arXiv:2301.12421v1 [math.LO] 29 Jan 2023

关于 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑迭代

Moti Gitik*和 Eyal Kaplan

2023年1月31日

摘要

本文考察 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑迭代，并介绍了在扩张中构造正规超滤子的新方法。结果表明，与其他支撑不同，这里可能会涉及看似无关的测度或扩张子。

1 引言

本文继续研究通过迭代 Prikry 型强迫所得到的泛型扩张中正规超滤子的结构。

在 [7, 9, 1], 中，我们考察了非平稳支持和全支撑迭代。当在可测基数的可测极限 κ 以下迭代 Prikry 强迫时，扩张中它所具有的所有正规测度都可以用基模型中的正规测度来刻画；此外，对于泛型扩张中 κ 上的每个正规测度，其超幂在基模型上的限制仅是由正规测度进行的一次迭代。

这里我们重点研究任意 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑迭代。结果表明，情况截然不同。具体而言，我们证明如下:

定理 1.1 设 κ 是满足 $2^\kappa = \kappa^+$ 的可测基数。令 $\langle P_\alpha, Q_\beta \colon \alpha \leq \kappa, \beta < \kappa \rangle$ 是 $\sim$ 个 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑迭代。

假设 $\Delta \subseteq \kappa$ 无界，使得对于每个 $\alpha < \kappa$，当且仅当 $\alpha \notin \Delta$ 时， Q_α 被强制为平凡。设 $U \in V$ 是 κ 上满足 $\Delta \notin U$ 的正规测度，且 $i \colon V \to N$ 是一个可在 V 中定义的初等嵌入，并满足以下性质[1]:

*这项工作部分得到了 ISF 资助项目编号 882/22[1]这类 N 的一个典型例子是通过其 κ-闭扩张子对 V 取超幂，而 $i\colon\ V \to N$ 是其嵌入。

1. crit(i) $=\kappa$。 2. ${}^{\kappa}N \subseteq N$。 3. $\kappa \notin i(\Delta)$。 4. $U = \{X \subseteq \kappa\colon\ \kappa \in i(X)\}$。 5. $|i(\kappa)| = \kappa^{+}$。 6. $\{i(f)(\kappa) :\ f \in V,\ f\colon\ \kappa \to \kappa\}$ 在 $i(\kappa)$ 中无界。

还假设 N 中的每个元素都具有如下形式： $i(f)(\beta_1, \ldots, \beta_l)$，其中某个 $f \in V$ 和 $\beta_1 < \ldots < \beta_l < i(\kappa)$。

那么存在一个测度 $W \in V[G]$，它扩张 U；记 Ult $(V[G], W)$ 为 $\simeq M_W[j_W(G)],$，则存在 $k\colon\ N \to M_W$，使得 crit(k) 为 $> \kappa$，且 $j_W \restriction_V = k \circ i$。

此外，在对参与迭代的强迫作出较弱假设的条件下，存在如上所述扩张 U 的 $(2^{\kappa})^{+} = \kappa^{++}$ 个正规测度 W （见定理 2.19）。这推广了 Kunen-Paris 关于正规测度数量 [10] 的定理。

在第 3 节和第 4 节中，我们分析任意测度 $W \in V[G]$ 对应的超幂嵌入 $j_W\colon\ V[G] \to M_W[j_W(G)]$ 的性质。

假设 $V = \mathcal{K}$ 是核心模型。根据内模型理论中一系列众所周知的结果，只要宇宙中的大基数种类受到限制， $j_W \restriction_V$ 就是 V的迭代超幂。例如，根据 Mitchell [11],，假设不存在具有基数 α 且满足 $o(\alpha) = \alpha^{++}$ 的内模型，并且 $V = \mathcal{K}$ 是核心模型，则 $j_W \restriction_{\mathcal{K}}$ 是通过正规测度对$\mathcal{K}$ 进行迭代得到的模型。根据 Schindler 的一个结果 [13],，假设不存在具有 Woodin 基数的内模型，则 $j_W \restriction_{\mathcal{K}}$ 是通过其扩张子对 $\mathcal{K}$ 进行迭代得到的模型。

定理 1.1 表明， $j_W \restriction_V$可分解为 $k \circ i$的形式。特别地， $j_W(\kappa) \geq i(\kappa) \geq j_U(\kappa)$。在第 3 节中，我们通过聚焦于 $V = \mathcal{K}$ 是核心模型且 $j_W \restriction_{\mathcal{K}}$ 是通过测度或扩张子对 $\mathcal{K}$ 进行迭代得到的模型这一情形，分析确保严格不等式所需的条件，即 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$。

在第 4 节中，我们着重探讨嵌入 $k\colon\ N \to M_W$ 有何性质。特别是，它是否是由测度或扩张子构成的 N 迭代（不假设 $V = \mathcal{K}$ 是核心模型）。我们将在定理 4.8 中证明，当 $P = P_{\kappa}$ 是 Prikry 强迫迭代时，答案是肯定的（对所用正规测度有一些限制；见第 4.1 小节）。此外，在这种情况下， k 是仅使用正规测度的迭代超幂。

2 一般框架

定义 2.1 若且唯若满足以下条件，迭代 $\langle P_\alpha, Q_\beta : \alpha \leq \kappa, \beta < \kappa \rangle$ 称为 Prikry 型强迫的 Easton 支撑迭代$\sim$,

1. 对每个 $\alpha < \kappa$, P_α 中最弱的条件都强制 $\langle \underset{\sim}{Q}_\alpha, \leqq_{Q_\alpha}, \leqq^*_{Q_\alpha} \rangle$ 是一个 Prikry 型强迫概念。

2. 对每个 $\alpha \leq \kappa$ 和 $p \in P_\alpha$,

   (a) p 是一个定义域为 α 的函数，使得对每个 $\beta < \alpha$, $p \restriction \beta \in P_\beta$ 和 $p \restriction \beta \Vdash p(\beta) \in Q_\beta$.$\sim$(b) 若 $\alpha \leq \kappa$ 是不可达基数，则 supp(p) $\cap \alpha$ 在 α 中有界（supp(p) $\subseteq \alpha$ 是指标 γ 的集合，在这些指标上， $p(\gamma)$ 被强制为非平凡）。

假设 $p, q \in P_\alpha$。那么 $p \geq q$，也就是说， p 扩展 q，当且仅当：

1. supp(q) $\subseteq$ supp(p)。

2. 对于 每个 $\beta \in$ supp(q), $p \restriction \beta \Vdash p(\beta) \geq_\beta q(\beta)$（其中 $\geq_\beta$ 是 Q_β的序） .

3. 存在一个有限子集 $b \subseteq$ supp(q)，使得对于每个 $\beta \in$ supp(q) $\setminus b$, $p \restriction \beta \Vdash p(\beta) \geq^*_\beta q(\beta)$（其中 $\geq^*_\beta$ 是 Q_β的直接扩张序）。

若 $b = \emptyset$，我们称 p 是 q的直接扩张，并记为 $p \geq^* q$。

以下性质是标准的（例如参见 [5] ）：

引理 2.2 对每个 $\lambda \leq \kappa$, P_λ 都满足普里克里性质。

引理 2.3 对于每个为马洛基数的 $\lambda \leq \kappa$， P_λ 都具有 $\lambda - c.c.$。

设 U 是 κ 上的正规超滤子。设 $\langle P_\alpha 、 Q_\beta \mid \alpha \leq \kappa 、 \beta < \kappa \rangle$ 是 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑 $\sim$ 迭代。假设以下条件成立：

1. 存在一个无界子集 $\Delta \subseteq \kappa 、 \Delta \notin U$，使得对于每个 $\alpha < \kappa$,

   (a) $\alpha \in \Delta \longrightarrow \Vdash_{P_\alpha} Q_\alpha$ 是非平凡的。
   $\sim$(b) $\alpha \notin \Delta \longrightarrow \Vdash_{P_\alpha} Q_\alpha$ 是平凡的。$\sim$

2. 对于每个 $\alpha < \kappa 、 \Vdash_{P_\alpha} \langle \underset{\sim}{Q}_\alpha 、 \leqq^*_\alpha \rangle$， $\alpha-$ 是闭的。

3. 对于每个 $\alpha \in \Delta$、 $\Vdash_{P_\alpha} |Q_\alpha| <$ ， $\min(\Delta \setminus \alpha + 1)$。$\sim$

设 G 是 $P = P_\kappa$ 的一个泛子集。我们想分析 $V[G]$ 中延伸 U 的 κ 上的正规测度。为完整起见，我们在此介绍一种标准方法；该方法见于 [5], 。

Lem命题 2.4 存在一个正规测度 $U^* \in V[G]$ ，它定义在 κ 上并延伸 U .

证明。令 $\langle \underset{\sim}{A}_\alpha \colon \alpha < \kappa^+ \rangle$ 是 V 中 $P = P_\kappa$-名称的一个枚举，使得每个 $X \in (\mathcal{P}(\kappa))^{V[G]}$ 都具有形式 $(\underset{\sim}{A}_\alpha)_G$ ，其中某个 $\alpha < \kappa^+$ 满足此式。这样的名称列表存在，因为 $P = P_\kappa$ 是 $\kappa - c.c.$。现在，在 $V[G]$ 中构造一个 $\leq^*$-递增的条件序列 $\langle q_\alpha \colon \alpha < \kappa^+ \rangle$，使得在 $N[G]$ 上， $q_\alpha \parallel \kappa \in j_U(\underset{\sim}{A}_\alpha)$ 。这样的序列存在，因为 $V[G] \vDash$ "$\langle j_U(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 是闭的。"

令 $\langle q_\alpha \colon \alpha < \kappa^+ \rangle$ 为上述序列的一个 P-名称。现在，定义 $U^* \supseteq U$ 如下：$\sim$对于每个 $\alpha < \kappa^+$， $(\underset{\sim}{A}_\alpha)_G \in U^*$ 当且仅当存在 $p \in G$ 和 $\alpha < \kappa^+$ 使得–

$$p^\frown \underset{\sim}{q}_\alpha \vDash \kappa \in i(\underset{\sim}{A}_\alpha)$$

我们证明，上面定义的 U^*是一个扩张 U的正规测度。

假设 $\delta < \kappa$ 和 $\langle \underset{\sim}{X}_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle$ 是 $V[G]$中 κ 的一个划分的 P_κ-名称。对于每个$\alpha < \delta$，定义–

$$Y_\alpha = \{\beta < \kappa^+ \colon \exists p \in P_\kappa,\ p \Vdash \underset{\sim}{X}_\alpha = \underset{\sim}{A}_\beta\}$$

由于 P是 $\kappa - c.c.$， $|Y_\alpha| < \kappa$。记作–

$$Y = \bigcup_{\alpha < \delta} Y_\alpha$$

那么 $Y \subseteq \kappa^+$ 是一个有界子集。取足够大的 $\alpha^* < \kappa^+$ 作为 Y的界。我们来证明，存在 $p \in G$ 和唯一的 $\beta < \delta$ 使得–

$$p^\frown \underset{\sim}{q}_{\alpha^*} \Vdash \kappa \in j_U(\underset{\sim}{A}_\beta)$$

因此 $(\underset{\sim}{A}_\beta)_G \in U^*$。

在 $N[G]$中工作。注意， $\langle A_\beta \colon \beta \in Y \rangle$ 覆盖了序列 $\langle X_\alpha \colon \alpha < \delta \rangle$。由于 q_{α^*} 对任意 $\beta \in Y$ 都在 q_β 之上，

$$\forall \xi < \alpha, q_{\alpha^*} \parallel \kappa \in i(\underset{\sim}{X}_\xi)$$

由于 $\langle i(X_\xi) \colon \xi < \delta \rangle$ 是 $i(\kappa)$ 的一个划分，因此存在唯一的 $\xi^* < \delta$ 使得 $q_{\alpha^*} \Vdash \kappa \in i(\underset{\sim}{A}_{\xi^*})$。令 $p \in G$ 为强迫这一点的一个条件。那么 $p^\frown \underset{\sim}{q}_{\alpha^*} \Vdash \kappa \in i(\underset{\sim}{X}_{\xi^*})$，如所需。

类似的论证表明 U^* 是正规滤子。事实上，给定一个回归函数 $f\colon \kappa \to \kappa$ 的 P_κ-名称，对每个 $\alpha < \kappa$，定义 $\sim$

$$X_\alpha = \{\xi < \kappa \colon f(\xi) = \alpha\}$$

并像之前一样继续，从而找到唯一的 $\alpha < \kappa$ 使得 $X_\alpha \in U^*$。 □

特别地， U 可以扩张为正规测度 $U^* \in V[G]$，使得超幂嵌入 $j_{U^*}\colon V[G] \to M[j_{U^*}(G)]$ 满足 $j_{U^*} \restriction_V = k \circ j_U$，其中嵌入$k\colon M_U \to M$满足 $\mathrm{crit}(k) > \kappa$。事实上，对每个 $f\colon \kappa \to V$，定义 $k([f]_U) = [f]_{U^*}$。

一个自然的问题是，这是否是在 $V[G]$中于 κ 上生成正规超滤子的唯一方式。在 [6, 7] 中，已证明考虑非定常支撑迭代时情况确实如此。然而，考虑全支撑迭代后，情况就不再如此：在 [1] 以及之后的 [9], 中，研究了标准 Prikry 强迫的迭代。证明表明，每个满足 $\Delta \notin U$ 的、位于 κ 上的正规测度 $U \in V$ 都可以像上面那样扩张为正规测度 $U^* \in V[G]$，但并非每个扩张 U 的正规测度都是以这种方式生成的；尽管如此， $V[G]$ 中位于 κ 上的所有正规测度都得到了刻画：它们要么是满足 $\Delta \notin U$的测度 $U \in V$ 的扩张 U^*，要么是满足 $\Delta \in U$的正规超滤子 $U \in V$的扩张 U^* 在正规测度上的投影。

事实证明，在 Prikry 型强迫概念（甚至标准 Prikry 强迫）的 Easton 支撑迭代中，情况截然不同。给定一个初等嵌入 $i\colon V \to N$，其临界点为 κ，且可在 V 中定义，由此导出的正规测度 $U = \{X \subseteq \kappa \colon \kappa \in i(X)\}$ 可以扩展为正规测度 $W \in V[G]$，使得 $j_W \restriction_V = k \circ i$；其中存在某个 $k\colon N \to M$，满足 $\mathrm{crit}(k) > \kappa$。对于标准 Prikry 强迫的迭代， k 仅由正规测度对 N 进行迭代超幂得到（见第 4 节）；而 $i\colon V \to N$ 则可以是由扩张子导出的嵌入（如定理 1.1 的表述所示）。

我们来说明，在 Easton 支撑迭代中，获得正规测度 $W \in V[G]$的可能性要多得多。我们证明，任意嵌入 $i\colon V \to N$ 都可用于扩展由其导出的正规测度 U。

引理 2.5 假设 $i\colon V \to N$是一个可在 V 中定义的初等嵌入，且临界点$(i) = \kappa$，满足 $|i(\kappa)| = \kappa^+$, $\kappa \notin i(\Delta)$, $N \subseteq V$和 ${}^{\kappa}N \subseteq N$。记作–

$$U = \{X \subseteq \kappa \colon \kappa \in i(X)\}$$

那么 G是 $i(P) \restriction_\kappa = P$-泛型于 N之上，并且：

1. 对于每个 $q \in i(P) \setminus \kappa$，存在一个 $H \in V[G]$满足 $q \in H$，且其为 $\langle i(P) \setminus \kappa、 \leq^* \rangle$-泛型于 $N[G]$之上。

2. 给定这样的 $H \in V[G]$，定义——

$$U_H = \{(\underset{\sim}{A})_G : \underset{\sim}{A} \text{ is a } P-\text{name for a subset of } \kappa, \text{ and there exists } p \in G * H \text{ such that } p \Vdash \kappa \in i(\underset{\sim}{A})\}$$

于是 U_H 是 κ 上的一个正规、 κ–完备的超滤子，并且扩展了 U。

证明。

1. 我们可以在 $V[G]$中枚举 $\langle i(P) \setminus \kappa、 \leq^* \rangle$ 中所有序型为 κ^+的极大反链，这是由强迫的 $i(\kappa)$-链条件实现的；由于 $V[G] \vDash |i(\kappa)| = \kappa^+$。注意， $\kappa \notin i(\Delta)$，因此就 $N[G]$而言，强迫 $\langle i(P) \setminus \kappa、 \leq^* \rangle$ 不仅是 κ-闭的。此外，由于 $V \vDash {}^\kappa N \subseteq N$，且 $P = P_\kappa$ 满足 κ–链条件， $V[G] \vDash {}^{<\kappa} N[G] \subseteq N[G]$。因此， $i(P) \setminus \kappa$ 中的每个属于 $V[G]$ 的长度为 κ 的条件序列，也属于 $N[G]$。所以，就 $V[G]$而言，强迫 $\langle i(P) \setminus \kappa、 \leq^* \rangle$ 是 κ^+-闭的。

从 $i(P) \setminus \kappa$ 中的任意条件出发，我们可以在 $V[G]$ 中构造它的一列直接扩张，使其与每个极大反链相交。该序列生成一个关于 $i(P) \setminus \kappa$、在 $N[G]$ 上泛型的 a$\leq^*$，它属于 $V[G]$。

2. 首先，我们证明 $W = U_H$ 是一个正规且 κ-完备的超滤子，并且扩张了 U。不难验证， W 是一个滤子。我们证明 W 是一个 κ-完备的超滤子。假设 $\langle X_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ 是 κ 的一个划分，其中 $\delta < \kappa$。在 $N[G]$中工作。令$D \subseteq i(P) \setminus \kappa$ 为由以下条件组成的 $\leq^*$-稠密开集：这些条件决定了使得 $\kappa \in i(\underset{\sim}{X}_\alpha)$ 成立的唯一 $\alpha < \delta$。那么，某个 $r \in H$会强制这一陈述。令 $p \in G$ 为一个条件，它强制 r 具有此性质，并且还决定了 α的值。于是$p^\frown r \Vdash \kappa \in i(X_\alpha)$，因此 $X_\alpha \in W$。通过类似的论证可得 W的正规性：对于给定的回归$\sim$函数 $f : \kappa \to \kappa$，使用决定 $i(f)(\kappa)$ 值的条件构成的稠密集即可。此论证成立，是因为我们在 N中并未对 κ 进行强迫。

□

注 2.6 M. Magidor 指出如下事实：假设 $N \subseteq V$ 且 i: $V \to N$在 $V[G]$中可定义，则可知 N 已经是 V 的一个类。事实上，取一个公式 φ 和一个参数 $a \in V[G]$，使得对于每个 x，y 属于 V 时，$\varphi(x, y, a)$ 在 $V[G]$ 中成立，当且仅当 $i(x) = y$。对于每个序数 α，取一个条件 $p_\alpha \in G$，它决定集合$\left(V_{i(\alpha)}\right)^N$的值；该集合由满足 $\varphi(V_\alpha, y, a)$ 的 y组成。由于 P是集合力迫，存在$p^* \in G$，使得对于无界多个序数 α，$p_\alpha = p^*$成立。于是，利用 p^*, $N = \bigcup\{y$: $\exists \alpha \in \mathrm{ON}$ $p^* \Vdash \varphi(V_\alpha, y, \underset{\sim}{a})\}$，可以将 N 定义为 V的一个类。

一般而言，引理 2.5 的设定不足以确保 $j_{U_H} \restriction_V = k \circ i$ 对于某个k 满足临界点$(k) > \kappa$。例如，给定 U 上的正规测度 κ，其中 V 满足 $\Delta \notin U$，嵌入 $i = j_{U^2}$ 满足引理 2.5 的设定，但不能用来将 U 扩展为测度 U_H，使得对于某个满足临界点$(k) > \kappa$的嵌入 k，有 $j_{U_H} = k \circ i$。这是因为i 不满足下一个断言中的条件 3：

命题 2.7 假设 $U \in V$ 是 κ上的正规测度，$W \in V[G]$ 是扩展 U的正规测度，i: $V \to N$是初等嵌入，并且k满足：对于某个 $j_W \restriction_V = k \circ i$，有 $N \to M$，其中临界点$(k) > \kappa$。则–

