前一个分解决定了我们所构造扩张的对偶典范端同态，因此后一个端同态必然与 Longo–Rehren 端同态 Θ_{LR}酉等价。由于我们处于具有有限阿贝尔群 G的编织尖点融合情形，[KL04b，第4节，例 4.5]所给出的相关 Longo–Rehren 扩张（在有限指标局部扩张中）的唯一性证明了最后一个断言。

□

6 示例：U(1)流

我们在 S^1 上构造一个共形网、扇区集合以及与 U(1)流相关的带电主场的示例。据我们所知，本节的大部分内容散见于多处文献中，例如 [BMT88、TL97、TZ12], ，或者被视为众所周知的民间知识。我们汇集了一些有用的事实，以便读者了解如何在 U(1)流的扩张这一特殊情形下，通过带电主场构造 Wightman 场；关于二维情形，参见 [Reh97] 。

这里我们使用符号 $\mathcal{H}$、$\mathcal{A}$、U、Ω L_n、 J_n、$Y_{\alpha,\ n}$表示手征分量；这不同于前面各节，在那里我们使用指标 κ。

6.1 场与网

在文献中，U(1)流有过多种构造。可以使用 PSL(2,$\mathbb{R}$) 的最低权为 1 的最低权表示及其相关网的标准子空间，然后通过二次量子化，由 Weyl 算子生成 U(1)电流网的局部代数，参见 [BGL93]。

这里阐述的 U(1)流的构造依赖于所谓的流代数，即由符号族{J_n 和一个中心元 c 作为 $\mathbb{C}$-线性空间生成的复李代数： J_n： $n\in\mathbb{Z}$} ，它们满足 $[J_m,J_n]=m\delta_{n+m}c$，见 [BMT88]。流代数的真空表示是一个 Verma 模（最低权为 0，因此 $J_0\Omega=0$），它是符号的线性张成

$$J_{-i_1}\ldots J_{-i_m}\Omega,\quad 0<i_1\le i_2\le\ldots\le i_m\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$$

其中，按照记号滥用， J_n 被解释为算子，其李括号由结合代数给出；对于 $k \geq 0$ ，有 $J_k\Omega = 0$ ，并且通过使用对易关系定义 J_n 对 $n \in \mathbb{Z}$ 的作用。存在唯一的内积满足 $J_n^* = J_{-n}$ 以及

$$\langle J_{-i_1} \dots J_{-i_m}\Omega, J_{-l_1} \dots J_{-l_s}\Omega\rangle := \langle \Omega, J_{i_m} \dots J_{i_1} J_{-l_1} \dots J_{-l_s}\Omega\rangle, \tag{6.1}$$

并将其按线性延拓。其完备化同构于玻色福克空间，其中单粒子空间由 $\{J_{-n}\Omega : n \in \mathbb{N}\}$ 张成，参见例如 [KR87，第 2.1] 命题。

利用 Sugawara公式定义新的生成元 L_n 如下

$$L_n := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} : J_{k+n}J_k :, \quad n \in \mathbb{Z}$$

其中 $: \cdot :$ 是 Wick乘积，由此定义了 Virasoro代数的中心荷为 $c = 1$ 的射影酉表示。特别地，共形哈密顿量 L_0 的作用为

$$L_0 J_{-i_1} \dots J_{-i_m}\Omega = (i_1 + \dots + i_m)J_{-i_1} \dots J_{-i_m}\Omega,$$

对于 $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \in \mathbb{N}$。因此， L_0 延拓为一个正自伴算子。此外，由于 J_n 可视为关于 $n > 0$ 的湮灭算符，我们有如下界：对于 Verma 模中的任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和任意 Ψ

$$\|J_n\Psi\| \leq (n+1)\|(L_0+1)^{\frac{1}{2}}\Psi\|,$$
$$\|L_n\Psi\| \leq \sqrt{\frac{13}{12}}(1+|n|^{\frac{3}{2}})\|(L_0+1)\Psi\|.$$

由此，Virasoro代数的表示 $\{L_n\}$ 积分为 Diff+(S^1) 的射影酉表示 U 。

此外，流

$$J(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n J_n,$$

对于测试函数 $f \in C^\infty(S^1)$，它是 $\mathcal{D}(L_0)$ 上的本质自伴算符。因此，$J(f)$ 对于 $f \in C^\infty(S^1)$ 在稠密Verma模上是良定义的，并且 $J(f)\Psi \in \mathcal{D}(L_0)$。我们有

$$\|[L_0, J(f)]\Psi\| = \|J(f')\Psi\| \leq \alpha_{f'}\|(L_0+1)^{\frac{1}{2}}\Psi\|,$$

因此，根据定理 A.2，它是本质自伴的，并且可以定义在 $\mathcal{D}(L_0)$ 上。这样，如果f， $g \in C^\infty(S^1)$，那么对易子 $[J(f)\ J(g)]$在 $\mathcal{D}(L_0)$ 上是良定义的，并且

$$[J(f), J(g)]\Psi = \int_{S^1} f'(t)g(t)dt \cdot \Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}(L_0).$$

此外，根据定理 A.2，如果 f和 g的支集不相交，那么 $J(f)$ 和 $J(g)$ 强对易，即 $[e^{itJ(f)}, e^{itJ(g)}] = 0$。还可以证明，伴随作用 $U(\varphi)(e^{iJ(f)}) = e^{iJ(f\circ\varphi^{-1})}$。

对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，记最低权向量为 Ω_λ，可以构造一个 Verma 模，使得表示 J_n^λ的形式如上所述，只是 $J_0^\lambda\Omega_\lambda = \lambda\Omega_\lambda$。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，同样的对易关系和类似的估计也成立。

对于每个非空且非稠密的开区间 $I \subset S^1$，都关联如下冯·诺伊曼代数

$$\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I) := \{e^{iJ(f)} : \mathrm{supp} f \subset I\}''.$$

三元组（$\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}$、$U$、$\Omega$）是圆 S^1上的一个共形网。

6.2 U(1)流的表示

固定一个开、非空且非稠密的区间 $I \subset S^1$ 以及一个满足 supp $h \subset I$的函数 $h \in C^\infty(S^1)$。然后，我们按以下方式定义作用于 Weyl 算子 $W(f)$ 上的映射 $= e^{iJ(f)}$，其中 $f \in C^\infty(S^1)$ 的支集包含于 I

$$\sigma_{h,I}(W(f)) := e^{i\int_{S^1} f(t)h(t)dt} W(f).$$

映射 $\sigma_{h,I}$ 可以扩展为局部代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I)$ 在 Fock空间上的一个表示。事实上，对于每个区间 I_1，σ_{h,I_1} 都由 Ad $W(H)$ 实现，其中 $H' = h$ 在$_\sim I_1$ 上，并且支集位于另一个区间 I_1 中。因此，σ_{H,I_1} 扩展为局部代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I_1)$ 的一个表示。若 $I_2 \subset S^1$ 是另一个满足 $I_1 \subset I_2$的区间，则存在一个函数 $\tilde{H}$，其支集包含于某个区间 $I_2 \supset \overline{I}_2$ 中，并满足在 I_2 上 $H' = h$，且 $\sigma_{h,I_1}(W(f)) =$Ad $W(H)(W(f))$。因此，可以将网 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}$ 的一个表示 σ_h 定义为族 $\{\sigma_{h,I_1}\}_{I_1}$，其中 $I_1 \subset S^1$ 如上，并验证相容条件 $\sigma_{h,I_2}|_{\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I_1)} = \sigma_{h,I_1}$，只要 $I_1 \subset I_2$是 S^1 的两个非空非稠密开区间。

这些表示的幺正等价类由 $\int_{S^1} h(t)dt$ 的值决定。特别地，当 $\int_{S^1} h(t)dt = 0$ 时，σ_h 与真空表示幺正等价。令 $\alpha = \int_{S^1} h(t)dt$。尽管表示 σ_h 定义在真空希尔伯特空间上，我们将其记为 $\mathcal{H}_\alpha$，以便区分该表示。类似地，$\mathcal{H}_\alpha$ 中的最低权向量记为 Ω_α。这些结果见 [BMT88]。

