arXiv:2301.12455v1 [gr-qc] 29 Jan 2023

通过多路因果结构研究离散时空中的公理化量子场论：以纠缠熵为例

Jonathan Gorard*[1, 2]和 Julia Dannemann-Freitag†[3]

[1]卡迪夫大学，卡迪夫，英国

[2]剑桥大学，剑桥，英国

[3]伦敦帝国学院，伦敦，英国

2023年1月31日

摘要

因果集和 Wolfram 模型方法都允许为量子场构造离散量子引力中的显式协变纠缠熵概念。在因果集情形下，这一概念由一种构造给出（该构造归功于 Sorkin和Johnston）：利用因果集费曼传播子和泡利-约当函数，为高斯标量场构造二点关联函数，并据此进行特征分解，从而计算纠缠熵。在 Wolfram 模型情形下，该概念则通过分支图上的 Fubini-Study 度量给出，其张量积结构由有限维希尔伯特空间的张量积结构以函子方式继承而来。在这两种情形中，相关纠缠熵最自然地定义在扩展的时空区域上（因此具有显式协变性），这不同于大多数连续量子场论中通常定义在单个类空超曲面上的、一般不具备协变性的纠缠熵。本文展示了如何在多路因果图上严格构造自由无质量标量场的公理化场论（满足相应的玻色对易关系）：多路因果图是一种足够一般的组合结构，能够将因果集和 Wolfram 模型演化都作为特殊情形涵盖其中。我们进一步通过数值计算表明，对于一大类 Wolfram模型演化规则，使用 Sorkin-Johnston 方法和分支图方法计算得到的纠缠熵之间存在单调关系。

*gorardj@cardiff.ac.uk, jg865@cantab.ac.uk

†jad318@ic.ac.uk

我们还利用 Cocchiarella 等人近期提出的一种几何纠缠单调量，证明了这一单调关系的一个特殊情形。所得构造并非平凡，因为任意 Wolfram 模型规则的演化通常不会产生整数维因果图，因此必须对因果集上的标量场格林函数（以及由此得到的费曼传播子）的定义进行解析延拓，以适应非整数维情形。最后，我们提出了将本文发展的方法推广到更一般的时空几何、以超图形式表示的离散类空超曲面/柯西曲面，以及涉及高阶关联函数的完全相互作用非高斯标量场理论的潜在拓展方向。

1 引言

正如混合量子系统的冯·诺依曼熵可被视为量化该系统偏离由本征态构成的纯叠加态的程度（类比于经典统计力学中的吉布斯熵），多体量子系统的纠缠熵也可被视为量化该系统偏离完全可分张量积态的程度（或者等价地，量化该态的张量积结构偏离纯粹笛卡尔结构的程度）。具体而言，一对纠缠子系统的纠缠熵可通过对其中一个子系统取偏迹，再计算另一个子系统对应的约化密度矩阵的标准冯·诺依曼熵来得到[1][2]。在量子引力理论中，自然可以认为，整个时空的量子态由大量较小的量子态通过张量积构成，而这些较小的量子态分别对应于各个时空子区域；这种张量积结构的本质，以及如何将较小时空区域的量子态“粘合”在一起的规则，仍在很大程度上是个谜（事实上，可以认为，关于张量积组合结构的问题正是量子引力之谜的核心）。因此，同样自然的问题是：在这样的理论中，如何计算时空本身的纠缠熵，从而确定单个时空子区域与时空其余部分之间的纠缠程度[3][4]。在连续统量子引力理论中（实际上，即便是在连续弯曲时空中的常规量子场论中），这种纠缠熵背后有着非常直接且引人入胜的物理直觉：它量化了由于背景时空的几何结构而导致量子信息表面上“丢失”的程度（例如，只要允许场论的 n点关联同时涉及位于视界两侧的点，黑洞事件视界、宇宙事件视界等就可能使某些量子自由度无法被观测到）[5]。

另一方面，因果集理论和 Wolfram 模型都是离散量子引力模型的例子。因果集理论将时空表示为偏序集[6][7]，，其偏序关系在某种适当的连续极限下决定洛伦兹流形的共形结构[8][9] （因此，根据霍金、金和麦卡锡的经典定理，以及后来戴维·马拉门特的定理，也决定时空中连续类时曲线的完整拓扑[10][11]）；因果集子集的基数则决定连续时空中相应子区域的体积。Wolfram 模型也将时空表示为偏序集（称为因果图，因为它通常表示为有向无环图）[12][13][14][15] ，并具有与因果集相同的极限性质，

但其偏序由超图重写系统中抽象重写的因果相互作用决定。事实上，因果图的传递约简恰好对应于相应因果集的哈斯图。由此，Wolfram 模型可被视为赋予因果集理论（除此之外，它主要是一种运动学形式体系）明确的算法动力学[16][17][18]。然而，Wolfram 模型演化所具有的数学结构严格多于因果集，因为它还包含超图的时间序列（对应于一系列类空超曲面，表示爱因斯坦场方程从柯西初始数据演化的过程；该序列取决于超图重写顺序的选择，而在连续情形中，这对应于全局规范条件的选择[19]），以及多路因果结构（它编码了 Wolfram 模型演化本质上具有非确定性这一事实，因为不存在规范的重写顺序选择，因此也不存在首选规范）。由此得到的多路系统有效地参数化了 Wolfram 模型的所有可能演化历史；它所包含的分支图也表现出某些量子力学性质（尤其是，它配备了张量积结构，且可证明该结构满足伴随对称紧闭幺半范畴的公理，因而构成量子力学范畴论的恰当基础[20][21]）。这一特性已在先前利用 Coecke 和 Duncan 的 ZX演算形式体系研究量子电路[22][23] 以及广义多路超图重写[24]的工作中得到了充分应用。

与连续表述相比，离散时空表述在计算时空纠缠熵方面具有若干关键优势。首先，引力自由度构成可数集合，这可能让我们能够非常直接地运用统计力学直觉，理解与特定时空区域相关的熵究竟意味着什么；这种理解完全建立在组合学之上，也与玻尔兹曼最初“微观态与宏观态”的思想十分契合。具体而言，如果用（例如）因果图来表示时空的底层离散结构，那么我们可以设想，直接计算与给定连续时空几何相容的不同（非同构）因果图的数量的对数，并以此作为时空熵的基本定义。事实上，可以将本文所呈现的结果视为一个规模更大、目标更宏伟的研究计划的一部分；该计划旨在确定，关于引力微观态和宏观态的这一颇具吸引力的直觉，能否被严格地数学化。较为确切地说，连续时空上的量子场论中，纠缠熵的所有标准定义都有一个共同的问题：存在令人不快的紫外发散。例如，定义在黑洞几何上的标量场论通常会在事件视界周围区域出现无穷多个高频

模态，因此，计算视界两侧标量场区域之间的纠缠熵将无法得到良好定义。然而，离散量子引力模型（如因果集理论）中存在有限的底层离散尺度，这会以类似格点规范理论中格点正则化的方式，为量子场论施加自然的紫外截断，从而使理论不存在紫外发散，所得纠缠熵也具有合理意义，无须构造显式的紫外完备化。此外，连续量子场论中的熵传统上用密度矩阵 $\rho(\Sigma)$来表述，该矩阵对应于局域在特定类空超曲面 Σ上的场。这显然违背了广义协变原理的精神，甚至可能违背其字面要求；更实际地说，人们猜想，许多量子场（尤其是在量子引力背景下出现的量子场）都过于奇异，无法以这种方式有意义地嵌入低维超曲面。随后，为使纠缠熵有限而必需的紫外截断，便是相对于这些超曲面定义的；对于因果集理论这类内禀非局域的形式体系而言，这种做法无法实现，因为其中根本无法构造此类局域化（不过，在更一般的 Wolfram 模型演化情形中，若规范选择适当，或许可以构造局域于类空超曲面的形式，正如我们随后将讨论的那样）。这一局限最终促使 Sorkin 引入了一个显然协变的时空熵定义，其中包括将定义在扩展时空区域上的纠缠熵作为特例；这种做法直接类似于 Peierls 引入基于时空对易子和超前/推迟格林函数[26] 的量子场论洛伦兹不变表述[25] （事实上，Sorkin 的构造明确使用了所谓的“佩尔斯括号”，更常见的名称是泡利-约当函数[27]）。因此，这种表面上的“局限”源于因果集理论内禀的时空非局域性，却也确保了紫外有限的纠缠熵概念具有自然定义，且必然是显然协变的；这与连续情形形成鲜明对照。

在因果集情形中，可以先利用 Dowker和Glaser[28]给出的试探形式，为撒点于平坦整数维时空中的因果集构造离散达朗贝尔算子（其作用相当于连续情形下的克莱因-戈尔登算子）。运用 Sorkin[29], 提出的方法，这一构造随后可以扩展到撒点于任意曲（整数维）洛伦兹流形的黎曼正规邻域中的因果集；之后可以将所得的达朗贝尔算子求逆，从而为有质量自由（高斯）标量场推导出离散的超前和推迟格林函数；而在一般（连续）情形下，进行此类求逆需要引入某些

傅里叶分析方法。正如 Johnston[30], 所示，这些超前和推迟格林函数随后可用于构造离散传播子，特别是离散费曼传播子[31], 。一种极为优雅的构造（称为“跳跃与停留”形式主义[32]）使连续量子场论中路径积分的“路径求和”方法与因果集量子场论中传播子的“链求和”/“路径求和”方法之间直观的对应关系显而易见。离散的（且显式协变的）佩尔斯括号/Pauli-Jordan算子，即推迟格林函数与超前格林函数之差，现在可以进行特征分解，并自然地分为正、负特征值对（更确切地说，这是对 Pauli-Jordan算子的虚部变体进行特征分解）；在连续情形中，这对应于将克莱因-戈尔登方程解的模分解为正、负频率类别。这种特征分解在离散和连续两种情形下都定义了一种特定的真空态，称为$Sorkin\text{-}Johnston$[33] （或 SJ）真空态；相对于该真空态，只考虑特征谱的正部分，便可定义二点关联函数（或“维特曼”函数）。对于自由（高斯）标量场，这个维特曼函数足以完全确定所得量子场论的结构。随后可完全通过离散维特曼算子与 Pauli-Jordan算子的广义特征值问题来定义 Sorkin 时空纠缠熵，不过，为了复现纠缠熵预期的“面积”标度律，而非因果集模型中这类模型似乎更自然呈现的“体积”律[34]，必须截断特征谱。另一方面，描述一般 Wolfram 模型规则演化的多路系统，在满足某些规范条件的前提下，可以分解为一个时间序列，其中包含称为“分支图”的组合结构；每个分支图实际上代表每个时刻本征态的张量积结构。在存在适当连续极限的情况下，分支图上的离散度量会收敛到射影希尔伯特空间上的 Fubini-Study 度量；当其限制在纯态上时，该度量便化为量子信息论中衡量纯态纠缠的标准度量——量子 Bures 度量[35]。表面看来，这一定义似乎破坏了广义协变性；然而，通过转而考虑因果多路系统（以及因果分支图），仍可重新引入显式协变性。在这类系统中，每个顶点对应的不是超图的瞬时状态（即单个类空超曲面），而是一个完整的因果图（即扩展时空区域的完整因果历史）。本文的核心目标是探究这两种看似不同的、针对离散时空的协变纠缠熵定义之间的对应关系。

在第2节中，我们首先回顾平直整数维时空中离散达朗贝尔算子的标准 Dowker-Glaser 假设，概述如何将这些算子推广至更一般弯曲时空的黎曼正规邻域，并说明如何通过傅里叶分析推导整数维中的克莱因-戈尔登方程相应解（以及相应的超前和推迟格林函数）。我们还介绍 Johnston 的“跳跃与停留”形式主义如何用于对因果集链／路径求和，从而推导出一种直观性很强的（无质量）因果集传播子形式；并再次展示如何通过针对因果图的 Ollivier-Ricci 曲率构造，将这一分析推广至离散时空中更一般的黎曼正规邻域[36][37]。然而，对于通过算法构造的因果集（例如经由 Wolfram 模型演化生成的因果集），无法保证其极限因果图具有整数维数。正如我们在第3节中所示，因此有必要将第2节推导出的无质量因果集格林函数各项贡献作为复参数d的亚纯函数进行“解析延拓”，并将其解释为时空维数的解析延拓（这一过程与量子场论中费曼积分的维数正规化直接类似，后者由 ’t Hooft 和 Veltman[38]发展）。在此过程中，我们重述任意因果图的豪斯多夫维数的一般定义，并论证，与因果集的其他标准维数估计量（例如（广义）Myrheim-Meyer 估计量[39][40]）相比，它更适合量化算法生成的因果集的极限维数。我们还说明，这种对无质量格林函数的“解析延拓”的唯一性可由 Carlson 定理直接得出。在第4节中，我们概述任意（玻色／对称）福克空间上作用的一族自由玻色标量场算子必须满足的公理，并说明如何利用前几节推导出的因果集超前和推迟格林函数构造协变的佩尔斯括号／Pauli-Jordan 算子，再通过它们的特征分解引入 Sorkin-Johnston／SJ 真空态及相应的 Wightman／二点关联函数。由此得到的因果集场算子可证明满足上述公理，并可用于构造典型代数量子场论的大部分数学工具体系，包括费曼传播子和产生与湮灭算符。我们展示如何利用由此得到的代数量子场论，通过基于 Sorkin 技术的归纳构造，在具有可数自由度的时空上建立严格的纠缠熵概念。我们将所得构造应用于 2000 个随机生成的因果集（将其撒布在 $1{+}1$维闵可夫斯基空间的菱形区域中），以数值方式验证这一构造，并证明我们重现了

此前由 Sorkin 和 Yazdi[34], 得到的预期空间“面积”定律和“体积”定律，具体取决于我们是否对离散 Pauli 的谱施加必要的截断

-Jordan 算子

。在第 5 节中，我们展示了如何修改 Wol- fram 模型/超图重写系统中基于分支图上的 Fubini-Study 度量的纠缠熵的传统非协变定义，从而得到一个基于因果多路系统 的显式协变扩展（由此得到的分支图，其组成部分本征态对应的并非传统情形中的类空超曲面的瞬时状态，而是扩展时空区域的状态）。我们证明，所得分支度量满足时空纠缠单调量应具备的预期公理（尤其是，它在局域幺正变换下单调递减；完全可分态的度量值为零，而最大纠缠态则达到其最大值），事实上，它对应于 Cocchiarella 等人最近提出的有限维混合量子系统纠缠度量的一种特殊情形[41]。随后，我们给出大量数值证据，表明对于通过 Wolfram 模型演化生成的一大类算法因果集，经 SJ Wightman 函数计算得到的纠缠熵与经分支距离计算得到的纠缠单调量之间存在预期的单调关系。这表明，即使超出目前已有解析证明的上述情形，这种对应关系仍可能成立。最后，在第 6 节中，我们概述这些结果更广泛的意义，包括一种纯组合式时空纠缠熵定义的可能性，它可以推广本文研究的两种方法；以及为将因果集格林函数扩展到非整数维数而需要采用的“维数正规化”过程可能具有的解释。我们还讨论了未来的研究方向，包括将这些方法扩展到黑洞时空的情形（人们不禁猜想，根据 Sorkin 的方案，时空熵所遵循的空间“面积”定律，可能是 Beken- stein 和霍金的半经典黑洞熵定律的根本起源[42][43]）及其他非平凡几何；对 ER=EPR[44][45] 以及纠缠熵与时空几何之间其他猜想性关系（尤其是在离散时空中[46]）可能产生的影响；在 Wolfram 模型背景下，对超图（即离散类空超曲面）上的“局域化”纠缠熵进行可能的非协变重述；以及将本文所述主要为代数性的构造，可能改用数学上更优雅的函子量子场论语言加以重述（值得注意的是，一般而言，对任意多路系统的同伦[47][48] 和函子性[49] 描述似乎比纯代数描述更为自然）。尽管本文大部分内容聚焦于无质量自由标量场论，我们也初步探讨了如何将这些方法推广到有质量相互作用标量场论的情形

（在这种情形下，态不再是高斯态，维克定理不再适用，必须考虑高阶关联函数的贡献），例如通过微扰理论来处理。

请注意，本文中用于复现所述结果的全部代码均为开源代码，其中相当一部分已经有完整文档，并可通过*Wolfram* 函数库免费获取。例如，用于通过朴素或广义特征值方法计算因果集纠缠熵的函数 CausalGraphEntanglementEntropyNaive 和 CausalGraphEntanglementEntropyGeneralized，用于模拟任意 Wolfram 模型演化（及其相应的多路演化图、因果图、分支图等）的函数 MultiwaySystem，以及用于计算任意因果图的离散维数和曲率估计的函数 WolframHausdorffDimension、WolframRicciCurvatureScalar、WolframRicciCurvatureTensor 等，均以这种方式公开。用于执行许多相同功能的更新代码（尽管尚未有完整文档）则通过 GitHub 上的开源 GRAVITAS package 提供。关于本文的结构，第2节部分属于说明性内容，回顾了 Dowker-Glaser 构造和 Johnston 对因果集传播子的推导的核心要点，同时更明确地讨论了其基础性的傅里叶分析技术，并更完整地解释了如何通过 Ollivier-Ricci 曲率构造，将其推广到更一般的弯曲时空中的黎曼正规邻域。第3节中所提出的因果集格林函数向非整数维离散时空的独特“解析延拓”，据我们所知，是原创的。第4节中的大部分材料属于衍生内容，因为本节主要关注：利用 Johnston 提出的代数场论和特征分解方法，将我们的算法实现与 Sorkin 和 Yazdi 先前针对撒点于 $1+1$维闵可夫斯基空间菱形区域中的因果集所得的结果进行验证。然而，在此过程中，我们给出了离散时空纠缠熵的定义；据我们目前所能查到的文献，该定义在数学上（以及计算上）比其他地方的任何定义都更加明确。就我们所知，第5节的全部内容均为原创，因为它建立在关于因果多路系统 形式体系的既有工作之上，从而在任意 Wolfram 模型系统中给出时空纠缠熵的显式协变定义；并通过数学分析与明确的数值模拟相结合，表明所得定义与 Sorkin-Johnston 方法所产生的离散时空中的纠缠熵概念具有单调关系（至少对于算法生成的因果集而言）。

2 整数维时空中的标量场格林函数

回顾一下，如果因果集 $\mathcal{C}$ 配备了自由（实）标量场 ϕ： $\mathcal{C} \to \mathbb{R}$，那么，对于通过将泊松撒点置于二维平直（闵可夫斯基）时空中生成的因果集，其离散达朗贝尔算子 $B^{(2)}$ $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^{1,\ 1}$ 由 Sorkin[29] 和 Henson[50] 给出为：

$$B^{(2)}\phi\left(e\right) = \frac{1}{l^2}\left[-2\phi\left(e\right) + 4\left(\sum_{e' \in L_0(e)} \phi\left(e'\right) - 2\sum_{e' \in L_1(e)} \phi\left(e'\right) + \sum_{e' \in L_2(e)} \phi\left(e'\right)\right)\right], \tag{1}$$

后来，Benincasa 和 Dowker 将其推广到四维平直（闵可夫斯基）时空中，形式如下：

$$B^{(4)}\phi\left(e\right) = \frac{1}{l^2}\left[-\frac{4}{\sqrt{6}}\phi\left(e\right) + \frac{4}{\sqrt{6}}\left(\sum_{e' \in L_0(e)} \phi\left(e'\right) - 9\sum_{e' \in L_1(e)} \phi\left(e'\right) + 16\sum_{e' \in L_2(e)} \phi\left(e'\right) - 8\sum_{e' \in L_3(e)} \phi\left(e'\right)\right)\right], \tag{2}$$

其中， l 表示喷洒因果集 $\mathcal{C}$ 的特征离散化尺度（或“晶格间距”），例如，对于撒点密度为 ρ_c 、维数为 d 的因果集，该尺度可由 $\rho_c = l^{-d}$ 给出；而求和所涉及的“层”集合 L_k（e）对应于给定事件 $e \in \mathcal{C}$ 的因果过去中的 k 个最近邻集合：

$$L_k\left(e\right) = \left\{e' \prec e : n\left[e, e'\right] = k\right\}, \tag{3}$$

其中， $n\left[p, q\right]$ 与离散亚历山德罗夫区间 $\mathbf{I}\left[p, q\right]$（即及时空序区间）的基数相关，相差一个加法常数：

$$n\left[p, q\right] = \left|\mathbf{I}\left[p, q\right]\right| - 2, \qquad \text{where} \qquad \mathbf{I}\left[p, q\right] = \left\{r \in \mathcal{C} : q \prec r \prec p\right\}. \tag{4}$$

撒点密度 ρ_c 实际上决定了位于体积为 v 的时空区域内的因果集元素数量 n 的期望值，即 $\langle \hat{n} \rangle = \rho_c v$；这是因为喷洒过程本身是通过执行泊松点过程实现的，在该过程中，因果集元素 n 位于

体积为 v 的时空区域内的概率被精确定义为：

$$P_v(n) = \frac{(\rho_c v)^n}{n!} \exp(-\rho_c v); \tag{5}$$

随后，按照连续流形中的偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 将各元素两两连接。图 1 展示了一个因果集示例：通过在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域内对 20 个点进行泊松撒点而生成。图 2 展示了如何在一个因果集中计算离散达朗贝尔算子 $B^{(d)}$；该因果集通过在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域内对 100 个点进行泊松撒点而构建。根据 Dowker和Glaser[28]，可以采用以下试探形式：

$$B^{(d)}\phi(e) = \frac{1}{l^2}\left(\alpha_d \phi(e) + \beta_d \sum_{i=0}^{n_d-1} C_i^{(d)} \sum_{y \in L_i(e)} \phi(y)\right), \tag{6}$$