1. $\{X \subseteq \kappa$: $\kappa \in i(X)\} = U$。2. $|i(\kappa)| = \kappa^+$。3. $\{i(f)(\kappa)$: $f \in V$, f: $\kappa \to \kappa\}$在 $i(\kappa)$ 中无界。

证明。

1. $\{X \subseteq \kappa$: $\kappa \in i(X)\} = U$: 确实，令 $X \subseteq \kappa$属于 V，且满足 $\kappa \in i(X)$。应用k: $N \to M$，可得 $\kappa \in j_W(X)$，因此 $X \in W$。由于 $X \in V$且 $U = W \cap V$，可得 $X \in U$。

2. $|i(\kappa)| = \kappa^+$: 这是成立的，因为在 $V[G]$中，$|j_W(\kappa)| = 2^\kappa = \kappa^+$（因为在 V 中，$2^\kappa = \kappa^+$），并且$i(\kappa) \leq j_W(\kappa)$。

3. $\{i(f)(\kappa) | f$: $\kappa \to \kappa\}$ 在 $i(\kappa)$ 中无界：给定 $\beta < i(\kappa)$，设 $f \in V[G]$ 是一个满足 $[f]_W = k(\beta)$ 的函数。由于 $k(\beta) < k(i(\kappa)) = j_W(\kappa)$，我们可以假设 f: $\kappa \to \kappa$。Easton 支撑保证存在 g: $\kappa \to \kappa$ 属于 V，且支配 f。因此 $i(g)(\kappa) \geq \beta$（事实上，在两边应用 k: $N \to M$ 后，这等价于 $j_W(g)(\kappa) \geq k(\beta) = [f]_W$，此结论成立，因为 g 支配 f。注意，应用 k 时，我们用到了临界点$(k) > \kappa$ 这一事实）。

□

定理 1.1 将通过一系列引理来证明，最终归结为引理 2.15。定理 1.1 的证明的主要思路是，为 κ 上方 i 的所有生成元添加表示函数。这是必要的，因为 $j_W \restriction_V$ 只有一个生成元 κ。

定义 2.8 若不存在 $n < \omega$、小于 β 的序数 β_1、...、β_n 以及函数 $f \in V$，使得 $\beta = i(f)(\beta_1, ..., \beta_n)$，则称序数 β 为 i 的生成元：$V \to N$。

在下一个引理中，我们将在 $V[G]$ 中构造一个函数 $\alpha \mapsto \theta_\alpha$，它将与 V 中的函数一起，用来表示超幂 Ult $(V[G], W)$ 中 i 的生成元。

引理 2.9 存在一个 P_κ-名称，它是一个序数序列 $\langle \theta_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$，并满足以下性质：

1. 对每个 $\beta < \kappa$ 和 $p \in P_\kappa$，存在 $\alpha_0 < \kappa$，使得对每个 $\alpha \geq \alpha_0$，都存在 $p^* \geq^* p$，满足 $p^* \Vdash \theta_\alpha = \beta$。2. 对每个 $\alpha < \kappa$ 和条件 $p \in P_\kappa$，都存在一个条件 $p^* \geq^* p$，它决定 $\underset{\sim}{\theta}_\alpha$ 的值。

注 2.10 在迭代 Prikry 强迫时，函数 $\alpha \mapsto \theta_\alpha$ 的自然候选是这样的函数：它将每个 $\alpha \in \Delta$ 映射到其普里克里序列中的第一个元素（此函数的定义域并非 κ，但可以通过将 Δ 之外元素的函数值定义为其上方 Δ 的第一个元素来解决这一问题）。此类函数的主要问题在于，它无法满足引理的第 2 条（根据稠密性，每个 $\leq^*$-泛型集合中都存在某个 $\alpha \in \Delta$，使得该集合无法决定其普里克里序列中的第一个元素）。不过，我们可以基于 $\alpha \mapsto$ 的普里克里序列中的第一个元素来定义函数 $\alpha \mapsto \theta_\alpha$ α。它们之间仍会有许多不一致之处，但对于给定的每个 $\beta < \kappa$，都存在某个 $\alpha < \kappa$，使得 β 是 α的普里克里序列中的第一个元素。

证明。对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $\tau_\alpha < \kappa$ 为最小的序数，使得 $P \restriction_{(\alpha, \tau_\alpha)}$ 不是 $\alpha - c.c.$。我们将在下文论证这样的 $\tau_\alpha < \kappa$ 存在，但首先，让我们说明这已经足够：取一个无界子集 $X \subseteq \kappa$，使得对于每个 α，$\alpha' \in X$，

$$\alpha < \alpha' \implies \tau_\alpha < \tau_{\alpha'}$$

（例如，令 X 为函数 $\alpha \mapsto \tau_\alpha$的闭点构成的闭无界集）。枚举$X = \langle x_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$。对于每个 $\alpha \in \Delta$，令$\langle q_{x_\alpha, \xi} : \xi < x_\alpha \rangle$ 为 $P_{(x_\alpha, \tau_{x_\alpha})}$ 中的一个

基数为 α。定义 θ_α 为满足 $q_{x_\alpha,\ \xi} \in G \restriction_{(x_\alpha,\tau_{x_\alpha})}$ 的唯一序数 $\xi < x_\alpha$（如果不存在这样的 ξ，这是可能的，因为该反链不一定是极大的，则令 $\theta_\alpha = 0$）。

现在，给定 $\beta < \kappa$ 和一个条件 $p \in P_\kappa$，先选取 $\alpha \in \Delta$，使得 x_α 界定了 p的支撑。直接将 p 扩展到 p^*，使得 $p^* \restriction_{(x_\alpha,\tau_{x_\alpha})} = q_{x_\alpha,\ \beta}$。那么[2] 根据我们的定义，$p^*$强迫 $\theta_\alpha = \beta$。

现在证明，对于每个 $\alpha < \kappa$ 和条件 $p \in P_\kappa$，存在 $p^* \geq^* p$，它决定了 θ_α的值。

我们将直接扩展 p，在区间 $(x_\alpha, \tau_{x_\alpha})$ 上进行 x_α次，以决定对于每个 $\xi < x_\alpha$，$q_{x_\alpha,\ \xi} \in G \restriction_{(x_\alpha,\tau_{x_\alpha})}$ 是否成立。注意，这是可行的，因为 $\langle P \restriction_{(x_\alpha,\tau_{x_\alpha})} \leq^* \rangle$ 是超过x_α-闭的。令 $p^* \geq^* p$ 为所得的条件。那么，要么存在 $\xi < x_\alpha$，使得p^* 强迫 $q_{x_\alpha,\ \xi}$ 属于泛型，于是 $p^* \Vdash \underset{\sim}{\theta}_\alpha = \xi$；要么不存在这样的 ξ，于是$p^* \Vdash \underset{\sim}{\theta}_\alpha = 0$。

现在我们来说明，确实，对每个 $\alpha < \kappa$，都存在 $\tau_\alpha < \kappa$，使得 $P \restriction_{(\alpha,\tau_\alpha)}$ 不是 $\alpha - c.c.$：取 τ_α，使得区间（α，τ_α）内有 α 多个 Δ 的元素。令$\langle \tau_{\alpha,\xi} \colon \xi < \alpha \rangle$为（$\alpha$，$\tau_\alpha$）$\cap\Delta$中前 α 个元素的枚举。对每个 $\xi < \alpha$，令 $\underset{\sim}{x}_\xi$、$\underset{\sim}{y}_\xi$ 为 $P_{\tau_{\alpha,\xi}}$-名称，它们由 $0_{P_{\tau_{\alpha,\xi}}}$ 强制为 $\underset{\sim}{Q}_{\tau_{\alpha,\xi}}$ 中一对不相容元素。这样的元素对存在，因为 $\underset{\sim}{Q}_{\tau_{\alpha,\xi}}$ 是非平凡的。

现在，对每个 $\sigma \in 2^\alpha$，令 $p_\sigma \in P \restriction_{(\alpha,\tau_\alpha)}$ 为满足以下条件的条件：对每个 $\xi < \alpha$，——

$$p_\sigma \restriction_\xi \Vdash p_\sigma(\xi) = \begin{cases} \underset{\sim}{x}_\xi & \text{If } \sigma(\xi) = 0 \\ \underset{\sim}{y}_\xi & \text{If } \sigma(\xi) = 1 \end{cases}$$

注意，τ_α 是 Δ 中 α 以上前 α 个元素的极限，因此 τ_α 是奇异的，所以 $P = P_\kappa$ 中一个条件的支撑在 τ_α 中可能无界。

那么 $\langle p_\sigma \colon \sigma \in 2^{<\alpha} \rangle$ 是 $P \restriction_{(\alpha,\tau_\alpha)}$ 中的一个反链，其基数至少为 α。 □

注 2.11 给定一个如引理 2.9 中所述的函数 $\alpha \mapsto \underset{\sim}{\theta}_\alpha$，我们稍微滥用一下记号，将 $i($ $\alpha \mapsto \underset{\sim}{\theta}_\alpha)$ 记作 $\langle \underset{\sim}{\theta}_\alpha \colon \alpha < i(\kappa) \rangle$。

引理 2.12 在定理 1.1 的假设下，存在 $H \in V[G]$，它是 $\langle i(P) \backslash \kappa$，并且是 $\leq^* \rangle$ 在 $N[G]$ 上的泛型，具有以下性质：

$(*)$ 对于 i 的每个生成元 $\beta \in i(\kappa) \setminus (\kappa + 1)$，都存在一个函数 $f = f_\beta \in V$,f：$\kappa \to \kappa$ 以及一个条件 $q \in H$，使得 $q \Vdash \beta = i\left(\alpha \mapsto \underset{\sim}{\theta}_{f(\alpha)}\right)(\kappa)$。

[2]这里至关重要的一点是使用了 Easton 支撑。

其中 $\langle \underset{\sim}{\theta}_\alpha : \ \alpha < i(\kappa)\rangle$ 如注 2.11 所述。

证明。在 $V[G]$ 中，令 $\langle A_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$ 为 $i(P)$ 中极大反链的一个枚举。令 $\langle \beta_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$ 为 i 在 $i(\kappa)$ 以下的所有生成元的一个枚举。在 $V[G]$ 中定义一个递增序列 $\langle r_\xi \mid \xi < \kappa^+\rangle$，其为$\leq^*$ –。假设对于某个 $\xi^* < \kappa^+$， $\langle r_\xi : \ \xi < \xi^*\rangle$ 已经构造出来。取一个条件 r，它 $\leq^*$ 扩展了迄今构造出的所有条件 $\langle r_\xi : \ \xi < \xi^*\rangle$；并通过扩展它，假设 r 扩展了 A_{ξ^*} 中的一个条件。最后，令 $\alpha_0 < i(\kappa)$ 满足：对于每个 $\alpha \geq \alpha_0$，都存在 $r^* \geq^* r$ 强迫 $i(\xi \mapsto \theta_\xi)(\alpha) = \beta_{\xi^*}$。任取一个在 $i(\kappa)$ 以下且具有形式 $i(f)(\kappa)$ 的 $\alpha \geq \alpha_0$，其中某个 $f = f_{\beta_{\xi^*}} \in V$，并令$r_{\xi^*} \geq^* r$ 为一个条件，它强迫 $i(\xi \mapsto \theta_\xi)(\alpha) = \beta_{\xi^*}$。

最后，令 H 为由 $\langle r_\xi : \ \xi < \xi^*\rangle$生成的 $\leq^*$-泛型。 □

注记 2.13 重复上述论证，我们可以构造 2^{κ^+}多个满足性质（$*$）的互不相同的泛集 H：构造一个条件 $\langle r_\sigma$二叉树，其中每个分支上的条件按 $\leq^*$递增，并且对于每个 $\sigma \in 2^{<\kappa^+}$、$r_{\sigma^\frown\langle 0\rangle}$ 和 $r_{\sigma^\frown\langle 1\rangle}$，它们两两不相容。假设 $2^{\kappa^+} = \kappa^{++}$，这就给出了 $N[G]$上的 $\langle i(P) \setminus \kappa$ 中泛集 H 的最大数量。$\leq^* \rangle$

下面我们将为每个这样的 H 定义一个 κ 上的测度 $U_H \in V[G]$，它扩张 U；在对强迫概念 Q_α作出温和假设的条件下，我们将证明，对于满足$\sim$性质（$*$）的 $H \neq H'$，$U_H \neq U_{H'}$（见定理 2.19）。假设广义连续统假设，这将给出 κ上的正规测度 κ^{++} 的最大数量，从而推广 Kunen 和 Paris 的著名结果 [10]。

注记 2.14　　并非每个用于 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的泛集 $H \in V[G]$ 都满足性质 $(*)$。

事实上，假设 Δ 仅由不可达基数组成，并且 $i: \ V \to N$ 在 $(\kappa, i(\kappa))$ 中有一个非空生成元集，且该集合被某个序数 $\eta = i(f)(\kappa)$ 所有界，该序数小于 $\min(i(\Delta) \setminus \kappa)$，其中 $f \in V$ 任意。这在典型情况下成立： Δ 由小于 κ 的可测基数组成，并且i 是一个 (κ, κ^+)-扩张子（ i 的长度是 κ^+，因为 i 必须满足定理 1.1 的要求 $|i(\kappa)| = \kappa^+$）。令 σ: $M_U \to N$ 为一个嵌入，它将 M_U 的每个元素 $[g]_U$ 映射到$i(g)(\kappa)$（这里 $g \in V$ 是任意一个定义域为 κ的函数）。 σ 的临界点严格大于 κ^+，因为 $(\kappa^+)^N = \kappa^+$。

在 $V[G]$ 中，设 $H_U \subseteq j_U(P) \setminus \kappa$ 是在 $M_U[G]$ 上的 $\leq^*$-泛型。设 $H \subseteq i(P) \setminus \kappa$ 是由 $\sigma'' H_U$ 生成的泛集。我们证明 H 确实是在 N 上的 $\leq^*$- 泛型。设 $D \in N[G]$ 是 $i(P) \setminus \kappa$ 的一个 $\leq^*$-稠密开子集。记 $\underset{\sim}{D} = i(F)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ 为某个函数

$F \in V$, $l < \omega$ 和 i 的生成元 $\beta_1, \ldots, \beta_l < i(f)(\kappa)$。我们可以假设，对每个 $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l < f(\xi)$， $F(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l) \subseteq P \setminus \xi$ 都被强制为 $P \setminus \xi$ 的 $\leq^*$-稠密开子集。在 M_U 中定义，

$$D_U = \bigcap_{\gamma_1, \ldots, \gamma_l < j_U(f)(\kappa)} j_U(F)(\kappa, \gamma_1, \ldots, \gamma_l)$$

并注意到，由于 M_U 中序列 $\gamma_1, \ldots, \gamma_l < j_U(f)(\kappa)$ 的数量小于 $\min(\Delta \setminus \kappa)$，且 $\langle j_U(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 是比 $\min(j_U(\Delta) \setminus \kappa)$ 更高的闭，因此 D_U 是 $j_U(P) \setminus \kappa$ 的 $\leq^*$-稠密开子集。任取 $q \in H_U \cap D_U$。则 $\sigma(q) \in D \cap H$，因为 $\sigma(D_U) \subseteq D$。

由于 $\sigma'' G * H_U \subseteq G * H$，嵌入 $\sigma\colon M_U \to N$ 可以提升为嵌入 $\sigma^*\colon M_U[G * H_U] \to N[G * H]$。

现在任取区间 $(\kappa, i(\kappa))$ 中 i 的一个生成元 β。我们论证不存在满足 $H \Vdash \beta = i\left(\alpha \mapsto \underset{\sim}{\theta}_{f(\alpha)}\right)(\kappa)$ 的 $f \in V$。事实上，否则，根据 σ^* 的初等性，存在$\beta^* < j_U(\kappa)$ 使得–

$$H_U \Vdash \beta^* = j_U\left(\alpha \mapsto \underset{\sim}{\theta}_{f(\alpha)}\right)(\kappa)$$

设 $g \in V$ 是一个满足 $\beta^* = j_U(g)(\kappa)$ 的函数。那么——

$$\beta = \sigma^*(\beta^*) = i(g)(\kappa)$$

这与 β 是 i 的生成元这一事实矛盾。

给定定理 1.1 中的 i、N、U，以及在 $N[G]$ 上关于 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的泛集 $H \in V[G]$，定义——

$$U_H = \{(\underset{\sim}{A})_G : \underset{\sim}{A} \text{ is a } P - \text{name for a subset of } \kappa, \text{ and there exists } p \in G * H \text{ such that } p \Vdash \kappa \in i(\underset{\sim}{A})\}$$

则 U_H 是一个正规且 κ-完备的超滤子，并且扩张了 U。这可通过重复引理 2.5 的论证得到。

模型 $M_{U_H} \simeq \mathrm{Ult}(V[G], U_H)$ 具有 $M[G^*]$ 的形式，其中 M 是 V 的像，而 $G^* = j_{U_H}(G)$ 是在 M 上按照 M_{U_H} 的意义对 $j_{U_H}(P)$– 泛型的。我们通过定义一个初等嵌入 k: $N \to M$ 并证明 $\mathrm{crit}(k) > \kappa$，完成定理 1.1 的证明。

在下一个引理中，我们继续沿用注 2.11 中的记号滥用，并记——

$$j_{U_H}(\langle \theta_\xi : \xi \in \Delta \rangle) = \langle \theta_\xi : \xi \in j_{U_H}(\Delta) \rangle$$

引理 2.15 假设定理 1.1 中的设定。设 H 是关于 $N[G]$ 的 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的一个泛集，且具有性质 $(*)$。定义 $k\colon N \to M$ 如下：

$$k(i(f)(\kappa, \beta_1, ..., \beta_l)) = j_{U_H}(f)\left(\kappa, \theta_{[f_{\beta_1}]_{U_H}}, ..., \theta_{[f_{\beta_l}]_{U_H}}\right)$$

对于 i 的每个 $l<\omega$, $\beta_1,\ldots,\beta_l<i(\kappa)$ 生成元以及 $f\in V$（函数 f_{β_i}, $1\leq i\leq l$ 如引理 2.12 中所述）。

于是 $k\colon\ N\to M$ 是初等的，临界点(k) $>\kappa$ 且 $j_{U_H}\restriction_V = k\circ i$。

证明。记 $W=U_H$。我们来证明上述嵌入 k 是初等的。假设 $x,y\in N$。存在函数 f,g 属于 V，以及生成元 $\beta_1<\ldots<\beta_l<i(\kappa)$，使得–

$$x=i(f)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right),\ y=i(g)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right)$$

现在假设 $k(x)=k(y)$，即–

$$j_W(f)\left(\kappa,\theta_{j_W\left(f_{\beta_1}\right)(\kappa)},\ldots,\theta_{j_W\left(f_{\beta_l}\right)(\kappa)}\right)\in j_W(g)\left(\kappa,\theta_{j_W\left(f_{\beta_1}\right)(\kappa)},\ldots,\theta_{j_W\left(f_{\beta_l}\right)(\kappa)}\right)$$

于是–

$$\left\{\xi<\kappa\colon f\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)\in g\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)\right\}\in W$$

根据 W的定义，存在 $p\in G$ 和 $r\in H$，使得–

$$p^\frown r\Vdash\kappa\in i\Big(\left\{\xi<\kappa\colon f\left(\xi,\underset{\sim}{\theta}_{f_{\beta_1}(\xi)},\ldots,\underset{\sim}{\theta}_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)\in g\left(\xi,\underset{\sim}{\theta}_{f_{\beta_1}(\xi)},\ldots,\underset{\sim}{\theta}_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)\right\}\Big)$$

将 $r\in H$ 有限次扩展后，$p^\frown r\Vdash\underset{\sim}{\theta}_{\left(i\left(f_{\beta_m}\right)\ (\kappa)\ \right)}=\beta_m$ 对每个 $1\leq m\leq k$都成立。因此，最后一个方程可以替换为–

$$p^\frown r\Vdash i(f)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right)\in i(g)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right)$$

但上述被强制的陈述完全属于 N，且由于某个条件强制它成立，它在N中为真。因此–

$$i(f)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right)\in i(g)\left(\kappa,\beta_1,\ldots,\beta_l\right)$$

正如所需。反方向的蕴含可用类似方法证明。

显然，crit(k) $>\kappa$。我们通过证明 $j_W\restriction_V = k\circ i$ 来完成证明。设 $x\in V$，并令 $c_x\colon\ \kappa\to V$ 为取值恒为 x 的常值函数。于是–

$$k\left(i(x)\right)=k\left(i\left(c_x\right)(\kappa)\right)=j_W\left(c_x\right)(\kappa)=j_W(x)$$

正如所需。 □

现在我们来研究嵌入 $k\colon\ N\to M$ 的性质。我们采用定理 1.1 中的设定。

引理 2.16 若 $\leq=\leq^*$，或者至少对 $\alpha<\kappa$ 的一个尾段有 $\leq_\alpha=\leq^*_\alpha$，则 k 是恒等函数且 $M=N$。

证明。固定一个序数 η，并令 $f \in V[G]$ 为一个满足 $\eta = [f]_W$ 的函数。我们将证明 $\eta \in$ 像(k)。事实上，考虑集合–

$$\{p \in i(P)/G \mid \exists \tau (p \Vdash i(\underset{\sim}{f})(\kappa) = \tau)\}$$

它在 $N[G]$ 中是稠密的。因此，若 $\leq = \leq^*$，则 H 与它相交。于是，存在一个条件 $q \in H$、一个函数 $g \in V$ 以及 i 的生成元 β_1、.....、β_l，使得 $q \Vdash i(f)(\kappa) = i(g)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$。~因此，根据 W 的定义，

$$\{\xi < \kappa \colon f(\xi) = g\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)\} \in W$$

从而 $\eta = [f]_W = k(i(g)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l))$。
□

一般而言，M 不应等于 N。例如，如果在 κ 以下无界多次使用了 Prikry 强迫，那么它们就会不同。

然而，我们不知道 2.15 中的假设是否必要。

问题 2.17 假设对无界多个 $\alpha < \kappa$，$\leq_\alpha \neq \leq^*_\alpha$。那么 $M \neq N$ 是否成立?