6.3 融合关系与编织

设 $h_1, h_2 \in C^\infty(S^1)$。则映射 $\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}$ 是 U(1)电流网$\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}$的自同构。令 $I_0 \in \mathcal{I}$，并考虑局部代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I_0)$。于是，$\sigma_{h_1,\ I_0}, \sigma_{h_2,\ I_0}$ 是局部代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}(I_0)$ 的表示，满足 $\sigma_{h_1,\ I_0} \circ \sigma_{h_2,\ I_0} = \sigma_{h_1+h_2,\ I_0}$。由于区间$I_0$ 是任意的，我们有

$$\sigma_{h_1} \circ \sigma_{h_2} = \sigma_{h_1+h_2}.$$

我们现在计算 U(1)流的编织。我们认为这一结果众所周知，但未能找到相关参考文献。

固定 $I \in \mathcal{I}$。考虑两个函数 h_1、$h_2 \in C^\infty(S^1)$，其支集 supp(h_1)、supp$(h_2) \subset I$；并令σ_{h_1} 和σ_{h_2} 为网 $\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)}$的两个自同构。接下来，取 $I_0 \in \mathcal{I}$，使得 $I \subset I_0$，并选择 I_1、$I_2 \subset I_0$属于 $\mathcal{I}$，使得 I_2始终位于 I_1的未来，而 I_1、I_2、I两两不相交。

固定 $i = 1$和 2，并令 $g_i \in C^\infty(S^1)$满足 supp $g_i \subset I_i$，且$\int_{S^1} g_i(t)dt = \int_{S^1} h_i(t)dt$。那么存在 $H_i \in C^\infty(S^1)$，其支集包含于 I_0，使得伴随作用$W(H_i)\sigma_{h_i} = \sigma_{g_i}$。此外，关于 I_1 和 I_2的相对位置，H_1 和 H_2 必须在 I上具有 $H_1' = -h_1$的形式，在 I_i 上具有$H_2' = -h_2$ 的形式，并在其他地方为常数。由对 h_i、g_i 的条件可知，H_i在区间$(I \cup I_i)^c \cap I_0$的并集上是分段常数的（见图3）。特别是，若这些区间位于 I_0^c 与 I 之间或 I_0^c 与 I_c之间，则 H_i 定义为 0，因为 H_i是连续的。在其余部分，出于同样的原因，我们令 H_i 为 $\int_I h_i(t)dt = \int_{I_i} g_i(t)dt := \sqrt{2\pi}\alpha_i$，其中 α_i 称为荷。

编织由以下公式给出

$$\epsilon(\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}) := \epsilon_{\sigma_{h_1},\sigma_{h_2}} = \sigma_{h_2,I_0}(W(H_1)^*)W(H_2)^*W(H_1)\sigma_{h_1,I_0}(W(H_2)).$$

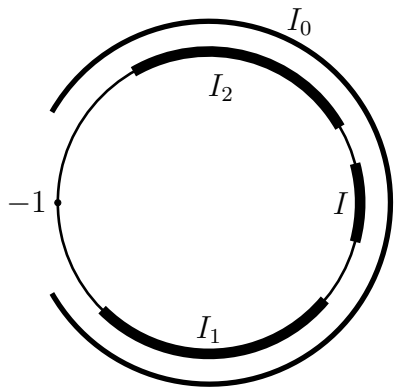

图 3：区间 I、I_0、I_1 和 I_0 的一种配置示例。将 -1 视为该光线的无穷远点，并选择不包含它的 I_0，即可确定“未来”和“过去”的选择。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma_{h_1},\sigma_{h_2}) &= \sigma_{h_2,I_0}(W(H_1)^*)W(H_2)^*W(H_1)\sigma_{h_1,I_0}(W(H_2)) \\
&= e^{-i\int_{S^1}H_1(t)h_2(t)dt}W(H_1)^*W(H_2)^*W(H_1)e^{i\int_{S^1}h_1(t)H_2(t)dt}W(H_2) \\
&= e^{-i\int_{I}H_1(t)h_2(t)dt}W(H_1)^*W(H_2)^*W(H_1)e^{i\int_{I}h_1(t)H_2(t)dt}W(H_2) \\
&= e^{i\int_{I}[h_1(t)H_2(t)-H_1(t)h_2(t)]dt}W(H_1)^*W(H_2)^*W(H_1)W(H_2) \\
&= e^{i\int_{I}[h_1(t)H_2(t)-H_1(t)h_2(t)]dt}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle H_1,H_2\rangle}W(-H_1-H_2)e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle H_1,H_2\rangle}W(H_1+H_2) \\
&= e^{i\int_{I}[h_1(t)H_2(t)-H_1(t)h_2(t)]dt}e^{i\,\mathrm{Im}\langle H_1,H_2\rangle}.
\end{aligned}$$

回想一下，$\mathrm{Im}\langle H_1,H_2\rangle = \int_{S^1}H_1(t)H_2'(t)dt$，那么

$$\int_{S^1}H_1(t)H_2'(t)dt = \sqrt{2\pi}\alpha_1\int_{I_2}g_2(t)dt + \int_I H_1(t)h_2(t)dt = 2\pi\alpha_1\alpha_2 + \int_{I\cup I_1}h_1(t)H_2(t)dt.$$

因此，编织为

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma_{h_1},\sigma_{h_2}) &= e^{i\int_{I}[h_1(t)H_2(t)-H_1(t)h_2(t)]dt}e^{i\,\mathrm{Im}\langle H_1,H_2\rangle} \\
&= e^{i\int_{I}[h_1(t)H_2(t)-H_1(t)h_2(t)]dt}e^{i2\pi\alpha_1\alpha_2+i\int_{I\cup I_1}h_1(t)H_2(t)dt} \\
&= e^{i\int_{I}h_1(t)H_2(t)dt}e^{i2\pi\alpha_1\alpha_2}.
\end{aligned}$$

如果我们取 $h_i = \sqrt{2\pi}\alpha_i h$ 为单个函数 h，使得$\int_{S^1}h(t)dt = 1$，那么 H_2 正比于 I 上的函数 H，使得 $H' = -h$ 在 I上成立。因此，通过分部积分，

$$\int_I h_1(t)H_2(t)dt = 2\pi\alpha_1\alpha_2\int_I h(t)H(t)dt = 2\pi\alpha_1\alpha_2\left(\left[-H^2(t)\right]_I - \int_I h(t)H(t)dt\right)$$

意味着

$$\int_I h_1(t)H_2(t)dt = -\pi\alpha_1\alpha_2.$$

因此我们得出，在这种情形下

$$\epsilon(\sigma_{\alpha_1 h}, \sigma_{\alpha_2 h}) = e^{i\pi\alpha_1\alpha_2},$$

结合上述构型。特别地，有 $\epsilon(\sigma_{\alpha_1 h}, \sigma_{\alpha_2 h}) = \epsilon(\sigma_{\alpha_2 h}, \sigma_{\alpha_1 h})$。