该形式可用于为更一般的平直（闵可夫斯基）时空 $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 构造离散达朗贝尔算子 $B^{(d)}$，其维数 d 为任意整数；其中常数 α_d，β_d 和 $C_i^{(d)}$（对于 $i = 0,\ \ldots,\ n_d - 1$）尚未确定，初始系数 $C_0^{(d)} = 1$ 固定，而 n_d 表示求和所涵盖的 k 最近邻层总数。

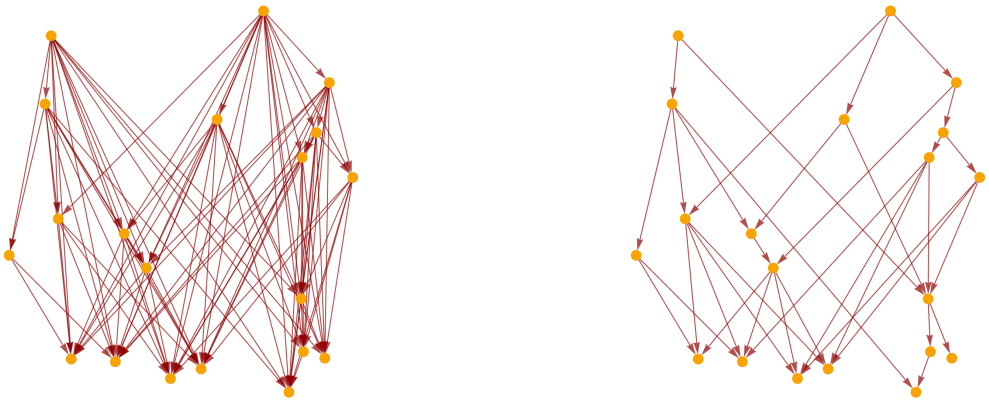

图 1：左图是在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域上，将因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 关联的所有 20 对（均匀撒点）点连接起来生成的有向图。右图为同一因果偏序图的传递约简（即哈斯图）。

事实上，我们可以将这些构造推广到任意曲率洛伦兹流形（$\mathcal{M}$，g）中点 p 的任意黎曼正规邻域 U_p，方法是采用 Sorkin[29]，的方法，引入一个“介观”（中间）长度尺度参数 $l_k > l$，从而“抑制”微观

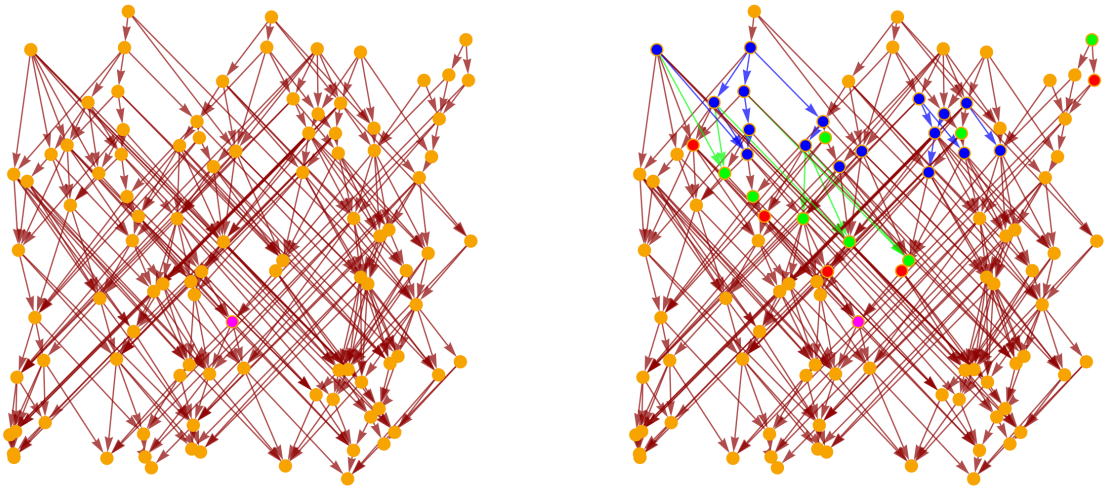

图 2：左图展示了通过连接矩形区域内满足因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 的所有点对所生成有向图的传递约简（即哈斯图）。这些点均匀随机散布在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空中，共有 100 个。图中以洋红色标出计算离散达朗贝尔算子的点。右图以红、绿、蓝色分别标出"层集"L_0、L_1 和 L_2，即 0 最近邻、1 最近邻和 2 最近邻；标量场 ϕ 的值将在这些层集上求和。

达朗贝尔算子 $B^{(d)}\phi(x)$ 中的涨落，进而得到一个"平滑化"的离散算子 B_k，其期望值 $\left\langle \hat{B}_k^{(d)}\phi(x) \right\rangle$ 可通过以下时空体积积分计算，该积分在元素 $x \in \mathcal{C}$ 的因果过去 $J^-(x)$ 上求取：

$$\left\langle \hat{B}_k^{(d)}\phi(x) \right\rangle = \alpha_d l_k^{-2}\phi(x) + \beta_d l_k^{-(d+2)} \int_{J^-(x)} \sqrt{-g(y)}\phi(y) \sum_{i=0}^{n_d-1} C_i^{(d)} \frac{\left(\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}(y,x]\right) l_k^{-d}\right)^{i-2}}{\Gamma(i-1)} \exp\left(-\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}[y,x]\right) l_k^{-d}\right) d^d y, \quad (7)$$

其中，$\mathrm{Vol}(\mathbf{I}[x,y])$ 表示因果区间 $\mathbf{I}[x,y]$ 的体积。这里假设流形 $(\mathcal{M},g)$ 上的标量场 $\phi: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 具有紧支撑。作为一个说明性示例，考虑 $d=4$ 情形；此时，我们可以引入如下形式的"平滑"函数 $f(n,\epsilon)$：

$$f(n,\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \left[1 - \frac{9\varepsilon n}{1-\varepsilon} + \frac{8\varepsilon^2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)(1-\varepsilon)^2} - \frac{4\varepsilon^3\Gamma(n+1)}{3\Gamma(n-2)(1-\varepsilon^3)}\right], \quad (8)$$

其中，$\varepsilon = \left(\frac{l}{l_k}\right)^4$ 是一个常数参数，用于量化因果集中非局域性的程度。函数 f 可以自然地推广到 d 维情形 f_d，如下所示：

$$f_d\left(n,\varepsilon\right)=\left(1-\varepsilon\right)^n\sum_{i=0}^{n_d}C_i^{(d)}\binom{n}{i-1}\left(\frac{\varepsilon}{1-\epsilon}\right)^{i-1};\tag{9}$$

直观而言，函数 f_d 所执行的"涂抹"操作，是通过交替取符号，对标量场 ϕ 在 n_d k 层最近邻上进行采样（例如，在 $d=4$ 情形下为四层），且每层的深度都约等于特征介观尺度长度 l_k；如图 3 所示，该图展示了 $f(n,\varepsilon)$ 在 $d=4$ 情形下的结果。用涂抹函数表示时，离散达朗贝尔算子 B_k 的期望值 $\left\langle \hat{B}_k^{(4)}\phi(x)\right\rangle$ 可直接写为：

$$\left\langle \hat{B}_k^{(4)}\phi\left(x\right)\right\rangle=\frac{4}{\sqrt{6}l_k^2}\left[-\phi\left(x\right)+\varepsilon\sum_{y\prec x}f\left(n\left[x,y\right]+2,\varepsilon\right)\phi\left(y\right)\right],\tag{10}$$

其中 $n\left[x,y\right]$ 与离散时空区间的基数有关，如上所述。更明确地说，假设存在非零时空曲率， $d=2$ 和 $d=4$ 情形下的期望值可写成对因果过去进行时空体积积分的形式：

$$\left\langle \hat{B}_k^{(2)}\phi\left(x\right)\right\rangle=\frac{2}{l_k^2}\left[-\phi\left(x\right)+\frac{2}{l_k^2}\int_{y\in J^-(x)}\sqrt{-g}\exp\left(-\xi_2\right)\left(1-2\xi_2+\frac{1}{2}\xi_2^2\right)\phi\left(y\right)d^2y\right],\tag{11}$$

and:

$$\left\langle \hat{B}_k^{(4)}\phi\left(x\right)\right\rangle=\frac{4}{\sqrt{6}l_k^2}\left[-\phi\left(x\right)+\frac{1}{l_k^2}\int_{y\in J^-(x)}\sqrt{-g}\exp\left(-\xi_4\right)\left(1-9\xi_4+8\xi_4^2-\frac{4}{3}\xi_4^3\right)\phi\left(y\right)d^4y\right],\tag{12}$$

分别地，参数 ξ_2 和 ξ_4 根据因果区间 $\mathbf{I}\left[x,y\right]$ 的二维和四维体积定义如下：

$$\xi_2=\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}\left[x,y\right]\right)l_k^{-2},\qquad\text{and}\qquad\xi_4=\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}\left[x,y\right]\right)l_k^{-4},\tag{13}$$

分别。

正如我们接下来将要说明的那样，构造离散格林函数的方法与构造连续格林函数的方法如出一辙：只需对连续达朗贝尔算子 $\Box$求逆，即可得到 $\Box^{-1}$，从而构造出克莱因-戈尔登方程的连续格林函数 G ；同样，对离散（平滑后的）达朗贝尔算子 B_k 求逆，即可得到 B_k^{-1} ，从而构造出离散格林函数。回顾一下，在连续情形下，达朗贝尔算子$\Box$ 可写成偏导数算子之和（假设采用自然单位制 $\hbar=c=1$）：

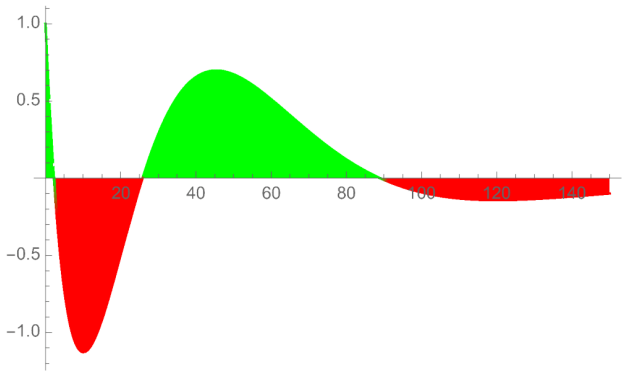

图 3：四维“涂抹”函数 $f(n,\ \varepsilon)$ 在区间 $\varepsilon = 0.05$ over the interval$0 \leq n \leq 150$ 上的行为，清楚地显示出四个交替符号区域（两个正值区域以绿色突出显示，两个负值区域以红色突出显示）；在计算离散达朗贝尔算子的期望值时，四层便在这些区域上“涂抹开来”。

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \left(x^0\right)^2} - \frac{\partial^2}{\partial \left(x^1\right)^2} - \frac{\partial^2}{\partial \left(x^2\right)^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial \left(x^{d-1}\right)^2}, \tag{14}$$

而它又通过克莱因-戈尔登方程与质量为 m的 d维大质量格林函数 $G_m^{(d)}$（$\mathbf{x}$）相关联：

$$\left(\square + m^2\right) G_m^{(d)}\left(\mathbf{x}\right) = \delta^d\left(\mathbf{x}\right), \tag{15}$$

其中 δ^d 表示 d 维空间中的狄拉克δ函数。为简单起见，我们首先考虑平直时空 $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,\ d-1}$ 的情形（其中具有平移不变性，因此 $G_m^{(d)}$(**y** −**x**) 可视为事件 **x**与 **y** 之间的跃迁振幅），之后再适时将分析推广到更一般的时空。许多初步分析将沿用 Johnston 的博士论文[32]中概述的技巧。采用如下定义的修正傅里叶变换和逆傅里叶变换运算（假设一般的多元函数 f(**x**) 及其经傅里叶-˜变换后的对应函数 f(**p**）：

$$\tilde{f}\left(\mathbf{p}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\mathbf{x}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} d^d\mathbf{x}, \qquad \text{and} \qquad f\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p}\tilde{f}\left(\mathbf{p}\right) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} d^d\mathbf{p}, \tag{16}$$

其中点积为**p** ·**x**：

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = p_0 x^0 - p_1 x^1 - p_2 x^2 - \cdots - p_{d-1} x^{d-1}, \tag{17}$$

we 可以轻松得到如下大质量克莱因-戈尔登方程的解 n:

$$\tilde{G}_m^{(d)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - \cdots - p_{d-1}^2 - m^2}, \tag{18}$$

使得:

$$G_m^{(d)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - \cdots - p_{d-1}^2 - m^2}d^d\mathbf{p}. \tag{19}$$

被积函数中出现的极点，即位于:

$$p_0 = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{d-1}^2 + m^2}, \tag{20}$$

只需选择一条积分路径，使格林函数 $G_m^{(d)}$ 仅在事件 $\mathbf{x}$ 的未来光锥内不为零，即可避开这些极点，从而通过以下（分布意义下的）极限得到 超前传播子$(G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x})$:

$$(G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(p_0+i\epsilon)^2 - p_1^2 - p_2^2 - \cdots - p_{d-1}^2 - m^2}d^d\mathbf{p}\right]; \tag{21}$$

对偶地，通过限制格林函数 $G_m^{(d)}$ 仅在事件 $\mathbf{x}$ 的过去光锥内不为零，可得到相应的 超前传播子 $(G_A)_m^{(d)}(\mathbf{x})$。

对于一般情形 d ，可使用初等傅里叶分析技术直接计算此积分（一般数学理论可见 Gel'fand 和 Shilov[52] 以及 Egorov 和 Shubin[53], 的著作；Bogoliubov 和 Shirkov[54] 以及 de Jager[55]则对四维／物理情形进行了严格分析）；例如， $d=1$、 $d=2$、 $d=3$ 和 $d=4$ 这些情形会得到如下形式的推迟格林函数:

$$(G_R)_m^{(1)}(x) = \theta(x)\frac{\sin(mx)}{m}, \qquad (G_R)_m^{(2)}(\mathbf{x}) = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\frac{1}{2}J_0(m\tau), \tag{22}$$

$$(G_R)_m^{(3)}(\mathbf{x}) = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(m\tau)}{\tau}, \qquad (G_R)_m^{(4)}(\mathbf{x}) = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\left(\frac{1}{2\pi}\delta\left(\tau^2\right) - \frac{m}{4\pi}\frac{J_1(m\tau)}{\tau}\right), \tag{23}$$

分别地，其中 $\theta(\alpha)$ 表示通常的海维赛德阶跃函数:

$$\theta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha \geq 0, \\ 0, & \text{if } \alpha < 0, \end{cases} \tag{24}$$

τ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的固有时长度:

$$\tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \cdots - (x^{d-1})^2}, \tag{25}$$

$J_\alpha(x)$ 是 α 阶第一类贝塞尔函数，传统上通过其在 $x = 0$ 附近的级数展开来定义:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}, \tag{26}$$

而 δ 是常规的（一维）狄拉克δ函数。作为傅里叶分析过程的一个说明性示例，考虑熟悉的 $d = 4$ 情形（按照 de Jager[55] 的方法）。我们首先注意到，在这种情况下，上文定义的修正傅里叶变换算子，以下记为 F^*:

$$F^*[f(\mathbf{x})] = \tilde{f}(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} d^d\mathbf{x}, \tag{27}$$

与标准傅里叶变换算子 F:

$$F[f(\mathbf{p})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{p}) e^{i(x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)} d^d\mathbf{p}, \tag{28}$$

之间满足恒等式:

$$FF^*[f(x_0, x_1, x_2, x_3)] = (2\pi)^4 f(-x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{29}$$

该恒等式对所有可积函数以及 所有分布均成立。将修正傅里叶变换算子 F^* 应用于原始克莱因-戈尔登方程:

$$\left(\Box + m^2\right) G_m^{(4)}(\mathbf{x}) = \delta^4(\mathbf{x}), \tag{30}$$

我们得到:

$$\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right) \tilde{G}_m^{(4)}(\mathbf{p}) = 1. \tag{31}$$

遵循 de Jager 的做法, 由于修改后的傅里叶算子 F^* 及其逆算子（F^*）$^{-1}$ 必定保持 -

洛伦兹不变性，因此只需确定该方程所有满足洛伦兹不变性的解，然后将结果变换回位形空间。

该非齐次方程的一个满足洛伦兹不变性的特解 $\tilde{(G_p)}_m^{(4)}(\mathbf{p})$ 为：

$$\left(\tilde{G_p}\right)_m^{(4)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2 - m^2}, \tag{32}$$

其中，就目前而言，$\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right)^{-1}$ 是一个分布，其定义基于以下反常积分的柯西主值：

$$\left\langle \frac{1}{\mathbf{p}^2 - m^2}, \Phi(\mathbf{p}) \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{|\mathbf{p}^2 - m^2| > \epsilon} \frac{\tilde{\Phi}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^2 - m^2} d^d\mathbf{p} \right], \tag{33}$$

其中，$\Phi(\mathbf{p})$ 表示任意测试函数。另一方面，相应齐次方程的通解 $\tilde{(G_H)}_m^{(4)}(\mathbf{p})$ 为：

$$\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right) \left(\tilde{G_H}\right)_m^{(4)}(\mathbf{p}) = 0, \tag{34}$$

它严格位于双曲面 $\mathbf{p}^2 - m^2 = 0$ 上，表示为：

$$\left(\tilde{G_H}\right)_m^{(4)}(\mathbf{p}) = c_+ \delta_+\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right) + c_- \delta_-\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right), \tag{35}$$

其中，c_+ 和 c_- 是任意数值常数，而 $\delta_\pm\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right)$ 分别是在双曲面 $\mathbf{p}^2 - m^2 = 0$ 的上叶和下叶上定义的分布，其定义通过以下嵌套积分给出：

$$\left\langle \delta_\pm\left(\mathbf{p}^2 - m^2\right), \hat{\Phi}(\mathbf{p}) \right\rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + m^2}} \kappa^2 \hat{\Phi}\left(\kappa\omega_1, \kappa\omega_2, \kappa\omega_3, \pm\sqrt{\kappa^2 + m^2}\right) d\Omega d\kappa, \tag{36}$$

其中我们引入了参数 $\kappa = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$，并在（$p_1$，$p_2$，$p_3$）空间的单位球面 Ω 上进行积分（面测度为 $d\Omega$）。通过引入一个新函数 $\hat{\Phi}(\kappa, p_0)$，并将其定义为测试函数 $\hat{\Phi}(\mathbf{p})$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中半径为 κ 的球面上的平均值（相差一个加法常数），我们可以将这个嵌套积分重写为：

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+m^2}}\kappa^2\hat{\Phi}\left(\kappa\omega_1,\kappa\omega_2,\kappa\omega_3,\pm\sqrt{\kappa^2+m^2}\right)d\Omega d\kappa$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+m^2}}\kappa^2\bar{\hat{\Phi}}\left(\kappa,\pm\sqrt{\kappa^2+m^2}\right)d\kappa. \quad (37)$$

定义在双曲面两个叶上的两个分布 $\delta_{\pm}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)$ 之和，得到通常的狄拉克δ函数：

$$\delta\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)=\delta_{+}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)+\delta_{-}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right). \quad (38)$$

因此，将特解与一般齐次解相加，即可得到非齐次（经傅里叶变换的）克莱因-戈尔登方程的一般解：

$$\tilde{G}_m^{(4)}\left(\mathbf{p}\right)=\frac{1}{\mathbf{p}^2-m^2}+c_{+}\delta_{+}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)+c_{-}\delta_{-}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right), \quad (39)$$

因此，要在位形空间中求克莱因-戈尔登方程的一般解 $G_m^{(4)}(\mathbf{p})$，只需计算分布 $\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)^{-1}$ 和 $\delta_{\pm}\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)$的逆傅里叶变换 $(F^{*})^{-1}$。

我们还知道，根据前述关系：

$$FF^{*}\left[f\left(x_0,x_1,x_2,x_3\right)\right]=(2\pi)^4 f\left(-x_0,x_1,x_2,x_3\right), \quad (40)$$

计算逆修正傅里叶变换 $(F^{*})^{-1}$ 在形式上等价于先计算普通傅里叶变换 F，再应用（时间）坐标变换 $x_0\to -x_0$，最后将所得函数除以 $(2\pi)^4$。分布 $\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)^{-1}$ 的普通傅里叶变换为：

$$F\left[\frac{1}{\mathbf{p}^2-m^2}\right]=2\pi^2 im\left[\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2+0i}\right)}{\sqrt{-\tau^2+0i}}-\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2-0i}\right)}{\sqrt{-\tau^2-0i}}\right], \quad (41)$$

而对于通常的狄拉克δ分布 $\delta\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)$，其形式为：

$$F\left[\delta\left(\mathbf{p}^2-m^2\right)\right]=2\pi m\left[\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2+0i}\right)}{\sqrt{-\tau^2+0i}}+\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2-0i}\right)}{\sqrt{-\tau^2-0i}}\right], \quad (42)$$

其中，如前所述，$\tau^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$，而 $K_1(x)$ 对应于一个修正贝塞尔

第二类函数（1 阶），对于一般阶数 α 定义为:

$$K_{\alpha}\left(x\right)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}\left(x\right)-I_{\alpha}\left(x\right)}{\sin\left(\alpha\pi\right)},\tag{43}$$

其中 $I_{\alpha}(x)$ 是第一类修正贝塞尔函数（阶数为 α）：

$$I_{\alpha}\left(x\right)=i^{-\alpha}J_{\alpha}\left(ix\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma\left(m+\alpha+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.\tag{44}$$