我们不知道对强迫 Q_α for $\alpha \in \Delta$ 有哪些要求才能推出 $\sim M = N$。我们猜想，所需条件应当是存在 $\delta < \kappa$，使得 $V[G]$ 的每个序数集合 x 都能被一个基数为 $\leq |x| + \delta$ 的集合 $y \in V$ 覆盖。

引理 2.18 $k''H \subseteq G^* \setminus \kappa$。

证明。设 q 属于 H，并设 $p \in G$ 是一个条件，使得 $p \Vdash \underset{\sim}{q} \in \underset{\sim}{H}$（回忆一下，$H \in V[G]$）。显然，

$$p^\frown \underset{\sim}{q} \Vdash \underset{\sim}{q} \in \Gamma \setminus \kappa$$

其中 Γ 是 V 上 $i(P)$ 的泛型集合的规范 $i(P)$ 名称。

取 $f\colon\ [\kappa]^n \to \kappa$、$f \in V$ 和 $\beta_1 < \ldots < \beta_n < i(\kappa)$，使得 $q = i(f)(\beta_1, \ldots, \beta_n)$。对于 $\sim$ 的每个 m、$1 \leq m \leq n$，存在 $f_m\colon\ \kappa \to \kappa$、$f_m \in V$，使得 $q_{i(f_m)(\kappa)\,\beta_m} \in H$，即 $\beta_m = \theta_{i(f_m)(\kappa)}$。

我们来论证这个集合——

$$A_q = \{\nu < \kappa \mid f(\theta_{f_1(\nu)}, \ldots, \theta_{f_n(\nu)}) \in \underset{\sim}{G} \setminus \nu\}$$

属于 W。任取一个 $q \leq^* q^* \in H$，它 $\leq^*$，并强迫 $\beta_m = \theta_{i(f_{\beta_m})(\kappa)}$ 对每个 $1 \leq m \leq n$ 都成立。回想一下——

$$q = i(f)(\beta_1, ..., \beta_n) = i(f)(\theta_{i(f_1)(\kappa)}, ..., \theta_{i(f_n)(\kappa)})$$

因此 $p^\frown \underset{\sim}{q}^* \Vdash \kappa \in i(\underset{\sim}{A}_q)$。
□

下一个引理推广了 Kunen-Paris 的一个结果（见注记 2.13）。

定理 2.19 设 $H, H' \in V[G]$ 是关于 $N[G]$ 的 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的泛集。假设 H 和 H' 满足 (∗)。设对每个 $\beta < \kappa$，若 $q, q' \in Q_\beta$ 按照序关系 $\leq^*$ 不相容，则–

$$D_\beta(q) = \{r \in Q_\beta \mid r \ is \ \leq -incompatible \ with \ q\}$$

在 q' 之上是 $\leq^*$ – 稠密的，或者

$$D_\beta(q') = \{r \in Q_\beta \mid r \ is \ \leq -incompatible \ with \ q'\}$$

在 q 之上是 $\leq^*$ – 稠密的。[3]

假设 $H \neq H'$，则 $U_H \neq U_{H'}$。

注 2.20 注意，如果将 Q_β 取为 Prikry 强迫，那么上述性质成立。事实上，假设 $q = \langle t、 A\rangle$ 和 $q' = \langle t'、 A'\rangle$ 不相容于 $\leq^*$。那么 $t \neq t'$。不失一般性，假设 t 是 t' 的末端扩张。那么 $D(q) = \{r:\ r、 q$ 不相容于 $\leq^*, \}$ 在 q' 之上是 $\leq^*$-稠密开集。事实上，取一个条件 $\langle t'、 B\rangle \geq^* \langle t'、 A\rangle$。将 B 缩小为集合 $B^* = B \setminus (\max(t) + 1)$。那么 $\langle t'、 B^*\rangle \geq^* \langle t'、 B\rangle$，且与 $q = \langle t、 A\rangle$ 不相容。

证明。反之，假设 $H \neq H'$，但 $U_H = U_{H'} : = W$。
令 $k :\ N \to M$ 为由 H 定义的初等嵌入，而 $k' :\ N \to M$ 则由 H' 定义。

断言 **1** $k \neq k'$。

证明。假设 $k = k'$，以导出矛盾。因此，由引理 2.18，$H、 H'$ 中的每一对元素都是 $\leq$-相容的。我们将论证这意味着 $H = H'$。只需证明任意一对条件 $q \in H、 q' \in H'$ 都是 $\leq^*$-相容的。

[3]这种类型的条件通常成立。例如，如果我们迭代 Prikry 强迫，那么只需缩小测度为一的集合，就能产生这种类型的不可比较性。

反设不然。令 $\alpha < \kappa$ 为最小的序数，使得存在一对条件 $q \in H$、$q' \in H'$，满足 $q \restriction_\alpha$、$q' \restriction_\alpha$是 $\leq^*$-不相容的。 α不可能是极限序数，因为 q、q'在 α 以下的所有初始段均两两$\leq^*$-相容，这意味着 $q \restriction_\alpha$和 $q' \restriction_\alpha$本身也是 $\leq^*$-相容的（如果 α 是不可达基数，这显然成立，因为 q、q'的支撑在 α中有界；如果 q、q'的支撑在 α中无界，只需对测度为一的集合取交，即可找到一个共同的直接扩张）。因此， $\alpha = \beta+1$是后继序数，并且 $q(\beta)$、$q'(\beta)$是 $\leq^*$-不相容的。根据强迫 Q_β的性质，不失一般性，可设 $D_\beta(q)$在q'以上是 $\leq^*$-稠密开集。由于 $q' \in H'(\beta)$， q' 可以扩张为一个条件 $r \in H'$，使得 $r(\beta) \in D_\beta(q)$。特别地， $q \in H$、 $r \in H'$ 是 $\leq$-不相容的，矛盾。断言 1 的 □。

由于 $k \neq k'$，存在 i 的一个生成元 β，使得 $k(\beta) \neq k'(\beta)$。取这样的最小生成元 β。

断言 2 对于 i的每个生成元 $\beta' < \beta$，存在一个函数 $f_{\beta'} \in V$，使得每个泛型 H, H' 都有一个条件强迫 $\beta' = \underset{\sim}{\theta}_{i(f_{\beta'})(\kappa)}$。

证明。设 f, f' 是函数，满足 H 中有一个条件强迫 $\beta = \underset{\sim}{\theta}_{i(f)(\kappa)}$，且 H' 中有一个条件强迫 $\beta' = \underset{\sim}{\theta}_{i(f')(\kappa)}$。设 $q \in H$ 是一个决定命题 $\underset{\sim}{\theta}_{i(f)(\kappa)} = \underset{\sim}{\theta}_{i(f')(\kappa)}$ 的条件，并假设为导出矛盾，该命题被判定为否定。应用 $k, k(q) \in j_W(G)$ 强迫——

$$\underset{\sim}{\theta}_{[f]_W} \neq \underset{\sim}{\theta}_{[f']_W}$$

即 $k(\beta') \neq k'(\beta')$，这与 β 的极小性矛盾。断言 2 的证明。

现在回忆一下， $k(\beta) \neq k'(\beta)$。因此， V中存在两个不同的函数 f, f'，使得–

1. H 中的某个条件强迫 $\beta = \underset{\sim}{\theta}_{i(f)(\kappa)}$。
2. H' 中的某个条件强迫$\beta = \underset{\sim}{\theta}_{i(f')(\kappa)}$。
3. 不失一般性， $\{\xi < \kappa: \theta_{f'(\xi)} < \theta_{f(\xi)}\} \in W$。

根据引理 2.9 中给出的名称 $\langle \underset{\sim}{\theta}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 的性质 (2)，存在一个序数β'，使得 H 中的某个条件强迫$\underset{\sim}{\theta}_{i(f')(\kappa)} = \beta'$。根据上述假设， $\beta' < \beta$。

我们要论证， β' 也是 i 的生成元。这就完成了证明：一旦我们证明 β' 是 i的生成元，根据断言 2，便可推出$\theta_{i(f')(\kappa)}$ 在两种泛型 H、H'的意义下都表示 β' 。然而，在 H'的意义下，它表示 β，这就产生了矛盾。

反设 β' 不是 i的生成元。于是存在函数 $g \in V$和 β_1，……，β_l，它们都在 β'之下，并且满足 $\beta' = i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$。由于 H强迫$\beta' = \underset{\sim}{\theta}_{i(f')(\kappa)}$，因此可得——

$$\{\xi < \kappa : g\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\right) = \theta_{f'(\xi)}\} \in U_H = W$$

因此，同一个集合属于 $U_{H'}$。所以，H' 强迫：–

$$\beta = \theta_{i(f')(\kappa)} = i(g)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$$

这与 β 是 i 的生成元这一事实矛盾（请注意，在论证生成元 β_i、$1 \leq i \leq l$ 在 H、H' 的意义下以相同方式表示时，我们用到了断言 2）。□

定义 2.21 若测度 $W \in V[G]$ 满足：对于某个$U \in V$，$W = U_H$，其中 H 是 $\langle j_U$（P）$\setminus \kappa$ 在 $M_U[G]$ 上的泛型，则称其为简单生成的。$\leq^* \rangle$

注记 2.22 给定如上所述的简单生成的正规测度 $W \in V[G]$，其中 $\Delta \notin W$，参数 U 和 H 可由其唯一确定[4]。事实上，我们将在下一个引理中证明，$U = W \cap V$ 属于 V，并且是其中具有 $\Delta \notin U$ 的正规测度。现在，假设存在 H、H'，它们是对于 $\langle j_U$（P）$\setminus \kappa$、$\leq^* \rangle$ 在 $M_U[G]$ 上的泛型，且满足 $W = U_H = U_{H'}$。那么 H、H' 满足引理 2.19 的条件（因为 j_U 除了 κ 外没有其他生成元）。因此，根据定理，$H = H'$。

给定 κ 上的 $W \in V[G]$ 正规测度（它不一定是简单生成的），我们可以得出如下结论：

引理 2.23 κ 上的每个正规测度 $W \in V[G]$ 都扩展一个测度 $U = W \cap V \in V$。

证明。首先，我们来论证 $U = W \cap V$ 属于 V。根据 [6],，只需证明区间 $\left[\kappa, (2^\kappa)^V\right] = [\kappa, \kappa^+]$ 内的基数没有新的新鲜无界子集。因此，只需证明以下两个断言：

断言 **3** $P = P_\kappa$ 不会向 κ 添加新鲜无界子集。

证明。不存在新鲜无界子集这一事实，实质上源于以下事实：$2^\kappa = \kappa^+$，并且在 $V[G]$中存在 κ 上的正规测度：给定一个满足 $\Delta \notin U$的正规测度 $U \in V$，取任意扩展它的 $U^* \in V[G]$。给定一个新鲜无界

[4] 请注意，在迭代 Prikry 强迫时，对于 κ 上的每个正规测度 $W \in V[G]$，$\Delta \notin W$ 都成立，因为每个这样的 W 都集中于正则基数。

$A \subseteq \kappa$， $A = j_{U^*}$（A） $\cap \kappa$，因此根据初等性， A 属于$V[G]$的基模型 M，其中 Ult（$V[G]$， U^*）。现在令 k_U：令 $M_U \to M$为将 $[f]_U$映射到 $[f]_{U^*}$的函数。那么k_U是一个定义良好的初等嵌入，因为 $U \subseteq U^*$，并且根据 U^*的正规性，crit（k_U）为 $> \kappa$。由于 $2^\kappa = \kappa^+$在 M中成立， k_U将 κ的子集序列映射到其自身，因此属于 M的 κ 的每个子集都已经属于 V。所以，上述集合 A 属于V，这就产生了矛盾。 □

断言 4 对于每个（在 V 中可测的） $\lambda \leq \kappa$， P_λ 不会添加 λ^+ 的新鲜无界子集。特别是， P_κ 不会向 λ^+ 添加新鲜子集。

证明。令 $f \in V[G]$ 为 λ^+ 的一个新鲜无界子集的特征函数。令 f 为一个 P_λ-名称，并假设 $p \in P$ 强迫 f 是新鲜的。∼ ∼

令 $G \subseteq P_\lambda$ 在 V 上泛型。对于每个 $\xi < \lambda^+$，令 $p_\xi \in G$ 为决定 $f \restriction \xi$ 的一个条件。对于每个 $\xi < \lambda^+$，存在 $\alpha_\xi < \lambda$，使得 p_ξ 的支撑被 α_ξ 有界。∼令 $A \subseteq \lambda^+$ 和 $\alpha^* < \lambda$ 满足：对于每个 $\xi \in A$，都有 $|A| = \lambda^+$ 和 $\alpha_\xi = \alpha^*$。

进一步缩小 $A \subseteq \lambda^+$（使其基数为 λ^+）后，我们可以假设存在 $q^* \in P_\lambda$，使得对于每个 $\xi \in A$， $p_\xi \restriction_{\alpha^*} = q^* \restriction_{\alpha^*}$和 $q^* \restriction_{[\alpha^*,\lambda)}$ 都是平凡的。

令 $h = \bigcup\{g : \exists \xi < \lambda\ q^* \Vdash f \restriction_\xi = g\}$。显然， h： $\lambda^+ \to 2$是一个函数，且 $q^* \Vdash f = \check{h}$。 ∼ ∼□

□ 引理 2.23。

3 关于 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$ 及 N 的存在性

本节中，假设 $P = P_\kappa$ 是一个 Prikry 强迫迭代。令 $W, U = W \cap V, i$： $V \to N$如上一节所述。

显然， $j_W(\kappa) \geq j_U(\kappa)$。我们在此关注的是严格不等式成立的情形。

请注意，在采用非平稳支撑时不可能出现这种现象；对于 κ上的每个正规测度 $W \in V[G]$，都有 $j_W(\kappa) = j_U(\kappa)$（参见 [7]）。

另一方面，在全支撑迭代中，可能出现 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$，其起点为 $o(\kappa) \geq 2$。事实上，在假设存在正规测度$U_0 \lhd U_1$ 在 κ 上且位于 V中的情况下，取 $W = (U_1)^\times$（使用 [9]中的记号）。假设 $\xi \mapsto U_0(\xi)$ 是 V中的一个函数，它在 Ult (V, U_1) 中表示 U_0，并且对于每个 $\xi \in \Delta$， $U_0(\xi)$ 是在迭代 $P = P_\kappa$ 的阶段 ξ 用于奇异化 ξ 的正规测度。那么 W 扩展了 U_0，但是

$j_W(\kappa) = j_{U_1}(\kappa) > j_{U_0}(\kappa)$。反过来也成立：如果 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$，令 U' 为 V 中 κ 上的一个测度，使得 $W = (U')^{\times}$。那么 $U \lhd U'$，因此 $o(\kappa) \geq 2$。

让我们在 Easton 支撑迭代的背景下讨论这种情况。

3.1 关于 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$

先来看下面这个简单的观察：

命题 3.1 集合–

$$\{j_W(f)(\kappa) \mid f : \kappa \to \kappa, f \in V\}$$

在 $j_W(\kappa)$ 中无界。
因此，$k''j_U(\kappa)$ 在 $j_W(\kappa)$ 中无界，其中 $k([f]_U) = [f]_W$是引理 2.15 中定义的嵌入。

证明。 P 满足 κ–链条件。因此，对于每个 $g : \kappa \to \kappa$ 属于 $V[G]$，都存在 $f : \kappa \to \kappa$ 属于 V，且它支配该对象；也就是说，对于每个 $\nu < \kappa$，$g(\nu) < f(\nu)$。
□

下面给出一个情形的首个例子，在该情形中 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$。

定义 3.2（W. Mitchell）若存在一个定义在 κ 上的扩张子 E，使得 $E_\kappa \in M_E$，其中 $E_\kappa = \{A \subseteq \kappa \mid \kappa \in j_E(A)\}$，则称基数 κ 为可测基数。

注意，我们可以使用一个见证扩张子 E，它只有两个生成元—— κ 和编码 E_κ的序数 $\eta < 2^{2^\kappa}$。由这种扩张子得到的超幂在 κ–序列下闭。

下一个引理显然：

引理 3.3 假设 κ 是可测基数，且 E 是见证这一点的扩张子。那么$j_{E_\kappa}(\kappa) < j_E(\kappa)$。

命题 3.4 设 κ 是 μ–可测基数，且 E 是一个见证这一点的扩张子，其超幂在 κ–序列下闭。设 $U = E_\kappa$ 和 $\Delta \subseteq \kappa$ 是一个不属于 U 的可测基数集合。使用关于 Δ 的 Prikry 强迫的 Easton 支撑迭代 P 进行强迫。设 $G \subseteq P$ 是一个泛型。

那么，在 $V[G]$中，存在一个正规超滤子 W，它扩张 U，使得 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$.

证明。按照定理 1.1，利用 E 构造 W，即 $i = j_E$ 和 $N = M_E$。于是
$j_U(\kappa) < j_E(\kappa) = i(\kappa) = j_W(\kappa)$。
□

现在注意到，若满足 $V = \mathcal{K}$，我们需要一个 μ–可测基数，才能有 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$，其中 $\mathcal{K}$ 表示核心模型。

命题 3.5 假设 ¬0¶。设 $V = \mathcal{K}$。令 U 为 κ 上的正规超滤子，且 $\Delta \subseteq \kappa$ 为一组不属于 U 的可测基数。对 Δ 上的 Prikry 强迫作 Easton 支撑迭代 P。令 $G \subseteq P$ 为一个泛型。

假设在 $V[G]$ 中，存在一个正规超滤子 W，它扩张 U，且满足 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$。

那么 κ 是一个 μ–可 测基数。此外， U 是一个见证扩张子的正规测度 .