6.4 带电场

U(1)电流网具有第 5.3 节意义下的带电主场。我们赋予$\mathbb{R}$ 标量积 $\langle\alpha, \beta\rangle = \alpha\beta$。接下来，我们检验形式级数$Y_\alpha(z) = \sum_{s\in\mathbb{R}} Y_{\alpha,\ s} z^{-s-D}$是带电主场，其中 $D = \langle\alpha、\ \alpha\rangle/2$，且每个系数$Y_{\alpha,\ s}$都是映射 $\mathcal{H}_\beta^{\text{fin}} \to \mathcal{H}_{\beta+\alpha}^{\text{fin}}$（在每个 $\mathcal{H}_\beta^{\text{fin}}, \beta \in \mathbb{R}$ 上，仅有$Y_{\alpha,\ s}$满足 $s \in \mathbb{Z} - \langle\alpha, \beta\rangle - D$ 时非零）。明确地，令 c_α 为由$c_\alpha J_{-n_1}\cdots J_{-n_k}\Omega_\beta = J_{-n_1}\cdots J_{-n_k}\Omega^{\beta+\alpha}$, $n_j > 0$定义的酉电荷平移算子 $\mathcal{H}_\beta^{\text{fin}} \to \mathcal{H}_{\beta+\alpha}^{\text{fin}}$。沿用 [TZ12]（$\alpha(n)$ 在我们的记号中对应于 αJ_n，参见 [TL97，第 V 章（3.2.1）]），我们定义形式级数为

$$E^{\pm}(\alpha, z) = \exp\left(\mp\sum_{n>0}\frac{\alpha J_{\pm n}}{n} z^{\mp n}\right),$$
$$Y_\alpha(z) = c_\alpha E^-(\alpha, z)E^+(\alpha, z)z^{\alpha J_0}, \tag{6.2}$$

其中，$\alpha J_0 = \langle\alpha, \beta\rangle$ 在每个 $\mathcal{H}_\beta$上都是标量。指数函数 $E^{\pm}(\alpha, z)$的形式级数可以毫无问题地定义，因为将其展开为泰勒级数时，z^n 的系数是作用于 $\mathcal{H}_0^{\text{fin}}$的算子的有限和。至于 $Y_\alpha(z)$，乘积$E^-(\alpha, z)E^+(\alpha, z)$的系数是无限和，但仍可作为算子理解。事实上，对于每个n，$E^+(\alpha, z)$中 z^{-n}的系数$E_{\alpha,n}^+$是 $J_{k_1}\cdots J_{k_j}$的线性组合，且满足$\sum_{m=1}^j k_m = n$, $k_m > 0$；这样的组合只有有限个。级数$E^-(\alpha, z)$也具有类似的结构。由于 $\mathcal{H}_0^{\text{fin}}$中的任意向量 Ψ 都具有有限能量 M，且 J_m使能量降低 m，因此，当$\sum_m k_m > M$时，任意乘积 $J_{k_1}\cdots J_{k_j}$都会湮灭 Ψ；也就是说，当 $n > M$时，$E_{\alpha,n}^+$会湮灭 Ψ。$E^-(\alpha, z)E^+(\alpha, z)$中 z^n的系数是总和$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} E_\alpha^-{}_{,n-j}E_{\alpha,j}^+$。因此，在每个 Ψ上，只有有限项会作出贡献，这个和定义了 $\mathcal{H}_0^{\text{fin}}$上的一个算子。其限制 $Y_\alpha(z)|_{\mathcal{H}_\beta}$ 具有如下形式

$$Y_\alpha(z)|_{\mathcal{H}_\beta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_{\alpha,n-\alpha\beta-D}|_{\mathcal{H}_\beta} z^{-n-D}.$$

编织 根据 [TL97，第 VI 章（1.2.2）]，有

$$\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle} E^+(\alpha, w)E^-(\beta, z) = E^-(\beta, z)E^+(\alpha, w)$$

其中 $(1-u)^a = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}(-u)^n$。注意，左端是有意义的，因为 $(1-\frac{z}{w})^{-\langle\alpha,\beta\rangle}$ 在 z 中含有正幂，在 w 中含有负幂，而 $E^-(\beta, z)$ 在 z 中含有正幂，$E^+(\alpha, w)$ 在 w 中含有负幂。类似地，

$$E^-(\alpha, w)E^+(\beta, z) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle} E^+(\beta, z)E^-(\alpha, w).$$

因此，若引入前顶点算子 $\underline{Y_\alpha}(z) = E^-(\alpha,z)E^+(\alpha,z)z^{\alpha J_0}$（即不含 c_α 的 $Y_\alpha(z)$），并利用 $E^\pm(\alpha,z)$ 与 $E^\pm(\beta,w)$ 对易（当 $\pm$ 重合时），便得到

$$\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle}\underline{Y_\alpha}(w)\underline{Y_\beta}(z) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle}\underline{Y_\beta}(z)\underline{Y_\alpha}(w)\,. \tag{6.3}$$

这里同样地，该等式应理解为：对于每个固定向量 $\Psi\in\mathcal{H}_0^{\mathrm{fin}}$，$z^n\zeta^m$ 的各个系数彼此相等。

现在我们取 $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}}\mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{fin}}$（代数直和）。利用 $c_{\lambda_1}z^{\lambda_2 J_0} = z^{-\langle\lambda_1,\ \lambda_2\rangle+\lambda_2 J_0}c_{\lambda_1}$ 以及 c_{λ_1} 与 $E^+(\alpha,z)$ $E^-(\alpha,w)$ 对易这一事实，我们得到

$$\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle}w^{-\langle\alpha,\beta\rangle}Y_\alpha(w)Y_\beta(z) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-\langle\alpha,\beta\rangle}z^{-\langle\alpha,\beta\rangle}Y_\beta(z)Y_\alpha(w)\,. \tag{6.4}$$

相对局域性 这里我们再次将 $Y_\alpha(z)$ 视为 $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}}\mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{fin}}$ 上的形式级数。在这些直和中的每一个上，L_m 和 J_m 都自然地作为表示作用。我们分别将它们在 $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}}\mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{fin}}$ 上的直和记为 $\hat{}L_m$、$\hat{}J_m$。

$\hat{}$ 对易关系 $[J_m,Y_\alpha(z)] = \alpha Y_\alpha(z)z^m$ 可以从 $Y_\alpha(z)$ 的定义中轻易验证。该关系等价于 $[J_m,Y_{\alpha,s}] = \alpha Y_{\alpha,\ m+s}$。

原初性：正如我们将看到的，Y_α 的共形维数应为 $D=\frac{\alpha^2}{2}$。注意，

$$\partial Y_\alpha(z) = z^{-1}Y_\alpha(z)\alpha\hat{J}_0 + \sum_{j<0}z^{-j-1}\alpha Y_\alpha(z)\hat{J}_j + \sum_{j>0}z^{-j-1}\alpha\hat{J}_jY_\alpha(z).$$

另一方面，Y_α 是原初场等价于 $[\hat{}L_m,Y_\alpha(z)] = \partial Y_\alpha(z)z^{m+1} + D(m+1)Y_\alpha(z)$。因此，我们需要证明

$$\begin{aligned}&[\hat{L}_m,Y_\alpha(z)]\\ &= (z^{-1}Y_\alpha(z)\alpha\hat{J}_0 + \sum_{j<0}z^{-j-1}\alpha Y_\alpha(z)\hat{J}_j + \sum_{j>0}z^{-j-1}\alpha\hat{J}_jY_\alpha(z))z^{m+1} + D(m+1)Y_\alpha(z)z^m\,.\end{aligned} \tag{6.5}$$

有 $\hat{}J_jc_\alpha = c_\alpha(\hat{}J_j+\alpha\delta_j)$。由 Sugawara 公式 $\hat{}L_m = \frac{1}{2}\sum_k{:}\hat{}J_k\,\hat{}J_{m-k}{:}$，可得 $\hat{}L_mc_\alpha = c_\alpha(\hat{}L_m+\alpha\,\hat{}J_m)$，其中 $m\neq 0$，以及 $\hat{}L_0c_\alpha = c_\alpha(\hat{}L_0+\alpha\,\hat{}J_0+\frac{\alpha^2}{2})$。

我们希望直接验证 $Y_\alpha(z)$具有上述意义下的原初性（这也应可通过使用顶点算子代数模推出，参见 [CGP21, (36.1)] 及其中的参考文献，特别是 [FHL93, 第5节。4]）。为此，回顾对易关系

$$[\hat{L}_m,\hat{J}_j] = -j\hat{J}_{j+m}.$$

在 $E^\pm$ 的定义中，乘积的顺序并不重要，因此

$$E^+(\alpha,z) = \prod_{j>0}\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)\,,\qquad E^-(\alpha,z) = \prod_{j<0}\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)\,.$$