此外，分布 $\delta_{\pm}\left(\mathbf{p}^{2}-m^{2}\right)$ 的普通傅里叶变换分别为

Mo :

$$\begin{aligned}F\left[\delta_{+}\left(\mathbf{p}^{2}-m^{2}\right)\right]=2i\pi^{2}\left[\delta_{+}\left(\tau^{2}\right)-\delta_{-}\left(\tau^{2}\right)\right]+2\pi m\theta\left(-\tau^{2}\right)\frac{K_{1}\left(m\sqrt{-\tau^{2}}\right)}{\sqrt{-\tau^{2}}}\\-i\pi^{2}m\theta\left(\tau^{2}\right)\left[\theta\left(x_{0}\right)\frac{H_{1}^{(1)}\left(m\sqrt{\tau^{2}}\right)}{\sqrt{\tau^{2}}}-\theta\left(-x_{0}\right)\frac{H_{1}^{(2)}\left(m\sqrt{\tau^{2}}\right)}{\sqrt{\tau^{2}}}\right],\end{aligned}\tag{45}$$

and:

$$\begin{aligned}F\left[\delta_{-}\left(\mathbf{p}^{2}-m^{2}\right)\right]=-2i\pi^{2}\left[\delta_{+}\left(\tau^{2}\right)-\delta_{-}\left(\tau^{2}\right)\right]+2\pi m\theta\left(-\tau^{2}\right)\frac{K_{1}\left(m\sqrt{-\tau^{2}}\right)}{\sqrt{-\tau^{2}}}\\+i\pi^{2}m\theta\left(\tau^{2}\right)\left[\theta\left(x_{0}\right)\frac{H_{1}^{(2)}\left(m\sqrt{\tau^{2}}\right)}{\sqrt{\tau^{2}}}-\theta\left(-x_{0}\right)\frac{H_{1}^{(1)}\left(m\sqrt{\tau^{2}}\right)}{\sqrt{\tau^{2}}}\right],\end{aligned}\tag{46}$$

分别地，上式中的 $H_{1}^{(1)}(x)$ 和 $H_{1}^{(2)}(x)$ 对应于第一类和第二类汉克尔函数（阶数为 1），其一般阶数 α 的定义为:

$$H_{\alpha}^{(1)}\left(x\right)=J_{\alpha}\left(x\right)+iY_{\alpha}\left(x\right)=\frac{J_{-\alpha}\left(x\right)-e^{-\alpha\pi i}J_{\alpha}\left(x\right)}{i\sin\left(\alpha\pi\right)},\tag{47}$$

and:

$$H_{\alpha}^{(2)}\left(x\right)=J_{\alpha}\left(x\right)-iY_{\alpha}\left(x\right)=\frac{J_{-\alpha}\left(x\right)-e^{\alpha\pi i}J_{\alpha}\left(x\right)}{-i\sin\left(\alpha\pi\right)},\tag{48}$$

分别地，其中 $Y_{\alpha}(x)$ 是第二类贝塞尔函数（阶数为 α）：

$$Y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \tag{49}$$

至此，我们终于可以完成 $(G_R)_m^{(4)}(\mathbf{x})$ 的计算：首先设定常数 $c_+=c_-=\pi i$ 和 $c_+=c_-=-\pi i$，从而得到因果格林函数 $(G_C)_m^{(4)}(\mathbf{x})$：

$$(G_C)_m^{(4)}(\mathbf{x})=\frac{\delta(\tau^2)}{4\pi}-\frac{m}{8\pi}\theta(\tau^2)\frac{H_1^{(2)}\left(m\sqrt{\tau^2}\right)}{\sqrt{\tau^2}}+\frac{im}{4\pi^2}\theta(-\tau^2)\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2}\right)}{\sqrt{-\tau^2}}, \tag{50}$$

以及反因果格林函数 $(G_{AC})_m^{(4)}(\mathbf{x})$：

$$(G_{AC})_m^{(4)}(\mathbf{x})=\frac{\delta(\tau^2)}{4\pi}-\frac{m}{8\pi}\theta(\tau^2)\frac{H_1^{(1)}\left(m\sqrt{\tau^2}\right)}{\sqrt{\tau^2}}-\frac{im}{4\pi^2}\theta(-\tau^2)\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2}\right)}{\sqrt{-\tau^2}}, \tag{51}$$

分别如此。反之，将常数设为 $c_+=-c_-=\pi i$ 和 $c_==-c_-=-\pi i$，则可得到推迟格林函数 $(G_R)_m^{(4)}(\mathbf{x})$：

$$(G_R)_m^{(4)}(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\delta_+(\tau^2)-\frac{m}{4\pi}\theta(\tau^2)\frac{J_1\left(m\sqrt{\tau^2}\right)}{\sqrt{\tau^2}}, & \text{if } x_0>0,\\ 0, & \text{if } x_0<0,\end{cases} \tag{52}$$

此外，为求完整起见，还给出超前格林函数 $(G_A)_m^{(4)}(\mathbf{x})$：

$$(G_A)_m^{(4)}(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \text{if } x_0>0,\\ \frac{1}{2\pi}\delta_-(\tau^2)-\frac{m}{4\pi}\theta(\tau^2)\frac{J_1\left(m\sqrt{\tau^2}\right)}{\sqrt{\tau^2}}, & \text{if } x_0<0,\end{cases} \tag{53}$$

分别如此，正如所需。一般而言，超前传播子和推迟传播子的区别仅在于所施加的边界条件不同（也就是说，它们被约束为仅在未来光锥或仅在过去光锥中非零），因此二者可通过以下恒等式联系起来：

$$(G_A)_m^{(d)}(\mathbf{x})=(G_R)_m^{(d)}(-\mathbf{x}). \tag{54}$$

对于 d 的更一般取值，也可以用类似的方法进行计算（至少对于无质量传播子的情况是如此）；根据 d 为偶数还是奇数，只需稍作修改，具体如下所述。

无质量推迟格林函数 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 只需通过取有质量函数 $(G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 的 $m\to 0$极限即可构造出来，得到（对于此前考察的 $d=1$、 $d=2$、 $d=3$ 和 $d=4$ 情形）：

$$(G_R)_0^{(1)}(x) = \lim_{m\to 0}\left[(G_R)_m^{(1)}(x)\right] = \theta(x)\,x, \qquad (G_R)_0^{(2)}(\mathbf{x}) = \lim_{m\to 0}\left[(G_R)_m^{(2)}(\mathbf{x})\right] = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\frac{1}{2}, \quad (55)$$

$$(G_R)_0^{(3)}(\mathbf{x}) = \lim_{m\to 0}\left[(G_R)_m^{(3)}(\mathbf{x})\right] = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\frac{1}{2\pi\tau}, \quad (56)$$

and:

$$(G_R)_0^{(4)}(\mathbf{x}) = \lim_{m\to 0}\left[(G_R)_m^{(4)}(\mathbf{x})\right] = \theta\left(x^0\right)\theta\left(\tau^2\right)\frac{1}{2\pi}\delta\left(\tau^2\right), \quad (57)$$

分别。如上文所示，对于任意时空维数 d，每个无质量推迟格林函数都可表示为任意阶分布导数的乘积：当 d 为偶数时，取 $\delta\left(\tau^2\right)$；当 d 为奇数时，取 $\frac{1}{\tau}$。而 $\delta\left(\tau^2\right)$ 的任意阶分布导数本身又可完全写成 $\delta\left(\tau^2\right)$ 和 $\frac{1}{\tau}$ 的乘积。因此，将分析推广到任意（整数）时空维数，只需确定这些乘积中各权重的适当取值。

因此，今后我们将采用 Johnston 的“跳跃与停留”形式主义[32]，在因果集上构造并计算离散路径积分；在这种形式主义中，人们可以自由选择将路径积分计算为对链 或对路径求和。回顾一下，长度为 k 的链只是一列形如 $e_1 \prec e_2 \prec \cdots \prec e_{k-1} \prec e_k$的因果集元素，其中 k任意；而长度为 k的路径 则是一列由链接关联起来的因果集元素，其形式为 $e_1 \prec^* e_2 \prec^* \cdots \prec^* e_{k-1} \prec^* e_k$，其中 $\prec^*$表示链接关系，并且因果集 $\mathcal{C}$ 中的链接 $e \prec^* e'$ 是由两个元素 $e,\ e' \in \mathcal{C}$ 组成的一对，满足$e \prec e'$，且：

$$\nexists e'' \in \mathcal{C}, \qquad \text{such that} \qquad e'' \neq e, e'' \neq e' \text{ and } e \prec e'' \prec e', \quad (58)$$

即链接 $e \prec^* e'$ 恰好构成了 $\mathcal{C}$对应哈斯图中的有向边。作为初步近似，我们假设每次“跳跃”（即从一个元素到另一个元素的每次遍历）都对应一个恒定振幅 a，而每次“停留”（即链/路径中到达的每个中间元素）也对应一个恒定振幅 b，因此，长度为 n 的链或路径的总振幅 $a^n b^{n-1}$ 由乘积给出（因为沿这条链/路径恰好会有 n 次“跳跃”和$n-1$次“停留”）。为了定义基数为 $|\mathcal{C}| = p$的有限因果集 $\mathcal{C}$ 的离散传播子，必须引入一个 $p \times p$矩阵 $\Phi(x,\ y)$，它与以下对象之一相关： $p \times p$ 因果

矩阵 $C_0(x,\ y)$，作用于 $\mathcal{C}$ 上（针对对链求和的情形）：

$$\Phi(x,y)=aC_0(x,y),\qquad \text{with}\qquad C_0(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\prec x,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{59}$$

或者在 $\mathcal{C}$ 上的 $p\times p$ 链接矩阵 $L_0(x,\ y)$（对于对路径求和的情况）：

$$\Phi(x,y)=aL_0(x,y),\qquad \text{with}\qquad L_0(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } y\prec^{*} x,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{60}$$

因此，对于连接因果集元素 v_x 和 v_y 的任意长度的链/路径，总振幅由一般形式的 $p\times p$ 离散传播子矩阵 $K(x,\ y)$ 给出：

$$K(x,y)=\Phi(x,y)+b\Phi^2(x,y)+b^2\Phi^3(x,y)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b^{n-1}\Phi^n(x,y),\tag{61}$$

其中，该求和中的第 n 项对应于长度为 n 的链/路径对总振幅的单独贡献；例如，对于 $n=2$ 贡献，有如下项：

$$b\Phi^2(x,y)=\sum_{z=1}^{p}b\Phi(x,z)\,\Phi(z,y),\tag{62}$$

表示对所有中间因果集元素 v_z 求和，得到连接元素 v_x 与元素 v_z 以及元素 v_z 与元素 v_y 的所有长度为 2 的链/路径的单独振幅之和。Johnston 提供了一个很有启发性的示例，展示了如何计算连接含 6 个元素的因果集中元素 v_1 和 v_5 的链的总振幅，并得到离散传播子矩阵：

$$K(1,5)=a+3a^2b+a^3b^2,\tag{63}$$

如图 4 所示（请注意，Johnston 的博士论文中给出的这一示例在表述上有一处小错误，我们在此予以更正）。离散传播子 $K(x,\ y)$ 表达式中的求和必定会截断，因为根据假设，因果集 $\mathcal{C}$ 的基数 p有限，因此每个元素 $x\in\mathcal{C}$的因果未来都只有有限多个元素，从而我们可以通过以下简单的矩阵求逆，以实用的方式计算 $K(x,\ y)$：

$$K(x,y)=\Phi(x,y)\left(I(x,y)-b\Phi(x,y)\right)^{-1},\tag{64}$$

对于单位矩阵 $p \times p\,(\,I\,,\ y)$。

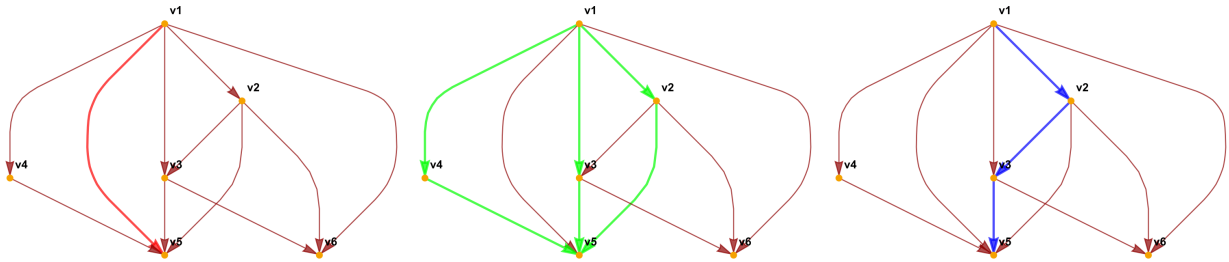

图 4：利用离散传播子矩阵 $K\,(1{,}5)$，计算含 6 个元素的因果集中连接元素 v_1 和 v_5 的链的总振幅。左侧是长度为 1 的 1 条链（红色突出显示）对振幅的贡献，为 a。中间是长度为 2 的 3 条链（绿色突出显示）对振幅的贡献，为 $3a^2b$。右侧是长度为 3 的 1 条链（蓝色突出显示）对振幅的贡献，为 a^3b^2。

为了将离散路径积分表示为对链的求和，我们必须首先介绍一种计算因果集 $\mathcal{C}$中分隔元素 x 和 y、长度为 n 的链的数量（或丰度） C_n 的方法：

$$C_n\,(x,y) = \left|\{(x,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},y):\right.$$
$$\left. x,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},y \in \mathcal{C} \text{ such that } x \prec z_1 \prec z_2 \prec \cdots \prec z_{n-1} \prec y\}\right|. \quad (65)$$

遵循 Meyer[40],，将其视为随机变量 $\hat{}\,C_n\,(x,\ y)$ 时，我们可以直接利用因果矩阵 $C_0\,(x,\ y)$ 的连续统类比，计算长度为 1 的链的期望值$\left\langle \hat{}\,C_1\,(x,\ y)\right\rangle$。具体而言，该类比是定义在 d 维平直（闵可夫斯基）时空 $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,\ d-1}$ 上的函数 $C\,(x,\ y)$（连续统上的因果偏序关系记为 $\prec_{\mathcal{M}}$）：

$$C\,(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \prec_{\mathcal{M}} y, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \text{such that} \qquad \left\langle \hat{C}_1\,(x,y) \right\rangle = C\,(x,y)\,. \quad (66)$$

利用这一构造，链的期望丰度 $\left\langle \hat{}\,C_n\,(x,\ y)\right\rangle$，无论长度如何 $n > 1$，都可通过嵌套积分计算；该积分在连续时空中的以下嵌套亚历山德罗夫区间序列 $\mathbf{A}$ 上求值：

$$\mathcal{M} \supset \mathbf{A}\,[x,y] \supset \left(J^+\,(z_1) \cap \mathbf{A}\,[x,y]\right) \supset \left(J^+\,(z_2) \cap \mathbf{A}\,[x,y]\right) \supset \cdots \supset \left(J^+\,(z_{n-2}) \cap \mathbf{A}\,[x,y]\right), \quad (67)$$

即:

$$\left\langle \hat{C}_n(x,y) \right\rangle = \rho^{n-1} \int_{\mathbf{A}[x,y]} \int_{J^+(z_1)\cap\mathbf{A}[x,y]} \int_{J^+(z_2)\cap\mathbf{A}[x,y]} \cdots \int_{J^+(z_{n-2})\cap\mathbf{A}[x,y]} C(z_{n-1},y)\, C(z_{n-2},z_{n-1}) \cdots C(x,z_1)\, d^d z_{n-1} \cdots d^d z_2 d^d z_1, \quad (68)$$

其闭式解为:

$$\left\langle \hat{C}_n(x,y) \right\rangle = C(x,y) \frac{(\rho \mathrm{Vol}(\mathbf{A}[y,x]))^{n-1}}{n-1} \left(\frac{\Gamma(d+1)}{2} \right)^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left((n-1)\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{nd}{2}\right)}. \quad (69)$$

根据 Rideout 和 Zohren[56],，体积因子贡献 Vol (**A** $[y,x]$) 可通过对分隔事件 x 和 y的固有时区间 τ 积分来确定:

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{A}[y,x]) = 2\int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{Vol}(S_{d-1}(t))\, dt, \quad (70)$$

这里，我们用 $S_{d-1}(t)$ 表示半径为 t的 $(d-1)$ 维球体的体积，因此该积分的计算结果为:

$$2\int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{Vol}(S_{d-1}(t))\, dt = 2\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{\pi^{\frac{d}{2}} r^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} dt = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{2^{d-1} d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \tau^d. \quad (71)$$

由此，通过对链求和得到的离散传播子变体 $K_C(x,y)$ 的期望值 $\left\langle \hat{K}_C(x,y) \right\rangle$（当将其视为随机变量 $K_C($ $x,y)$ 时），现在可以写成链的丰度的期望值之和:

$$\left\langle \hat{K}_C(x,y) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a^n b^{n-1} \left\langle \hat{C}_n(x,y) \right\rangle, \quad (72)$$

从而满足优美的积分方程:

$$\left\langle \hat{K}_C(x,y) \right\rangle = aC(x,y) + ab\rho \int_{-\infty}^{\infty} C(z,y) \left\langle \hat{K}_C(x,z) \right\rangle d^d z. \quad (73)$$

作为一个例子，说明傅里叶分析技术与这种一般的对链求和思想结合后，如何再次以相对直接的方式得到离散（无质量）传播子矩阵 $(K_C)_0(x,\ y)$ 的显式形式，我们来计算离散

传播子 $(K_C)_0^{(2)}(x,\ y)$，它位于 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空中[32]。由于上文给出的离散传播子的期望值 $\left\langle \hat{K}_C(x,\ y)\right\rangle$ 所满足的积分方程具有卷积的形式，其傅里叶变换 $\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle$ 可直接化为乘积：

$$\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle = a\tilde{C}(\mathbf{p}) + ab\rho\tilde{C}(\mathbf{p})\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle = \frac{a\tilde{C}(\mathbf{p})}{1-ab\rho\tilde{C}(\mathbf{p})}, \tag{74}$$

此外，由于因果矩阵 $C(x,\ y)$ 的连续统类比与无质量推迟格林函数 $(G_R)_0^{(2)}(x,\ y)$ 直接相差一个因子 2：

$$C(x,y) = 2(G_R)_0^{(2)}(x,y), \tag{75}$$

因此，对有质量格林函数 $G_m^{(2)}(\mathbf{x})$ 进行上述傅里叶变换可得：

$$\tilde{G}_m^{(2)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{p_0^2 - p_1^2 - m^2}, \tag{76}$$

并令 $m=0$，则傅里叶变换 $C(\mathbf{p})$ 可简洁地表示为：

$$\tilde{C}(\mathbf{p}) = -\frac{2}{(p_0+i\epsilon)^2 - p_1^2}. \tag{77}$$

代入期望值 $\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle$ 的表达式后，化简可得：

$$\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle = \frac{-\frac{2a}{(p_0+i\epsilon)^2-p_1^2}}{1+\frac{2ab\rho}{(p_0+i\epsilon)^2-p_1^2}} = -\frac{2a}{(p_0+i\epsilon)^2 - p_1^2 + 2ab\rho}, \tag{78}$$

这意味着，为使（傅里叶变换后的）离散传播子 $\left\langle \tilde{\hat{K}}_C(\mathbf{p})\right\rangle$ 的期望值与已知的（傅里叶变换后的）连续体有质量格林函数 $\tilde{G}_m^{(2)}(\mathbf{p})$ 相符，振幅 a 和 b 必须分别为 $a=\frac{1}{2}$ 和 $b=-\frac{m^2}{\rho}$。由此得到在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空中无质量离散传播子的显式形式：

$$(K_C)_0^{(2)}(x,y) = \frac{1}{2}C_0(x,y), \tag{79}$$

其中，$C_0(x,y)$ 按照惯例表示因果集 $\mathcal{C}$ 上的因果矩阵。

同样地，要计算对路径 的离散路径积分，就必须引入一种技术，用于计算因果

设置 $\mathcal{C}$:

$$P_n(x,y) = |\{(x, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, y):$$
$$x, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, y \in \mathcal{C} \text{ such that } x \prec^* z_1 \prec^* z_2 \prec^* \cdots \prec^* z_{n-1} \prec^* y\}|. \quad (80)$$

与之前一样，我们沿用 Bombelli[57] 的方法，并将路径丰度视为随机变量 $\hat{P}_n(x,y)$，使得长度为 1 的路径的期望值 $\left\langle \hat{P}_1(x,y) \right\rangle$ 现在由链接矩阵 $L_0(x,y)$ 的连续统类比给出，即定义在 d 维平直（闵可夫斯基）时空上的函数 $P(x,y)$ $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,d-1}$ （与之前一样，连续统上的因果偏序关系记作 $\prec_{\mathcal{M}}$）：

$$P(x,y) = \begin{cases} e^{-\rho \mathrm{Vol}(\mathbf{I}[y,x])}, & \text{if } x \prec_{\mathcal{M}} y, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{such that} \quad \left\langle \hat{P}_1(x,y) \right\rangle = P(x,y). \quad (81)$$