证明。反设不然。
考虑 $j_W \restriction V$。
根据 Mitchell [12], ，它是由其测度和扩张子对 $\mathcal{K} = V$ 进行的正规[5] 迭代超幂。回想一下， $W \cap V = U$，因此， $U = \{A \subseteq \kappa \mid A \in V, \kappa \in j_W(A)\}$。假设$U$ 不是一个扩张子的正规测度，而该扩张子见证了 κ 的 μ–可测性，那么这意味着在此迭代超幂中必须首先使用 U 。

现在将 [4, 8] 中的论证应用于 M_U 的核心模型 $\mathcal{K}_U$ 。对于每个可测α， $\kappa \leq \alpha < j_U(\kappa)$，都存在一个界 η_α（取决于 $o(\alpha)$），限制了在 α 上使用测度和扩张子及其像的可能次数；并且根据不存在强基数这一假设， $\eta_\alpha < j_U(\kappa)$。因此，对于每个这样的 α，在通过取自 α 或其像的测度或扩张子所进行的迭代超幂中， α 的像存在一个上界 $\mu^*_\alpha < j_U(\kappa)$。 $\mu^*_\alpha < j_U(\kappa)$，因为参与其中的扩张子没有一个长度达到或超过 $j_U(\kappa)$（由 ¬0¶ 可知），且 $\eta_\alpha < j_U(\kappa)$。

这意味着，从 j_U 到 $j_W \restriction_{\mathcal{K}}$ 的其余迭代无法移动 $j_U(\kappa)$：否则，$j_U(\kappa)$会在迭代中作为临界点参与其中（如上所述，它不能被临界点低于 $j_U(\kappa)$的扩张子移动；当然也不能被临界点高于 $j_U(\kappa)$的扩张子移动；因此，它会移动，是因为一个作用于它的扩张子参与了迭代）。分解 $j_W \restriction_V = k_1 \circ i_1$，其中 i_1 是包含所有低于$j_U(\kappa)$的扩张子的迭代，而 k_1 是临界点为 $j_U(\kappa)$的迭代。于是–

$$\{j_W(f)(\kappa) \colon f \colon \kappa \to \kappa,\ f \in V\}$$

[5]先使用索引较小的扩张子。

在 $j_W(\kappa)$中有界，因为对于每个 $f\colon\ \kappa \to \kappa$ 属于 V，

$$j_W(f)(\kappa) = k_1 \circ (i_1(f)(\kappa)) = i_1(f)(\kappa) < j_U(\kappa)$$

这里我们使用了以下事实：由于 $i_1(f)(\kappa)$ 严格低于 $j_U(\kappa)$，它在 k_1 中不发生移动。这与命题 3.1 矛盾。 □

如果我们不假设 $V = \mathcal{K}$，情况就会改变。现在让我们论证，$j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$ 的一致性强度恰好是一个可测基数，且它是可测基数的极限。

命题 3.6 设 V_0 是一个满足广义连续统假设的模型，其中有一个可测基数 κ，且它是可测基数的极限。

那么存在一个 V_0 的保基数的泛型扩张 V，满足以下条件：设 Δ 是 κ的一个由可测基数组成的无界子集。对 Δ上的 Prikry 强迫进行 P 的 Easton 支撑迭代。设 $G \subseteq P$ 是一个泛型集。
存在 V 中 κ 上的一个正规超滤子 U，以及 $V[G]$ 中的一个正规超滤子 W，它扩张 U，使得 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$。

证明。思路如下。令 W 为 V_0 上的正规超滤子，且它集中于非可测基数上，其中 κ。考察 $W^2 = W \times W$和 $W^3 = W \times W \times W$。
令 $j_1 = j_W, j_2 = j_{W^2}, j_3 = j_{W^3}, M_1 = M_W, M_2 = M_{W^2}, M_3 = M_{W^3}, \kappa_1 = j(\kappa)$ $\kappa_2 = j_2(\kappa)$ $\kappa_3 = j_3(\kappa)$。我们有自然的交换嵌入 $j_{12}\colon M_1 \to M_2, j_{23}\colon M_2 \to M_3$以及 $j_{13}\colon M_1 \to M_3$。也就是说，$j_{12}(j_1(f)(\kappa)) = j_2(f)(\kappa)$ $j_{23}(j_2(g)(\kappa, \kappa_1)) = j_3(g)(\kappa, \kappa_1)$，等等。注意，$j_{12}, j_{13}$ 的临界点是 κ_1，而 j_{23} 的临界点是 κ_2。然而，还有另一种将 M_2 嵌入 M_3 的方法。定义 $\sigma\colon M_2 \to M_3$，令 $\sigma(j_1(f)(\kappa, \kappa_1)) = j_3(f)(\kappa, \kappa_2)$。显然，$\sigma$ 是初等的，其临界点为 κ_1，并且它被移动到 κ_2。
这个想法将是通过强迫将 W 扩张为正规超滤子 U，使得 t

1. M_U 是 M_2的泛型扩张，
2. W^3 可扩张为一个 κ–完备超滤子 E，其中 M_E 是 M_3的泛型扩张，
3. U 是严格小于 E 的正规超滤子，且相应的嵌入扩张了 σ。

现在，$\kappa_2 < \kappa_3$将推出 $j_U(\kappa) < j_E(\kappa)$，因为 $j_U(\kappa) = \kappa_2$且 $j_E(\kappa) = \kappa_3$。
此类构造曾用于 [3]。详情请参阅这篇论文。我们仅概述论证。

我们使用带有 Easton 支撑的迭代，为每个不可达基数 $\alpha \leq \kappa$ 强迫一个 Cohen函数 $f_\alpha : \alpha \to \alpha$
将产生这种 $\langle f_\alpha \mid \alpha \leq \kappa$、$\alpha$ 的泛对象记为 G_0。 G_0是一个不可达基数 $\rangle$。令 $V = V_0[G_0]$。
可以扩张所有嵌入： j_1、j_2、j_3、j_{12}、j_{13}、j_{23}、σ。我们通过将 f_{κ_3} 在 κ 处的一个值设为 κ_2来改变它。令 G_3 为 M_3 上的这样一个泛型。于是， $j_3 : V_0 \to M_3$扩张为 $j_3^* : V_0[G_0] \to M_3[G_3]$。现在通过在 $V = V_0[G_0]$中设定$U = \{A \subseteq \kappa \mid \kappa \in j_3^*(A)\}$ 和 $E = \{B \subseteq \kappa^3 \mid \langle \kappa, \kappa_1, \kappa_2 \rangle \in j_3^*(B)\}$，从 j_3^* 导出 U 和 E。

最后，我们将第2节的构造应用于 U 和 E，从而在 $V[G]$中得到 U 的一个扩张 W。

□

注意，3.6 中产生的 U 可以选为 Mitchell序 中的最小者；而对于 3.4 中的一个情形，这并不成立，其中 $V = \mathcal{K}$。下面论证，在相当强的假设下，可以在 $\mathcal{K}$ 中找到这样的 U。

Pro命题 3.7 设 U 是 κ 上的正规超滤子。假设 se t

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \ is \ \kappa - strong \}$$

在 κ 中无界。按上述方式使用 P 进行强迫。设 $G \subseteq P$ 为一个泛型。那么，在 $V[G]$ 中，存在一个 κ 上的正规超滤子 W，使得

1. $U \subseteq W$，2. $j_U(\kappa) < j_W(\kappa)$，

   此外， $j_W \restriction V = k \circ i$，其中

   - $i : V \to N$，
   - $j_U(\kappa) < i(\kappa)$，
   - i， N 满足定理 1.1 的条件。

证明。在 M_U 中进行。取某个 α， $\kappa < \alpha < j_U(\kappa)$，它是 $j_U(\kappa)-$ 强的。令 $E \in M_U$ 为见证这一点的 $(\alpha, j_U(\kappa))-$ 扩张子。令 N 为由 E 对 M_U 取的超幂，并令$i = j_E \circ j_U$。我们有

$$j_U(\kappa) \leq j_E(\alpha) < j_E(j_U(\kappa)) = i(\kappa).$$

注意，嵌入 i 满足定理 1.1 的假设。事实上， i中唯一需要验证的非平凡性质是：

1. $\{i(f)(\kappa) : f\colon \kappa \to \kappa\}$ 在 $i(\kappa)$ 中无界：在 M_U 中，记 $\lambda = j_U(\kappa)$。那么 λ 是正则的，因此，(α, λ)-扩张子嵌入 j_E 在 λ 处连续。因此，对于每个 $\beta < i(\kappa) = j_E(\lambda)$，存在 $\beta' < \lambda$ 使得 $j_E(\beta') > \beta$。现在，找到 $f \in V$, $f\colon \kappa \to \kappa$，使得 $\beta' = j_U(f)(\kappa)$。那么 $i(f)(\kappa) = j_E(\beta') > \beta$，如所求。 $|j_E(\kappa)| = (j_U(\kappa))^+$。

2. $|i(\kappa)| = \kappa^+$：使用上述记号，$M_U \Vdash |j_E(\lambda)| = \lambda^+$。但是 $V \Vdash |\lambda^+| = \kappa^+$ 因为 $2^\kappa = \kappa^+$。

现在应用定理 1.1 来构造所需的测度 W。 □

我们不知道命题 3.7 的假设是否确实必要。不过，可以证明如下结论。

命题 3.8 假设 ¬0¶。
假设 $V = \mathcal{K}$。令 U 为定义在 κ 上、在 Mitchell 序中极小的正规超滤子。令 P 为截至 κ 的 Prikry 型强迫概念的 Easton 支撑迭代，并令 $G \subseteq P$ 为一个泛型。假设 W 是 $V[G]$ 中一个扩张 U 的正规超滤子。那么 $j_U(\kappa) = j_W(\kappa)$。

证明。根据 W. Mitchell, [12], $j_W \restriction \mathcal{K}$ 是由其测度和扩张子得到的 $\mathcal{K}$ 的正规迭代超幂。

U 的极小性意味着它必须在此次迭代中首先被使用 .
现在将 [4, 8] 在 $\mathcal{K}_U$ 的论证应用于 M_U 的核心模型。对于每个可测基数 α, $\kappa \leq \alpha < j_U(\kappa)$，测度和扩张子在 α 上及其像上的可能应用次数都存在一个上界 η_α（该上界取决于 $o(\alpha)$）；并且根据不存在强基数这一假设，$\eta_\alpha < j_U(\kappa)$。现在按照命题 3.5 完成论证：证明若 $j_U(\kappa) < j_W(\kappa)$，则临界点为 $j_U(\kappa)$ 的扩张子会参与迭代，因此集合 $\{j_W(f)(\kappa) : f\colon \kappa \to \kappa, \ f \in V\}$ 由 $j_U(\kappa)$ 有界；这与命题 3.1 矛盾。 □

我们猜想，所需的强度（对于 3.8）恰好是

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is } \kappa - \text{strong } \} \text{ is unbounded in } \kappa.$$

因此，R. Schindler 对米切尔结果的 [13] 扩展可用于论证： $j_W \restriction \mathcal{K}$是由其测度和扩张子得到的正规迭代超幂。一个尚缺的部分是将 [4] 扩展到强基数以上，而这很可能成立。

3.2 关于 N的存在性

与之前一样，设 $W \in V[G]$ 是 κ上的正规测度，且 $U = W \cap V \in V$。在第 4 节中，我们将证明，若 W 按定理 1.1 的方式构造，则 $j_W \restriction_V = k \circ i$，其中 k 仅由正规测度迭代 N 得到。鉴于这一结果，一个自然的问题是：对于每个 $W \in V[G]$，是否存在 N、${}^{\kappa}N \subseteq N$，使得 M 可由它仅通过迭代正规测度得到？我们一般而言不知道答案。然而，事实证明，在满足某些反大基数假设且 $V = K$的情况下，答案是肯定的。

命题 3.9 假设 $\neg 0^{\P}$ 和 $V = K$。
设 U 是 κ 上的一个正规超滤子，且 $\Delta \subseteq \kappa$ 是一个不属于 U的可测基数集合。用关于 Δ 的 Prikry 强迫进行 Easton 支撑迭代 P。令 $G \subseteq P$为一个泛型。

假设在 $V[G]$中，存在一个正规超滤子 W，它扩张了 U .

那么存在 N、$i: V \to N$，它们满足定理 1.1 的条件，使得 $j_W \restriction V = k \circ i$，且 k 仅通过迭代正规测度构成，起始于 N。

证明。与第 3.1 小节一样，我们分析 $j := j_W \restriction K$。
由初等性，$j: K \to (K)^{M_W}$，并且 M_W 是 $(K)^{M_W}$ 通过带有正规测度的 Prikry 强迫的 Easton 支撑迭代得到的泛型扩张，该迭代位于 $j(\Delta)$ 中。

根据 Mitchell [12]，j 是 K 关于其测度和扩张子的迭代超幂。回忆 $W \cap K = U$，因此 $U = \{A \subseteq \kappa \mid A \in V, \kappa \in j_W(A)\}$。所以，这个迭代超幂以 U 或以扩张子 F 开始，其正规测度为 U。
注意，M_F 必须对 $\kappa-$序列闭。否则，将存在一个序数集合a、$|a| < \kappa$，它由生成元组成，但不属于 M_F。进一步的 Prikry 强迫 Easton 支撑迭代将无法添加这样的 a。因此，根据我们的假设，F 的长度必须小于 M_F 中 κ 之上的第一个可测基数。在 κ 之上的 Prikry 强迫迭代不会在第一个可测基数 $> \kappa$ 以下添加新的有界子集。

基于同样的理由，用于继续该迭代的扩张子必须是 $\kappa-$闭的。

其中任何一个都不能被使用无限多次（或者不能使用无限多个扩张子），因为否则将产生无法通过 Easton 支撑的 Prikry 强迫迭代添加的 $\omega-$序列。这一点可由该强迫的强 Prikry 条件推出；对于相关部分，可参见 Ben Neria [2]中的证明。这使得我们得到一个由 $\kappa-$闭扩张子（测度）构成的有限迭代。这是该迭代的第一部分。

其余部分由正规测度的迭代构成，每个正规测度都应用了 $\omega-$多次。

令 N 为迭代的第一部分，并令 $i:\ \mathcal{K} \to N$ 为相应的嵌入。□

4 k 的性质

我们继续沿用定理 1.1 中的记号。首先陈述以下引理。

引理 4.1 设 $P = P_\kappa$ 是一个 Prikry 型强迫的 Easton 支撑迭代，且 i: $V \to N$, $\Delta \subseteq \kappa$, $U \in V$, $W \in V[G]$ 和 k: $N \to M$ 如第 2 节所述。

假设 (κ, crit(k)) ∩ i(Δ) 中没有元素。那么 crit(k) ∈ i(Δ)，也就是说，它是 κ 在 i(Δ) 中上方的最小元素。

注 4.2 在 $P = P_\kappa$ 是 Prikry 强迫迭代这一典型情形下，假设 (κ, crit(k)) ∩ i(Δ) $= \emptyset$ 成立。事实上，反设存在 $\mu \in$(κ, λ) ∩ i(Δ)。那么 $\mu = k(\mu)$，因此在 $M[j_W(G)]$ 中， μ 将共尾数改变为 ω。所以，在 $V[G]$ 中，cf (μ) $= \omega$；而在 V 中，cf (μ) $\leq \kappa$。见证该序列的序列属于 $V \cap ({}^{\kappa}N)$，因此根据我们对 N 的假设，它已经属于 N。这与 μ 在 N 中的可测性矛盾。

证明。记 $\lambda =$ 临界点（k）。于是，对于某些 $h \in V$ 和 $\kappa = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$,

$$\lambda = i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k)$$

根据 k 的定义， $\lambda > \kappa$。

我们首先证明 $\lambda \in i$（Δ）。反之设成立。不妨设对于每个 ξ、ν_1、.....、ν_k，低于 κ 的 h（ξ、ν_1、.....、ν_k） $> \xi$ 不属于 Δ：将函数 h 替换为如下定义的函数 h'，即可作此假设：对于每个 ξ、η_1、.....、η_k， h'（ξ、η_1、.....、η_k）等于 h（ξ、η_1、.....、η_k），如果 h（ξ、η_1、.....、η_k） $> \xi$ 在 V 中不可测；否则， h'（ξ、η_1、.....、η_k）是高于 ξ 的任意不可测基数。根据我们的假设,

$$i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k) = i(h')(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k)$$

因此我们可以用 h'替换 h。由于 λ 是正则的（作为初等嵌入的临界点），利用类似的论证，我们可以假设每个 $h(\xi, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 都是正则的。

我们可以假设，对于每个 ξ、μ_1、.....、ν_k，区间 $(\xi, h(\xi, \nu_1, \ldots, \nu_k))$ 中都没有 Δ 的元素。

设 $f \in V[G]$ 是一个满足 $[f]_W = \lambda$ 的函数。那么——

$$[f]_W = \lambda < k(\lambda) = j_W(h)\left(\kappa, \theta_{[f_{\beta_1}]_W}, \ldots, \theta_{[f_{\beta_k}]_W}\right)$$

根据 W 的定义，存在 $p \in G$ 和 $r \in H$ 使得–

$$p^\frown r \Vdash i(\underset{\sim}{f})(\kappa) < i(h)\left(\kappa, \theta_{i(f_{\beta_1})(\kappa)}, \ldots, \theta_{i(f_{\beta_k})(\kappa)}\right)$$

回想一下，对于每个 $1 \leq i \leq k$，在 H 中都存在一个条件，强迫 $\theta_{i(f_{\beta_i})(\kappa)} = \beta_i$。因此，通过在 H 内扩张 r，

$$p^\frown r \Vdash i(\underset{\sim}{f})(\kappa) < i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k)$$

由于区间 $(\kappa, i(h)(\kappa, \beta_0, \ldots, \beta_k)]$, 中没有 N 的可测基数，我们可以在 H 内找到 $r' \geq^* r$，使得–

$$p \Vdash \exists \alpha < i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k),\ r' \Vdash i(f)(\kappa) < \alpha$$

并且由于 $P = P_\kappa$ 满足 κ-链条件，且 $i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ 是正则的，存在 $\alpha < i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ 使得 –

$$p^\frown r' \Vdash i(\underset{\sim}{f})(\kappa) < \alpha$$

现在在两边应用 k。根据引理 2.18,

$$M[j_W(G)] \vDash \lambda = [f]_W < k(\alpha)$$

但是 $\alpha < i(h)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k) = \lambda$，因此 $\lambda < k(\alpha) = \alpha < \lambda$，这就产生了矛盾。 □

注记 4.3 假设 $P = P_\kappa$ 是单点 Prikry 强迫的迭代。可测基数 α 上的单点 Prikry 强迫是一种依赖于 α 上的正规测度 U 的强迫，其定义如下：条件的形式为 A，其中 $A \in U$，或者为 ξ，其中某个序数为 $\xi < \alpha$。后一类条件不能扩张。对于 $A \in U$ 的 A 形式的条件，可以有两种扩张方式：直接扩张是形如 B 的条件，其中 $B \in U$ 且 $B \subseteq A$；非直接扩展是形如 ξ 的条件，其中 $\xi \in A$ 是一个序数。

我们认为，在这种情况下，$(\kappa, \text{crit}(k)) \cap i(\Delta) \neq \emptyset$ 这一问题，以及由此导致的 crit(k) 的取值，都取决于 H 的选择：

1. 用 μ表示 $i(\Delta)$ 中位于 κ 之上的第一个元素。首先，假设选择 H，使得坐标 μ 上的条件是一个测度一集合。在这种情况下，$\mu = \text{crit}(k)$。事实上，$\text{crit}(k) < \mu$ 不可能成立，因为那样的话 $(\kappa, \text{crit}(k)) \cap i(\Delta) = \emptyset$，这意味着，根据

最后一个引理， $\mu = \text{crit}(k)$。而且， $\mu < \text{crit}(k)$不可能成立，因为那样的话 $k(\mu) = \mu$。用 $\mu_0 < \mu$ 表示在 $j_W(G)$ 中添加在 μ 之下的那个点。那么， H 在坐标 μ 上的条件与 μ_0 不相容（通过缩小大集合并应用稠密性论证）。因此， $\mu = \text{crit}(k)$。

2. 现在用 μ 表示 $i(\Delta)$ 中的最小元素，而 H 并未指定添加到其中的那个单点元素。我们要证明 $\text{crit}(k) = \mu$，尽管 μ 不必是 $i(\Delta)$ 中大于 κ 的最小元素。

重复上一个引理的证明，并注意到区间（κ, μ）中的 $\leq^*$ 强迫是平凡的，因为该区间中的任何条件都无法得到非平凡的扩展。这取代了以下假设：区间（$\kappa, i(h)$（$\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k$））中没有 $i(\Delta)$ 的元素。因此， $\mu = \text{crit}(k)$。

这里我们来处理在一个具有可测长度 κ 的集合 Δ 上进行的 Prikry 强迫的 Easton 支撑迭代 P。设 U 是 V 中定义在 κ 上、满足 $\Delta \notin U$ 的一个正规超滤子。设 $G \subseteq P$ 是一个泛型， W 是 $V[G]$ 中扩张 U 的一个正规超滤子。