利用公式 $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$，我们计算得到

$$[\hat{L}_m,Y_\alpha(z)]=[\hat{L}_m,c_\alpha]E^-(\alpha,z)E^+(\alpha,z)z^{\alpha\hat{J}_0} \tag{6.6}$$
$$+c_\alpha[\hat{L}_m,E^-(\alpha,z)]E^+(\alpha,z)z^{\alpha\hat{J}_0}+c_\alpha E^-(\alpha,z)[\hat{L}_m,E^+(\alpha,z)]z^{\alpha\hat{J}_0}.$$

让我们分别考虑这三种情形。我们用较简单的 $m=0$ 情形来说明我们的策略。

- $m=0$。在这种情形下，(6.5) 变为如下形式，因此我们需要证明

$$[\hat{L}_0,Y_\alpha(z)]=(z^{-1}Y_\alpha(z)\alpha\hat{J}_0+\sum_{j>0}z^{-j-1}\alpha\hat{J}_jY_\alpha(z)+\sum_{j<0}z^{-j-1}\alpha Y_\alpha(z)\hat{J}_j)z+DY_\alpha(z)$$
$$=Y_\alpha(z)\alpha\hat{J}_0+\sum_{j>0}z^{-j}\alpha\hat{J}_jY_\alpha(z)+\sum_{j<0}z^{-j}\alpha Y_\alpha(z)\hat{J}_j+DY_\alpha(z). \tag{6.7}$$

由于 $[L_0,c_\alpha]=c_\alpha(D+J_0)$，(6.7) 中的第一项和最后一项由此得到。注意到 $[L_0,J_j]=-jJ_j$，显然有

$$\left[\hat{L}_0,\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)\right]=\alpha\hat{J}_jz^{-j}\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)$$

因此 $[L_0,E^\pm(\alpha,z)]=\sum_{\pm j>0}z^{-j}\alpha J_jE^\pm(\alpha,z)$。将它们代入 (6.6)，便得到 (6.7) 中的第二项和第三项。

- $m>0$，为奇数。在这种情形下，不存在满足 $-2j=m$ 的 j。利用 $[L_m,J_j]=-jJ_{m+j}$，我们有

$$\left[\hat{L}_m,\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}\left[\hat{L}_m,\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)^k\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k!}\tfrac{kj\alpha\hat{J}_{m+j}}{j}z^{-j}\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)^{k-1}$$
$$=\alpha\hat{J}_{m+j}z^{-j}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{(k-1)!}\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)^{k-1}$$
$$=\alpha\hat{J}_{m+j}z^{-j}\exp\left(-\tfrac{\alpha\hat{J}_j}{j}z^{-j}\right)$$

因此 $[L_m,E^\pm(\alpha,z)]=\sum_{\pm j>0}z^{-j}\alpha J_{m+j}E^\pm(\alpha,z)$。(6.6) 中情形$j=-m$ 的贡献恰好给出 (6.5) 中的项 $z^{-1}Y_\alpha(z)\alpha J_0z^{m+1}$。

如果 $m+j<-j$，我们需要将因子 J_{m+j} 移到 $\exp\left(-\frac{\alpha J_{-m-j}}{-m-j}z^{m+j}\right)$ 过去。回想 $[J_j,J_{-j}]=j$，因此 $[\exp(cJ_j),J_{-j}]=\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}c^k[J_j^k,J_{-j}]=cj\exp(cJ_j)$，对于每个这样的 j，我们得到一个贡献 $\alpha^2z^mY_\alpha(z)$。这样的情形共有 $\frac{m-1}{2}$ 个，即 $(m-1)\frac{\alpha^2}{2}z^mY_\alpha(z)$。

最后，$[L_m,c_\alpha]E^-(\alpha,z)E^+(\alpha,z)z^{\alpha J_0}=\alpha J_mY_\alpha(z)=z^{-m-1}\alpha J_mY_\alpha(z)z^{m+1}$。由于 $m>0$，我们需要将因子 J_m 移过 $E^-(\alpha,z)$，由此还会产生一个额外的

贡献 $\alpha^2 z^m Y_\alpha(z)$。总之，我们得到一个为 $(m+1)\frac{\alpha^2}{2} z^m Y_\alpha(z)$ 的贡献，它是 (6.5) 的最后一项，也是与 $j=m$ 对应的项。这就完成了 $m>0$ 奇数情形的证明。

- $m>0$，也是偶的。在这种情形下，存在 j 使得 $-2j=m$。我们计算对易子 $\big[\hat{L}_{-2j}, \exp\big(-\frac{\alpha J_j}{j} z^{-j}\big)\big]$，稍微修改上面对 $m>0$ 为奇的论证

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_{-2j}, \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \left[\hat{L}_{-2j}, \left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right)^k\right] \\
&= -\tfrac{\alpha z^{-j}}{j}[\hat{L}_{-2j}, J_j] + \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \left[\hat{L}_{-2j}, \left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right)^k\right] \\
&= \alpha z^{-j} J_{-j} + \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tfrac{(-1)^k \alpha^k z^{-jk}}{j^k} \tfrac{j^2 k(k-1)}{2} J_j^{k-2} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tfrac{(-1)^k \alpha^k z^{-jk}}{j^k} kj J_j^{k-1} J_{-j} \\
&= \alpha z^{-j} J_{-j} + \tfrac{\alpha^2}{2} z^{-2j} \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{(k-2)!} \tfrac{(-1)^k \alpha^{k-2} z^{-j(k-2)}}{j^{k-2}} J_j^{k-2} \\
&\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tfrac{(-1)^k \alpha^k z^{-jk}}{j^k} kj J_j^{k-1} J_{-j} \\
&= \tfrac{\alpha^2}{2} z^{-2j} \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{(k-1)!} \tfrac{(-1)^{k-1} \alpha^{k-1} z^{-j(k-1)}}{j^{k-1}} J_j^{k-1} J_{-j} \\
&= \tfrac{\alpha^2}{2} z^{-2j} \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right) + \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right) J_{-j}
\end{aligned}$$

  然后移动 $J_{j+m} = J_{-j}$，我们得到一个额外项

$$\tfrac{\alpha^2}{2} z^{-2j} \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right) = \tfrac{\alpha^2}{2} z^m \exp\left(-\tfrac{\alpha \hat{J}_j}{j} z^{-j}\right)$$

  这给出了贡献 $\frac{\alpha^2}{2} z^m Y_\alpha(z)$。

  由带有 $m+j<-j$ 的 j，我们在 (6.5) 中得到贡献 $\alpha^2 z^m Y_\alpha(z)$，每个这样的 j 都如前所述；由于 m 是偶的，这样的情形有 $\frac{m-2}{2}$ 个。再加上上一段的贡献，我们得到的仍是 $\frac{m-1}{2}\alpha^2 z^m Y_\alpha(z)$。

  其余部分与 m 为奇的情形相同。

- 该情形 $m<0$ 是通过取共轭并将 α 替换为 $-\alpha$ 得到的。

能量界 根据 [TL97, 命题 VI.1.2.1], $\|Y_{\alpha,n}\| \le 1$ 如果 $\langle \alpha, \alpha \rangle \le 1$。特别是，$Y_\alpha$ 满足此类 α 的线性能量界。还证明，对于任意 α， $Y_\alpha(z)$ 满足多项式能量界。