与之前一样，任意长度 $n > 1$ 路径 $x \prec^* z_1 \prec^* z_2 \prec^* \cdots \prec^* z_{n-1} \prec^* y$ 的期望丰度 $\left\langle \hat{P}_n(x,y) \right\rangle$ 现在变为对通常的一系列亚历山德罗夫区间 $\mathbf{A}$所作的嵌套积分:

$$\mathcal{M} \supset \mathbf{A}[x,y] \supset \left(J^+(z_1) \cap \mathbf{A}[x,y]\right) \supset \left(J^+(z_2) \cap \mathbf{A}[x,y]\right) \supset \cdots \supset \left(J^+(z_{n-2}) \cap \mathbf{A}[x,y]\right), \quad (82)$$

i.e:

$$\left\langle \hat{P}_n(x,y) \right\rangle = \rho^{n-1} \int_{\mathbf{A}[x,y]} \int_{J^+(z_1)\cap\mathbf{A}[x,y]} \int_{J^+(z_2)\cap\mathbf{A}[x,y]} \cdots$$
$$\int_{J^+(z_{n-2})\cap\mathbf{A}[x,y]} P(z_{n-1}, y)\, P(z_{n-2}, z_{n-1}) \cdots P(x, z_1)\, d^d z_{n-1} \cdots d^d z_2 d^d z_1, \quad (83)$$

对于该问题，目前尚无已知的闭式解。然而，按照 Johnston[32]，的方法，我们使用已有的链丰度期望值闭式解 $\left\langle \hat{C}_n(x,\ y) \right\rangle$，即:

$$\left\langle \hat{C}_n(x,y) \right\rangle = C(x,y) \frac{(\rho \mathrm{Vol}(\mathbf{A}[y,x]))^{n-1}}{n-1} \left(\frac{\Gamma(d+1)}{2} \right)^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left((n-1)\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{nd}{2}\right)}, \quad (84)$$

为了将链接矩阵函数 $P(x,\ y)$ 的连续统类比展开为关于

链丰度函数 $\left\langle \hat{C}_n(x,\ y)\right\rangle$ 的期望值的形式幂级数，使用：

$$P(x,y)=C(x,y)\,e^{-\rho\mathrm{Vol}(\mathbf{I}[y,x])}=C(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\rho\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}[y,x]\right)\right)^{n}}{n!},\tag{85}$$

其中我们知道：

$$C(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\rho\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}[y,x]\right)\right)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\left\langle\hat{C}_{n+1}(x,y)\right\rangle}{(n-1)!\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{nd}{2}\right)\Gamma\left((n+1)\frac{d}{2}\right)}}.\tag{86}$$

由于单变量 x 的任意形式幂级数都可以通过以下规则进行指数运算：

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\qquad\text{with}\qquad c_0=a_0^n,\tag{87}$$

其中，新系数 c_m 由以下递推关系定义：

$$c_m=\frac{1}{ma_0}\sum_{k=1}^{m}(kn-m+k)\,a_kc_{n-k},\tag{88}$$

因此，我们可以利用链接矩阵函数 $P(x,\ y)$ 的连续统类比的形式幂级数展开，构造路径丰度 $\left\langle \hat{P}_n(x,\ y)\right\rangle$ 期望值的相应形式幂级数展开，如下所示：

$$\left\langle\hat{P}_n(x,y)\right\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}g_m\left\langle\hat{C}_{m+n}(x,y)\right\rangle,\qquad\text{with}\qquad g_0=1,\tag{89}$$

其中我们还知道：

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}g_m\left\langle\hat{C}_{m+n}(x,y)\right\rangle\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{m+n-1}\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^{m+n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left((m+n-1)\frac{d}{2}\right)\Gamma\left((m+n)\frac{d}{2}\right)}C(x,y)\left(\rho\mathrm{Vol}\left(\mathbf{I}[y,x]\right)\right)^{n+m-1},\end{aligned}\tag{90}$$

其中，新的系数 g_m 由递推关系定义：

$$g_m=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(k(n+1)-m\right)\frac{(-1)^{k}}{(k-1)!\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^{k-1}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{kd}{2}\right)\Gamma\left((k+1)\frac{d}{2}\right)}}g_{m-k}.\tag{91}$$

与前文所述的对链求和情形大致相同，对于通过对路径求和计算的离散传播子变体 $K_P(x,\ y)$，其期望值 $\left\langle \hat{}K_P(x,\ y)\right\rangle$（将其视为随机^变量 $K_P(x,\ y)$ 时）因此可写成路径丰度期望值之和：

$$\left\langle \hat{K_P}(x,y)\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a^n b^{n-1} \left\langle \hat{P}_n(x,y)\right\rangle, \tag{92}$$

满足一个类似的积分方程：

$$\left\langle \hat{K_P}(x,y)\right\rangle = aP(x,y) + ab\rho \int_{-\infty}^{\infty} P(z,y) \left\langle \hat{K_P}(x,z)\right\rangle d^d z. \tag{93}$$

先前概述的傅里叶分析技术也可与这种对路径求和 理念结合使用，从而得到离散（无质量）传播子矩阵 $(K_P)_0(x,y)$ 的显式形式。我们现在通过计算 $3+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空[32]中的离散传播子 $(K_P)_0^{(4)}(x,y)$ 来说明这一点。与链求和 情形一样，由于离散传播子的期望值 $\left\langle \hat{}K_P(x,y)\right\rangle$ 所满足的积分方程是一个卷积，其傅里叶变换 $\left\langle \tilde{}\hat{}K_P(\mathbf{p})\right\rangle$ 也可化为相同基本形式的乘积：

$$\left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p})\right\rangle = a\tilde{P}(\mathbf{p}) + ab\rho\tilde{P}(\mathbf{p}) \left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p})\right\rangle = \frac{a\tilde{P}(\mathbf{p})}{1-ab\rho\tilde{P}(\mathbf{p})}, \tag{94}$$

此外，由于我们知道，$3+1$ 维闵可夫斯基时空 $\mathbb{M}^4 = \mathbb{R}^{1,3}$ 中链接矩阵 $P(x,y)$ 的连续统类比所对应的体积贡献 $\mathrm{Vol}(\mathbf{I}[y,x])$ 可明确写为：

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{I}[y,x]) = \frac{\pi}{24}\tau_{xy}^4, \tag{95}$$

其中，τ_{xy} 按惯例表示事件 x 与事件 y之间的固有时距离，由此我们能够以一种更加具体的方式写出链接矩阵 $P(x,\ y)$ 的连续统类比：

$$P(x,y) = \begin{cases} e^{-\rho \mathrm{Vol}(\mathbf{I}[y,x])} = e^{-\frac{\pi}{24}\rho\tau_{xy}^4}, & \text{if } x \prec_{\mathcal{M}} y, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{96}$$

因此，对无限撒点密度 $(\rho \to \infty)$ 取（分布）极限，我们得到：

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\sqrt{\rho}P\left(x,y\right)\right]=\lim_{\rho\to\infty}\left[\begin{cases}f_{\rho}\left(\tau_{xy}^{2},\frac{1}{24}\right), & \text{if } x^{0}\leq y^{0},\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\right]=\begin{cases}\frac{\sqrt{24}}{2}\delta\left(\tau_{xy}^{2}\right), & \text{if } x\prec_{\mathcal{M}} y,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{97}$$

其中，对于 t 为方便记号，我们引入函数 $f_{\rho}\left(z,\ c\right)$，定义如下：

$$f_{\rho}\left(z,c\right)=\begin{cases}\sqrt{\rho}e^{-\pi c\rho z^{2}}, & \text{if } z\geq 0,\\ 0, & \text{if } z<0,\end{cases}\qquad\text{for some positive real constant}\qquad c\in\mathbb{R}^{+},\tag{98}$$

并利用了其（广义函数意义下的）极限为狄拉克δ函数 $\delta(z)$ 这一事实：

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[f_{\rho}\left(z,c\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{c}}\delta\left(z\right).\tag{99}$$

由此，我们可以运用以下定理[58] ，该定理涉及任意函数的傅里叶变换的极限

：

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\sqrt{\rho}P\left(\mathbf{p}\right)\right]=\lim_{\rho\to\infty}\left[f\left(\mathbf{p}\right)\right]\qquad\Longleftrightarrow\qquad\lim_{\rho\to\infty}\left[(\sqrt{\rho}\tilde{P}\left(\mathbf{p}\right))\right]=\lim_{\rho\to\infty}\left[\tilde{f}\left(\mathbf{p}\right)\right],\tag{100}$$

˜对于任意函数 $f\left(\mathbf{p}\right)$，其傅里叶变换为 $f\left(x,y\right)$，为了确立以下关系˜，即在无限喷洒密度极限下，链接矩阵的连续统类比 $P\left(\mathbf{p}\right)$（经傅里叶变换）与无质量推迟格林函数 $\left(\tilde{G_{R}}\right)_{0}^{(4)}\left(\mathbf{p}\right)$（经傅里叶变换）之间的关系：

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\sqrt{\rho}\tilde{P}\left(\mathbf{p}\right)\right]=2\pi\frac{\sqrt{24}}{2}\left(\tilde{G_{R}}\right)_{0}^{(4)}\left(\mathbf{p}\right)=-2\pi\sqrt{6}\frac{1}{\left(p_{0}+i\epsilon\right)^{2}-p_{1}-p_{2}-p_{3}},\tag{101}$$

因为先前推导出的 $3+1$ 维闵可夫斯基空间中无质量推迟格林函数的形式 $\left(G_{R}\right)_{0}^{(4)}\left(\mathbf{x}\right)$ 表明：

$$\left(G_{R}\right)_{0}^{(4)}\left(\mathbf{x}\right)=\theta\left(x^{0}\right)\theta\left(\tau_{xy}^{2}\right)\frac{1}{2\pi}\delta\left(\tau^{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\delta\left(\tau_{xy}^{2}\right), & \text{if } x\prec_{\mathcal{M}} y,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\tag{102}$$

此外，将 $m=0$ 代入有质量格林函数$G_{m}^{(4)}\left(\mathbf{x}\right)$）的傅里叶变换表达式中：

$$\tilde{G}_m^{(4)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2}, \tag{103}$$

因此，无质量推迟格林函数（G_R）$_0^{(4)}$ $(\mathbf{x})$ 的傅里叶变换可写为：

$$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(4)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\left(p_0 + i\epsilon\right)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}. \tag{104}$$

通过为常数振幅 a 和 b 引入试探形式 $a = A\sqrt{\rho}$ 和 $b = \frac{B}{\rho}$（其中包含一对额外常数 A–和 B，并假设它们与密度 ρ 无关），期望值 $\left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p}) \right\rangle$ 的前述表达式便变为：

$$\left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p}) \right\rangle = \frac{A\sqrt{\rho}\tilde{P}(\mathbf{p})}{1 - AB\sqrt{\rho}\tilde{P}(\mathbf{p})}, \tag{105}$$

因此，将此式与无限撒点密度极限下链接矩阵 $\sqrt{\rho}P(\mathbf{p})$ 的连续体对应物（经傅里叶变换并乘以密度）˜ 的表达式结合起来，经过化简可得：

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p}) \right\rangle\right] = \frac{-\frac{2\pi A\sqrt{6}}{(p_0+i\epsilon)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}}{1 + \frac{2\pi AB\sqrt{6}}{(p_0+i\epsilon)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}} = -\frac{2\pi A\sqrt{6}}{\left(p_0 + i\epsilon\right)^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + 2\pi AB\sqrt{6}}, \tag{106}$$

这意味着，为使离散传播子 $\left\langle \tilde{\hat{K}}_P(\mathbf{p}) \right\rangle$ 的期望值与已知的连续体有质量格林函数 $\tilde{G}_m^{(4)}(\mathbf{p})$（经傅里叶变换）的值相匹配，常数 A 和 B 必须分别取为 $2\pi A\sqrt{6} = 1$ 和 $B = -m^2$：

$$\tilde{G}_m^{(4)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2}, \tag{107}$$

在无限喷洒密度极限下。反过来，这意味着振幅 a 和 b 必须分别取为 $a = \sqrt{\rho}2\pi\sqrt{6}$ 和 $b = -\frac{m^2}{\rho}$，从而使我们能够推导出 $3+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空中无质量离散传播子的以下显式形式：

$$(K_P)_0^{(4)}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{6}}L_0(x, y), \tag{108}$$

其中，$L_0(x, y)$ 表示因果集 $\mathcal{C}$ 上通常的链接矩阵。

为简化起见，迄今为止所作的分析均假设时空是形如

form $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 的平直（闵可夫斯基）时空；然而，本节概述的数学方法具有足够的普适性，只需进行极少修改，便可扩展到通过在弯曲时空中撒点生成的因果集（如图 5 所示的 $1+1$ 维德西特时空情形），具体可沿用 Birrell and Davies[59] 和 Fulling[60] 的方法。首先，必须放宽平移不变性成立这一假设（因此，例如，不能再使用形如$G_m^{(d)}(\mathbf{y}\ -\mathbf{x})$ 的简单有质量格林函数来计算事件 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之间的跃迁振幅；而必须改用形如 $G_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的双参数函数）。更重要的是，有质量 d 维格林函数 $G_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 本身所满足的克莱因-戈登方程形式也必须修改，因此现在写作：

$$\left(\Box + m^2 + \zeta R\left(\mathbf{x}\right)\right) G_m^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) = \frac{\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right)}{\sqrt{g}}, \qquad \text{with} \qquad g = \sqrt{\det\left(g^{\mu\nu}\right)}, \tag{109}$$

其中 $\zeta \in \mathbb{R}$ 为某个实常数；$\Box$ 现在是达朗贝尔算子在任意弯曲时空中的推广，其定义基于该算子对任意标量场 $\phi(\mathbf{x})$ 的作用

$$\Box\phi\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left[g^{\mu\nu}\sqrt{g}\partial_\nu\phi\left(\mathbf{x}\right)\right], \tag{110}$$

其中 $R(\mathbf{x})$ 表示底层洛伦兹流形在点 $\mathbf{x}$ 处的里奇标量曲率。因此，要将平直时空中的离散（无质量）传播子构造推广至更一般的弯曲时空，剩下的就是引入一种系统方法，用于计算因果集 $\mathcal{C}$ 中元素 $x \in \mathcal{C}$ 的里奇标量曲率 $R(x)$。请注意，Sorkin[29]，以及 Benincasa 和 Dowker[51]，提出的形式体系，提供了一种或多或少同义反复的方法：在无限喷洒密度极限下，根据离散 d 维达朗贝尔算子 $B_k^{(d)}$ 对标量场 $\phi(x)$ 作用的期望值 $\left\langle\ \hat{}B_k^{(d)}\phi(x)\right\rangle$ 来计算 $R(x)$，即：

$$\lim_{\rho_c\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_c}}\left\langle\hat{B}_k^{(d)}\phi\left(x\right)\right\rangle\Big|_{\mathcal{W}_1}\right] = \Box\phi\left(x\right) - \frac{1}{2}R\left(x\right)\phi\left(x\right), \tag{111}$$

其中，我们选择将元素 x 的因果过去 $J^-(x)$ 划分为互不重叠的子区域 $\mathcal{W}_1$，

$\mathcal{W}_2$ 和 $\mathcal{W}_3$：

$$J^-\left(x\right) = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3, \qquad \text{such that} \qquad \left(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2\right) = \left(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_3\right) = \left(\mathcal{W}_2 \cap \mathcal{W}_3\right) = \varnothing, \tag{112}$$

其中， $\mathcal{W}_1$ 是事件 x的黎曼正规邻域， $\mathcal{W}_2$ 是过去区域边界 $\partial J^-(x)$ 的黎曼正规邻域（即“沿光锥向下”的区域，与原点保持一定距离），而 $\mathcal{W}_3$ 与过去区域边界 $\partial J^-(x)$ 保持一定距离（即“深层类时过去”区域）。

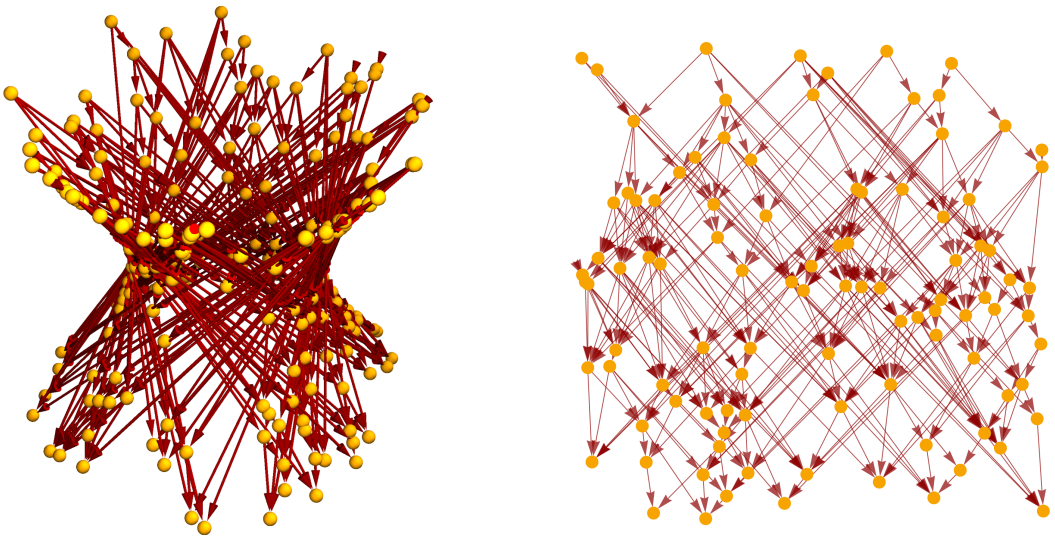

图 5：左侧为有向图的传递约简（即哈斯图）。该图由连接超曲面区域内、在因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$下相关的 200 个（均匀撒点的）点对生成；该区域位于嵌入 $2+1$ 维背景时空中的 $1+1$ 维德西特时空内。右侧为对比图：通过在 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域内均匀撒入 100 个点，生成类似的传递约简图。

然而，对于任意因果集 $\mathcal{C}$，计算离散里奇标量曲率[61] 的一种非平凡方法，是构造适用于任意（可能是离散的）度量测度空间（包括作为特殊情形的超图和因果图[37]）的*Ollivier-Ricci* 标量曲率[36][62][63] 。其出发点是关于里奇标量曲率 $R(p)$ 的标准几何直觉：在一个$\mathcal{M},g$维（伪）黎曼流形中的点$p\in\mathcal{M}$处， $R(p)$ 实际上量化了流形 $\mathcal{M}$ 中半径为 ε 的球 $B_\varepsilon(p)$ 的体积，与（平坦）欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中同半径球$B_\varepsilon(0)$的体积之间的差异：

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(B_\varepsilon\left(p\right)\subset\mathcal{M}\right)}{\mathrm{Vol}\left(B_\varepsilon\left(0\right)\subset\mathbb{R}^d\right)}=1-\frac{R\left(p\right)}{6\left(d+2\right)}\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^4\right),\tag{113}$$

在极限 $\varepsilon\to 0$ 下求值。等价地，里奇标量曲率 $R(p)$ 表示距离 δ 的差异：该距离是流形 $\mathcal{M}$ 中两个半径为 ε 的球 $B_\varepsilon(p)$ 和 $B_\varepsilon(q)$（分别以点 p 和 q 为中心）中心之间的距离，其中后者由前者经过平行移动得到；以及平均距离

W 球面上对应点之间：

$$W\left(B_{\varepsilon}\left(p\right),B_{\varepsilon}\left(q\right)\right)=\delta\left(1-\frac{\varepsilon^{2}}{2\left(d+2\right)}R\left(p\right)+O\left(\varepsilon^{3}+\varepsilon^{2}\delta\right)\right), \tag{114}$$

此时在极限 ε，$\delta\to 0$ 下求值，其中 $\delta=d(p,\ q)$ 表示球心之间的距离。对于一般的（波兰）度量测度空间 $(X,\ d)$，其配备了一个博雷尔 σ-代数以及一个随机游走 m，即一族形式如下的概率测度：

$$m=\left\{m_{x}:x\in X\right\}, \tag{115}$$

其中，每个 m_x 都具有有限一阶矩，且映射 $x\to m_x$ 是可测的，则不同点 $x,y\in X$ 之间的*Ollivier-Ricci* 标量曲率 $\kappa(x,y)$可定义为：

$$\kappa\left(x,y\right)=1-\frac{W_{1}\left(m_{x},m_{y}\right)}{d\left(x,y\right)}. \tag{116}$$

在上式中，$W_1(m_x,m_y)$表示概率测度 m_x 和m_y之间的*1-Wasserstein* 距离，即测度之间的最优输运距离：

$$W_{1}\left(m_{x},m_{y}\right)=\inf_{\epsilon\in\Pi\left(m_{x},m_{y}\right)}\left[\int_{(x,y)\in X\times Y}d\left(x,y\right)d\epsilon\left(x,y\right)\right], \tag{117}$$

其中，$\Pi(m_x,m_y)$是将随机游走投影到测度 m_x 和 m_y 上的耦合集合（即乘积空间 $X\times Y$ 上投影到测度 m_x 和 m_y的测度集合）。因此，实际上，我们将黎曼体积测度推广到任意概率测度，使得两个球面上点之间的平均距离推广为相应测度之间的*1-Wasserstein* 距离；由此，*Ollivier-Ricci*标量曲率 $\kappa(x,y)$量化了测度 m_x 和 m_y 之间的 *1-Wasserstein* 距离与 x 和 y 之间的普通度量距离之间的差异。因此，在特例中，若 (X,d)是一个（伪）黎曼流形 $(\mathcal{M},g)$，则*Ollivier-Ricci*标量曲率 $\kappa(x,y)$与通常的里奇标量曲率 $R(x,y)$相差一个乘法常数。

当度量空间（X，d）是离散的时，{v1-Wasserstein }距离定义中出现的积分相应地限制为离散求和，因此可以得到离散概率测度 m_x 和 m_y之间的离散（或多边缘）最优输运距离：

$$W_1(m_x, m_y) = \inf_{\mu_{x,y} \in \Pi(m_x, m_y)} \left[\sum_{(x',y') \in X \times X} d(x', y') \mu_{x,y}(x', y') \right], \tag{118}$$