设 $i\colon V \to N$ 是定理 1.1 中的初等嵌入，并假设 $W = U_H$ 和 $k\colon N \to M$ 如引理 2.15 所述。

在 Prikry 强迫迭代的情形下，关于嵌入 $k\colon N \to M$，还可以得出更多结论。由注 4.2 可知， $\text{crit}(k)$ 是 $i(\Delta)$ 中大于 κ 的最小元素。特别地，由初等性， $k(\mu) \in j_W(\Delta)$ 属于 M，因此在 j_W 中会向 $k(\mu)$ 添加一个普里克里序列。

引理 4.4 记 $\mu = \text{crit}(k)$。那么 μ 会出现在 $k(\mu)$ 的普里克里序列中。

注 4.5 μ 不一定是 $k(\mu)$ 的普里克里序列中的第一个元素。该普里克里序列在 μ 以下的初始段取决于 H 的选择。对于任意有限序列 $t \in [\mu]^{<\omega}$，我们可以选择 $H \subseteq i(P) \setminus \kappa$，使得 t 是 μ 的普里克里序列的一个初始段。这样，在 $M[j_W(G)]$ 中， t 将是 $k(\mu)$ 的普里克里序列在 μ 以下的一个初始段。

证明。令 t 为 $k(\mu)$ 在 μ 以下的普里克里序列的有限初始段，并假设 $\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle \mapsto t(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ 是 V 中的一个函数，使得–

$$t = i\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle \mapsto t(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)\right)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$$

对于 i 的某些生成元 $\beta_1, \ldots, \beta_l$。对于每个 $\xi < \kappa$，令 $s(\xi) = \min\{\Delta \setminus (\xi+1)\}$，因此 $[\xi \mapsto s(\xi)]_W = \mu$。在 $V[G]$ 中，对每个 $\xi < \kappa$ 定义，

$\mu(\xi) = t\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}}\text{以上的第一个元素}(\xi) \cdots, \theta_{f_{\beta_k}(\xi)}\right)$ 在 $s(\xi)$ 的 Prikry 序列中

并且，如果 $t\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)} \cdots, \theta_{f_{\beta_k}(\xi)}\right)$ 不是 $s(\xi)$ 的 Prikry 序列的初始段，则置 $\mu(\xi) = 0$。

只需证明 $[\xi \mapsto \mu(\xi)]_W = \mu$。

首先假设 $\eta < \mu$。在 $N[G]$ 中工作。由于 H 是 $\leq^*$-泛型的，它与一个元素 $q \in i(P) \setminus \kappa$ 相交，其中 $A^q_\mu \subseteq \mu \setminus (\eta+1)$。由于 $q \in H$，我们可以假设 t^q_μ 是 t 的初始段：事实上，t 和 t^q_μ 是相容的序列，因为对于任意强迫 $q \in H$ 并决定 t^q_μ 的值的 $p \in G$，条件 $k(p^\frown q) = p^\frown k(q)$ 属于 $j_W(G)$，并决定了 μ 以下的 Prikry 序列的一个初始段。根据我们的假设，这个初始段包含于 t 中，并且 $p^\frown k(q)$ 强迫它的每个可能扩张都高于 η。因此，在 $M[j_W(G)]$, 中，$k(\mu)$ 的 Prikry 序列中位于 t 之后的每个元素都严格高于 η。

上一段中的论证还表明，对于每个 $q \in H$，t^q_μ 要么为空，要么等于 t：如前所述，它必须是 t的一个初始段。我们来证明，如果它是一个真初始段，那么它就是空的。对 $\eta = \max(t)$应用上段的论证。然后，通过在 H中直接扩张 q，可以强迫 μ的普里克里序列中紧接在 t^q_μ 之后的元素严格大于 η。应用 $k: N \to M$，可得 $j_W(G)$ 中存在一个条件，它强迫 $k(\mu)$ 的普里克里序列包含初始段 t^q_μ，此后只有大于 η的元素。因此，t^q_μ 不可能是 t的真初始段。

现在假设 $\eta < [\xi \mapsto \mu(\xi)]_W$。记 $\eta = [f]_W$，并假设对每个 $\xi < \kappa$,

$$f(\xi) < \mu(\xi) < s(\xi)$$

设 $p \in G$ 是一个强迫此事的条件。在 $N[G]$ 中进行。取 $q \in H$ 使得 $t^q_\mu = t$。那么，$i(p)^\frown q = p^\frown q$ 强迫 $i(f)(\kappa)$ 小于 μ 的普里克里序列中第一个大于 t 的元素。因此，可以通过取一个直接扩张来确定它的值。所以，通过在 H 中直接扩张 q，我们可以假设——

$$p \Vdash \exists \alpha < \mu,\ q \Vdash i\left(\underset{\sim}{f}\right)(\kappa) < \alpha$$

因此存在 $\alpha < \mu$ 属于 V，使得–

$$p^\frown q \Vdash i(f)(\kappa) < \alpha$$

因此，在 $M[j_W(G)]$ 中，$\eta = j_W(f)(\kappa) < k(\alpha) = \alpha < \mu$，如所需。□

在下一小节中，我们将把嵌入 k 分解为 N的迭代超幂。现在展示迭代的第一步：

引理 4.6 设 $\mu = \mathrm{crit}(k)$，且 $U_\mu = \{X \subseteq \mu : \mu \in k(X)\} \cap N$。则 $U_\mu \in N$。

证明。对每个 $\xi < \kappa$，记 W_ξ 为 $V[G_\xi]$ 中的测度，它用于在迭代第 ξ 阶段的普里克里强迫中将 ξ 奇异化。令 $U_\xi = W_\xi \cap V$。我们首先论证，存在一个 μ上的测度集合 $\mathcal{F} \in N$，满足 $|\mathcal{F}| < \mu$，且对某些 $p \in G$ 和 $q \in H$，

$$p^\frown q \Vdash i(\xi \mapsto \underset{\sim}{U}_\xi)(\mu) \in \mathcal{F} \tag{1}$$

确实，令 $\underset{\sim}{\alpha}$为一个 $j_U(P)$-名称，表示在 N中 $i(\xi \mapsto \underset{\sim}{U}_\xi)(\mu)$ 所携带的正规测度的一个预先指定良序中的指标。在 $N[G]$中工作。对于某个 $q \in H$，存在一个序数 β，使得 $q \Vdash \underset{\sim}{\alpha} = \beta$。因此，由强迫 $i(P)_\mu = P_\kappa$的 $\kappa - c.c.$，存在 $p \in G$ 以及一个序数集合 $S \subseteq 2^{2^\mu}$，满足 $|S| < \mu$，使得 $p^\frown q \Vdash \underset{\sim}{\alpha} \in S$。特别地，$p^\frown q$ 强迫 $i(\xi \mapsto \underset{\sim}{U}_\xi)(\mu)$ 属于 $\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}$是 μ上按 S索引的测度集合。

现在将 k应用于方程 (1)，并在 $M[j_W(G)]$ 中工作。由于 $|\mathcal{F}| < \mu$，可知存在一个测度 $F \in \mathcal{F}$ 使得–

$$j_W(\xi \mapsto U_\xi)(k(\mu)) = k(F)$$

因此只需论证 $F = \{X \subseteq \mu : \mu \in k(X)\} \cap N$。固定 $X \in F$。记 $X = i(g)(\kappa, \beta_0, \ldots, \beta_k)$。于是–

$$j_W(g)\left(\kappa, \theta_{[f_{\beta_1}]_W}, \ldots, \theta_{[f_{\beta_k}]_W}\right) \in j_W(\xi \mapsto U_\xi)(k(\mu))$$

回忆函数 $\xi \mapsto s(\xi) = \min(\Delta \setminus (\xi + 1))$，其中 $[\xi \mapsto s(\xi)]_W = k(\mu)$。我们可以假设对于每个 $\xi < \kappa$，

$$g\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_k}(\xi)}\right) \in U_{s(\xi)}$$

并令 $p \in G$ 为一个强迫此事的条件。于是对于充分大的 $q \in H$，

$$p^\frown q \Vdash i(g)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k) \in i(\xi \mapsto \underset{\sim}{U}_\xi)(\mu)$$

因此，通过直接延伸 q，我们可以假设 q 强迫：在 μ的普里克里序列中，t之后的第一个元素属于 i（g）（κ，β_1，.....，β_k）$= X$。因此，k（q）$\in j_W$（G）强迫：在 k（μ）的普里克里序列中，t之后的第一个元素属于 k（X）。由前一个引理可知，$\mu \in k$（X），正如所需。□

4.1 对 $j_W \restriction_V$ 的描述

现在我们将前一个小节中的结果推广，以便完全分解 $j_W \restriction_V$。我们继续假设 $P = P_\kappa$ 是 Prikry 强迫的迭代。出于技术上的原因，我们假设迭代 $P = P_\kappa$ 中用于将Δ 中的可测基数奇异化的测度均为简单生成的；这仅在下一小节将给出的断言 6 的证明中需要。

在每个阶段 $\alpha \in \Delta$，令 Q_α 为 α 上 Prikry 强迫的 P_α-名称，其中使用 α 上一个简单生成的正规测度 $\underset{\sim}{W}_\alpha$，且该测度具有 $\sim_\circ$ 记 $\underset{\sim}{U}_\alpha = \underset{\sim}{W}_\alpha \cap V \in V_\circ$ 令 $\underset{\sim}{H}_\alpha \subseteq (j_{\mathcal{U}_\alpha}(P_\alpha) \setminus \alpha, \leq^*)$、 $\underset{\sim}{H}_\alpha \in V[G_\alpha]$ 为在 $M_{\mathcal{U}_\alpha}[G_\alpha]$ 上的 $\leq^*$-泛型，使得 $\underset{\sim}{W}_\alpha = (\underset{\sim}{U}_\alpha)^{\mathcal{U}_\alpha}$。

令 $G \subseteq P_\kappa$ 为在 V 上的泛型。

我们的目标是证明以下定理：

定理 4.7 令 $H \in V[G]$ 为 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的泛集，且满足 (*)。令 $W = U_H$ 为 κ 上延拓 U 的相应正规测度，并将其超幂嵌入记为 $j_W \colon V[G] \to M[j_W(G)] \simeq \mathrm{Ult}(V[G], W)$，其中 M 为某个模型。则 $j_W \restriction_V$ 可分解为 $j_W \restriction_V = k \circ i$，其中 $k \colon N \to M$ 为某个初等嵌入。

此外，若 P 是 Easton 支撑迭代，且在每一步 $\beta \in \Delta$，Q_β 都被强制为使用 β 上简单生成的正规测度的 Prikry 强迫，那么 k 是通过正规测度对 N 进行的迭代超幂，并且 $j_W(\kappa) = i(\kappa)$。

这与 Prikry 强迫的全支撑迭代和非驻定支撑迭代不同；在后两种迭代中，假设广义连续统假设 $\leq \kappa$，$j_W \restriction_V$ 只是通过正规测度对 V 进行的迭代。

如果所考虑的所有测度（包括 W）都是简单生成的，那么 $j_W \restriction_V$ 只是通过正规测度进行的迭代超幂：

定理 4.8 假设 P 是 Easton 支撑迭代，且在每一步 $\beta \in \Delta$，$Q_{\beta\sim}$ 都被强制为使用 β 上简单生成的正规测度的 Prikry 强迫。那么，对于 κ 上的每个简单生成的测度 $W \in V[G]$，$j_W \restriction_V$ 都是通过正规测度对 V 进行的迭代。此外，若 $U = W \cap V$，那么 $j_W(\kappa) = j_U(\kappa)$。

我们将同时证明定理 4.8 和 4.7。假设 $H \in V[G]$ 是 $N[G]$ 上满足性质 (*) 的 $\langle i(P) \setminus \kappa, \leq^* \rangle$ 的一个泛型。在 $i = j_U$ 和 $N = M_U$ 的情形下，$\langle i(P) \setminus \kappa \rangle, \leq^* \rangle$ 的任意泛型都满足此条件。令 $W = U_H \in V[G]$ 为 κ 上相应的正规测度。令 $j_W \colon V[G] \to M[j_W(G)]$ 为相应的超幂嵌入。

用 $B \subseteq (\kappa, i(\kappa))$ 表示 i 的生成元集。根据 H 的性质 (*)，对于每个 $\beta \in B$，都存在一个函数 f_β in V，使得 H 强迫 $\beta = \theta_{i(f)(\kappa)}$。映射 $\beta \mapsto f_\beta$ 是

在 $V[G]$ 中可用。

回忆引理 2.15 中定义的嵌入 $k\colon N \to M$：

$$k\left(i(f)\left(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_k\right)\right) = j_W(f)\left(\kappa, \theta_{\left[f_{\beta_1}\right]_W}, \ldots, \theta_{\left[f_{\beta_k}\right]_W}\right)$$

对每个 $f \in V$ 和 β_1，.....，$\beta_k \in B$。于是 k 是初等的，crit(k) $> \kappa$ 且 $j_W \restriction_V = k \circ i$。

记作 $\kappa^* = i(\kappa)$。通过归纳法定义一个线性有向系统 $\langle\langle M_\alpha\colon \alpha \leq \kappa^*\rangle, \langle j_{\alpha,\beta}\colon \alpha < \beta \leq \kappa^*\rangle\rangle$，使得：

1. $M_0 = N$, $j_0 = i$。

2. 后继步骤：假设 $\alpha < \kappa^*$ 和 M_α 已经定义。我们将定义一个初等嵌入 $k_\alpha\colon M_\alpha \to M$，使得 $j_W \restriction_V = k_\alpha \circ j_\alpha$。我们记作 $\mu_\alpha = \text{crit}(k_\alpha)$ 并定义–

$$U_{\mu_\alpha} = \{X \subseteq \mu_\alpha\colon \mu_\alpha \in k_\alpha(X)\} \cap M_\alpha$$

我们将证明 $U_{\mu_\alpha} \in M_\alpha$，并令 $M_{\alpha+1} \simeq$ 为 Ult $(M_\alpha, U_{\mu_\alpha})$。我们还令 $j_{\alpha,\alpha+1}\colon M_\alpha \to M_{\alpha+1}$ 为超幂嵌入 $j_{U_{\mu_\alpha}}^{M_\alpha}$，并令 $j_{\alpha+1} = j_{\alpha,\alpha+1} \circ j_\alpha$。

3. 极限步骤：对于每个极限 $\alpha \leq \kappa^*$，系统 $\langle M_\beta\colon \beta < \alpha\rangle, \langle j_{\beta,\,\gamma}\colon \beta < \gamma < \alpha\rangle$ 是线性有向的，我们取其直极限来构造模型 M_α 和嵌入$j_\alpha\colon V \to M_\alpha$。

对于每个 $\alpha < \kappa^*$，定义 $k_\alpha\colon M_\alpha \to M$ 如下：

$$k_\alpha\left(j_\alpha(f)\left(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_k}\right)\right) = j_W(f)\left(\kappa, \theta_{\left[f_{\beta_1}\right]_W}, \ldots, \theta_{\left[f_{\beta_l}\right]_W}, \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_k}\right)$$

对于每个 $f \in V$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$，它们是 i 和 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \alpha$的生成元。

我们的目标是通过对 $\alpha < \kappa^*$ 作归纳法证明以下性质：

(A) $k_\alpha\colon M_\alpha \to M$ 是一个初等嵌入，且 $j_W \restriction_V = k_\alpha \circ j_\alpha$。

(B) μ_α 在 M_α中是可测基数。此外，它是 $j_\alpha(\Delta)$中最小的可测基数，该基数大于或等于 $\sup\{\mu_\beta\colon \beta < \alpha\}$，且其共尾数在 V中大于 κ。

(C) μ_{μ_α} 出现在 $k_\alpha(\mu_\alpha)$ 的普里克里序列中。

(D) 令 U_{μ_α} 如上在 $V[G]$ 中定义。那么 $U_{\mu_\alpha} \in M_\alpha$ 是一个正规测度，其集中于 $\mu_\alpha \setminus j_\alpha(\Delta)$。此外，

$$k_\alpha(U_{\mu_\alpha}) = j_W(\delta \mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))$$

其中，对每个 $\delta \in \Delta$， $U_\delta = W_\delta \cap V$ 都是 W_δ，即迭代 P 中第 δ 阶段普里克里强迫所使用的测度。

之后，我们将在引理 4.21 中证明， k_{κ^*}： $M_{\kappa^*} \to M$ 是恒等映射，因此$j_W \restriction_V = j_{\kappa^*}$。这就完成了定理 4.8 和 4.7 的证明。

备注 4.9 我们指出， k_α 是良定义的，具体来说，不存在 $\alpha' < \alpha$ 和 i的生成元 β ，使得 $j_{0,\alpha}(\beta) = \mu_{\alpha'}$。事实上，反设不然。注意， $\mu_{\alpha'} = j_{0,\alpha}(\beta) \geq j_{0,\alpha'}(\beta)$。这里不可能是严格不等式，因为若$j_{0,\alpha'}(\beta) < \mu_{\alpha'}$，那么$j_{0,\alpha'}(\beta) = j_{0,\alpha}(\beta) = \mu_{\alpha'}$，这就构成了矛盾。因此，$j_{0,\alpha'}(\beta) = \mu_{\alpha'}$ （这本身对于 $\alpha' < \alpha$ 是可能的 —— 参见备注 4.10 ），但随后在两边应用 $j_{\alpha',\alpha}$ ，我们得到——

$$j_{0,\alpha}(\beta) = j_{\alpha',\alpha}(\mu_{\alpha'}) > \mu_{\alpha'}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 $\mu_{\alpha'} = \text{crit}(j_{\alpha',\alpha})$。

备注 4.10 生成元 β of i 有可能在 N 中是可测基数，并且属于 $i(\Delta)$。此时，存在 $\alpha < \kappa^*$ 使得 $\mu_\alpha = \beta = j_{0,\alpha}(\beta)$。这样的 β 将作为一个元素出现在 $k_\alpha(\beta) \in j_W(\Delta)$ 的普里克里序列中，该序列也具有 $\theta_{[f_\beta]_W}$ 的形式。

上文给出的 k_α 的性质（A） $-(D)$，将通过对 $\alpha < \kappa^*$ 进行归纳法来证明。在第 $\alpha < \kappa^*$ 阶段的归纳步骤证明将在第 4.3 小节中进行，并使用 [7] 和 [9] 中介绍的工具。固定 $\alpha < \kappa^*$ 后，根据归纳假设，我们可以设 $k_{\alpha'}$: 对于 $\alpha' < \alpha$， $M_{\alpha'} \to M$ 和 $\mu_{\alpha'}, U_{\mu_{\alpha'}}$ 满足性质（A） $-(D)$。记 $t_{\alpha'}$ 为 $k_{\alpha'}(\mu_{\alpha'})$ 的普里克里序列中低于 $\mu_{\alpha'}$ 的初始段。

定义 4.11 固定 $\alpha < \kappa^*$ 和 i 的生成元序列 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$。若存在 V 中的函数 $g_1, \ldots, g_k, t_1, \ldots, t_k$，使得 —— 低于 α 的递增序列 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ 称为 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$- 优良序列。

$$\mu_{\alpha_1} = j_{\alpha_1}(g_1)(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l))$$

$$t_{\alpha_1} = j_{\alpha_1}(t_{\alpha_1})(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l))$$

$$U_{\mu_{\alpha_1}} = j_{\alpha_1}(F_1)(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l))$$

并且，对于每个 $1 \leq i < k$,

$$\mu_{\alpha_{i+1}} = j_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_i})$$

$$t_{\alpha_{i+1}} = j_{\alpha_{i+1}}(t_{i+1})(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_i})$$

$$U_{\mu_{\alpha_{i+1}}} = j_{\alpha_{i+1}}(F_{i+1})(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_i})$$

现在固定 $\alpha < \kappa^*$。根据归纳法，假设上述性质 (A) –(D) 对每个 $\alpha' < \alpha$ 都成立。再固定一列用于 i 的生成元 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$，以及一列位于 α 下方的 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$-优良序列 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$。我们在 $V[G]$ 中定义一些函数，用来表示μ_{α_i}, t_{α_i},U_{α_i}。假设 μ_{α_i} 是 $k_{\alpha_i}(\mu_{\alpha_i})$ 的普里克里序列中的第 n_i 个元素。

首先，设定–

$$\mu_{\alpha_1}(\xi) = \text{the } n_1\text{-th element in the Prikry sequence of } g_1(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)})$$