Wightman 场 设 G 是 $\mathbb{R}$ 的子群。那么，对于一个固定的函数 h，其 supp $h \subset I$，我们可以选择一个由 $\alpha \in G$ 参数化的自同构族 σ_α，使得省略对 h 的依赖后， $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta = \sigma_{\alpha+\beta}$。它们的编织满足 $\epsilon^{\pm}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \epsilon^{\pm}(\sigma_\beta, \sigma_\alpha) = \epsilon^{\pm}(\sigma_{-\alpha}, \sigma_{-\beta})$。因此，如果取 $\kappa_{\mathrm{L}}(\alpha) = \sigma_\alpha$， $\kappa_{\mathrm{R}}(\alpha) = \sigma_{-\alpha}$，这些对象便满足第4节的条件。对于任意满足 $\alpha^2 + 2\ell > 0$ 的 $\ell \in \mathbb{Z}$，我们还可以取 $\kappa_{\mathrm{L}}(\alpha) = \sigma_\alpha$， $\kappa_{\mathrm{R}}(\alpha) = \sigma_{\pm\sqrt{\alpha^2+2\ell}}$。

相反，令 $G = \mathbb{Z}$ 和 $K = \{1, 2, \cdots |K|\}$ 为一个有限集。对于 $j \in K$，我们取 α_j 使得 $\sum_{j\in K} \alpha_j^2/2 = 1$，则 $\kappa_j(n) = \sigma_{n\alpha_j}$ 满足第3节的条件，从而得到 $(\mathcal{A}_{\mathrm{U}(1)})^{\otimes j}$ 在 S^1 上作为共形网的扩张。

另一方面，我们已经检验了带电主场 Y_α 满足第 5.3 节的条件（不含指标 ξ）。此外，如果存在 $\alpha \in G$， $|\alpha| \leq 1$，那么 $Y_{\alpha,\, s}$ 是有界的，因此在第 5.5 节中构造的二维 Wightman场满足线性能量界，并生成 $\mathcal{E}$ 上的共形网。如果 G 是不具有这样的 α 的子群，则由 G 给出的扩张可以嵌入一个更大的网中，其中的场满足线性能量界。由此可知，根据 CTW22 引理 3.6]的一个类似结果， $\alpha > 1$ 的场在与类空分离测试函数进行卷积时强对易。

7 展望

这一构造也应适用于等级为 1 [Was98], [TL97] 的环群网。通过我们的构造， [TL97] 的带电主场的玻色子构造应能给出二维Wightman场。

已有一些工作使用类似于顶点算子代数的语言研究 CFT的二维扩张，例如 [HK07], [CKM22], [Mor23]。我们计划更一般地研究 Wightman 场的构造问题，特别是研究高等级环群网和 Virasoro 网 [KL04b]。通过一对流对 CFT进行 CFT变形 [Mor23] 也应当能在 Wightman框架中得到类似的实现；有趣的是，这是否具有动力学意义，至少在微扰理论的意义下，参见 [CRV22]。

原则上，我们的场应当可以 Wick 旋转到欧几里得理论，而该理论应与上述工作相对应。若能从希尔伯特空间和算子的角度理解这些欧几里得模型，将会很有意义，参见 [FFK89]。

致谢

我们感谢 Sebastiano Carpi 就主场进行的有趣讨论，并允许我们纳入定理 A.2 的证明；感谢 Yasuyuki Kawahigashi 提供关于二阶上同调消失的有用信息；感谢 Claudia Pinzari 提供参考文献 [CGP21, (36.1)], ；感谢 Karl-Henning Rehren 就编织进行启发性的讨论；感谢 Slava Rychkov 告知我们 [LM75] 的准确表述；并感谢审稿人仔细阅读本文并提出有益意见。

M.S.A. 是 JSPS国际研究员，并对 Kakenhi科研资助编号 22F21312 表示衷心感谢。L.G. 获得了欧盟地平线2020研究与创新计划 H2020-MSCA-IF-2017 的资助，资助协议编号为 795151，超越代数共形场论中的有理性：数学结构与模型。

资助协议编号为 795151，超越代数共形场论中的有理性：数学结构与模型。L.G. 和 Y.T. 还获得了 MUR 卓越系项目 MatMod@TOV 的部分资助。该项目由数学系罗马第二大学授予，并通过罗马第二大学的 OAQM 经费获得资助，CUP E83C22001800005。M.S.A.、L.G. 和 Y.T. 还获得了 GNAMPA–INdAM 的部分资助。

A 关于强局域性

让我们证明一个关于满足线性能量界的算子强交换性的简单判据，它可由 [GJ87, 定理 19.4.4]推出。这里的论证归功于 Sebastiano Carpi。

设 H 是一个正自伴算子， A 是定义在 Dom(H)上的对称算子，并假设，

$\|A\Psi\| \le C\|H\psi\|$ $\|[H,A]\Psi\| \le C\|H\psi\|$ $R\ \lambda\ =\ H+\ \lambda+1\ _{\mathbb{I}}{}^{-1}\ R=,.\mathrm{We\,denote}\,()$ $R\ 0\ =\ {}^{-1}\ \delta\ A$ $\delta^k\ A\ =\ \delta\ \delta\ \cdots\ \delta\ A$ $\cdots$ 。根据 [GJ87 的证明，定理 19.4.1]，我们有

$$
\begin{aligned}
R^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\lambda)\lambda^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda,\\
[A,R^{\frac{1}{2}}] &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\lambda)((H+(\lambda+1)_{\mathbb{I}})A - A(H+(\lambda+1)_{\mathbb{I}}))R(\lambda)\lambda^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda\\
&= -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty R(\lambda)\delta(A)R(\lambda)\lambda^{-\frac{1}{2}}\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

另请注意， $\|\ H+\ _{\mathbb{I}}\ R\ \lambda\ \| = \|R\ \lambda\ \ H+\ _{\mathbb{I}}\ \| \le 1$ $\|R\ \lambda\ \| \le \frac{1}{1+\lambda}$ $\|R^{-1}R\ \lambda\ \| = ()\ ()\ ()()$ 、 () 和 $\|\frac{H+}{H+\ \lambda+1}\| \le \frac{1}{\lambda+1} \le 1$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|[A,R^{\frac{1}{2}}]\| &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{1+\lambda}\|\delta(A)R(\lambda)\|\,d\lambda\\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{1+\lambda}\|\delta(A)R\|\,d\lambda\\
&= \|\delta(A)R\|.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$\|AR - R^{\frac{1}{2}}AR^{\frac{1}{2}}\| \le \|[A,R^{\frac{1}{2}}]\|\cdot\|R^{\frac{1}{2}}\| \le \|\delta(A)R\|.$$

特别地，如果 $\|AR\|$有界，则可推出 $\|R^{\frac{1}{2}}AR^{\frac{1}{2}}\| \le \|AR\| + \|\delta(A)R\|$。如果将其应用于 $\delta(A)$ 和 $\delta^2(A) = -[H,[H,A]]$ 而不是 A，我们分别得到$\|R^{\frac{1}{2}}\delta(A)R^{\frac{1}{2}}\| \le \|\delta(A)R\| +\|\delta^2(A)R\|$ 和 $\|R^{\frac{1}{2}}\delta^2(A)R^{\frac{1}{2}}\| \le \|\delta^2(A)R\| + \|\delta^3(A)R\|$。

引用 [GJ87，第 19.4 定理。3] 其中 $n=1$ 以及 [GJ87，第 19.4 定理。4]:

定理 A.1。以下结论成立。

- 设 H、 A、 R如上，并假设 $R^{\frac{1}{2}}\delta$（A）$R^{\frac{1}{2}}$和 AR有界。那么 A在 H的任意核上本质自伴。

- 设 H、 A、 B、 R如上，并假设 $R^{\frac{1}{2}}\delta$（A）$R^{\frac{1}{2}}$、 $R^{\frac{1}{2}}\delta$（B）$R^{\frac{1}{2}}$、 AR、 BR、 $R^{\frac{1}{2}}\delta^2$（A）$R^{\frac{1}{2}}$、$R^{\frac{1}{2}}\delta^2$（B）$R^{\frac{1}{2}}$、 δ（A）R、 δ（B）R有界。此外，假设 AB、 BA定义在 Dom（H）和 $AB = BA$上。那么 A、 B 在 H的任意核上本质自伴，且其闭包强对易。