其中，集合 $\Pi(m_x, m_y)$ 中的离散概率测度 $\mu_{x,y}$ 满足以下耦合条件：

$$\sum_{y' \in X} \mu_{x,y}(x', y') = \mu_x(x'), \qquad \text{and} \qquad \sum_{x' \in X} \mu_{x,y}(x', y') = \mu_y(y'). \tag{119}$$

从这里开始，有向图（因果集的哈斯图所表示的那类有向图）可视为有向超图 $H = (V, E)$的特殊情形，其中通常假设每条超边 $e \in E$ 表示顶点集 A 与 B 之间的一种方向关系（分别为尾集 和头集），但在此情形下，集合 A 和 B 的基数均恰好为 1。在一般情形下，定义在有向超图 $H = (V, E)$上的离散/多边缘*1*-瓦瑟斯坦 距离 $W_1(\mu_{A^{in}}, \mu_{B^{out}})$（针对离散概率测度$\mu_{A^{in}}$ 和 $\mu_{B^{out}}$）变为：

$$W_1(\mu_{A^{in}}, \mu_{B^{out}}) = \min_{u \in A^{in}(u \to A), v \in B^{out}(B \to v)} \left[\sum_{u \to A} \sum_{B \to v} d(u, v) \varepsilon(u, v) \right]. \tag{120}$$

这里，$\varepsilon(u, v)$表示顶点 u 与 v之间的耦合，因此，实质上是在满足以下耦合条件的所有耦合 ε 中，求离散测度 $\mu_{A^{in}}$ 和 $\mu_{B^{out}}$ 之间的最小值：

$$\sum_{u \to A} \varepsilon(u, v) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{y_j}(v), \qquad \text{and} \qquad \sum_{B \to v} \varepsilon(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{x_i}(u), \tag{121}$$

假设超边 e 具有以下一般形式：

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\} \to^e B = \{y_1, \ldots, y_m\}, \qquad \text{with} \qquad n, m \leq |V|, \tag{122}$$

离散度量 $d(u, v)$ 特别对应于在顶点 $u \in A^{in}(u \to A)$ 与 $v \in B^{out}(B \to v)$ 之间移动时所经过的有向超边数量。如果我们对距离度量 $d(u, v)$ 和耦合常数 $\varepsilon(u, v)$ 作出最简单的选择，使得所有距离/耦合均为对称的（即 $d(u, v) = d(v, u)$ 且 $\varepsilon(u, v) = \varepsilon(v, u)$），并令每条有向超边对应于距离 1（这等价于在连续流形上施加无挠/度量/列维-奇维塔联络），那么我们可以将超边上的 *Ollivier-Ricci* 标量曲率 $\kappa(e)$ 函数的形式明确写为：

$$\kappa\left(e\right)=1-W_{1}\left(\mu_{A^{in}},\mu_{B^{out}}\right),\tag{123}$$

其中，离散概率测度 $\mu_{A^{in}}$ 和 $\mu_{B^{out}}$ 满足以下耦合条件:

$$\mu_{A^{in}}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{x_i},\qquad\text{and}\qquad\mu_{B^{out}}=\sum_{j=1}^{m}\mu_{y_j},\tag{124}$$

或者更具体地说，有:

$$\forall 1\leq i\leq n,z\in V,\qquad\mu_{x_i}\left(z\right)=\begin{cases}0, & \text{if } z=x_i \text{ and } d_{x_i^{in}}\neq 0,\\ \frac{1}{n}, & \text{if } z=x_i \text{ and } d_{x_i^{in}}=0,\\ \sum\limits_{e':z\to x_i}\frac{1}{n\times d_{x_i^{in}}\times\left|\mathrm{Tail}(e')\right|}, & \text{if } z\neq x_i \text{ and } \exists e':z\to x_i,\\ 0, & \text{if } z\neq x_i \text{ and } \nexists e':z\to x_i,\end{cases}\tag{125}$$

and:

$$\forall 1\leq j\leq m,z\in V,\qquad\mu_{y_j}\left(z\right)=\begin{cases}0, & \text{if } z=y_j \text{ and } d_{y_j^{out}}\neq 0,\\ \frac{1}{m}, & \text{if } z=y_j \text{ and } d_{y_j^{out}}=0,\\ \sum\limits_{e':y_j\to z}\frac{1}{m\times d_{y_j^{out}}\times\left|\mathrm{Head}(e')\right|}, & \text{if } z\neq y_j \text{ and } \exists e':y_j\to z,\\ 0, & \text{if } z\neq y_j \text{ and } \nexists e':y_j\to z,\end{cases}\tag{126}$$

分别。在上文中，$d_{x_i^{in}}$表示包含给定顶点 $x_i\in A$（取自尾集 A）并将其作为相应头集元素的超边总数；同样，$d_{y_j^{out}}$表示包含给定顶点 $y_j\in B$（取自头集 B）并将其作为相应尾集元素的超边总数。

显然，与通常的黎曼（无向图）情形不同，在洛伦兹（有向图）情形中，必须考虑有向测地锥之间距离的差异，而不能只考虑测地球，但在其他所有方面，几何直觉都是相同的。图 6 和图 7 分别展示了如何计算奥利维耶–里奇标量曲率 κ，适用于极限趋于渐近平坦和渐近正曲率的 $1+1$ 维类洛伦兹流形结构的（有向）因果图。

如何通过超图替换规则以算法方式生成此类因果图，其具体细节将很快概述。然而，这些曲率估计算法（如前所述，为了能够构造出适用于表示一般弯曲时空的因果集的可靠离散格林函数，这些算法是必不可少的）通常要求预先知道因果集的极限维数。显然，对于通过向已知洛伦兹流形进行喷洒而生成的因果集，这并不是问题；但对于通过超图重写等算法程序生成的因果集，极限维数通常未知（而且往往极难预测）。在这种情况下，我们还需要一种可靠的算法来估计极限维数，正如下文将要讨论的。

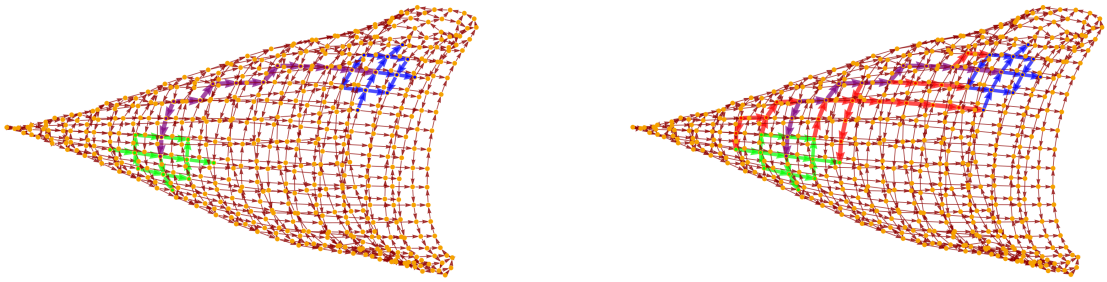

图6：左侧是在具有 a1 $+1$ 维类洛伦兹流形极限结构的渐近平坦（有向）因果图中，一对有限测地锥，如超图重写规则$\{\{x,y,y\},\{x,z,u\}\}\rightarrow\{\{u,v,v\},\{v,z,y\},\{x,y,v\}\}$所生成；紫色路径表示两锥中心之间的距离。右侧是平行移动后，两锥表面上对应点之间所有可能路径的集合（以红色显示）。这些路径既未整体发散也未整体收敛，这意味着沿紫色路径的$Ollivier\text{-}Ricci$ 标量曲率 κ 等于零。

3 将标量场格林函数推广到非整数维时空

由于通过算法程序（例如超图重写）生成的因果集，并非像通过向预先存在的洛伦兹流形中的撒点生成那样，因此无法保证其极限维数一定为整数；最终，我们有必要将上一节为任意整数维因果集构造的无质量离散格林函数“解析延拓”到更一般的非整数维情形。更准确地说，被解析延拓的并非格林函数本身；相反，我们希望将这些格林函数的贡献表示为复参数 $d\in\mathbb{C}$ 的亚纯函数，而该参数本身可能

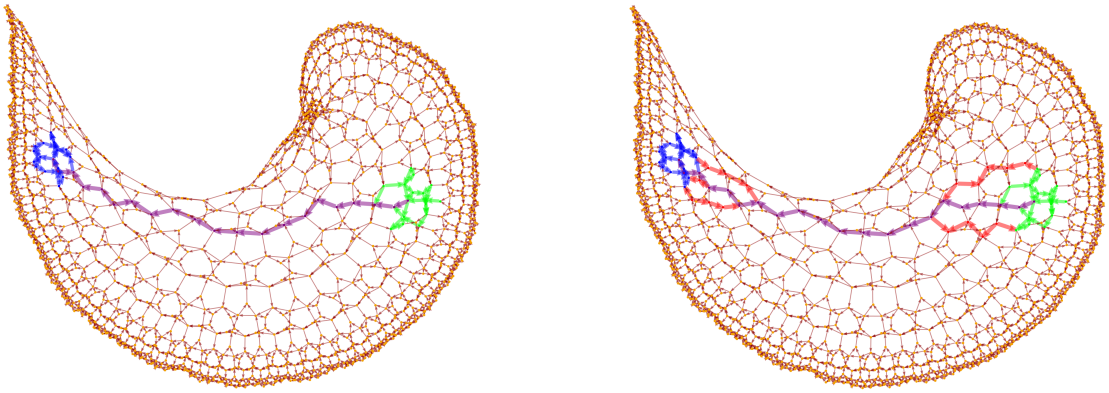

图 7：左图展示了一个（有向）因果图中的一对有限测地锥，该因果图具有负全局曲率的 $1+1$ 维类洛伦兹流形极限结构，由超图重写规则 $\{\{x,y,x\},\{x,z,u\}\}\to\{\{u,v,u\},\{v,u,z\},\{x,y,v\}\}$ 生成；紫色路径表示两锥中心之间的距离。右图展示了平行移动后，两锥表面对应点之间所有可能路径（以红色显示）组成的集合。这些路径整体上的收敛意味着，沿紫色路径的 奥利维耶-黎曼 标量曲率 κ 为负。

可被解释为对时空维数进行解析延拓，其过程类似于 't Hooft 和 Veltman[38] 使用的方法，对量子场论中的费曼积分进行维数正规化。为了有效地进行这种"解析延拓"，我们必须首先提出一种可靠的方法来估算任意因果集的极限维数$\mathcal{C}$。Myrheim[39] 和 Meyer[40] 所倡导的方法，首先计算因果偏序关系 $\prec$所关联的元素对在 $\mathcal{C}$ 中的数量 R 的期望值 $\left\langle \hat{R}\right\rangle$:

$$R=\left|\{(e_i,e_j):e_i,e_j\in\mathcal{C}\text{ such that }e_i\prec e_j\}\right|. \tag{127}$$

现在，如果我们在一个 d 维平直（闵可夫斯基）时空中，选取两个事件 p 和 q 之间的一个连续统亚历山德罗夫区间 $\mathbf{A}\left[p,q\right]\subset\mathbb{M}^d$（二者之间的固有时距离为 τ），那么我们知道，其体积 Vol($\mathbf{A}$ $[p,q]$) 为:

$$\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,q\right]\right)=\frac{\mathcal{V}_{d-2}}{2^{d-1}d\left(d-1\right)}\tau^d, \tag{128}$$

其中，$\mathcal{V}_{d-2}$ 表示 $d-2$ 维空间中单位球面的体积；此外，我们利用洛伦兹对称性，在不失一般性的前提下，为 p 和 q 选取了以下坐标:

$$p=\left(-\frac{\tau}{2},0,\ldots,0\right),\qquad\text{and}\qquad q=\left(\frac{\tau}{2},0,\ldots,0\right). \tag{129}$$

因此，在由所有可能散布于区间$\mathbf{A}\left[p,q\right]$中的因果集构成的系综 Ω 上，元素之间因果相关对的数量的期望值 $\left\langle \hat{R}\right\rangle$（如前所述）可由以下积分给出：

$$\left\langle \hat{R}\right\rangle =\rho_{c}^{2}\int_{\mathbf{A}[p,q]}\int_{J^{+}(x_{1})\cap J^{-}(q)}dx_{2}dx_{1}=\rho_{c}^{2}\frac{\mathcal{V}_{d-2}}{2^{d-1}d\left(d-1\right)}\int_{\mathbf{A}[p,q]}t_{1}^{d}dx_{1}, \tag{130}$$

这里我们引入参数 τ_1，表示事件 x_1 与 q之间的固有时距离，该参数现在可以直接计算得出：

$$\left\langle \hat{R}\right\rangle =\rho_{c}^{2}\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,q\right]\right)\frac{\Gamma\left(d+1\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3d}{2}\right)}, \tag{131}$$

因此，我们可以写出因果相关元素对数目的期望值 $\left\langle \hat{R}\right\rangle$ 与时空区域 $\mathbf{A}\left[p,q\right]$ 内撒点元素总数的期望值 $\langle \hat{n}\rangle$ 的平方之比，即（根据泊松点过程的定义）：

$$\langle\hat{n}\rangle=\rho_{c}\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,q\right]\right), \tag{132}$$

as:

$$\frac{\left\langle \hat{R}\right\rangle }{\langle n\rangle^{2}}=\frac{\Gamma\left(d+1\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3d}{2}\right)}. \tag{133}$$

因此，通过估算撒入具有指定体积的连续时空区域中的某个因果集内元素对所占的比例，我们能够对该方程进行反演，从而推导出连续时空维数 d 的相应估计值。如图 8 所示，这是一个简化的（20 个元素）示例；图 9 则展示了在 $1+1$维和$2+1$维平直（闵可夫斯基）时空中更为真实的（100 个元素）示例。

回顾我们此前对通过对链求和方法计算因果集上的离散路径积分的分析：因果集 $\mathcal{C}$ 中长度为 n 的链的丰度 C_n：

$$C_{n}=|\{(p,r_{1},r_{2},\ldots,r_{n-1},q)\colon p,r_{1},r_{2}\ldots,r_{n-1},q\in\mathcal{C}\text{满足 }p\prec r_{1}\prec r_{2}\prec\cdots\prec r_{n-1}\prec q\}|, \tag{134}$$

具有期望值 $\left\langle \hat{C}_{n}\right\rangle$（在所有可能撒布到给定

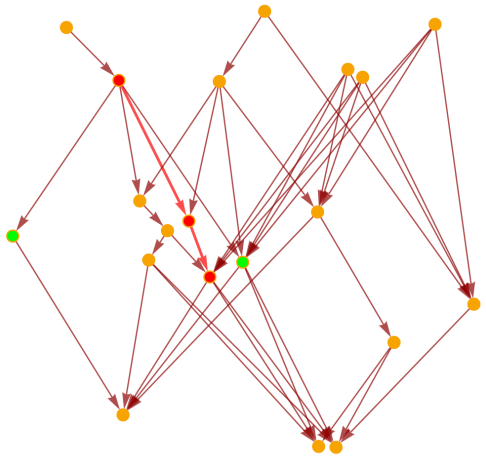

图8：将因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 相连的所有点对连接起来，得到由矩形区域内 $1+1$维平直（闵可夫斯基）时空中均匀撒布的20个点生成的有向图，其传递约简（即哈斯图）如图所示。图中还标出了随机选取的两对点：一对（红色）满足偏序关系，另一对（绿色）不满足偏序关系。

时空中的因果集所构成的系综 Ω 上），可写成以下简洁的闭式形式：

$$\left\langle \hat{C}_n \right\rangle = \frac{\left(\rho_c \mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[q,p\right]\right)\right)^{n-1}}{n-1} \left(\frac{\Gamma\left(d+1\right)}{2}\right)^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(d\right)}{\Gamma\left(\left(n-1\right)\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{nd}{2}\right)}. \tag{135}$$

因此，对于任意满足 $n \neq n'$的 n维数, $n' \in \mathbb{N}$，都可以通过取上述Myheim-Meyer维数估计方法中 $\left\langle \hat{C}_n \right\rangle^{\frac{1}{n}}$ 与 $\left\langle \hat{C}_{n'} \right\rangle^{\frac{1}{n'}}$ 的链丰度期望值之比，对其进行推广。对于具有非零时空曲率、因而与 $\mathbb{M}^d = \mathbb{R}^{1,d-1}$不等距的任意洛伦兹流形 $(\mathcal{M}, g)$，可以采用Roy、Sinha和Surya[64], 的方法，即利用弯曲时空中度规行列式det (g)的展开式（在黎曼正规坐标中），得到链丰度期望值 $\left\langle \hat{C}_n \right\rangle$ 关于事件 p 与 q之间固有时区间 τ 的如下级数表示：

$$\left\langle \hat{C}_n \right\rangle = \left\langle \hat{C}_n \right\rangle_\eta \left[1 - \frac{d\left(n-1\right)}{12\left(\left(n-1\right)d+2\right)\left(nd+2\right)} R\left(0\right)\tau^2 + \frac{d\left(n-1\right)}{12\left(nd+2\right)} R_{00}\left(0\right)\tau^2\right] + O\left(\tau^{(n-1)d+3}\right), \tag{136}$$

在假设因果菱形$\mathbf{A}\left[p,q\right]$ 足够小、因而满足以下条件的情况下：

$$R\left(0\right)\tau^2 \ll 1, \qquad \text{and} \qquad R_{00}\left(0\right)\tau^2 \ll 1, \tag{137}$$

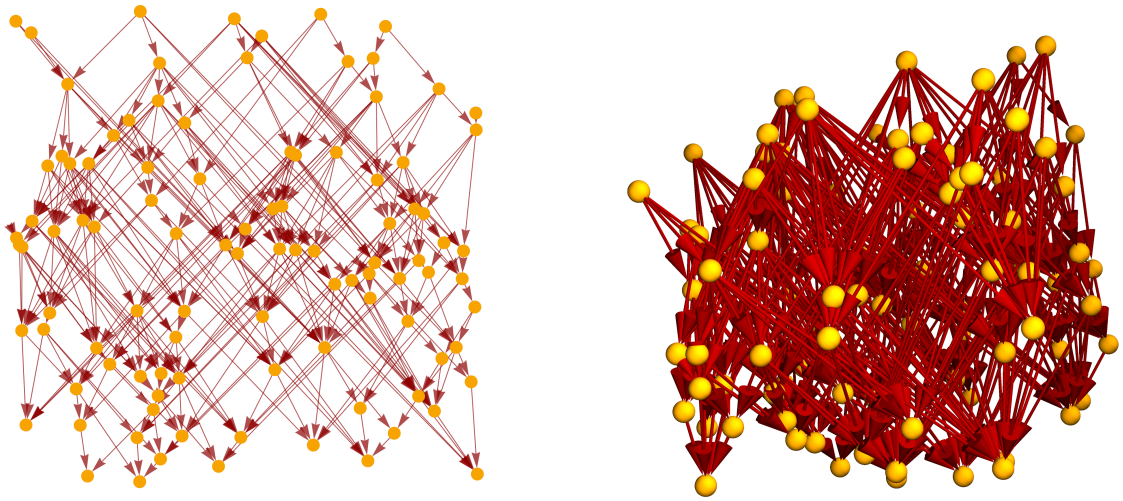

图 9：在二维和三维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域中，分别连接所有满足因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 的 100 个（均匀撒点）点对所生成的有向图的传递约简（即哈斯图）；通过迈尔海姆–迈耶估算程序得到的估计维数分别为 2.07 和 2.75。

其中， $R(0)$表示里奇标量曲率， $R_{00}(0)$表示里奇曲率张量的时间-时间分量（在黎曼正规坐标系中于菱形中心处取值）[65], ，并且我们使用记号 $\left\langle \hat{C}_n \right\rangle_\eta$ 表示平坦／闵可夫斯基时空情况下的链丰度期望值（如上所述）。由此，我们可以推导出适用于任意时空中小因果菱形的广义维数估计量，其形式为：

$$\frac{\Gamma(d+1)\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3d}{2}\right)}\left(-\frac{1}{3}\frac{(d+2)}{(3d+2)}-\frac{(4d+2)}{(2d+2)}\left(\frac{\left\langle \hat{C}_n\right\rangle}{\frac{1}{3}\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^2\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{3d}{2}\right)\Gamma(2d)}}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\left\langle \hat{C}_n\right\rangle^4}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\frac{(4d+2)(5d+2)}{(2d+2)(3d+2)}\frac{\left\langle \hat{C}_5\right\rangle}{\frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^3\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma(2d)\Gamma\left(\frac{5d}{2}\right)}}\frac{1}{\left\langle \hat{C}_2\right\rangle^4}\right)=-\frac{\left\langle \hat{C}_3\right\rangle^2}{\left\langle \hat{C}_2\right\rangle^4}. \quad (138)$$

然而，（广义）Myrheim-Meyer 维数估算程序具有若干对当前目的而言不太理想的特征。最明显的是，其计算需要预先知道撒入指定因果集的小因果菱形的体积 Vol (**A** $[p,q]$)；对于通过算法生成的因果集，这一信息显然无法获得。更微妙的是，它也存在与此前讨论的计算离散 Ricci 标量 () 的 Benincasa-Dowker 方法类似的循环定义问题，即事件 与之间的固有时距离 $[p,q]$通常是根据连续时空的维数 来定义的，具体如下：

前文所述的 Benincasa-Dowker 方法也存在类似问题，即事件 p 与 q 之间的固有时距离 τ 通常是根据连续时空的维数 d 来定义的，具体如下：

$$\tau^{3d} = \frac{2}{^2\rho_c^3}\left(J_1 - 2J_2 + J_3\right), \tag{139}$$

对于归纳定义的参数 J_n：

$$J_n = \left((n-1)\,d\right)(nd+2)\left(\frac{2^{d-1}d\,(d-1)}{\mathcal{V}_{d-2}}\right)^3\left(\frac{\left\langle \hat{C_{n-1}} \right\rangle}{\frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(d+1)}{2}\right)^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{nd}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(n+1)d}{2}\right)}}\right)^{\frac{3}{n}}. \tag{140}$$