由归纳法，对每个 $i < k$ 定义，

$$\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi) = \text{the } n_{i+1}\text{-th element in the Prikry sequence of } g_{i+1}(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi))$$

以及 $U_{\mu_{\alpha_i}}(\xi) = W_{\mu_{\alpha_i}(\xi)} \cap V$。这里，给定 $\delta \in \Delta$， W_δ 是在迭代的第 δ 阶段所应用的普里克里强迫中使用的 δ 上的测度。

断言 **5** $[\xi \mapsto \mu_{\alpha_i}(\xi)]_W = \mu_{\alpha_i}$ 且 $\left[\xi \mapsto U_{\mu_{\alpha_i}(\xi)}\right]_W = k_{\alpha_i}\left(U_{\mu_{\alpha_i}}\right)$。

证明。我们先证明 $[\xi \mapsto \mu_{\alpha_i}(\xi)]_W = \mu_{\alpha_i}$。我们给出 $i = 1$ 的论证。 $i \leq k$ 的较大取值可用归纳法以类似方式证明。回忆–

$$\mu_{\alpha_1} = j_{\alpha_1}(g_1)(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha_1}(\beta_l))$$

并在两边应用 k_{α_1}，

$$k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1}) = j_W(g_1)(\kappa, \theta_{\left[f_{\beta_1}(\xi)\right]_W}, \ldots, \theta_{\left[f_{\beta_l}(\xi)\right]_W})$$

由归纳法可知， μ_{α_1} 是 $k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})$的普里克里序列中的第 n_1个元素，因此它表示为 $g_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)} \cdots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\right)$的普里克里序列中的第 n_1个元素。

至于$\left[\xi \mapsto U_{\mu_{\alpha_i}(\xi)}\right]_W = k_{\alpha_i}\left(U_{\mu_{\alpha_i}}\right)$，这是因为由归纳法可知，

$$k_{\alpha_i}\left(U_{\mu_{\alpha_i}}\right) = j_W(\delta \mapsto U_\delta)(k_{\alpha_i}(\mu_{\alpha_i}))$$

□

我们来证明 k_α: $M_\alpha \to M$ 是初等的。

引理 **4.12** k_α: $M_\alpha \to M$ 是初等的。

证明。假设 x、$y \in M_\alpha$，我们来证明，例如，$x \in y$ 当且仅当$k(x) \in k(y)$。令 f、$g \in V$、β_1、……、β_l 和 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \alpha$ 满足条件–

$$x = j_\alpha(f)\left(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1)\ldots, j_{0,\alpha}(\beta_l) \quad \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha\ k}\right) \quad y = j_\alpha(g)\left(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1)\ldots, j_{0,\alpha}(\beta_l) \quad \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha\ k}\right)$$

假设 $\alpha = \alpha' + 1$ 是后继序数（极限情形更简单）。为简单起见，我们还假设 $\alpha_k = \alpha'$。那么 $x \in y$ 当且仅当–

$$\mu_{\alpha'} \in j_{\alpha',\alpha}\left(\{\xi < \mu_{\alpha'} : j_{\alpha'}(f)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right) \in j_{\alpha'}(g)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right)\}\right)$$

这等价于–

$$\{\xi < \mu_{\alpha'} : j_{\alpha'}(f)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right) \in j_{\alpha'}(g)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right)\} \in U_{\mu_{\alpha'}}$$

根据$U_{\mu_{\alpha'}}$的定义，这等价于–

$$\mu_{\alpha'} \in k_{\alpha'}\left(\{\xi < \mu_{\alpha'} : j_{\alpha'}(f)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right) \in j_{\alpha'}(g)\left(\kappa, j_{0,\alpha'}(\beta_1), \ldots, j_{0,\alpha'}(\beta_l), \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_{k-1}}, \xi\right)\}\right)$$

即 $k_\alpha(x) \in k_\alpha(y)$。

□

现在来描述证明 $\mu_\alpha = \text{crit}\,(k_\alpha)$ 在 M_α 中是可测基数的主要思路。请注意，这并非显而易见，因为 k_α：$M_\alpha \to M$ 在 M_α 中不可定义。完整论证将在引理 4.18 中给出，但需要一个技术性定理（定理 4.13）。我们主要希望遵循 [7] 和 [9], 中发展的方法，它们分别处理非平稳迭代和 Prikry 强迫的全支撑迭代。

考虑函数 $f \in V\,[G]$，它满足 $\mu_\alpha = [f]_W$。我们将证明，如果 μ_α 在 M_α 中不是可测基数，那么 $\mu_\alpha = [f]_W \in$的像 (k_α)，这与 $\mu_\alpha =$ crit (k_α) 的事实矛盾。为此，我们先固定一个函数 $h \in V$，使得对于 i 的某个生成元序列 $\beta_1, \ldots, \beta_l$，以及 α 以下的某个良好序列 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$，

$$\mu_\alpha = j_\alpha\,(h)\,(\kappa, j_{0,\alpha}\,(\beta_1)\,, \ldots, j_{0,\alpha}\,(\beta_l)\,, \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_k})$$

由于 $\mu_\alpha =$ 临界点 (k_α)，我们可以假设对于每个 $\xi < \kappa$，

$$f(\xi) < h\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

选取一个强迫此事的条件 $p \in G$。对于每个 $\xi < \kappa$、 $\vec{\eta} = \langle \eta_1$、……、$\eta_l \rangle$ 以及 $\vec{\nu} = \langle \nu_1$、……、$\nu_k \rangle$，记作——

$e(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}) = \{r \in P \backslash \nu_k$：存在一个有界子集 $A \subseteq h(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu})$，使得 $r \Vdash f(\xi) \in A\}_{\sim}$

该集合在所有扩张了 p 并强迫以下内容的条件之上是 $\leq^*$-稠密开集：

$$\langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi) \rangle = \langle \vec{\eta}, \vec{\nu} \rangle \tag{2}$$

我们希望沿用 [7] 和 [9]，，构造一个在 p 之上的条件 $p^* \in G$，使得，粗略地说，[6]，对于每个如上的 ξ、$\vec{\eta}$、$\vec{\nu}$，以及每个强迫式 (2) 成立的 p^* 的扩张 r，

$$r \restriction_{\nu_k} \Vdash r \backslash_{\nu_k} \in e(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu})$$

本质上，这样的 p^* 将具有以下性质：它的每个强迫方程 (2) 成立的扩张 r，也会强迫 $f(\xi)$ 属于一个有界子集 $A(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}) \subseteq h(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu})$（该子集只依赖于 p^* 以及 $\langle \xi$、$\vec{\eta}$、$\vec{\nu} \rangle$，而不依赖于强迫式 (2) 成立的 p^* 的扩张如何选择）。在 [7] 和 [9] 中，这种 p^* 的构造是通过融合论证完成的；从某种意义上说，该论证能够将大量数据吸收到 p 的单个直接扩张 p^* 中。Easton 支撑迭代中无法使用这种方法。我们通过为每个序列 $\langle \xi$、η_1、. . .、$\eta_l \rangle$ 构造 p 的一组非直接扩张来绕过这个问题，

$$\langle p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k) : \nu_1 < \ldots < \nu_k < \kappa \rangle$$

以及集合–

$$\langle A(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k) : \nu_1 < \ldots < \nu_k < \kappa \rangle$$

使下列性质成立：

1. 如果 $p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 强迫 (2)，那么它也强迫 $f(\xi) \in A(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu})$，而$_{\sim}$是 $h(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu})$ 的有界子集。

2. For a set of ξ-s in W, $p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$ belongs to G.

这就足够了，因为结合上述性质，

$$V[G] \vDash \{\xi < \kappa : f(\xi) \in A\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\} \in W$$

[6]为简洁起见，我们省略了此处所述版本中的一些细节 .

因此，在 $M\left[j_W(G)\right]$, 中

$$\begin{aligned}\mu_\alpha = [f]_W \in & \left[\xi \mapsto A\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W \\ = & k_\alpha\left(\ j_\alpha\left(\langle \xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}\rangle \mapsto A\left(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}\right)\right)\left(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu_1, \ldots, \mu_k\right)\ \right) \subseteq \operatorname{Im}\left(k_\alpha\right)\end{aligned}$$

其中，最后一个包含关系成立，是因为 $j_\alpha\left(\langle \xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}\rangle \mapsto A\left(\xi, \vec{\eta}, \vec{\nu}\right)\right)\left(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu_1, \ldots, \mu_k\right)$ 是 $\mu_\alpha = j_\alpha(h)\left(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l, \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_k}\right)$ 的有界子集。

我们将在引理 4.18 的证明中补全缺失的细节。在此之前，我们先给出定理 4.13 的证明。

4.2 定理 4.13 及其证明

本小节将专门证明以下定理:

定理 4.13 设 $p \in G$ 是一个条件。假设对于每个递增序列 $\langle \xi, \nu_1, \ldots, \nu_k\rangle$，以及每个大于 ξ 的 $\vec{\eta} = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l\rangle$，集合–

$$e\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k\right) \subseteq P \setminus \nu_k$$

是 $P \setminus \nu_k$ 中条件上的稠密开集，且这些条件强迫–

$$\langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k\rangle = \langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\rangle$$

那么存在 $s < \omega$，一个新的 i 的生成元序列 $\beta_l', \ldots, \beta_s'$，其中包含 $\beta_1, \ldots, \beta_l$，以及一个 p 的扩展系统,

$$\left\langle p\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k\right) : \eta_1, \ldots, \eta_s < \kappa, \nu_1 < \ldots < \nu_k < \kappa\right\rangle$$

具有以下性质:

1. 在 W 中存在一个 ξ-集合，使得——

$$\begin{aligned}& p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)} \Vdash \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_k}(\xi) \in \\ & e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\end{aligned}$$

2. 存在一个 W 中的 ξ-集合，使得–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \in G$$

（直观地说，对于大多数 $\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k \rangle$ 的取值，我们将构造的条件 $p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 强迫–

$$\langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k \rangle$$

且其尾段属于 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k)$）。

备注 4.14 当我们将生成元序列 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$ 扩展为序列 $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_s \rangle$ 时，我们自然会将集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ 认作–

$$e'(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s) = e(\xi, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_l})$$

其中 i_j 是满足如下条件的指标：对于每个 $1 \leq j \leq l$，$\beta'_{i_j} = \beta_j$。

类似地，每当给定一个函数 $g \in V$，其变量为 $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k$ 时，我们滥用记号，将 $g(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 记作 $g(\xi, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_l}, \nu_1, \ldots, \nu_k)$。

定理 4.13 的证明通过将给定的集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 进行推广来完成：

定义 4.15 对于任意的 η_1、…、$\eta_l < \kappa$、$1 \leq i \leq k$ 以及递增序列 $\langle \xi$、ν_1、…、$\nu_i \rangle$，我们定义集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i) \subseteq P \setminus \nu_i$。
对于 ~~k~~这就是定理表述中给出的集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k)$。假设 $1 \leq i < k$。进行递归。假设对于每个 $\nu < g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$，集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu)$ 已定义。记 $g_{i+1} = g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$。我们如下定义集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$：条件 $q \in P \setminus \nu_i$ 属于 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$，当且仅当满足以下性质：

1.（技术要求）$q \restriction_{g_{i+1}}$ 决定这些陈述–

$$F_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = \underset{\sim}{W}_{g_{i+1}} \cap V \ , \ t^q_{g_{i+1}} = t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$$

此外，如果 $q \restriction_{g_{i+1}}$ 决定 $t^q_{g_{i+1}} \neq t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$，它也会决定其中一个序列是否为另一个序列的初始段；如果是，还会决定是哪一个。最后，如果它强迫 $t^q_{g_{i+1}}$ 是 $t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$ 的真初始段，它也会强迫 $A^q_{g_{i+1}} \subseteq g_{i+1} \setminus \max(t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i))$。

2.（本质要求）如果技术要求中的两个陈述都得到肯定判定，则存在一个序列——

$$\langle\ q(\nu) : \nu < g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)\ \rangle$$

使得，对于每个高于 ν_i 的 $\nu < g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$， $q(\nu) \in P \setminus \nu$ 延伸 $q \setminus \nu$，并且——

$$q \Vdash \text{if } \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_{i+1}}(\xi) = \nu, \text{ then } q(\nu) \in G \setminus \nu \text{ and } q(\nu) \in e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu)$$

类似地，给定 $\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle$，定义 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)$ 为如下条件 $q \in P \setminus \xi$ 构成的集合：这些条件判定 $F_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l) = W_{g_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)} \cap V$ 与 $t_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l) = t^q_{g_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)}$ 是否成立；并且，假设判定结果为肯定的，则有一个扩展系统–

$$\langle q(\nu) : \nu < g_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l) \rangle$$

使得，对于每个 $\nu < g_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)$， $q(\nu) \in P \setminus \nu$，并且–

$$q \Vdash \text{if } \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_1}(\xi) = \nu \text{ then } q(\nu) \in G \setminus \nu \text{ and } q(\nu) \in e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu)$$

如果判定结果为否定，那么 $q \restriction_{g_1}$ 知道如何按照上面第二点所述比较 $t^q_{g_1}$ 与 $t_1(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l)$。

通过归纳法，我们将证明：对于任意 $i \leq k$ 和 $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i$，集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i) \subseteq P \setminus \nu_i$ 在条件 $q \in P \setminus \nu_i$ 之上是 $\leq^*$- 稠密开集，其中这些条件满足 –

$$\begin{aligned} q \Vdash\ & \langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_i}(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i \rangle, \text{ and for} \\ & \text{every } 1 \leq j \leq i,\ F_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = \underset{\sim}{W}_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j)} \text{ and} \\ & t_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = t^q_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)} \end{aligned}$$

归纳法将反向进行：对于 $i = k$，基例成立，因为众所周知，集合 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k) \subseteq P \setminus \nu_k$ 在强迫 $q \in P \setminus \nu_k$ 的条件之上是 $\leq^*$ 稠密开集，而这些条件强迫 ——

$$\langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_k}(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k \rangle$$

归纳步骤见下述引理：

引理 4.16 固定 $\eta_1, \ldots, \eta_l < \kappa$, $1 \leq i < k$ 和一个递增序列 $\langle \xi, \nu_1, \ldots, \nu_i \rangle$。记 $g_{i+1} = g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$。假设对于每个 $\nu_{i+1} \in (\nu_i, g_{i+1})$，集合–

$$e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu_{i+1}) \subseteq P \setminus \nu_{i+1}$$

在条件 $q \in P \setminus \nu_{i+1}$ 之上是 $\leq^*$-稠密开集，对于这些条件–

$$q \Vdash \langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_i}(\xi), \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_{i+1}}(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu \rangle, \text{ and for every } 1 \leq j \leq i+1, \ F_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = \underset{\sim}{W}_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j)} \text{ and } t_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = t^q_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)}$$

那么 $e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$ 是 $\leq^*$-稠密开集，且位于满足 $q \in P \setminus \nu_i$ 的条件之上–

$$q \Vdash \langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \underset{\sim}{\mu}_{\alpha_i}(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i \rangle, \text{ and for every } 1 \leq j \leq i, \ F_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = \underset{\sim}{W}_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j)} \text{ and } t_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = t^q_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)}$$

证明。设 $q \in P \setminus \nu_i$ 是一个强迫–的条件

$$\theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \underset{\sim}{\mu}_1(\xi), \ldots, \underset{\sim}{\mu}_i(\xi) \rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i \rangle$$
$$\text{and for every } 1 \leq j \leq i, \ F_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = \underset{\sim}{W}_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j)}$$
$$\text{and } t_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j) = t^q_{g_{j+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)}$$

记作–

$$g = g_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$$
$$U_g = F_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$$
$$t = t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$$

假设 $q \restriction_g$ 强迫–

$$\underset{\sim}{W}_g \cap V = U_g, \ t = \underset{\sim}{t}^q_g$$

（若非如此，则我们已完成，因为 $q \in e(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$）。记 $n = \mathrm{lh}(t)$。现在我们将应用以下断言：

断言 6 假设 $p \in G$ 是一个条件， $n < \omega$ 和 $g \in \Delta$ 在 V中是可测基数。假设 U_g 是 V中关于 g 的正规测度， t 是 g 以下长度为 n的有限序列，并且–

$$p \Vdash \underset{\sim}{t}^q_g = t, \ \underset{\sim}{W}_g \cap V = U_g$$

对于每个 $\nu < g$，假设 $e(\nu) \subseteq P \setminus \nu$ 是一个 P_ν-名称，表示 $P \setminus \nu$ 的子集，并且它在强迫 ν 是 Prikry 序列中第 $(n+1)$ 个元素的条件之上是$\leq^*$ 稠密开的

g 的序列。那么存在一个直接扩张 $p^* \geq^* p$ 以及一个序列 $\langle p(\nu) : \nu < g\rangle$，使得对于每个 $\nu < g$，

$$p^* \Vdash \text{若 } \nu \text{ 在 } g\text{的普里克里序列中出现在 } t \text{ 之后，则 } p(\nu) \in (G \setminus \nu) \cap e(\nu)$$
$$\text{and } p^* \restriction_\nu \Vdash p(\nu) \geq^* p^* \restriction_{[\nu,g)} {}^\frown\langle t {}^\frown\langle \nu\rangle, \underset{\sim}{A}{}^{p^*}_g \setminus \nu\rangle {}^\frown p^* \setminus (g+1).$$

证明。对于每个 $\nu < g$，考虑集合–

$$d(\nu) = \{r \in P \restriction_{[\nu,g)} : r \parallel \nu \in \underset{\sim}{A}{}^p_g, \text{ and if } r \Vdash \nu \in \underset{\sim}{A}{}^p_g \text{ then}$$
$$r \Vdash \exists s \geq^* \langle t {}^\frown\langle \nu\rangle, \underset{\sim}{A}{}^p_g \setminus \nu\rangle {}^\frown p \setminus (g+1),\ r {}^\frown s \in e(\nu)\}$$

那么 $d(\nu) \subseteq P \restriction_{[\nu,g)}$ 在 $p \restriction_{[\nu,g)}$之上是 $\leq^*$-稠密开集。令 H_g 为一个 P_g-名称，由 $p \restriction_g$强制为 $j_{U_g}(P_g) \setminus g$的 $\leq^*$-泛子集，使得–

$$\underset{\sim}{W}_g = (U_g)_{\underset{\sim}{H}_g}$$

（这样的泛型存在，因为 W_g是简单生成的）。令 $q \in \mathrm{Ult}(V, U_g)$ 为一个 P_g-名称，$\sim$ 由 p 强制为 $[\nu \mapsto d(\nu)]_{U_g} \cap \underset{\sim}{H}_g$中的一个条件。令 $^\nu\mapsto \underset{\sim}{q}(\nu) \in P \restriction_{[\nu,g)}$ 为 V 中的一个函数，使得 $[\nu \mapsto \underset{\sim}{q}(\nu)]_{U_g} = \underset{\sim}{q}$。那么我们可以假设，对于 U_g中的一组 ν，

$$p \restriction_\nu \Vdash \underset{\sim}{q}(\nu) \in d(\nu) \tag{3}$$

并且根据引理 2.18，$p \restriction_g$ 强迫存在一个集合 $\underset{\sim}{C} \in W_g$，使得对每个 $\nu \in C$，

$$p \restriction_\nu {}^\frown \underset{\sim}{q}(\nu) \in \underset{\sim}{G} \restriction_g$$

如有必要，缩小 C 后，我们可以假设每个 $\nu \in C$ 也满足方程 (3)。现在定义扩张 $p^* \geq^* p$，并且对每个 $\nu < g$，条件 $p(\nu) \in P \setminus \nu$。首先，令——

$$p^* \restriction_g = p \restriction_g$$

并且在 $V^{P\restriction\nu}$ 中，令——

$$p(\nu) \restriction_g = \underset{\sim}{q}(\nu)$$

在 $P \restriction_g$ 所在的任意泛型扩张中工作。对于每个 $\nu \in C \cap A^p_g$（因此满足 $p \restriction_\nu {}^\frown \underset{\sim}{q}(\nu) \in G \restriction_g$），存在 $s(\nu) \in P \setminus g$, $s(\nu) \geq^* \langle t {}^\frown\langle \nu\rangle, \underset{\sim}{A}{}^p_g \setminus \nu\rangle {}^\frown q \setminus (g+1)$，使得 $p(\nu) \restriction_g {}^\frown s(\nu) \in e(\nu)$。集合–

$$p^*(g) = \langle \underset{\sim}{t}{}^p_g, \underset{\sim}{A}{}^p_g \cap C \cap \left(\triangle_{\nu<g,\ \nu\in C\cap A^p_g} \underset{\sim}{A}{}^{s(\nu)}_g\right)\rangle$$

（上述定义在 $V[G\restriction_g]$ 中承载，因此 $\underset{\sim}{C}$ 在那里可用。）

令 $p^*\setminus(g+1)=s(\underset{\sim}{\nu})$，其中 $\underset{\sim}{\nu}$ 是 g 的 Prikry 序列中的第 $(n+1)$ 个元素。最后，令–

$$p(\nu)\setminus g=\langle t^\frown\langle\nu\rangle,A_g^{p^*}\setminus\nu\rangle^\frown p^*\setminus(g+1)$$

当 $p\restriction_\nu{}^\frown p(\nu)\restriction_g\Vdash\nu\in\underset{\sim}{A}_g^{p^*}$ 时，上述定义是可行的；若非如此，则令 $p(\nu)\setminus g$ 任意。

至此，$q^*\geq^* q$ 和 $\langle p(\nu):\nu<g\rangle$ 的定义完成。现在证明对每个 $\nu<g$,

若 ν 在 g 的 Prikry 序列中出现在 t 之后，则 $p^*\Vdash p(\nu)\in(G\setminus\nu)\cap e(\nu)$ and $p^*\restriction_\nu\Vdash p(\nu)\geq^* p^*\restriction_{[\nu,g)}{}^\frown\langle t^\frown\langle\nu\rangle,\underset{\sim}{A}_g^{p^*}\setminus\nu\rangle^\frown p^*\setminus(g+1)$.