综合这些观察，我们得到以下结果。

定理 A.2。以下结论成立。

- 令 H A $\|A\Psi\| \le C\|$ $H+$ $\|\Psi\|$ $\|[H,A]\Psi\| \le$，$C\|$ $\Psi\|$ $\|[H,[H,A]]\Psi\| \le C\|$ $\Psi\|$ A 如上，并设算子 ()、$(H+$ $)$、$(H+$ $)$。则 在 H的任意核上均为本质自伴。

- 令 H、 A、 B、 R如上，并设算子

  - $A, \delta(A) = i[H,A], \delta^2(A) = -[H,[H,A]], \delta^3(A) = -i[H,[H,[H,A]]]$
  - $B, \delta(B) = i[H,B], \delta^2(B) = -[H,[H,B]], \delta^3(B) = -i[H,[H,[H,B]]]$

  定义在 Dom(H) 上，并且

  - $\|A\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|, \|\delta^k(A)\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|, k = 1,2,3$
  - $\|B\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|, \|\delta^k(B)\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|, k = 1,2,3$

  进一步假设 AB、 BA定义在 Dom(H) 和 $AB = BA$上。则 A、 B在 H 的任意核上均为本质自伴，且它们的闭包强对易。

证明。根据假设 $\|A\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|, \|\delta(A)\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|$，我们有 $\|AR\| \le C, \|\delta($ $A)R\| \le C$，因此，根据上述观察， $\|R^{\frac{1}{2}}AR^{\frac{1}{2}}\| \le 2C$。对 $\delta($ $A)$ 运用相同的论证，并结合假设 $\|\delta^2($ $A)\Psi\| \le C\|(H+$ $)\Psi\|$，可得 $\|R^{\frac{1}{2}}\delta($ $A)R^{\frac{1}{2}}\| \le 2C$。这一点以及定理 A.1 的第一条结论（将 C 替换为 $2C$）完成了第一条结论的证明。

至于第二条结论，我们利用 $\|\delta^3($ $A)R\| \le C$ 推出 $R^{\frac{1}{2}}\delta^2($ $A)R^{\frac{1}{2}}$ 有界，而这正是定理 A.1 第二条结论的假设。类似地，我们还得到了涉及 B 的算子的界，因此定理 A.1 的第二条结论适用。

□

这应当与对易子定理的其他一些表述进行比较，例如，[RS75，定理 X。37] 该定理假设 $\|A\psi\| \le C\|H\psi\|$ 和 $|\langle\psi$、 $[H,A]\psi\rangle| \le C\langle\psi$、 $H\psi\rangle$（这些假设与定理 A.1 的第一条断言非常相似），并证明 A在 H的任意核上都是本质自伴的。一般而言，对于可闭算子 B，$\|B\psi\| \le C\|H\psi\|$ 对所有 ψ 成立并不蕴含[8] $|\langle\psi$、 $B\psi\rangle| \le C\langle\psi$、 $H\psi\rangle$，因此，我们无法仅从 $\|A\Psi\| \le C\|H\Psi\|$、 $\|[H,A]\Psi\| \le C\|$（$H+\mathbb{I}$） $\Psi\|$ 推断出 A 的本质自伴性，而是需要对高阶对易子给出一个界。

对对易子也可以采用较弱的假设，例如假设其作为二次型满足界 [DF77], 但此时必须谨慎处理定义域，参见 [Tan16，附录 C]。

[8] A counterexample on $\mathbb{C}^2$ is $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} H, \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

参考文献

[Bar54] V. Bargmann。《连续群的幺正射线表示》。数学年刊（第二辑），59：1–46，1954。http://www.jstor.org/stable/1969831。[Bau95] Hellmut Baumg¨artel。《量子场论中的算子代数方法》。柏林：Akademie Verlag，1995。https://books.google.com/books?id=rq3vAAAAMAAJ。[BFV03] Romeo Brunetti、Klaus Fredenhagen 和 Rainer Verch。《一般协变局域性原理——局域量子场论的新范式》。Comm. Math. Phys.，237：31–68，2003。https://arxiv.org/abs/math-ph/0112041。[BGL93] R. Brunetti、D. Guido 和 R. Longo。《共形量子场论中的模结构与对偶性》。Comm. Math. Phys.，156(1)：201–219，1993。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104253522。[BGS22] Marco Benini、Luca Giorgetti 和 Alexander Schenkel。《二维共形代数量子场论的骨架模型》。Comm. Math. Phys.，395(1)：269–298，2022。https://arxiv.org/abs/2111.01837。[BJM23] Jo˜ao C. A. Barata、Christian J¨akel 和 Jens Mund。《德西特空间上的 $\mathscr{P}(\varphi)_2$ 模型》。《美国数学会回忆录》，281，2023年。https://arxiv.org/abs/1607.02265。[BK01] Bojko Bakalov 和 Alexander Kirillov, Jr。《张量范畴与模函子讲义》，《大学讲义丛书》第 21 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/tensor/tensor.html。[BKL15] Marcel Bischoff、Yasuyuki Kawahigashi 和 Roberto Longo。《二维有理局域共形网及其边界条件的刻画：极大情形》。Doc. Math.，20：1137–1184，2015。https://arxiv.org/abs/1410.8848。[BKLR15] Marcel Bischoff、Yasuyuki Kawahigashi、Roberto Longo 和 Karl-Henning Rehren。《张量范畴与冯·诺伊曼代数的端同态——及其在量子场论中的应用》，《数学物理 SpringerBriefs》第 3 卷。Springer，Cham，2015。https://arxiv.org/abs/1407.4793。[BMT88] Detlev Buchholz、Gerhard Mack 和 Ivan Todorov。《圆上的流代数作为局域场论的萌芽》。Nuclear Phys. B Proc. Suppl.，5B：20–56，1988。https://www.researchgate.net/publication/222585851。[BSM90] Detlev Buchholz 和 Hanns Schulz-Mirbach。《共形量子场论中的 Haag 对偶性》。《数学物理评论》，2(1)：105–125，1990。https://www.researchgate.net/publication/246352668。[BSW19] Marco Benini、Alexander Schenkel 和 Lukas Woike。《对合范畴、带色 $*$-拟运算与量子场论》。Theor. Appl. Categor.，34(2)：13–57，2019。https://arxiv.org/abs/1802.09555。[BSW21] Marco Benini、Alexander Schenkel 和 Lukas Woike。《代数量子场论的拟运算》。Commun. Contemp. Math.，23(2)：论文编号 2050007，39，2021年。https://arxiv.org/abs/1709.08657。