因此，如果已知连续时空维数 d 或事件之间的固有时距离 τ，并希望推导出另一项，那么该估计量就很有用；但如果两者均未知，则无此作用。不过，若改为通过对测地锥体积的增长率应用对数距离估计，直接近似因果集的极限豪斯多夫维数，仍有可能克服这些局限。具体而言，若我们在任意一个维数为 d的黎曼流形（$\mathcal{M}$，g）中选取一点 $p \in \mathcal{M}$，那么就可以将附近一点 $p+\delta x$ 处的无穷小体积元（通常由度量张量 g 的行列式的平方根给出）展开为关于 δx[66]的幂的形式级数：

$$\sqrt{\det\left(g\left(p+\delta x\right)\right)} = \sqrt{\det\left(g\left(p\right)\right)}\left(1 - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{d} R_{ij}\left(p\right)\delta x^i \delta x^j + O\left(\delta x^3\right) + \dots\right), \tag{141}$$

假设流形 $\mathcal{M}$ 是解析的，其中 R_{ij} 为里奇曲率张量，而δx^i 和 δx^j 对应于向量 δx的正交分量，并以逆变指标记法表示。因此，通过对这一无穷小体积元积分，即可求得以点 p 为中心、无穷小半径为 ε的小测地球 B_ε(p)的体积：

$$\mathrm{Vol}\left(B_\varepsilon\left(p\right)\right) = \int_{B_\epsilon(p)} \sqrt{\det\left(g\left(p+\delta x\right)\right)} d^d\left(\delta x\right); \tag{142}$$

注意，这个积分可以按半径 ε 的幂展开为：

$$\int_{B_\varepsilon(p)} \sqrt{\det\left(g\left(p+\delta x\right)\right)} d^d\left(\delta x\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\varepsilon^d\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{6\left(d+2\right)}\sum_{i=1}^{d} R_i^i + O\left(\varepsilon^4\right)\right), \tag{143}$$

其中 t　　曲率张量 R_i^i 的迹可以简写为里奇标量曲率　　R:

$$\sum_{i=1}^{d} R_i^i = R. \tag{144}$$

如果改为对从点 p 出发、沿方向 δx 取向的测地线延伸的一段小管状邻域 $T_{\varepsilon,\delta x}(p)$ 积分，其长度为 δ，无穷小半径为 ε:

$$\mathrm{Vol}\left(T_{\varepsilon,\delta x}\left(p\right)\right) = \int_{T_{\varepsilon,\delta x}(p)} \sqrt{\det\left(g\left(p+\delta x\right)\right)} d^d\left(\delta x\right), \tag{145}$$

相应地，可以得到这种管状邻域的体积关于半径 ε[67] 的幂级数表达式:

$$\int_{T_{\varepsilon,\delta x}(p)} \sqrt{\det\left(g\left(p+\delta x\right)\right)} d^d\left(\delta x\right) = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \varepsilon^{d-1} \delta x \left(1 - \left(\frac{d-1}{d+1}\right)\left(R - \sum_{i,j=1}^{d} R_{ij} \hat{\delta x}^i \hat{\delta x}^j\right)\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \delta x\right) + \ldots\right), \tag{146}$$

假设沿测地线的单位向量具有正交分量　　$\hat{\delta x}^i$ and $\hat{\delta x}^j$ （以逆变形式表示）。

一般而言，对于黎曼流形（$\mathcal{M}, g$），无穷小体积元展开式中的首项与 ε^d成正比；事实上，在平直（欧几里得）空间 $\mathbb{R}^d$ 中，它恰好为:

$$\mathrm{Vol}\left(B_\varepsilon\left(p\right)\right) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \varepsilon^d. \tag{147}$$

因此，对于一个无向图（可视为黎曼流形的离散类比），其中体积 Vol（...）由子图顶点集的基数取代，如前所述，可以利用以下朴素的对数差分近似，提取极限流形维数 d 的粗略一阶估计量 $\Delta_\varepsilon(p)$（给定整数半径 ε 和一个顶点 p）：

$$\Delta_\varepsilon\left(p\right) = \frac{\log\left(\mathrm{Vol}\left(B_{\varepsilon+1}\left(p\right)\right)\right) - \log\left(\mathrm{Vol}\left(B_\varepsilon\left(p\right)\right)\right)}{\log\left(\varepsilon+1\right) - \log\left(\varepsilon\right)}. \tag{148}$$

另一方面，对于有向图（将其视为洛伦兹流形的离散类比），这一分析仍保持不变，只需将半径为 ε 的无穷小球 $B_\varepsilon(p)$ 的体积幂级数展开替换为:

$$\mathrm{Vol}\left(B_{\varepsilon}\left(p\right)\right)=a\varepsilon^{d}\left[1-\frac{R}{6\left(d+2\right)}\varepsilon^{2}+O\left(\varepsilon^{4}\right)\right], \tag{149}$$

对于某个常数 a，将其替换为固有时长度为 t 的无穷小因果锥 $C_t(p)$ 的体积幂级数展开：

$$\mathrm{Vol}\left(C_{t}\left(p\right)\right)=at^{n}\left[1-\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{d}R_{ij}t^{i}t^{j}+O\left(\left\|\mathbf{t}\right\|^{3}\right)\right], \tag{150}$$

对于某个常数 a。在上文中，向量 $\mathbf{t}$ 表示锥体所朝向的类时方向，因此也是里奇曲率张量 R_{ij} 投影的方向；在度规允许规范分解的情况下，该张量可用 ADM规范变量 α （坐标时差）和 β^i （移位）表示为：

$$t^{i}=\alpha n^{i}+\beta^{i}, \tag{151}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是指定类空超曲面的类时单位法向量。图 10 和图 12 分别展示了第一阶对数差分估计量 $\Delta_t(p)$ 随锥体t固有时长度的变化情况，研究对象是极限趋于渐近平坦和渐近负曲率$1+1$维洛伦兹流形类结构的（有向）因果图（两种情况下均正确识别出二维的极限维数）；图 11 和图 13 则分别展示了相应因果锥的增长情况。如前所述，这种用于计算有向图豪斯多夫维数的对数差分估计方法，在形式上等价于 Bombelli [57][68], 提出的中点缩放维数估计方法。在后者中，离散因果区间$\mathbf{I}\left[p,q\right]\subset\mathcal{C}$ 被分成子区间$\mathbf{I}\left[p,r\right]$ 和$\mathbf{I}\left[r,q\right]$（其中间元素为 $r\in\mathcal{C}$），并使较小子区间 N_{small} 的基数尽可能大（即使元素 r 尽可能接近整个离散区间 $\mathbf{I}\left[p,q\right]$ 的中点）。因此，由于 d维平直（闵可夫斯基）时空中的连续统亚历山德罗夫区间$\mathbf{A}\left[p,q\right]$ 的体积可用事件 p 和 q之间的固有时距离 τ 表示为：

$$\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,q\right]\right)=\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{2^{d-2}d\left(d-1\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\tau^{d}, \tag{152}$$

由此可知，上述过程实际上会将最小时空子区间中的固有时距离 τ_{small} 按1 2 的比例缩放（相较于整体时空区间中的距离），因此也会

按 2^{-d} 的比例缩放最小时空子区间的体积：

$$\frac{\tau}{\tau_{small}} = 2, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,q\right]\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbf{A}\left[p,r\right]\right)} = 2^{d}, \tag{153}$$

因此，在因果集的情形下（如果 N表示整体离散区间 $\mathbf{I}\left[p,q\right]$ 的基数，而N_{small} 表示最小离散子区间的基数），我们可以构造一个时空维数 d的一阶对数估计量 Δ：

$$\frac{N}{N_{small}} \approx 2^{d}, \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta = \log_2\left(\frac{N}{N_{small}}\right). \tag{154}$$

图14展示了将有向（因果）图撒点到 $1+1$维平直（闵可夫斯基）时空中时，一阶对数差分估计量 Δ的计算过程。上述两种对数差分估计方法之间唯一的根本区别在于：前一种方法计算单侧（不对称）时空锥 $C_t(p)$ 的体积，而后一种方法计算双侧（对称）因果菱形 $\mathbf{I}\left[p,q\right]$的体积。

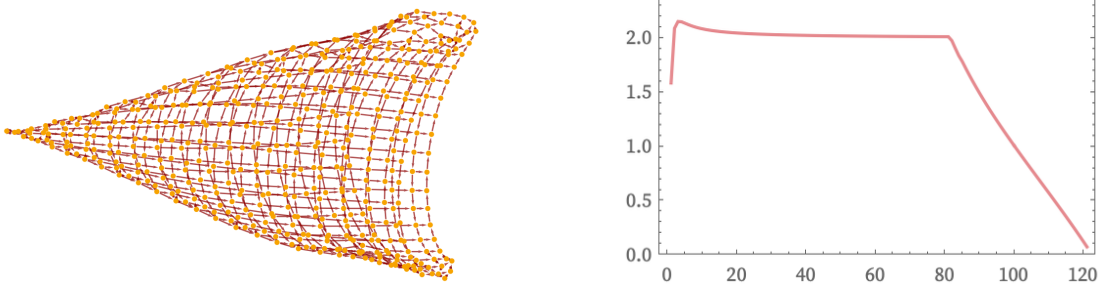

图10：对渐近平坦（有向）因果图维数的对数差估计。该图具有由超图重写规则 $\{\{x,y,y\},\{x,z,u\}\}\to\{\{u,v,v\},\{v,z,y\},\{x,y,v\}\}$生成的 $1+1$维类洛伦兹流形极限结构，结果与极限维数为二相一致。

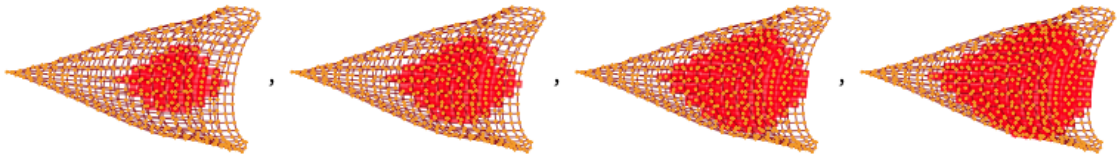

图 11：在具有 $1+1$ 维类洛伦兹流形极限结构的渐近平坦（有向）因果图中，因果锥（红色所示）的增长情况，该因果图由超图重写规则 $\{\{x,y,y\},\{x,z,u\}\}\to\{\{u,v,v\},\{v,z,y\},\{x,y,v\}\}$ 生成。

如果我们将$\mathbf{x}$ 视为任意维数的固定基向量，那么我们可以将无质量

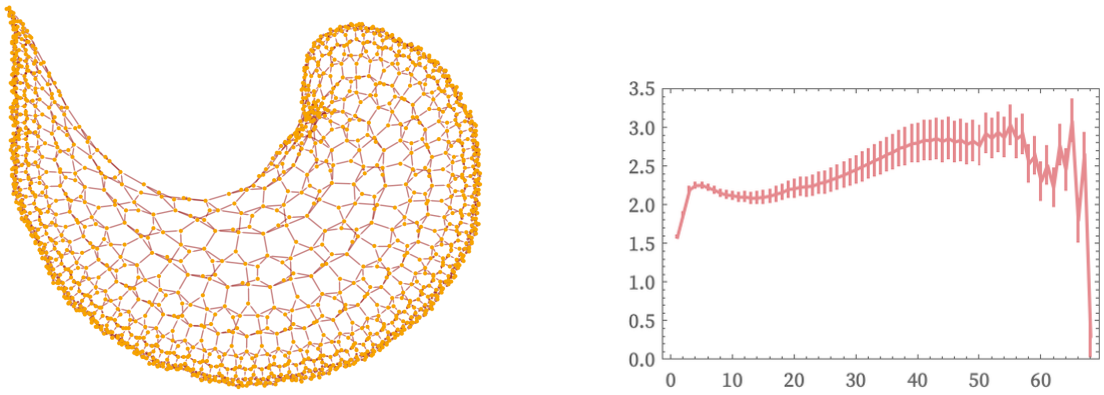

图 12：具有 $1+1$ 维类洛伦兹流形极限结构的（有向）因果图的维数对数差估计。该图展示了负全局曲率的影响，由超图重写规则 $\{\{x,y,x\},\{x,z,u\}\}\to\{\{u,v,u\},\{v,u,z\},\{x,y,v\}\}$ 生成，结果表明极限维数为二。

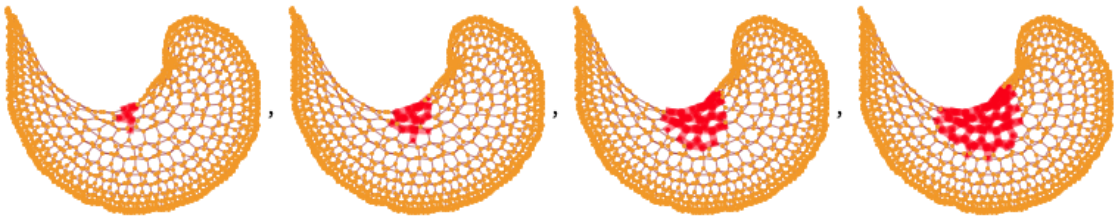

图 13：具有 $1+1$ 维类洛伦兹流形极限结构的（有向）因果图中因果锥（以红色显示）的增长。该图展示了负全局曲率的影响，由超图重写规则 $\{\{x,y,x\},\{x,z,u\}\}\to\{\{u,v,u\},\{v,u,z\},\{x,y,v\}\}$ 生成。

推迟格林函数 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$视为定义在自然数上的函数，因为 $d\in\mathbb{N}$，即：

$$(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x}):\mathbb{N}\to\mathbb{R};\tag{155}$$

因此，本节的目标可以重新表述为：希望将 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$“解析延拓”，使其成为定义在实数 $\mathbb{R}$ 上的解析函数 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$：

$$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}):\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\tag{156}$$

实现这一点的一种方法（当然，这种方法绝非唯一）是将延拓函数 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 定义为对所有自然数$\mathbb{N}$求和得到的 sinc 函数之和：

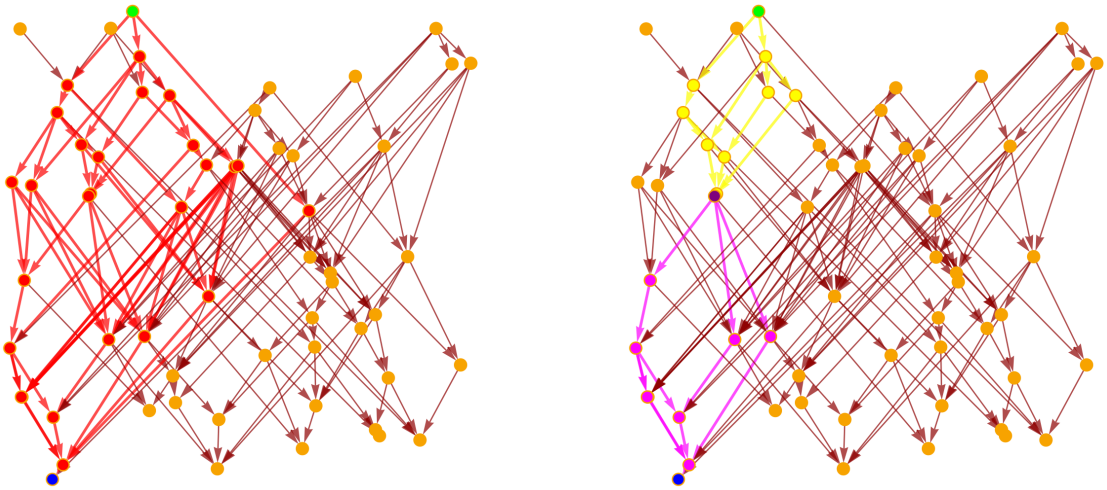

图14：左侧是在一个 $1+1$维平直（闵可夫斯基）时空的矩形区域上，将所有满足因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$的60个（均匀撒布的）点对连接起来所生成的有向图的传递约简（即哈斯图）；一对类时分离事件（以绿色和蓝色显示）表示离散时空序区间的端点（以红色显示）。右侧，该离散区间的中点（以紫色显示）将其细分为两个离散子区间（分别以黄色和洋红色显示），两者的基数均为10；相比之下，整个离散区间的基数为28，由此推得维数估计值为 $\log_2\binom{28}{10}\approx 1.49$。

$$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\operatorname{sinc}(d-k)\right)^{m_k}(G_R)_0^k(\mathbf{x}),\qquad\text{where}\qquad \operatorname{sinc}(d)=\frac{\sin(\pi d)}{\pi d},\tag{157}$$

并且，所有指数 m_k 的取值都足够大，以确保：

$$\forall\,|d|>1,\qquad \left(\operatorname{sinc}(d)\right)^{m_k}(G_R)_0^{(k)}(\mathbf{x})<2^{-|k|}.\tag{158}$$

图15展示了一个示例，说明如何进行这种“解析延拓”，以便将定义在自然数 $\mathbb{N}$ 上的（随机生成的）离散函数扩展为定义在实数 $\mathbb{R}$上的解析函数；其中分别假设指数为 $m_k=10$、$m_k=20$ 和 $m_k=30$（对所有 $k\in\mathbb{N}$），并说明随着指数增大，结果会收敛到一个有效的延拓。

如果我们希望保证延拓的唯一性（至少在相差正弦函数 πd 的倍数的意义下），那么只需将无质量推迟格林函数 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$（视为维数 d 的函数，其中 $\mathbf{x}$ 固定）“解析延拓”为整个复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$：

$$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}):\mathbb{C}\to\mathbb{R},\tag{159}$$

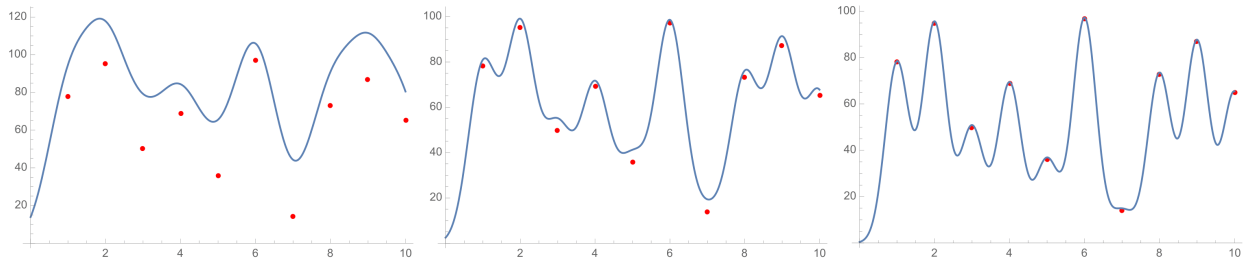

图15：在假设指数 m_k 分别等于 10、20 和 30（对于所有$k \in \mathbb{N}$）的情况下，将自然数 $\mathbb{N}$ 上的离散函数（以红色显示）“解析延拓”到实数 $\mathbb{R}$ （以蓝色显示）。

˜通过引入一个多项式序列 $G_n(d)$，其中多项式关于 d （且 $n \in \mathbb{N}$），其一般形式为 ：

$$\tilde{G}_n(d) = (b + cd)\, d^m \prod_{k=-(n-1)}^{n-1} (d - k), \qquad \text{with} \qquad m, b, c \in \mathbb{C} \text{ constant}, \tag{160}$$

使得“解析延拓”的无质量推迟格林函数 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}$ （$\mathbf{x}$）可以直接写成所有此类多项式之和：

$$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{G}_n(d). \tag{161}$$

˜显然，多项式 $G_n(d)$ 必须在 $d = -n$ 和 $d = n$ 处取适当的值，以确保求和中得到正确的贡献；此外，每个多项式在闭区间 $[-(n-1) \quad n-1]$内所有自然数值的 d 上都应为零：

$$\forall d \in [-(n-1), n-1] \cap \mathbb{N}, \qquad \tilde{G}_n(d) = 0, \tag{162}$$

并且必须将常数 $m \in \mathbb{C}$ 选取得足够大，以确保多项式$G_n(d)$的值在圆盘 $d \in B_{n-1}(0)$上满足适当的指数衰减条件（即，当 d 的模不大于 $n-1$ 时，$G_n(d)$的值与在 $d = -n$ 和 $d = n$处的值相比应足够小）：

$$\forall |d| \leq n - 1, \qquad \left|\tilde{G}_n(d)\right| < 2^{-n}. \tag{163}$$

可以在 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 的定义中引入任意的正弦函数(πd) 因子，而不损害亚纯性；然而，除去这类因子后，从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{C}$ 的解析延拓可依据复分析中的 Carlson 定理πd保证唯一（

在满足某些技术性假设并除去所有奇点的前提下）。

回想一下，对于任意在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上全纯的函数 f，Carlson 定理指出，若 f 是指数型的，也就是说，其模按以下方式受到指数上界的限制：

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |f(z)| \leq Ce^{\tau|z|}, \qquad \text{with} \qquad C, \tau \in \mathbb{R} \text{ constant}, \tag{164}$$

若 f 在（虚）无穷远处的增长受到适当限制，也就是说，存在某个常数 $c \in \mathbb{R}$，使得以下陈述成立：

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |f(iy)| \leq Ce^{c|y|}, \qquad \text{with} \qquad c < \pi \text{ constant}, \tag{165}$$