固定 $\nu<g$，并令 G 为 P 的一个泛型集合，且包含 p^*，使得在 $V[G]$ 中，ν 在 g 的 Prikry 序列中出现在 t 之后。特别地，$\nu\in C$，因此 $q(\nu)\in G\restriction_{[\nu,g)}$。根据 $p(\nu)$ 的定义，并且由于 $p^*\in G$，$q(\nu)\in G\restriction_{[\nu,g)}$，可得 $p(\nu)\in G\setminus\nu$，证毕。

□ 断言 6。

对于集合 $e(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l,\nu_1,\ldots,\nu_i,\nu)\subseteq P\setminus\nu$（回想一下，$\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l,\nu_1,\ldots,\nu_i$ 是固定的），应用断言 6，并直接将 q 进一步扩张为条件 $q^*\geq^* q$，它具有如下扩展系统–

$$\langle q(\nu):\nu<g\rangle$$

如引理的陈述所述。

由此可知，对于每个 $\nu<g$,

$$q^*\Vdash\text{if }\underset{\sim}{\mu}_{\alpha_{i+1}}(\xi)=\nu\text{ then }q(\nu)\in G\setminus\nu_i\text{ and }q(\nu)\setminus\nu\in e(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l,\nu_1,\ldots,\nu_i,\nu)$$

因此 $\langle q(\nu):\ \nu<g\rangle$ 见证了如下事实：$q^*\in e(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l,\nu_1,\ldots,\nu_k)$。□ 引理 4.16。

现在我们继续证明定理 4.13。我们使用与定理表述中相同的记号。

由归纳法可得：对于每个 $\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l$，集合 $e(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l)\subseteq P\setminus\xi$ 在强迫下是 $\leq^*$ 稠密开集，且位于强迫以下条件 $q\in P\setminus\xi$ 之上，使其强迫——

$$\langle\theta_{f_{\beta_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_l}(\xi)}\rangle=\langle\eta_1,\ldots,\eta_l\rangle$$

而且——

$$F_1(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l)=\underset{\sim}{W}_{g_1(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l)}\text{ and }t_1(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l)=t^q_{g_1(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_l)}$$

我们还想再进行一步，从 $P \setminus \xi$ 中的条件转到 P 中的条件。这可能需要扩展序列生成元 $\beta_1, \ldots, \beta_l$。我们在下面的引理中完成这一步，从而结束定理 4.13 的证明。

引理 4.17 存在 $s < \omega$，一个生成元序列 $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_s \rangle$，属于 i，且扩展了 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$，以及一个条件系统–

$$\langle p\left(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_k\right) : \eta'_1, \ldots, \eta'_s < \kappa, \ \ \xi < \nu_1 < \ldots < \nu_k \rangle$$

（它们全都扩展了定理 4.13 陈述中给出的条件 $p \in G$），使得，

$$\begin{aligned} \{\xi < \kappa \colon & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)} \Vdash \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_k}(\xi) \in \\ & e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \ \ and\text{-} \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \in G\} \end{aligned}$$

证明。回忆一下，$W = U_H$ 是由初等嵌入 $i \colon V \to N$ 生成的。考虑集合–

$$i\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle \mapsto e\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l\right)\right)\left(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l\right) \subseteq i(P) \setminus \kappa$$

它在 $i(P) \setminus \kappa$ 中是 $\leq^*$-稠密开集，因此与一个条件 $r \in H$ 相交。由于 $r \in N$，它可以用生成元序列 $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_s \rangle$ 表示；我们可以假设它包含 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$。令–

$$\langle \xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s \rangle \mapsto r\left(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s\right) \in P \setminus \xi$$

设 V 是 V 中的一个函数，使得–

$$r = i\left(\langle \xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s \rangle \mapsto r\left(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s\right)\right)\left(\kappa, \beta'_1, \ldots, \beta'_s\right)$$

现在，对每个 $\langle \xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_k \rangle$，定义条件 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_k) \in P$。我们递归地进行此定义，并对每个 $1 \leq i \leq k$ 定义条件 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \in P$。同时，我们证明–

$$\begin{aligned} \{\xi < \kappa \colon & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_i}(\xi)} \Vdash \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_i}(\xi) \in \\ & e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \ \text{and-} \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \in G\} \end{aligned}$$

这就完成了该引理的证明，从而也完成了定理 4.13 的证明。

• 首先，固定 ξ、η_1、……、η_s，并定义 $p(\xi$、η_1、……、$\eta_s)$。如果 $p \restriction_\xi \Vdash r(\xi$、$\eta_1$、……、$\eta_s) \in e(\xi$、$\eta_1$、……、$\eta_l)$，则令 $p(\xi$、η_1、……、$\eta_s) = p \restriction_\xi {}^\frown r(\xi$、$\eta_1$、……、$\eta_s)$。否则，令 $p(\xi$、η_1、……、$\eta_s)$ 为 p 之上的任意条件。我们论证如下——

$$\{\xi < \kappa \colon p \restriction_\xi \Vdash r\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right) \in e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right) \text{ and}$$
$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right) \in G\} \in W$$

回想一下，$r \in H$ 的定义使得–

$$p \Vdash r \in i\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle \mapsto e\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l\right)\right)(\kappa, \beta_1, \ldots, \beta_l)$$

应用嵌入 $k \colon N \to M$ 并模 W 向下反射，得到–

$$\{\xi < \kappa \colon p \restriction_\xi \Vdash r\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right) \in e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right)\} \in W$$

最后，由引理 2.18，$p \Vdash r \in H$，从而 $p \Vdash k(r) \in j_W(G)$。将此向下反射，得到–

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}\right) \in G\} \in W$$

• 固定 $\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1$，并定义 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1)$。记 $g_1 = g_1(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s)$。若 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \restriction_\xi \Vdash p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \backslash \xi \in e(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s)$，则 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \restriction_\xi = p \restriction_\xi$ 决定这些陈述–

$$F_1\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j\right) = \underset{\sim}{W}_{g_1} \cap V \ , \ t^q_{g_1} = t_1\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i\right)$$

并且，如果它正向决定这些条件，就强迫存在一个序列 $\langle q(\nu) \colon \ \nu < g_1 \rangle$ 见证这一点。定义——

$$p\left(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1\right) = p\left(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s\right) \restriction_{\nu_1} {}^\frown q(\nu_1)$$

如果 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \restriction_\xi \nVdash p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \backslash \xi \in e(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s)$，或者 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \restriction_\xi \Vdash p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s) \backslash \xi \in e(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s)$，但这些陈述——

$$F_1\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_j\right) = \underset{\sim}{W}_{g_1} \cap V \ , \ t^q_{g_1} = t_1\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i\right)$$

均被判定为否定的。设 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1)$ 是高于 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s)$ 的任意条件。我们论证——

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_1}(\xi)} \Vdash$$
$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \backslash \mu_{\alpha_1}(\xi) \in$$
$$e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \text{ and-}$$
$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \in G\}$$

首先，根据前一点，

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_\xi \Vdash p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \setminus \xi \in e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)\} \in W$$

根据集合 $e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)} \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)$ 的性质，条件–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_\xi$$

决定这些陈述–

$$F_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) = \underset{\sim}{W}_{g_1} \cap V$$

and–

$$t_{g_1}^{p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)} = t_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)$$

断言 7 对于 W 中的一组 ξ-s，上述陈述均以肯定的方式得到决定。在证明该断言之前，我们继续论证。根据该断言和定义 4.15，

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) = p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_{\mu_{\alpha_1}(\xi)}^\frown q\left(\mu_{\alpha_1}(\xi)\right)$$

并且，根据集合 $e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)} \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)$ 的性质，条件–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)$$

强迫–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) = p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_{\mu_{\alpha_1}(\xi)}^\frown q\left(\mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \in \underset{\sim}{G}$$

and–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_1}(\xi) = q\left(\mu_{\alpha_1}(\xi)\right) \in e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi)\right)$$

因此，对于 W 中的一组 ξ-s，

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_\xi \Vdash p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \setminus \xi \in e\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)\} \in W$$

至此，第二步完成。因此，接下来需要证明断言 7:

证明。我们先来证明——

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_\xi \Vdash F_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) = \underset{\sim}{W}_{g_1} \cap V\}$$

否则，则在 $M\left[j_W(G)\right]$, 中

$$j_W\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s\rangle \mapsto F_1\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s\rangle\right)\right)\left(\kappa, j_{0,\alpha}\left(\beta_1'\right), \ldots, j_{0,\alpha}\left(\beta_s'\right)\right) \neq \left[\xi \mapsto W_{g_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)} \cap V\right]_W$$

但两边都等于 $k_1\left(U_{\mu_{\alpha_1}}\right)$，这与嵌入$k_{\alpha_1}$的性质 (D) 矛盾。

现在我们来证明——

$$\{\xi < \kappa \colon p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right) \restriction_\xi \Vdash t_{g_1}^{p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)} = t_1\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)\}$$

否则，则条件 $s = j_W\left(\xi \mapsto p\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1'}(\xi)} \ldots, \theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\right)\right)(\kappa)$ 强迫——

$$t^s_{k_{\alpha_1}\left(\mu_{\alpha_1}\right)} \neq k_{\alpha_1}\left(t_{\alpha_1}\right) = t_{\alpha_1}$$

注意，$s \in j_W(G)\restriction_{k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})}$，而 t_{α_1} 是 $k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})$ 在 μ_{α_1} 于 $M\left[j_W(G)\right]$ 下的普里克里序列的初始段。因此，序列 $t^s_{k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})}$ 和 t_{α_1} 中必有一个是另一个的真初始段。定义 4.15 $s \restriction_{k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})}$ 中的第二个要求决定了哪一个是另一个的初始段。现在这就产生了矛盾:

1. 如果 t_{α_1} 是 $t^s_{k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})}$ 的真初始段：回顾 $s = k_{\alpha_1}(s')$，其中——

   $$s' = j_{\alpha_1}\left(\langle \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s\rangle \mapsto p\left(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s\right)\right)\left(\kappa, j_{0,\alpha_1}(\beta_1'), \ldots, j_{0,\alpha_1}\left(\beta_s'\right)\right)$$

   那么 $s' \restriction_{\mu_{\alpha_1}}$ 强制 t_{α_1} 是 $t^{s'}_{\mu_{\alpha_1}}$ 的真初始段。在 M_{α_1} 上工作。令 $\gamma < \mu_{\alpha_1}$ 为一个序数，且 $s' \restriction_{\mu_{\alpha_1}}$ 强制它是 $t^{s'}_{\mu_{\alpha_1}} \setminus t_{\alpha_1}$ 中第一个序数的一个上界（这样的上界存在，因为在 M_{α_1} 中，强迫 $j_{\alpha_1}(P) \restriction_{\mu_{\alpha_1}}$ 满足 μ_{α_1}-链条件）。应用 k_{α_1} : $M_{\alpha_1} \to M$, $\gamma < \mu_{\alpha_1}$ 是 $t^s_{k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})} \setminus t_{\alpha_1}$ 中第一个序数的一个上界。然而，在 $M\left[j_W(G)\right]$, 中，这个元素就是其自身，且严格大于 γ。矛盾。

2. 否则，$^{t^s_{k_{\alpha_1}}(\mu_{\alpha_1})}$ 是 t_{α_1} 的真初始段：记 $\gamma = \max(t_{\alpha_1})$。那么，根据定义 4.15，$s$ 强制 $k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})$ 的普里克里序列的初始段为 $^{t^s_{k_{\alpha_1}}(\mu_{\alpha_1})}$，其后接一个严格大于 γ 的元素；特别地，在 $M[j_W(G)]$，中， t_{α_1} 不是 $k_{\alpha_1}(\mu_{\alpha_1})$ 的普里克里序列的初始段，这就导致矛盾。

□ 断言 7。

• 现在假设 $1 \leq i < k$ 是任意的，并且对每个 $\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i$，都定义了一个条件 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i)$。记作 $g_{i+1} = g_{i+1}(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i)$。对每个 $\nu_{i+1} < g_{i+1}$，定义条件 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu_{i+1})$。如果 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \restriction_{\nu_i} \Vdash p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \setminus \nu_i \in e(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i)$，并且 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \restriction_{\nu_i}$ 强迫这些陈述 –

$$F_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i) = \underset{\sim}{W}_{g_{i+1}} \cap V \ , \ t^q_{g_{i+1}} = t_{i+1}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_i)$$

则 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \restriction_{\nu_i}$ 强迫存在一个序列 $\langle q(\nu) \colon \nu < g_{i+1} \rangle$ 对此作出见证。在这种情况下，定义——

$$p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu_{i+1}) = p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i) \restriction_{\nu_{i+1}} {}^\frown q(\nu_{i+1})$$

否则，令 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu_{i+1})$ 为任意一个延伸条件 $p(\xi, \eta'_1, \ldots, \eta'_s, \nu_1, \ldots, \nu_i)$ 的条件。

现在我们来论证——

$$\begin{aligned}\{\xi < \kappa \colon\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi), \mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)} \Vdash \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi), \mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_{i+1}}(\xi) \in \\ & e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi), \mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right) \text{ and-} \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi), \mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right) \in G\}\end{aligned}$$

我们按照前一点中的做法进行。首先,

$$\begin{aligned}\{\xi < \kappa \colon\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_i}(\xi)} \Vdash \\ & p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_i}(\xi) \in \\ & e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_i}(\xi)\right)\} \in W\end{aligned}$$

因此，对于 W 中的一组 ξ，条件–

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_i}(\xi)}$$

决定这些陈述–

$$F_{i+1}\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)=\underset{\sim}{W}_{g_{i+1}\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)}\cap V$$

and–

$$t^{p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)}_{g_{i+1}\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)}=t_{i+1}\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)$$

仿照断言 7 进行论证，对于 W 中一组 ξ-s，这两个陈述都被判定为真。因此，

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)=$$
$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)}{}^{\frown}q\left(\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)$$

而条件 $q\left(\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)$ 是由–强制的，

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi)\right)$$

属于–

$$G\setminus\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\cap e\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)$$

因此，

$$\{\xi<\kappa\colon p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)}\Vdash$$
$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)\setminus\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\in$$
$$e\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)\text{ and-}$$
$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_i}(\xi),\mu_{\alpha_{i+1}}(\xi)\right)\in G\}$$

如所需。

□ 引理 4.17 的。 □ 定理 4.13 的。

4.3 k_α的性质

在本小节中，我们将完成 k_α 的性质（A）–（D）的证明。之后，我们将在引理 4.21 中证明 k_{κ^*}: $M_{\kappa^*} \to M$ 是恒等映射，并完成定理 4.8 和 4.7 的证明。

引理 4.18 $\mu_\alpha = \text{crit}\,(k_\alpha)$ 在 M_α 中是可测基数。此外，μ_α 是严格大于 $\sup\{\mu_\beta$ 的最小可测基数: $\beta < \alpha\}$ 在 V 中的共尾数大于 κ。

证明。记 $\mu = [f]_W$ 和 $\mu = j_\alpha(h)\,(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1) \ldots, j_{0,\alpha}(\beta_k)\ \ \mu_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_m})$，其中 $f \in V\,[G]$, $h \in V$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ 是 i 和 $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \alpha$ 的生成元。

由于 $\mu < k_\alpha(\mu)$，我们可以假设对每个 $\xi < \kappa$,

$$f\,(\xi) < h\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

并令 $p \in G$ 为强迫此事的条件。给定 $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k$，考虑集合——

$$e\,(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k) = \{r \in P \setminus \nu_k\text{: 对于某个有界子集 } A \subseteq h\,(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k),$$
$$r \Vdash \underset{\sim}{f}(\xi) \in A\}$$

那么，$e\,(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ 在扩展 p 并强迫如下命题的条件之上是 $\leq^*$-稠密开集–

$$\langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k\rangle$$

根据定理 4.13，序列 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l\rangle$ 可以扩展为序列 $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_s\rangle$，而 p 可以扩展为一个条件系统,

$$\langle p\,(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k) : \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s < \kappa, \nu_1 < \ldots < \nu_k < \kappa\rangle$$

使得，对于 W 中的一组 ξ,

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)} \Vdash$$
$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_k}(\xi) \in$$
$$e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

and–

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \in G$$

现在假设已给定 $\langle \xi$、η_1、……、η_s、ν_1、……、$\nu_k \rangle$，使得——

$$p(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_s,\nu_1,\ldots,\nu_k) \restriction_{\nu_k} \Vdash p(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_s,\nu_1,\ldots,\nu_k) \setminus \nu_k \in e(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_s,\nu_1,\ldots,\nu_k)$$

令 $\underset{\sim}{A}$ 为一个 P_{ν_k}-名称，由 $p(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_s,\nu_1,\ldots,\nu_k) \restriction_{\nu_k}$ 强制其见证事实：$p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) \setminus \nu_k \in e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$。也就是说，它是 $h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的一个有界子集，并且 $p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) \setminus \nu_k \Vdash \underset{\sim}{f}(\xi) \in \underset{\sim}{A}$。

令 $A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 为满足如下条件的序数集合 $\gamma < h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$：存在某个 $r \geq p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) \restriction_{\nu_k}$ 强制 $\gamma \in \underset{\sim}{A}$。由于 $\nu_k < h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$，$A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 是 $h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的一个有界子集。函数 $\langle \xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 属于 V。

根据定理 4.13 的结果，存在一个由 ξ 构成的集合，包含于 W，使得–

$$G \ni p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \Vdash \underset{\sim}{f}(\xi) \in A\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

因此，在 $M[j_W(G)]$,

$$[f]_W \in \left[\xi \mapsto A\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W = k_\alpha\left(j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1'),\ldots,j_{0,\alpha}(\beta_s'),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k})\right) \subseteq \mathrm{Im}(k_\alpha)$$

其中最后一个包含关系成立，因为–

$$j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1'),\ldots,j_{0,\alpha}(\beta_s'),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k})$$

是–的一个有界子集

$$\mu_\alpha = j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1'),\ldots,j_{0,\alpha}(\beta_s'),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k})$$

其临界点为 (k_α)。

因此我们证明了 $\mu_\alpha \in$ 像 (k_α)，这就产生了矛盾。 □

Lemma 4.19 μ_α 出现在添加到 $k_\alpha(\mu_\alpha)$（位于 $M[j_W(G)]$）中的 Prikry 序列中。

证明。在 $M[H]$ 中，记 t^* 为 $k_\alpha(\mu_\alpha)$ 的 Prikry 序列中由所有低于 μ_α 的序数组成的初始段。记 n^* 为 t^* 的长度。令 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto t^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 为 V 中的一个函数，使得–

$$t^* = j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle \mapsto t^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)(\kappa, j_{0,\alpha}(\beta_1),\ldots,j_{0,\alpha}(\beta_l),\mu_{\alpha_0},\ldots,\mu_{\alpha_k})$$