[Car04] Sebastiano Carpi。《Virasoro 网的表示论》。Comm. Math. Phys.，244(2)：261–284，2004年。https://arxiv.org/abs/math/0306425。[CDVIT21] Sebastiano Carpi、Simone Del Vecchio、Stefano Iovieno 和 Yoh Tanimoto。《圆的 Sobolev 微分同胚群的正能量表示》。Anal. Math. Phys.，11(1)：第 12 号论文，36 页，2021年。https://arxiv.org/abs/1808.02384。[CGGH23] Sebastiano Carpi、Tiziano Gaudio、Luca Giorgetti 和 Robin Hillier。《 C^*-张量范畴中的单倍代数与 Schellekens 列表》。Comm. Math. Phys.，402(1)：169–212，2023年。https://link.springer.com/article/10.1007/s00220-023-04722-9 https://arxiv.org/abs/2211.12790。[CGP21] Sergio Ciamprone、Marco Valerio Giannone 和 Claudia Pinzari。《弱拟 Hopf 代数、 C^*-张量范畴与共形场论，以及 Kazhdan-Lusztig-Finkelberg 定理》。2021年。https://arxiv.org/abs/2101.10016。[CKL08] Sebastiano Carpi、Yasuyuki Kawahigashi 和 Roberto Longo。《超共形网的结构与分类》。Ann. Henri Poincar ´e，9(6)：1069–1121，2008年。https://arxiv.org/abs/0705.3609。[CKLW18] Sebastiano Carpi、Yasuyuki Kawahigashi、Roberto Longo 和 Mih ´aly Weiner。《从顶点算子代数到共形网及其 обратно》。Mem. Amer. Math. Soc.，254(1213)：vi+85，2018年。https://arxiv.org/abs/1503.01260。[CKM22] Thomas Creutzig、Shashank Kanade 和 Robert McRae。《顶点代数的粘合》。Adv. Math.，396：第 108174 号论文，72 页，2022年。https://arxiv.org/abs/1906.00119。[CRV22] Sam Crawford、Kasia Rejzner 和 Benoˆıt Vicedo。《从微扰代数量子场论视角看洛伦兹型二维共形场论》。Ann. Henri Poincar ´e，23(10)：3525–3585，2022。https://arxiv.org/abs/2107.12347。[CTW22] Sebastiano Carpi、Yoh Tanimoto 和 Mih ´aly Weiner。《手征共形场论中的局域能量界与强局域性》。Comm. Math. Phys.，390(1)：169–192，2022。https://arxiv.org/abs/2103.16475。[CTW23] Sebastiano Carpi、Yoh Tanimoto 和 Mih ´aly Weiner。《带有 $c \geq 2$ 的 $\mathcal{W}_3$-代数的酉表示》。Transform. Groups，28(2)：561–590，2023年。https://arxiv.org/abs/1910.08334。[CWX] Sebastiano Carpi、Mih ´aly Weiner 和 Feng Xu。《从顶点算子代数模到共形网的表示》。编写中。[DF77] W. Driessler 和 J. Fr¨ohlich。《从相对论性量子场论的欧几里得格林函数重构局域可观测代数》。An- nales de L'Institut Henri Poincare Section Physique Theorique，27：221–236，1977年。https://eudml.org/doc/75959。[DFK04] Claudio D'Antoni、Klaus Fredenhagen 和 Søren K¨oster。《通过微分同胚对称性实现共形协变性》。Lett. Math. Phys.，67(3)：239–247，2004年。https://arxiv.org/abs/math-ph/0312017。[DG18] Simone Del Vecchio 和 Luca Giorgetti。《局域网与缺陷的无限指标扩张》。Rev. Math. Phys.，30(02)：1–58，2018。https://arxiv.org/abs/1703.03605。

[DHR69a] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。《场、可观测量与规范变换》。I。Comm. Math. Phys.，13：1–23，1969。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103841481。[DHR69b] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。《场、可观测量与规范变换》。II。Comm. Math. Phys.，15：173–200，1969。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103841943。[DHR71] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。《局域可观测量与粒子统计》。I。Comm. Math. Phys.，23：199–230，1971。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103857630。[DHR74] Sergio Doplicher、Rudolf Haag 和 John E. Roberts。《局域可观测量与粒子统计》。II。Comm. Math. Phys.，35：49–85，1974。https://link.springer.com/article/10.1007/BF01646454。[DL14] Chongying Dong 和 Xingjun Lin。《酉顶点算子代数》。J. Algebra，397：252–277，2014。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.09.007。[DMS97]Philippe Di Francesco、Pierre Mathieu 和 David S´en´echal。《共形场论》。Springer-Verlag，纽约，1997年。https://books.google.com/books?id=keUrdME5rhIC。[DR72] Sergio Doplicher 和 John E. Roberts。《场、统计与非阿贝尔规范群》。Comm. Math. Phys.，28：331–348，1972。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103858447。[DR89a] Sergio Doplicher 和 John E. Roberts。《 C^*-代数的端同态、交叉积与紧群的对偶性》。Ann. of Math. (2)，130(1)：75–119，1989。http://dx.doi.org/10.2307/1971477。[DR89b] Sergio Doplicher 和 John E. Roberts。《紧群的新对偶理论》。Invent. Math.，98(1)：157–218，1989。http://dx.doi.org/10.1007/BF01388849。[DR90] Sergio Doplicher 和 John E. Roberts。《为何存在一个带紧规范群的场代数来描述粒子物理学中的超选结构》。Comm. Math. Phys.，131(1)：51–107，1990。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104200703。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。《张量范畴》，数学调查与专著第 205 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015。https://math.mit.edu/~etingof/egnobookfinal.pdf。[FFK89] G. Felder、J. Fr¨ohlich 和 G. Keller。《酉共形场论的结构》。I。共形块的存在性。Comm. Math. Phys.，124(3)：417–463，1989。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104179209。[FH05] Christopher J. Fewster 和 Stefan Hollands。《二维共形场论中的量子能量不等式》。Rev. Math. Phys.，17(5)：577–612，2005。https://arxiv.org/abs/math-ph/0412028。[FHL93] Igor B. Frenkel、Yi-Zhi Huang 和 James Lepowsky。《关于顶点算子代数与模的公理化方法》。Mem. Amer. Math. Soc.，104(494)：viii+64，1993。https://doi.org/10.1090/memo/0494。

[FRS89] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, and B. Schroer. 具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。I. 一般理论。《数学物理通讯》，125(2):201– 226, 1989. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104179464.[FRS92] Klaus Fredenhagen, Karl-Henning Rehren, and Bert Schroer. 具有辫群统计和交换代数的超选择扇区。II. 几何方面与共形协变性。《数学物理评论》，(特刊):113–157, 1992. https://dx.doi.org/10.1142/S0129055X92000170.[Fuchs02] J¨urgen Fuchs, Ingo Runkel, and Christoph Schweigert. 有理共形场论关联函数的拓扑场论构造。I. 配分函数。Nuclear Phys. B, 646(3):353–497, 2002. https://arxiv.org/abs/hep-th/0204148.[GF93] Fabrizio Gabbiani and J¨urg Fr¨ohlich. 算子代数与共形场论。《数学物理通讯》，155(3):569–640, 1993. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104253398.[GJ87] James Glimm and Arthur Jaffe. 量子物理。Springer-Verlag，纽约，第二版，1987. https://books.google.com/books?id=VSjjBwAAQBAJ.[GL92] Daniele Guido and Roberto Longo. 量子场论中的相对论不变性与荷共轭。《数学物理通讯》，148(3):521–551, 1992. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104251044.[GL96] Daniele Guido and Roberto Longo. 共形自旋-统计定理。《数学物理通讯》，181(1):11–35, 1996. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104287623.[GLR85] P. Ghez, R. Lima, and J. E. Roberts. W^*-范畴。Pacific J. Math., 120(1):79–109, 1985. http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102703884.[GLW98] D. Guido, R. Longo, and H.-W. Wiesbrock. 共形网的扩张与超选择结构。《数学物理通讯》，192(1):217–244, 1998. https://arxiv.org/abs/hep-th/9703129.[GR18] Luca Giorgetti and Karl-Henning Rehren. 端同态的辫化范畴作为局域量子场论的不变量。《数学物理通讯》，357(1):3–41, 2018. https://arxiv.org/abs/1512.01995.[Gui20] Bin Gui. 共形网范畴扩张中的无界场算子。2020. https://arxiv.org/abs/2001.03095.[Gui22] Bin Gui. 完全酉顶点算子代数的Q-系统与扩张。Int. Math. Res. Not. IMRN, (10):7550–7614, 2022. https://arxiv.org/abs/1908.03484.[Haa96] Rudolf Haag. 局域量子物理。Springer-Verlag，柏林，第二版，1996. https://books.google.com/books?id=OlLmCAAAQBAJ.[HK07] Yi-Zhi Huang and Liang Kong. 全场代数。《数学物理通讯》，272(2):345–396, 2007. https://arxiv.org/abs/math/0511328.[HKL15] Yi-Zhi Huang, Alexander Kirillov, Jr., and James Lepowsky. 辫化张量范畴与顶点算子代数的扩张。《数学物理通讯》，337(3):1143–1159, 2015. https://arxiv.org/abs/1406.3420.