并且对于每个非负整数 $n \in \mathbb{N}$，都有 $f(n) = 0$，那么对于所有 $z \in \mathbb{C}$，$f(z)$ 恒等于零。给定无质量推迟格林函数 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$（将其视为关于 $d \in \mathbb{N}$ 的函数，并固定$\mathbf{x}$）及其作为亚纯函数在 $\mathbb{C}$ 上的“解析延拓” $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$，根据“解析延拓”的定义，我们知道这两个函数对所有自然数都必须相等：

$$\forall d \in \mathbb{N}, \qquad \left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}) = (G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x}), \tag{166}$$

至少在移除所有奇点后，而且，多项式 $G_n(d)$ 和常数 $m \in \mathbb{C}$ 经过特别选择，以确保满足增长条件：

$$\forall d \in \mathbb{C}, \qquad \left|\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})\right| \leq Ce^{\tau|d|}, \qquad \text{with} \qquad C, \tau \in \mathbb{R} \text{ constant}, \tag{167}$$

and:

$$\forall d \in \mathbb{R}, \qquad \left|\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(id)}(\mathbf{x})\right| \leq Ce^{c|d|}, \qquad \text{with} \qquad c \in \mathbb{R} \text{ such that } c < \pi, \tag{168}$$

必须满足。因此，“解析延拓” $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$（除奇点外）除相差正弦函数 (πd) 的因子外必须是唯一的。因为反设存在两个不同的函数 $\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}$ 和 $\left(\tilde{H_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$，它们都满足所需的增长条件，且对于所有 $d \in \mathbb{N}$，都与原始无质量推迟格林函数 $(G_R)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 一致。那么，若定义第三个函数 $\left(\tilde{I_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$

即为这两者之差：

$$\left(\tilde{I_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}) = \left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}) - \left(\tilde{H_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x}), \tag{169}$$

那么，根据 Carlson 定理，对于所有 $d \in \mathbb{C}$，$\left(\tilde{I_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 必须恒等于零，因此，对于所有 $d \in \mathbb{C}$，两个函数$\left(\tilde{G_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 和 $\left(\tilde{H_R}\right)_0^{(d)}(\mathbf{x})$ 必须恒等。证明至此完成。

请注意，正如本节开头所提到的，我们将“解析延拓”一词加上引号，是为了说明实际进行解析延拓的并非无质量格林函数本身（尽管这样描述是一种有用的术语滥用），而是从自然数值延拓到复数值的参数 d。此外请注意，直接对无质量格林函数进行这种延拓，实际上相当于将上一节所给无质量格林函数的定义中出现的（修正）贝塞尔函数 $I_\alpha(x)$、$Y_\alpha(x)$、$J_\alpha(x)$ 和 $K_\alpha(x)$，以及相应的汉克尔函数 $H_\alpha^{(1)}(x)$ 和 $H_\alpha^{(2)}(x)$，延拓至阶参数 α 取一般复数值（而非整数值）的情形。对上述“解析延拓”所作的技术假设（即 Carlson 定理成立并保证唯一性所需的假设），实质上相当于为相应的特殊函数选取分支切割，因为当阶参数取非整数值时，这些函数会变成多值函数（从而定义一个黎曼曲面）。

4 Wightman函数、Sorkin-Johnston真空与时空纠缠熵

本节中，我们基本遵循海森堡绘景下代数量子场论的符号和公理约定，该约定由 Haag 和 Kastler[70], 提出，随后由 Wightman 和 Gardin[71], 进一步完善，并由 Johnston[30][31][32]应用于因果集理论的语境中。我们先简要回顾这一形式体系。回想一下，若 $F_+(\mathcal{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的玻色（对称）福克空间，即由 $\mathcal{H}$的对称张量幂的直和经度量空间完备化得到的希尔伯特空间：

$$F_+(\mathcal{H}) = \overline{\bigoplus_{n=0}^{\infty} S_+ \mathcal{H}^{\otimes n}}, \tag{170}$$

其中 S_+ 表示张量对称化算符，上划线表示对所得希尔伯特空间取完备化，那么我们可以定义一族在 d 个时空维数中（质量为 m）作用于福克空间 $F_+(\mathcal{H})$ 上的自由玻色标量场算符 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$，它们必须满足自伴性/厄米性的公理：

$$\forall \mathbf{x} \in F_+(\mathcal{H}), \qquad \hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \left(\hat{\Phi}(\mathbf{x})\right)^\dagger, \tag{171}$$

关于*Pauli-Jordan*算子$\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$的对易关系：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_+(\mathcal{H}), \qquad \left[\hat{\Phi}(\mathbf{x}), \hat{\Phi}(\mathbf{y})\right] = \hat{\Phi}(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{y}) - \hat{\Phi}(\mathbf{y})\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{172}$$

这里的 Pauli-Jordan 算子 $\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 仅对应于推迟格林函数与超前格林函数之差（$G_R)_m^{(d)}$ 和（$G_A)_m^{(d)}$（也称为协变定义的佩尔斯括号）：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_+(\mathcal{H}), \qquad \hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (G_A)_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{173}$$

以及满足（有质量）克莱因-戈尔登方程：

$$\forall \mathbf{x} \in F_+(\mathcal{H}), \qquad \left(\Box + m^2\right)\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = 0. \tag{174}$$

假设福克空间 $F_+(\mathcal{H})$ 存在真空态 $|0\rangle \in F_+(\mathcal{H})$，且该真空态在庞加莱群 $\mathbb{R}^{1,d-1} \rtimes O(1,d-1)$ 的作用下保持不变，我们便可将维特曼函数（即二点关联函数）$\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 定义为场算符 $\hat{\Phi}(\mathbf{x})$ 和 $\Phi(\mathbf{y})$ 的（非时间序）乘积的真空期望值：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_+(\mathcal{H}), \qquad \hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle 0|\hat{\Phi}(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{y})|0\rangle. \tag{175}$$

这个维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 可被视为克莱因-戈尔登方程在平直/闵可夫斯基时空中的有质量 d 维费曼传播子 $(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 的非时间序版本（相差一个 i 因子）：

$$\left(\Box + m^2\right)(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = \delta^d(\mathbf{x}), \tag{176}$$

由此，应用此前在推导有质量推迟格林函数 $(G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 时使用的同一个修正傅里叶变换算子 F^*，我们可以推导出动量空间中的以下平凡解：

$$\left(\tilde{G_F}\right)_m^{(d)}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathbf{p}^2 - m^2}, \tag{177}$$

从而得到相应的位置空间解：

$$(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2 - m^2}d^d\mathbf{p}, \tag{178}$$

其被积函数中的极点，即位于 $\mathbf{p}^2 = m^2$ 处的极点，可以通过选择一条在左侧极点下方、右侧极点上方经过的积分路径来避开。由此可通过以下（分布意义下的）极限定义有质量费曼传播子 $(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x})$：

$$(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon}d^d\mathbf{p}\right]. \tag{179}$$

请注意，一般而言，费曼传播子 $(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 等于因果格林函数 $(G_C)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 的实部（或者更准确地说，是其中不含第二类修正贝塞尔函数 $K_\alpha(x)$ 的部分）；例如，在此前分析的 $d = 4$ 示例中，我们得到了因果格林函数的以下显式形式：

$$(G_C)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = \frac{\delta\left(\tau^2\right)}{4\pi} - \frac{m}{8\pi}\theta\left(\tau^2\right)\frac{H_1^{(2)}\left(m\sqrt{\tau^2}\right)}{\sqrt{\tau^2}} + \frac{im}{4\pi^2}\theta\left(-\tau^2\right)\frac{K_1\left(m\sqrt{-\tau^2}\right)}{\sqrt{-\tau^2}}, \tag{180}$$

其中 $\tau^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$，这意味着费曼传播子 $(G_F)_m^{(4)}(\mathbf{x})$ 的形式为：

$$(G_F)_m^{(4)}(\mathbf{x}) = \frac{\delta\left(s^2\right)}{4\pi} - \frac{m}{8\pi}\frac{H_1^{(2)}(ms)}{s}, \tag{181}$$

其中，我们引入参数 s，以消除对海维赛德阶跃函数 $\theta(\alpha)$ 的显式依赖：

$$s = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\sqrt{\tau^2 - i\epsilon}\right] = \begin{cases}\sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, & \text{if } x_0^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\\ -i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2}, & \text{if } x_0^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.\end{cases} \tag{182}$$

因此，正如 Birrell and Davies[59], 所指出的，分布极限内的积分可以通过

傅里叶分析方法求值，从而得到 d 维时空中有质量费曼传播子 $(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 的以下一般形式：

$$(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^d}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{m}{\sqrt{\tau^2-i\epsilon}}\right)^{\frac{d}{2}-1} H^{(2)}_{\frac{d}{2}-1}\left(m\sqrt{\tau^2-i\epsilon}\right)\right], \tag{183}$$

使得费曼传播子的实部始终等于超前和推迟有质量格林函数 $(G_A)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 与 $(G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x})$ 的平均值：

$$\mathrm{Re}\left((G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x})\right) = \frac{(G_A)_m^{(d)}(\mathbf{x}) + (G_R)_m^{(d)}(\mathbf{x})}{2}. \tag{184}$$

因此，有质量 d 维费曼传播子 $(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 就是场算符 $\hat{}\Phi(\mathbf{x})$ 和 $\hat{}\Phi(\mathbf{y})$ 乘积的真空期望值（就像维特曼函数 $\hat{}W_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ 一样），不过此处的时间排序方向是从右到左：

$$(G_F)_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = i\langle 0|\mathcal{T}\hat{\Phi}(\mathbf{x})\hat{\Phi}(\mathbf{y})|0\rangle, \tag{185}$$

正如所需，时间排序“算子” $\mathcal{T}$。

现在，考虑一个基数为 $|\mathcal{C}| = p$ 的有限因果集 $\mathcal{C}$（如前所述），我们便可通过以下矩阵，在因果集元素 x 和 y 上定义 Pauli-Jordan 算子 $\hat{}\Delta_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 的离散类比：

$$\forall x,y\in\mathcal{C},\qquad \hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y) = (K_R)_m^{(d)}(x,y) - (K_A)_m^{(d)}(x,y), \tag{186}$$

其中 $(K_R)_m^{(d)}(x,y)$ 是质量为 m 的场的离散推迟传播子矩阵；例如，在无质量情形 $m=0$ 下，我们此前已证明，对于 $d=2$ 和 $d=4$ 情形，该矩阵为：

$$(K_R)_0^{(d)}(x,y) = \frac{1}{2}C_0(x,y), \qquad \text{and} \qquad (K_R)_0^{(d)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{6}}L_0(x,y), \tag{187}$$

分别对应因果矩阵 $C_0(x,\ y)$ 和链接矩阵 $L_0(x,\ y)$。此外，由于这些传播子都是有限维矩阵，通常只需将推迟传播子转置，即可得到离散超前传播子 $(K_A)_m^{(d)}(x,\ y)$ 矩阵：

$$(K_A)_m^{(d)}(x,y) = \left((K_R)_m^{(d)}(x,y)\right)^{\intercal} = (K_R)_m^{(d)}(y,x). \tag{188}$$

离散 Pauli-Jordan 算子 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 及其虚部变体 $i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 都是斜对称矩阵：

$$\left(\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\right)^{\intercal}=\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(y,x)=-\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y),\qquad\text{and}\qquad\left(i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\right)^{\intercal}=i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(y,x)=-i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y),\tag{189}$$

此外，虚部变体 $i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 必然是厄米的：

$$\left(i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\right)^{\dagger}=\left(i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(y,x)\right)^{*}=i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y),\tag{190}$$

其中星号表示复共轭，这意味着离散泡利-约当算子 $s\ \ i\hat{\Delta}(x,y)$ 的秩始终为偶数，并且其特征谱 $\{\lambda_i\}$：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_i(x)=\sum_{y\in\mathcal{C}}i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{v}_i(y)=\lambda_i\mathbf{v}_i(x),\tag{191}$$

可规范地分解为正负部分 λ_i 和 $-\lambda_i$ （对于 $\lambda_i>0$），相应的特征函数为 $\mathbf{v}_i^{+}(x)$ 和 $\mathbf{v}_i^{-}(x)$，分别为，即有：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_i^{\pm}(x)=\sum_{y\in\mathcal{C}}i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{v}_i^{\pm}(y)=\pm\lambda_i\mathbf{v}_i^{\pm}(x),\tag{192}$$

以及一组与零特征值相关联的特征函数 $\mathbf{v}_j^{0}(x)$：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_j^{0}(x)=\sum_{y\in\mathcal{C}}i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{v}_j^{0}(y)=\mathbf{0},\tag{193}$$

对于 $i=1,\ 2、\text{-}\cdots\cdots、\ \frac{s}{2}$, $j=1,\ 2、\cdots\cdots、\ p-s$。现在，如果我们选择特征函数 $\mathbf{v}_i^{+}(x)$、$\mathbf{v}_i^{-}(x)$ 和 $\mathbf{v}_i^{0}(x)$，以确保共轭条件：

$$\mathbf{v}_i^{+}(x)=\left(\mathbf{v}_i^{-}(x)\right)^{*},\qquad\text{and}\qquad\mathbf{v}_k^{0}(x)=\left(\mathbf{v}_k^{0}(x)\right)^{*},\tag{194}$$

以及内积条件：

$$\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_i^{+}(x)\,\mathbf{v}_j^{+}(x)=\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_i^{-}(x)\,\mathbf{v}_j^{-}(x)=\delta_{ij},\qquad\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_k^{0}(x)\,\mathbf{v}_l^{0}(x)=\delta_{kl},\tag{195}$$

and:

$$\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_i^+(x)\,\mathbf{v}_j^-(x)=\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_k^0(x)\,\mathbf{v}_i^+(x)=\sum_{x\in\mathcal{C}}\mathbf{v}_k^0(x)\,\mathbf{v}_i^-(x)=0, \tag{196}$$

若满足条件： i， $j=1$，2，.....， $\frac{s}{2}$，$k=l=1$，2， $p-s$，那么这些特征函数便构成因果集 $\mathcal{C}$ 的有限维希尔伯特空间 $\mathbb{C}^p$ 的一组标准正交基，从而可以将（虚部变体的）离散泡利-约当算子 $\hat{}i\Delta_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 显式谱分解为特征谱正负部分之差：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\lambda_i\mathbf{v}_i^+(x)\left(\mathbf{v}_i^+(y)\right)^*\right)-\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\lambda_i\mathbf{v}_i^-(x)\left(\mathbf{v}_i^-(y)\right)^*\right). \tag{197}$$

将虚离散泡利-约当算子$i\hat{}\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)$的特征谱正则地分解为正、负两部分，可将其视为连续克莱因-戈尔登算符解空间 $\ker\left(\Box-m^2\right)$ 的分解的离散类比；后者将平直（闵可夫斯基）时空 $\mathbb{M}^d=\mathbb{R}^{1,d-1}$中的模分为正、负频率类别。因此，与连续情形一样，我们可以利用这一特征谱分解，为因果集量子场论定义唯一的真空态，即*Sorkin-Johnston* （或 SJ）真空态[33]。通过将虚离散泡利-约当算子 $i\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)$严格限制在正本征空间，也就是由特征函数 $\mathbf{v}_i^+(x)$张成、且对应特征值为正的空间，我们便能构造离散的 Sorkin-Johnston Wightman 函数（或二点关联函数）$\hat{}\ W_{SJ}(x,y)$：

$$\hat{W}_{SJ}(x,y)=\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\lambda_i\mathbf{v}_i^+(x)\left(\mathbf{v}_i^+(y)\right)^*, \tag{198}$$

因此 Pauli-Jordan算子本身可以重构为：

$$\begin{aligned}i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)=&\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\lambda_i\mathbf{v}_i^+(x)\left(\mathbf{v}_i^+(y)\right)^*\right)-\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\lambda_i\mathbf{v}_i^+(x)\left(\mathbf{v}_i^+(y)\right)^*\right)^*\\&=\hat{W}_{SJ}(x,y)-\left(\hat{W}_{SJ}(x,y)\right)^*=\hat{W}_{SJ}(x,y)-\left(\hat{W}_{SJ}(x,y)\right)^{\intercal}.\end{aligned} \tag{199}$$

$\hat{}$ 现在，如果我们在因果集 $\mathcal{C}$ 上定义一族自由（玻色）离散标量场算符 $\phi(x)$，即 $\hat{}$ 将每个元素 $x\in\mathcal{C}$ 与一个作用于某个任意希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的算子 $\phi(x)$ 相关联，那么自伴性/厄米性的标准公理：

$$\forall x \in \mathcal{C}, \qquad \hat{\phi}(x) = \left(\hat{\phi}(x)\right)^{\dagger}, \tag{200}$$

以及相对于离散泡利-约当算子 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 的对易关系：

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, \qquad \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) = i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y), \tag{201}$$

本质上很容易推广到离散情形，而因果集对应的连续理论中满足（有质量）克莱因-戈尔登方程的条件则：

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_{+}(\mathcal{H}), \qquad \left(\Box + m^2\right)\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = 0, \tag{202}$$

要微妙一些。在连续情形中，如果我们将有质量克莱因-戈尔登算符 $\left(\Box + m^2\right)$作用于前文讨论的泡利-约当算符公理中出现的对易子，那么很容易推得（正如 Noldus[32]所强调的）满足有质量克莱因-戈尔登方程意味着所得算子 $\left(\Box + m^2\right)\hat{\Phi}(\mathbf{x})$ 必须与所有 $\hat{\Phi}(y)$ 场算符对易：

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}_{+}(\mathcal{H}), \qquad \left[\left(\Box + m^2\right)\hat{\Phi}(\mathbf{x}), \hat{\Phi}(\mathbf{y})\right] = \left(\Box + m^2\right) i\hat{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \tag{203}$$

在因果集情形中，我们现在可以引入一个 p 维向量$\mathbf{w}$，使得：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}} \circ \mathbf{w}(x) = \sum_{y \in \mathcal{C}} i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{w}(y) = \mathbf{0}, \tag{204}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 进而可以利用上述离散泡利-约当算符公理中的对易子，将其改写为因果集场算符 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的形式：

$$i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}} \circ \mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\left(\sum_{x' \in \mathcal{C}} \mathbf{w}(x')\hat{\phi}(x')\right), \hat{\phi}(y)\right] = \left((\mathbf{w}(x))^{\intercal} \circ i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\right)(y) = \mathbf{0}, \tag{205}$$

由此我们可以推导出因果集对（有质量）克莱因-戈尔登方程公理的类比，即保证任何由 $\phi(x)$ 离散场算符构成、且与所有 $\phi(y)$ 离散场算符对易的线性组合必定恒等于零的$\hat{}$公理，即：

$$\forall x \in \mathcal{C}, \qquad \sum_{y \in \mathcal{C}} i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{w}(y) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{x' \in \mathcal{C}} \mathbf{w}(x')\,\hat{\phi}(x') = 0. \tag{206}$$

因此，因果集场算符 $\phi(x)$ 使我们能够构造量子场论中各种熟悉算子族的离散类比。正如 Johnston [30][31][32]，首先所展示的，这些算子族包括产生与湮灭算符 $(\hat{a}_i)^{\dagger}$ 和 $\hat{a}_i$，我们可以分别根据特征谱的正负部分将它们定义如下：

$$(\hat{a}_i)^{\dagger} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{v}_i^{+}(x)\,\hat{\phi}(x), \qquad \text{and} \qquad \hat{a}_i = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{v}_i^{-}(x)\,\hat{\phi}(x), \tag{207}$$

对于 $i = 1, 2, \ldots, \frac{s}{2}$，并且 s（如上所述）为离散 Pauli-Jordan算子 $i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 的虚部变体的秩。从这里可以轻松验证，在连续量子场论中定义产生与湮灭算符的标准对易关系：

$$\left[(\hat{a}_i)^{\dagger}, (\hat{a}_j)^{\dagger}\right] = 0, \qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \qquad \left[\hat{a}_i, (\hat{a}_j)^{\dagger}\right] = \delta_{ij}, \tag{208}$$

成立，这是由假定特征函数$\mathbf{v}_i^{+}(x)$、$\mathbf{v}_i^{-}(x)$和$\mathbf{v}_i^{0}(x)$构成因果集希尔伯特空间 $\mathbb{C}^p$的正交归一基直接得出的结果：

$$\begin{aligned}\left[(\hat{a}_i)^{\dagger}, (\hat{a}_j)^{\dagger}\right] = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{v}_i^{+}(x)\, i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}} \circ \mathbf{v}_j^{+}(x)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \sum_{y \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{v}_i^{+}(x)\, i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\, \mathbf{v}_j^{+}(y)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \\ = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{\lambda_j \mathbf{v}_i^{-}(x)\, \mathbf{v}_j^{+}(x)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = 0,\end{aligned} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{v}_i^{-}(x)\, i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}} \circ \mathbf{v}_j^{-}(x)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \sum_{y \in \mathcal{C}} \frac{\mathbf{v}_i^{-}(x)\, i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\, \mathbf{v}_j^{-}(y)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \\ = \sum_{x \in \mathcal{C}} \frac{-\lambda_j \mathbf{v}_i^{+}(x)\, \mathbf{v}_j^{-}(x)}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = 0,\end{aligned} \tag{210}$$

and:

$$\left[\hat{a}_i,(\hat{a}_j)^\dagger\right]=\sum_{x\in\mathcal{C}}\frac{\mathbf{v}_i^-(x)\,i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_j^+(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}=\sum_{x\in\mathcal{C}}\sum_{y\in\mathcal{C}}\frac{\mathbf{v}_i^-(x)\,i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)\,\mathbf{v}_j^+(y)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}$$
$$=\sum_{x\in\mathcal{C}}\frac{\lambda_j\mathbf{v}_i^+(x)\,\mathbf{v}_j^+(x)}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}=\delta_{ij},\quad(211)$$