（这里我们假设 t^* 可以使用与 μ_α 相同的生成元表示。如果情况并非如此，则修改生成元集）。

我们可以假设，对于每个 $\langle \xi,\ \vec{\eta}(\vec{\nu}),\ t^*\rangle$ 是一个长度为 n^* 的序列。由于 $k_\alpha(t^*) = t^*$,

$$\left[\xi \mapsto t^*\left(\xi, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W = t^*$$

在 $V[G]$ 中，对每个 $\xi < \kappa$，记作

$$\mu_\alpha(\xi) = \text{the } (n^*+1)\text{-th element in the Prikry sequence of}$$
$$h\left(\vec{\xi}, \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

显然，$[\xi \mapsto \mu_\alpha(\xi)]_W \geq \mu_\alpha$。

我们论证等式成立。我们将证明，对于每个 $\eta < [\xi \mapsto \mu_\alpha(\xi)]_W$，$\eta < \mu_\alpha$。假设给定了这样的 η，并令 $f \in V[G]$ 为满足 $[f]_W = \eta$ 的函数。那么我们可以假设，对于每个 $\xi < \kappa$,

$$f(\xi) < \mu_\alpha(\xi)$$

并令 $p \in G$ 为强迫这一点的条件。

对于每个 ξ、$\vec{\eta}$、$\vec{\nu}$，考虑集合–

$$e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) = \{r \in P \setminus \nu_k \colon \exists \gamma < h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}),\ r \Vdash \text{ if } t^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) \text{ is an initial segment of the}$$
$$\text{Prikry sequence of } h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}),\ \text{then } f(\xi) < \gamma\}$$

那么，$e\left(\vec{\xi}, \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_k\right)$ 在强制–的条件之上是稠密开集

$$\langle \theta_{f_{\beta_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta_l}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\rangle = \langle \eta_1, \ldots, \eta_l, \nu_1, \ldots, \nu_k\rangle$$

这是因为，给定一个名称，表示元素 $f(\xi)$ 被强制严格小于 $\mu_\alpha(\xi)$，$\sim$（即在 $h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的普里克里序列中紧跟在 $t^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 后面的元素），通过取一个直接扩张即可决定该元素。

根据定理 4.13，序列 $\langle \beta_1, \ldots, \beta_l\rangle$ 可以扩张为序列 $\langle \beta'_1, \ldots, \beta'_s\rangle$，而 p 可以扩张为一个条件系统,

$$\langle p(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_s, \nu_1, \ldots, \nu_k) : \xi, \eta_1, \ldots, \eta_s < \kappa, \nu_1 < \ldots < \nu_k < \kappa\rangle$$

使得，对于 W 中的一组 ξ,

$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)} \Vdash$$
$$p\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \setminus \mu_{\alpha_k}(\xi) \in$$
$$e\left(\xi, \theta_{f_{\beta'_1}(\xi)}, \ldots, \theta_{f_{\beta'_s}(\xi)}, \mu_{\alpha_1}(\xi), \ldots, \mu_{\alpha_k}(\xi)\right)$$

and–

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\in G$$

现在假设给定了 $\langle\xi、\ \vec{\eta}、\ \vec{\nu}\rangle=\langle\xi、\ \eta_1、\ \ldots\ldots、\ \eta_s、\ \nu_1、\ \ldots\ldots、\ \nu_k\rangle$，使得——

$$p\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\restriction_{\nu_k}\Vdash p\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\setminus\nu_k\in e\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)$$

令 γ 为一个 P_{ν_k}-名称，由 $p(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_s,\nu_1,\ldots,\nu_k)\restriction_{\nu_k}$ 强制为小于 $h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的序数，∼使得 $p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\setminus\nu_k\Vdash f(\xi)<\gamma$。令 $\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 为满足以下条件的序数集合 $\sim\quad\sim\tau<h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的上确界：存在某个 $r\geq p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\restriction_{\nu_k}$ 强迫 $\gamma=\tau$。由于 $\nu_k<h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$，∼$\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})<h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$。函数 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 属于 V。

根据定理 4.13 的结果，存在一个 W 中的 ξ 集合，使得–

$$\begin{aligned}G\ni & p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\Vdash\\ & \text{if } t^*\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\\ & \text{is an initial segment of the Prikry sequence of}\\ & h\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right),\ \text{then}\\ & \underset{\sim}{f}(\xi)<\gamma\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\end{aligned}$$

因此，在 $M[j_W(G)]$, 中，确实 t^* 是 $k_\alpha(\mu_\alpha)$ 的普里克里序列的一个初始段，

$$\begin{aligned}[f]_W\in & \left[\xi\mapsto\gamma\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W=\\ & k_\alpha\left(j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto\gamma\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\right)\left(\kappa,j_{0,\alpha}\left(\beta_1'\right),\ldots,j_{0,\alpha}\left(\beta_s'\right),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}\right)\right)<\mu_\alpha\end{aligned}$$

如所要求的那样。

□

引理 4.20 令 $U_{\mu_\alpha}=\{X\subseteq\mu_\alpha:\ \mu_\alpha\in k_\alpha(X)\}\cap M_\alpha$。则 $U_{\mu_\alpha}\in M_\alpha$。此外，$k_\alpha(U_{\mu_\alpha})=j_W(\delta\mapsto U_\delta)\left(k_\alpha(\mu_\alpha)\right)$，其中，对每个 $\delta\in\Delta$，$U_\delta=W_\delta\cap V$，对于 W_δ，它是在迭代 P 的第 δ 阶段普里克里强迫中所使用的测度。

证明。我们首先证明 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)\left(k_\alpha(\mu_\alpha)\right)\in$像$(k_\alpha)$。然后，我们将证明，对于满足 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)\left(k_\alpha(\mu_\alpha)\right)=k_\alpha(F)$ 的测度 $F\in M_\alpha$，其等于 U_{μ_α}。

为了证明 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))\in$像$(k_\alpha)$，我们证明存在一个定义在 μ_α 上的测度族 $\mathcal{F}\in M_\alpha$，满足 $|\mathcal{F}|<\mu_\alpha$，使得 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)\left(k_\alpha(\mu_\alpha)\right)\in k_\alpha(F)=k''_\alpha\mathcal{F}$。

在 V 中固定一个枚举 W，枚举所有小于 κ 的可测基数上的正规测度。对于每个 $\langle\xi、\ \vec{\eta}、\ \vec{\nu}\rangle$，令 $\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 表示 $U_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}$ 在此枚举中的索引。注意，

每个测度 $U_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}$ 都属于 V，但序列 $\langle U_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}$：$\xi$、$\vec{\eta}$、$\vec{\nu}<\kappa\rangle$ 可能是 V 的外部序列。因此，函数 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 不一定属于 V。

固定 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle$，并考虑集合–

$$\begin{aligned}e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}) =&\{r\in P\setminus\nu_k\text{：存在一个序数集合 }A\text{，其基数严格小于}\\ &h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}),\text{ such that } r\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\Vdash\gamma(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\in A\}\end{aligned}$$

那么 $e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\subseteq P\setminus\nu_k$ 是 $\leq^*$-稠密开集，因为 $P\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}$ 是 $h(\xi,\vec{\eta},\nu)$-链条件 ..

现在应用定理 4.13，并按前一个引理中的方式论证：存在一个（在 V 中的）映射 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$，使得在 $M[j_W(G)]$，

$$\begin{aligned}&\left[\xi\mapsto\gamma\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W\in\\ &\left[\xi\mapsto A\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W=\\ &k''_\alpha\left(j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)\left(\kappa,j_{0,\alpha}\left(\beta_1'\right),\ldots,j_{0,\alpha}\left(\beta_s'\right),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}\right)\right)\end{aligned}$$

在 M_α 中，令 $\mathcal{F}$ 为 μ_α 上的测度集合，它们在枚举 $j_\alpha(W)$ 中由集合 $\mathcal{A}=j_\alpha(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto A(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}))$ 中的一个指标所索引（κ,{v14, $_\alpha(\beta_1'))\ldots$,{v19, $_\alpha(\beta_s')$ $\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}$）。注意 $|\mathcal{A}|<\mu_\alpha$，因此 $|\mathcal{F}|<\mu_\alpha$。那么 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))$ 由序数–枚举

$$\left[\xi\mapsto\gamma\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W\in k''_\alpha\mathcal{A}$$

因此 $j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))\in k''_\alpha\mathcal{F}$，如所需。

设 $F\in M_\alpha$ 是 μ_α 上的一个测度，使得–

$$j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))=k_\alpha(F)$$

我们来论证 $F=U_{\mu_\alpha}$。只需证明 $F\subseteq U_{\mu_\alpha}$。固定一个集合 $X\in F$。假设–

$$X=j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto X(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\right)\left(\kappa,j_{0,\alpha}\left(\beta_1\right),\ldots,j_{0,\alpha}\left(\beta_l\right),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}\right)$$

（我们再次假设 X 可以用与 μ_α 相同的生成元表示。如果不是这样，就修改 μ_α 的生成元集。）于是 $k_\alpha(X)\in j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))$。

与前一个引理一样，令 n^* 为 t^* 的长度，其中 t^* 是 Prikry

序列 $k_\alpha(\mu_\alpha)$ 在 μ_α 以下的初始段。对于每个 $\langle \xi、\ \vec{\eta}、\ \vec{\nu}\rangle$，令–

$$\begin{aligned} e\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)=\{&r\in P\setminus\nu_k\colon r\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\Vdash \check{X}\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\in U_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})},\\ &\text{if it decides positively, then } r\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\Vdash \underset{\sim}{A}^r_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\subseteq\\ &X\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right);\ \text{else, } r\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\Vdash \underset{\sim}{A}^r_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})} \text{ is disjoint}\\ &\text{from } X\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right). \text{ Moreover, } r\restriction_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\Vdash \mathrm{lh}\left(t^r_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}\right)>n^*,\\ &\text{and if it decides positively, then there exists a bounded subset}\\ &A\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\subseteq h\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right) \text{ for which } r\restriction_{\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}}\Vdash \text{ the } \left(n^*+1\right)\text{-th}\\ &\text{element of } t^r_{h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})} \text{ belongs to } A\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\} \end{aligned}$$

根据定理 4.13，存在更大的生成元集 $\beta'_1,\ldots,\beta'_s$，并且对于每个 $\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle$，都存在一个条件 $p(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle)$，使得对于 W 中的一个 ξ-集合，

$$\begin{aligned} &p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)}\Vdash\\ &p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\setminus\mu_{\alpha_k}(\xi)\in\\ &e\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \end{aligned}$$

and–

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\in G$$

我们先证明，对于 W 中的一个 ξ-集合，

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)}$$

决定了——

$$\mathrm{lh}\left(\begin{array}{c} p\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\\ t\\ h\left(\xi,\theta_{f_{\beta'_1}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta'_s}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\end{array}\right)\leq n^*$$

事实上，反设不然。令 $A^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 为 $h(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的有界子集，它由所有这样的序数组成：这些序数被 $p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的某个扩张强制属于 $\check{A}(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})\restriction_{\nu_k}$（只要 $p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 强制 $t_h^{p(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})}{}_{\vec{\nu}\ (\xi,\vec{\eta},)}$ 的长度大于 n^*）。那么，在 $M[j_W(G)]$，

$$\mu_\alpha\in k_\alpha\left(j_\alpha\left(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto A^*\left(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\right)\right)\left(\kappa,j_{0,\alpha}\left(\beta'_1\right),\ldots,j_{0,\alpha}\left(\beta'_s\right),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}\right)\right)$$

但这就产生了矛盾，因为 $j_\alpha(\langle\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}\rangle\mapsto A^*(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu}))(\kappa,j_{0,\ \alpha}(\beta'_1)\ldots,j_{0,\ \alpha}(\beta'_s)\ \mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k})$ 是 μ_α 的有界子集。

因此，我们可以假设——

$$p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\restriction_{\mu_{\alpha_k}(\xi)}$$

强迫着——

$$\mathrm{lh}\begin{pmatrix} p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \\ t \\ h\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)},\ldots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)},\mu_{\alpha_1}(\xi),\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right) \end{pmatrix}\leq n^*$$

现在记 $p^*=\left[\xi\mapsto p\left(\xi,\theta_{f_{\beta_1'}(\xi)}\ \cdots,\theta_{f_{\beta_s'}(\xi)}\ \mu_{\alpha_1}(\xi)\ldots,\mu_{\alpha_k}(\xi)\right)\right]_W$。那么 $p^*\restriction_{k_\alpha(\mu_\alpha)}$ 强制 $\mu_\alpha\in\underset{\sim}{A}^{p^*}_{k_\alpha(\mu_\alpha)}$。根据集合 $e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的定义，集合 $\underset{\sim}{A}^{p^*}_{k_\alpha(\mu_\alpha)}$ 被强制为与 $k_\alpha(X)$ 不相交或包含于其中。由于 $k_\alpha(X)\in j_W(\delta\mapsto U_\delta)(k_\alpha(\mu_\alpha))$，它不可能与之不相交（同样根据 $e(\xi,\vec{\eta},\vec{\nu})$ 的定义）。因此 $\mu_\alpha\in k_\alpha(X)$，从而 $X\in U_{\mu_\alpha}$，正如所求。 □。

最后，我们来论证 $j_{\kappa^*}=j_W\restriction_V$。回想 $\kappa^*=i(\kappa)$，并注意到 $\kappa^*=\sup\{\mu_\alpha:\alpha<\kappa^*\}$。

引理 4.21 $M=M_{\kappa^*}$, $j_W(\kappa)=i(\kappa)$ 和 $j_{\kappa^*}=j_W\restriction_V$。

注记 4.22 特别地，若 $i=j_U$（即 W是简单生成的），则 $j_W(\kappa)=j_U(\kappa)$。另一方面，也可能 $j_U(\kappa)<i(\kappa)$，此时 $j_W(\kappa)>j_U(\kappa)$。

证明。仿照 $k_\alpha\colon\ M_\alpha\to M$，定义嵌入 $k_{\kappa^*}\colon\ M_{\kappa^*}\to M$如下:

$$\begin{aligned}&k_{\kappa^*}\left(j_{\kappa^*}(f)\left(\kappa,j_{0,\kappa^*}(\beta_1),\ldots,j_{0,\kappa^*}(\beta_l),\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_k}\right)\right)=\\&j_W(f)\left(\kappa,\theta_{\left[f_{\beta_1}(\xi)\right]_W},\ldots,\theta_{\left[f_{\beta_l}(\xi)\right]_W},\mu_{\alpha_1},\ldots,\mu_{\alpha_m}\right)\end{aligned}$$

对于 i和 $\alpha_1<\ldots<\alpha_m<\kappa^*$的每个 $f\in V$, $\beta_1,\ldots,\beta_l$生成元。显然，k_{κ^*}的临界点 $\geq\kappa^*$。只需证明 k_{κ^*} 是恒等函数。

设 τ 是一个序数，且 $f\in V\,[G]$ 是一个函数，使得 $[f]_W=\tau$。由 P_κ 满足 κ-链条件可知，存在 $F\in V$，使得对于每个 $\xi<\kappa$， $f(\xi)\in F(\xi)$ 且 $|F(\xi)|<\kappa$。因此，在 $M\,[j_W(G)]$,

$$\tau=[f]_W\in[F]_W=k_{\kappa^*}\left(j_{\kappa^*}(F)(\kappa)\right)$$

But–

$$|j_{\kappa^*}(F)(\kappa)|<j_{\kappa^*}(\kappa)=\kappa^*\leq\mathrm{crit}\left(k_{\kappa^*}\right)$$

因此 $\eta\in$ 像 (k_{κ^*})，如所需。 □

5 进一步方向与未决问题

第 4 节的结果很可能可以推广到更广泛的 Prikry 型强迫概念。首先可以考虑单元素 Prikry 强迫，以及使用非正规超滤子的 Prikry 强迫。对于前者，似乎只需稍作修改即可应用本文的论证。后者则需要更多工作，因为 $[id]$ 不再是 κ ，而且可能会出现额外的生成元。另一个例子是基于 extender 的 Prikry 强迫。由于这些强迫中的 Cohen 部分，似乎需要一些新思路。

下面陈述一些未决问题。

问题 5.1 除了 1.1 中给出的方法之外，是否还有其他方式可以生成 W 在 $V[G]$ 上的正规超滤子?

设 $W \in V[G]$ 是 κ上的正规测度。假设 $\neg o^{\P}$ （甚至不存在带有 Woodin 基数的内模型），并研究超幂的闭性，似乎可以论证应当存在N 具有 1.1 中类型的对象（见小节 3.2）。因此，我们可以扩展上述问题，询问 W 是否必须由嵌入 $i\colon\ V \to N$ 按照第 2 节中的方式生成。

问题 5.2 $V[G]$上的非正规 κ–完备超滤子有哪些可能性?

回顾一下，给定 $i\colon\ V \to N$ 以及由其按照定理 1.1 生成的测度 W，假设 $\leq^*_{Q_\alpha}=\leq_{Q_\alpha}$ 对 $\alpha \in \Delta$ 的一个尾段成立，就足以保证 $N = M$ （其中M是 Ult（$V[G]$，W）的基模型）。

问题 5。 3 假设对于无界多个 $\alpha < \kappa$, $\leq_\alpha \neq \leq^*_\alpha$。那么 $M \neq N$ 吗?

问题 5.4 对 Q_α's 有哪些确切条件可以确保 $M = N$?

在第 3 节中，我们研究了使 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$ 成立的充分必要条件。在命题 3.1 中，我们证明了，在假设 κ 是基数 $\alpha < \kappa$ 的极限且这些基数全都是 κ-强的条件下，存在定义在 κ 上并扩张 U 的测度 $U \in \mathcal{K}$ 和 $W \in \mathcal{K}[G]$，使得 $j_W(\kappa) > j_U(\kappa)$。

问题 5.5 假设 κ 是 κ-强基数的极限，真的有必要吗?

问题 5.6 在定理 4.7 和 4.8 中，我们能否省去迭代中所用正规测度在 $P = P_\kappa$ 以下 κ 是简单生成的这一假设？这种改变会如何影响$j_W \restriction_V$ 的结构?

参考文献

[1] Omer Ben-Neria. 在 0 以下的核心模型上进行强迫 Magidor 迭代。《数学逻辑档案》，53(3-4):367–384，2014。[2] Omer Ben-Neria. 关于 Prikry 强迫的 Magidor 迭代的 Mathias 判据。2021。[3] Moti Gitik. 关于可测基数上的非极小 p点。《数学逻辑年刊》，20(3):269–288，1981。[4] Moti Gitik. 关于违反连续统假设的可测基数。《纯粹与应用逻辑年刊》，63(3)，1993。[5] Moti Gitik. Prikry 型强迫。载于《集合论手册》，第 1351–1447 页。施普林格，2010。[6] Moti Gitik 和 Eyal Kaplan. 关于从泛型扩张到基模型的超滤子限制。《符号逻辑杂志》，第 1–31 页，2021。[7] Moti Gitik 和 Eyal Kaplan. Prikry 强迫的非平稳支撑迭代，以及超幂嵌入到基模型的限制。《纯粹与应用逻辑年刊》，174(1):103164，2023。[8] Moti Gitik 和 William J Mitchell. 扩张子的不可分辨序列与奇异基数假设。《纯粹与应用逻辑年刊》，82(3):273–316，1996。[9] Eyal Kaplan. Magidor 迭代与超幂到基模型的限制。《以色列数学杂志》，即将出版。[10] Kenneth Kunen 和 Jeff B Paris. 布尔扩张与可测基数。《数学逻辑年刊》，2(4):359–377，1971。[11] William J Mitchell. 测度序列的核心模型。I. 载于《剑桥哲学学会数学学报》，第 95 卷，第 229–260 页。剑桥大学出版社，1984。[12] William J Mitchell. 内模型理论入门。载于《集合论手册》，第 1449–1495 页。施普林格，2009。[13] Ralf Schindler. 核心模型的迭代。《符号逻辑杂志》，第 241–251 页，2006。