[JT23] Christian J¨akel and Yoh Tanimoto. 关于德西特空间上二维共形场论的可积微扰。《数学物理快报》，113, 89 (2023). https://arxiv.org/abs/2301.12468.[KL04a] Yasuyuki Kawahigashi and Roberto Longo. 局域共形网的分类。情形$c < 1$。《数学年刊》(2), 160(2):493–522, 2004. https://arxiv.org/abs/math-ph/0201015.[KL04b] Yasuyuki Kawahigashi and Roberto Longo. 具有 $c < 1$ 且张量范畴二阶上同调消失的二维局部共形网的分类。《数学物理通讯》，244(1):63–97, 2004. https://arxiv.org/abs/math-ph/0304022.[KLM01] Yasuyuki Kawahigashi, Roberto Longo, and Michael M¨uger. 共形场论中的多区间子因子与表示的模性。《数学物理通讯》，219(3):631–669, 2001. https://arxiv.org/abs/math/9903104.[KO02] Jr. Alexander Kirillov and Viktor Ostrik. 关于McKay对应的 q类比，以及sl_2 共形场论的ADE分类。《数学进展》，171(2):183–227, 2002. https://arxiv.org/abs/math/0101219.[Kon07] Liang Kong. 全场代数、拟运算与张量范畴。《数学进展》，213(1):271– 340, 2007. https://arxiv.org/abs/math/0603065.[KQR21] Petr Kravchuk, Jiaxin Qiao, and Slava Rychkov. 共形场论中的分布。第二部分：闵可夫斯基时空。J. High Energy Phys., (8):Paper No. 094, 129, 2021. https://arxiv.org/abs/2104.02090.[KR87] V. G. Kac and A. K. Raina. 关于无限维李代数最高权表示的孟买讲座。世界科学出版社公司，特纳克，新泽西州，1987. https://books.google.com/books?id=0P23OB84eqUC.[LM75] M. L¨uscher and G. Mack. 量子场论中的全局共形不变性。《数学物理通讯》，41:203–234, 1975. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103898909.[Lon94] Roberto Longo. Hopf代数与子因子的对偶性。I.《数学物理通讯》，159(1):133–150, 1994. http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104254494.[Lon97] Roberto Longo. Kac-Wakimoto公式的一个类比与黑洞条件熵。《数学物理通讯》，186(2):451–479, 1997. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605073.[LR95] R. Longo and K.-H. Rehren. 子因子网。《数学物理评论》，7(4):567–597, 1995. 代数量子场论与Jones理论研讨会（柏林，1994）。https://arxiv.org/abs/hep-th/9411077.[LR97] R. Longo and J. E. Roberts. 维数理论。 K-理论，11(2):103–159, 1997. https://arxiv.org/abs/funct-an/9604008.[Mas00] Toshihiko Masuda. Longo-Rehren构造向无限深度子因子的推广，以及融合代数的可和性。J. Funct. Anal., 171(1):53–77, 2000. http://dx.doi.org/10.1006/jfan.1999.3523.

[Mor23] Yuto Moriwaki。《二维共形场论、完整顶点代数与电流-电流形变》。《数学进展》，427:109125，2023年。https://arxiv.org/abs/2007.07327.[MT19] Vincenzo Morinelli 和 Yoh Tanimoto。《二维 Haag-Kastler 网中的尺度与 Möbius 协变性》。《Comm. Math. Phys.》，371(2):619–650，2019。https://arxiv.org/abs/1807.04707.[MTW18] Vincenzo Morinelli、Yoh Tanimoto 和 Mih´aly Weiner。《共形协变性与分裂性质》。《Comm. Math. Phys.》，357(1):379–406，2018。https://arxiv.org/abs/1609.02196.[M¨ug01] Michael M¨uger。《共形场论与 Doplicher-Roberts 重构》。载于《数学与物理中的数学物理》（锡耶纳，2000），Fields Inst. Commun. 第30卷，第297–319页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。https://arxiv.org/abs/math-ph/0008027.[Reh90a] Karl-Henning Rehren。《辫群统计及其超选择规则》。载于 D. Kastler 编，《超选择扇区的代数理论》（巴勒莫，1989），第333–355页。World Sci. Publ.，里弗埃奇，新泽西州，1990。https://www.researchgate.net/publication/267377445.[Reh90b] Karl-Henning Rehren。《时空场与交换场》。《Comm. Math. Phys.》，132(2):461–483，1990。http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104201161.[Reh97] K.-H. Rehren。《有界玻色场》。《数学物理快报》，40(4):299–306，1997。https://arxiv.org/abs/hep-th/9605156.[Reh00] K.-H. Rehren。《手征可观测量与模不变量》。《Comm. Math. Phys.》，208(3):689–712，2000。https://arxiv.org/abs/hep-th/9903262.[RFFS07] Ingo Runkel、Jens Fjelstad、J¨urgen Fuchs 和 Christoph Schweigert。《作为 Frobenius 代数的拓扑场论与共形场论》。载于《代数、几何与数学物理中的范畴》，Contemp. Math. 第431卷，第225–247页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007。https://doi.org/10.1090/conm/431/08275.[RS75] Michael Reed 和 Barry Simon。《现代数学物理方法》。第二卷：傅里叶分析、自伴性。Academic Press，纽约，1975。https://books.google.com/books?id=Kz7s7bgVe8gC.[RTT22] Christopher Raymond、Yoh Tanimoto 和 James E. Tener。《酉顶点代数与 Wightman 共形场论》。《Comm. Math. Phys.》，395(1):299–330，2022。https://arxiv.org/abs/2203.10795.[SW00] R. F. Streater 和 A. S. Wightman。《PCT、自旋与统计，以及其他》。普林斯顿物理学经典。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2000。https://www.jstor.org/stable/j.ctt1cx3vcq.[Tan16] Yoh Tanimoto。《可积量子场论中的束缚态算子与楔形局域性》。《SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.》，12:100，共39页，2016。https://arxiv.org/abs/1602.04696.

[Ten19a] James E. Tener。《手征共形场论中的融合与正性》。2019。
https://arxiv.org/abs/1910.08257.[Ten19b] James E. Tener。《手征共形场论中的表示论：从场到可观测量》。《Selecta Math. (N.S.)》，25(5):第76号论文，共82页，2019。
https://arxiv.org/abs/1810.08168.[Thu74] William Thurston。《叶状结构与微分同胚群》。《Bull. Amer. Math. Soc.》，80:304–307，1974。
http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183535407.[TL97] Valerio Toledano Laredo。《LSpin($2n$) 正能量表示的融合》。1997。博士论文，剑桥大学。
https://arxiv.org/abs/math/0409044.[TL99] Valerio Toledano Laredo。《无穷维李群酉表示的积分》。《J. Funct. Anal.》，161(2):478–508，1999。
https://arxiv.org/abs/math/0106195.[TZ12] Michael P. Tuite 和 Alexander Zuevsky。《海森堡交织算子的广义顶点算子代数》。《J. Pure Appl. Algebra》，216(6):1442–1453，2012。
https://arxiv.org/abs/1106.6149.[Was98] Antony Wassermann。《算子代数与共形场论。III. 利用有界算子融合 LSU(N) 的正能量表示》。《Invent. Math.》，133(3):467–538，1998。
https://arxiv.org/abs/math/9806031.[Wei06] Mih´aly Weiner。《带电扇区中的共形协变性与能量正性》。《Comm. Math. Phys.》，265(2):493–506，2006。
https://arxiv.org/abs/math-ph/0507066.[Zam89] A. B. Zamolodchikov。《从共形场论导出的可积场论》。载于《量子场论与统计力学中的可积系统》，Adv. Stud. Pure Math. 第19卷，第641–674页。Academic Press，美国马萨诸塞州波士顿，1989。
https://inspirehep.net/literature/279986.