对于 $i,j=1,2,\ldots,\frac{s}{2}$，如所要求的那样。此外，由于这些特征函数构成 $\mathbb{C}^p$的正交归一基，因此可以用产生与湮灭算符$(\hat{a}_i)^\dagger$ 和$\hat{a}_i$ 对场算符 $\phi(x)$作显式谱分解：

$$\hat{\phi}(x)=\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\sqrt{\lambda_i}\mathbf{v}_i^+(x)\,\hat{a}_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}}\sqrt{\lambda_i}\mathbf{v}_i^-(x)\,(\hat{a}_i)^\dagger\right),\quad(212)$$

利用离散 Pauli-Jordan算子 $i\hat{}\Delta_{\mathcal{C}}(x,y)$ 现有的谱分解，以及上文所述因果集场算符 $\phi(x)$ 与 $\hat{}\phi(y)$ 的对易关系和离散 Pauli-Jordan算子本身的对易关系之间的联系。因此，可以根据湮灭算符对 Sorkin-Johnston真空态 $|0\rangle_{SJ}\in\mathcal{H}$ 的作用形式化地定义该真空态：

$$\forall i\in\left\{1,2,\ldots,\frac{s}{2}\right\},\qquad\hat{a}_i\,|0\rangle_{SJ}=\mathbf{0},\ \text{such that}\ \langle 0|_{SJ}\,|0\rangle_{SJ}=1,\quad(213)$$

从而我们可以将 $\mathcal{H}$ 表示为一个福克空间，其基向量由产生算子作用于 Sorkin-Johnston真空态后得到的乘积给出，一般形式如下：

$$\left((\hat{a}_1)^\dagger\right)^{n_1}\left((\hat{a}_2)^\dagger\right)^{n_2}\cdots\left((\hat{a}_s)^\dagger\right)^{n_s}|0\rangle_{SJ},\qquad\text{for}\qquad i\in\left\{1,2,\ldots\frac{s}{2}\right\}\ \text{such that}\ n_i\geq 0.\quad(214)$$

为了了解因果集的给定子集（将其视为整个因果集 $\mathcal{C}$ 的约化子系统，而 $\mathcal{C}$ 在此被概念化为一个纯粹的量子力学系统）的纠缠熵，我们重新考察在连续时空中如何计算普通量子力学纠缠熵。遵循 Sorkin [3][25],，首先考虑最简单的情形：一个时空恰由两个子系统构成，每个子系统各有单个自由度，其维特曼函数如下：

$$\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle 0|\,\hat{\Phi}(\mathbf{x})\,\hat{\Phi}(\mathbf{y})\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \langle \hat{q}\hat{q}\rangle & \langle \hat{q}\hat{p}\rangle \\ \langle \hat{p}\hat{q}\rangle & \langle \hat{p}\hat{p}\rangle \end{bmatrix}, \tag{215}$$

以及 Pauli-Jordan算子：

$$\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2\mathrm{Im}\left(\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) = 2\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} \langle \hat{q}\hat{q}\rangle & \langle \hat{q}\hat{p}\rangle \\ \langle \hat{p}\hat{q}\rangle & \langle \hat{p}\hat{p}\rangle \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{216}$$

用显式矩阵形式表示，其中此处将单个自由度定义为一对正则共轭变量 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$，即满足正则对易关系的一对变量：

$$[\hat{q},\hat{p}] = i, \tag{217}$$

相应的高斯密度矩阵 ρ以 $\hat{q}$ 为基底表示为：

$$\langle \hat{q}|\,\rho\,|\hat{q}'\rangle = \exp\left(-\frac{A}{2}\left(\hat{q}^2 + (\hat{q}')^2\right) + \frac{iB}{2}\left(\hat{q}^2 - (\hat{q}')^2\right) - \frac{C}{2}\left(\hat{q} - (\hat{q}')^2\right)\right), \tag{218}$$

其中参数 A、 B和 C尚待确定； $\langle \hat{q}\hat{q}\rangle$、 $\langle \hat{q}\hat{p}\rangle$、 $\langle \hat{p}\hat{q}\rangle$和 $\langle \hat{p}\hat{p}\rangle$为相应的关联函数。若 ρ_{red} 表示从完整密度矩阵 ρ 中对一个子系统作偏迹后得到的约化密度矩阵（至少对于全局双曲时空的时空纠缠熵，需要对给定类空超曲面/柯西曲面 Σ上的一个子区域作偏迹），则可按如下方式计算标准冯·诺依曼熵 $S(\rho_{red})$：

$$S(\rho_{red}) = -\mathrm{Tr}\left(\rho_{red}\log\left(\rho_{red}\right)\right). \tag{219}$$

为了计算这一最简情形下的纠缠熵，我们采用 Bombelli、Koul、Lee 和 Sorkin[4], 提出的技术，将整个系统设想为由一对振子构成，每个振子各具有单个自由度，并分别对应湮灭算符 $\hat{a}$ 和 b，使得系统的整体态矢量 $|\psi\rangle$ 为：

$$|\psi\rangle = Ce^{\sqrt{\mu}(\hat{a})^\dagger\left(\hat{b}\right)^\dagger}|0\rangle_{\hat{a}}\otimes|0\rangle_{\hat{b}} = C\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{\frac{n}{2}}|n\rangle_{\hat{a}}\otimes|n\rangle_{\hat{b}}, \tag{220}$$

其中， μ 是一个任意参数（待确定），而 C 是如下形式的归一化常数：

$$C = \sqrt{1-\mu}. \tag{221}$$

因此，密度矩阵 ρ 和约化密度矩阵 ρ_{red} （通过对湮灭算符为 $\hat{}$ b的振子进行偏迹得到）分别为:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \qquad \text{and} \qquad \rho_{red} = \sum_{m=0}^{\infty} {}_{\hat{b}}\langle m|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle_{\hat{b}} = \sum_{m=0}^{\infty} C^2\mu^m |m\rangle_{\hat{a}}\langle m|, \tag{222}$$

因此，冯·诺依曼熵 $S(\rho_{red})$ 的形式为:

$$S(\rho_{red}) = -\mathrm{Tr}(\rho_{red}\log(\rho_{red})) = -\log(1-\mu) - \frac{\mu}{1-\mu}\log(\mu). \tag{223}$$

从薛定谔绘景来考虑这个问题，我们可以用显式坐标写出波函数 $\psi(x,\ y)$ x 和 y，至少可以确定一个乘法常数 K （选择该常数以确保态矢量 $|\psi\rangle$ 最终归一化）：

$$\psi(x,y) = K\exp\left[-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu}xy\right], \tag{224}$$

使得总 密度矩阵 $\rho[(x,\ y),\ (x',\ y')]$, 在坐标 x、 y、 x' 和 y' 下，简单地表示为 y:

$$\rho[(x,y),(x',y')] = \psi(x,y)\left(\psi(x',y')\right)^{\dagger}, \tag{225}$$

$\hat{}$ 因此，再次对具有湮灭算符 b （因而坐标为 y、 y'）的振子进行部分迹运算后，我们便得到相应的约化密度矩阵 $\rho_{red}(x,\ x')$:

$$\begin{aligned}\rho_{red}(x,x') &= \int K^2\exp\left[-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu}xy - \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{(x')^2+y^2}{2} - \frac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu}x'y\right]dy \\ &= K^2\exp\left[-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{x^2+(x')^2}{2}\right]\sqrt{\frac{\pi(1-\mu)}{1+\mu}}\exp\left[\frac{\mu(x+x')^2}{(1-\mu)(1+\mu)}\right],\end{aligned} \tag{226}$$

或者，现在选取 K，以确保波函数 $\psi(x,\ y)$ 的归一化 :

$$\rho_{red}(x,x') = \sqrt{\frac{1-\mu}{\pi(1+\mu)}}\exp\left[-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{x^2+(x')^2}{2} + \frac{\mu}{1-\mu^2}(x+x')^2\right]. \tag{227}$$

现在注意到，对于我们原来的共轭变量 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$，有：

$$\langle\hat{q}\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\hat{p}\rangle-\mathrm{Re}\left(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\right)^{2}=\frac{C}{2A}+\frac{1}{4}, \tag{228}$$

这表明，正如 Sorkin[25], 所指出的，纠缠熵应仅取决于参数 C 与 A之比，而不再依赖于参数 B （因此，不失一般性，以下可假设 $B=0$ ）。因此，将参数 A 和 C 设为：

$$A=\frac{C\left(\mu-1\right)^{2}}{2\mu},\qquad\text{and}\qquad C=\frac{2A\mu}{\left(\mu-1\right)^{2}}, \tag{229}$$

分别取为这些值，使得与熵计算相关的特定比值恰好为：

$$\frac{C}{2A}=\frac{\mu}{\left(\mu-1\right)^{2}}, \tag{230}$$

我们得到密度矩阵 $\rho_{red}(x,\ x')$，其形式使得冯·诺依曼熵 $S(\rho_{red}(x,\ x'))$ 可以相当直接地写为：

$$S\left(\rho_{red}\left(x,x'\right)\right)=-\mathrm{Tr}\left(\rho_{red}\left(x,x'\right)\log\left(\rho_{red}\left(x,x'\right)\right)\right)=-\frac{\mu\log\left(\mu\right)+\left(1-\mu\right)\log\left(1-\mu\right)}{1-\mu}. \tag{231}$$

现在可以对上文给出的参数 A和 C 的定义求逆，从而得到 μ 的以下显式形式，其中所用参数均出现在原先对 $\hat{q}$基底下高斯密度矩阵的定义中：

$$\mu=\frac{\sqrt{1+\frac{2C}{A}}-1}{\sqrt{1+\frac{2C}{A}}+1}. \tag{232}$$

现在考虑 Pauli-Jordan算子 $\hat{\Delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的逆与维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的实部之积的谱分解：

$$\begin{aligned}\left(\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right)^{-1}\mathrm{Re}\left(\hat{W}_{m}^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right)&=\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix}\langle\hat{q}\hat{q}\rangle&\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\\\langle\hat{p}\hat{q}\rangle&\langle\hat{p}\hat{p}\rangle\end{bmatrix}\right)\\&=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle\hat{q}\hat{q}\rangle&\mathrm{Re}\left(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\right)\\\mathrm{Re}\left(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\right)&\langle\hat{p}\hat{p}\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathrm{Re}\left(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\right)&-\langle\hat{p}\hat{p}\rangle\\\langle\hat{q}\hat{q}\rangle&\mathrm{Re}\left(\langle\hat{q}\hat{p}\rangle\right)\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{233}$$

我们可以立即看出，其特征值纯为虚数（因为所得矩阵是反厄米矩阵），因此可写成 $\lambda = \pm i\sigma$，其中 $\sigma \in \mathbb{R}$，从而可以将约化密度矩阵 $\rho_{red}(x,\ x')$ 的冯·诺依曼熵写为：

$$S\left(\rho_{red}\left(x,x'\right)\right) = \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\log\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) - \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\log\left(\sigma-\frac{1}{2}\right). \tag{234}$$

注意到维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 本身可以通过以下变换，由其纯实部直接得到，因此我们可以消去$\frac{1}{2}$项：

$$\hat{W}_m^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) = \mathrm{Re}\left(\hat{W}_m^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right) + \frac{i}{2}\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right), \tag{235}$$

这样，我们便可以转而考察 Pauli-Jordan算子 $\hat{\Delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的逆与完整维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的乘积的谱：

$$\left(\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right)^{-1}\hat{W}_m^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \langle\hat{q}\hat{q}\rangle & \langle\hat{q}\hat{p}\rangle \\ \langle\hat{p}\hat{q}\rangle & \langle\hat{p}\hat{p}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\langle\hat{p}\hat{q}\rangle & -\langle\hat{p}\hat{p}\rangle \\ \langle\hat{q}\hat{q}\rangle & \langle\hat{q}\hat{p}\rangle \end{bmatrix}, \tag{236}$$

显然，该算子也是斜厄米的，因此其特征值可写为 $\lambda = i\omega_{\pm}$，其中 $\omega_+,\ \omega_- \in \mathbb{R}$，满足 $i\omega_{\pm} = i\left(\frac{1}{2} \pm \sigma\right)$；此时，冯·诺依曼熵的表达式$S(\rho_{red}(x,_\ x'))$ 可简化为：

$$S\left(\rho_{red}\left(x,x'\right)\right) = \omega_+\log\left(\omega_+\right) - \omega_-\log\left(\omega_-\right). \tag{237}$$

将上文分析的情形（即由两个相同子系统构成的时空，每个子系统都只有一个自由度）视为更一般归纳构造的基本情形，我们现在考虑一个一般的维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$，并对其矩阵表示进行分块对角化，使得每个块都是一个 2×2 矩阵，其形式如前所述。因此，遵循 Sorkin[25], ，我们引入算子 $\hat{L}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$，它等于 Pauli-Jordan算子 $\hat{\Delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的逆与完整维特曼函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的乘积（相差一个因子 i）：

$$i\hat{L}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \left(\hat{\Delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\right)^{-1}\hat{W}^{(d)}{}_m(\mathbf{x},\ \mathbf{y})。 \tag{238}$$

由于存在因子 i，所有 n 特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n$ 的 $i\hat{L}(\mathbf{x}、\ \mathbf{y})$ 现在都能保证为实数，因此在一般情况下，约化密度矩阵 ρ_{red} 的冯·诺依曼熵可以写成

分块对角化中每个分块的熵之和，即：

$$S\left(\rho_{red}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\log\left(\left|\lambda_i\right|\right), \tag{239}$$

其中，每个负特征值 λ_i 都恰好与一个正特征值 $1-\lambda_i$ 配对。显然，对于一个（有限）因果集 $\mathcal{C}$，这一计算有一个自然的离散类比，其中 $\hat{L}$ 算子的离散形式，即 $L_{\mathcal{C}}(x,\ y)$，是根据离散泡利-约当算子 $\Delta_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 和 Sorkin-Johnston 维特曼函数 $\hat{W}_{SJ}(x,\ y)$ 定义的：

$$\forall x,y\in\mathcal{C},\qquad i\hat{L}_{\mathcal{C}}\left(x,y\right)=\left(\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\left(x,y\right)\right)^{-1}\hat{W}_{SJ}\left(x,y\right), \tag{240}$$

时空纠缠熵的计算与之前完全相同，使用离散 $i\hat{L}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 算子的特征值 λ_i，即通过因果集特征值方程：

$$\hat{L}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_i\left(x\right)=\sum_{y\in\mathcal{C}}\hat{L}_{\mathcal{C}}\left(x,y\right)\mathbf{v}_i\left(y\right)=\lambda_i\mathbf{v}_i\left(x\right). \tag{241}$$

然而，这一归纳论证仍忽略了一个重要的细节，即 Pauli-Jordan 算子 $\hat{\Delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$（以及其离散对应物 $\Delta_{\mathcal{C}}(x,\ y)$）通常不可逆，因为分块对角化中可能存在完全由零构成的块。可以通过修改特征值方程，使其忽略这些零块来规避这一问题，从而得到连续情形下的以下广义特征值问题：

$$\hat{W}_m^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\mathbf{v}_i=i\lambda_i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\mathbf{v}_i, \tag{242}$$

或者，在离散情形/因果集情形下：

$$\hat{W}_{SJ}\circ\mathbf{v}_i\left(x\right)=\sum_{y\in\mathcal{C}}\hat{W}_{SJ}\left(x,y\right)\mathbf{v}_i\left(y\right)=i\lambda_i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\circ\mathbf{v}_i\left(x\right)=\sum_{y\in\mathcal{C}}i\lambda_i\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\mathbf{v}_i\left(y\right). \tag{243}$$

因此，朴素特征值方法通常计算开销较小（因为唯一真正的瓶颈在于对离散泡利-约当算符 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 求逆，而借助符号线性代数软件可以较为高效地完成这一步），但稳定性差得多；而广义特征值方法的计算开销要大得多（因为它实际上需要求解一个大型线性优化问题），但稳健性也强得多。图 16 展示了这两种计算因果集

时空纠缠熵方法的比较结果。图中给出了若干撒点因果集的示例，其中离散泡利-约当算符 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 既有可逆的，也有不可逆的（分别为向菱形区域内撒点得到的 100 个和 200 个元素的因果集；该菱形区域位于 $1+1$ 维平直闵可夫斯基时空中，并在其中选取了一个边长为其一半的较小菱形子区域）。

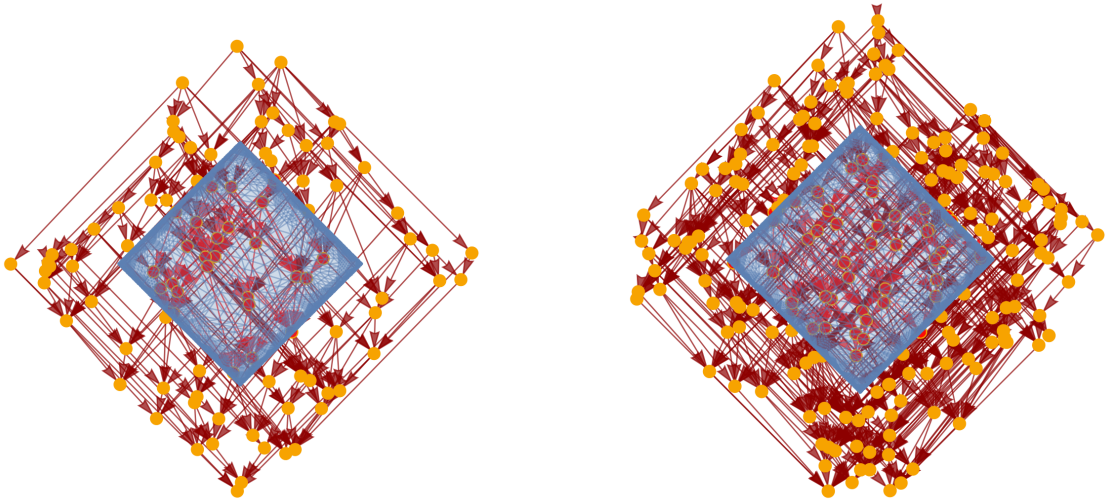

图 16：左图为有向图的传递约简（即哈斯图）。该有向图通过连接闵可夫斯基平直时空中一个 $1+1$ 维菱形区域内所有满足因果偏序关系 $\prec_{\mathcal{M}}$ 的 100 个（均匀喷洒的）点对生成。图中还选取了其中一个较小的菱形子区域（以红色显示，并在蓝色菱形中突出标示，其边长等于整体菱形边长的 $1/2$），在该子区域中，离散泡利-约当算子 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 不可逆，因此简单/朴素情况下的纠缠熵 S 未定义，而广义/稳健情况下为 0.399。右图为在相同的 $1+1$ 维闵可夫斯基平直时空区域内进行的喷洒，但撒点密度加倍（200 个点）；此时 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,y)$ 可逆，得到的纠缠熵估计值 S 在简单/朴素情况下为 0.622，在广义/稳健情况下为 0.590。

将这两种纠缠熵估算方法应用于 2000 个随机选取的因果集时，这些因果集被撒布在一个 $1+1$ 维平坦/闵可夫斯基时空的菱形区域内，并在其中选取一个边长恰为较大菱形一半的较小菱形子区域，我们得到与 Sorkin 和 Yazdi[34] 发现的相同线性关系：内部菱形区域的基数 N 与估算得到的纠缠熵 S 之间满足 $S = 0.32N - 6.64$，如图 17 所示。沿用他们的方法，我们通过截断离散泡利-约当算符 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 的谱（并由此截断 Sorkin-Johnston Wightman 函数 $\hat{W}_{SJ}(x,\ y)$ 的谱），排除对应特征模波长低于指定紫外截断的特征值对 λ_i 和 $1-\lambda_i$，以期恢复所需的对数关系；该关系表明这是（空间）面积定律，而非体积定律。适当的截断值可通过执行

对连续时空泡利–约当算子的虚数形式 $i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 进行完整的特征分解来确定，从而找出最适合排除哪些特征值对；我们采用 Johnston[32], 的方法，并将在此简要回顾。回想一下，对于任意给定的时空体积 $\mathcal{V}$，Pauli-Jordan 算子的虚数形式 $i\hat{\Delta}$ 可解释为平方可积函数 $\psi \in L^2(\mathcal{V})$ 在 $\mathcal{V}$ 上构成的希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{V})$ 上的一个积分算子，即：

$$\left(i\hat{\Delta}\psi\right)(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} i\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \tag{244}$$

对于所有函数 $\psi \in L^2(\mathcal{V})$，该积分都保证是良定义的，至少在经过特殊选择算子 $i\Delta$ 和区域 $\mathcal{V}$，以确保 $i\Delta$ 是一个希尔伯特-施密特积分核的情况下；也就是说，确保 $i\Delta$ 的模平方积分有限：

$$\int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} \left|i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 d\mathbf{y}d\mathbf{x} < \infty. \tag{245}$$

希尔伯特空间 $L^2(\mathcal{V})$ 上由此得到的算子 $i\hat{\Delta}$ 称为希尔伯特-施密特算子，因为根据上述论述，现在可以保证它是有界的，并且：

$$i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)^{\dagger} = \left(i\hat{\Delta}(\mathbf{y},\mathbf{x})\right)^{*}, \tag{246}$$

根据定义，$i\hat{\Delta}$ 也保证是自伴/厄米的[72]。这一性质还有一个可喜的结果：算子 $i\Delta$ 的特征值集合 λ_n是有限的，或至多可数无限，并满足：

$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} \left|i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 d\mathbf{y}d\mathbf{x}, \tag{247}$$

相应的特征函数 $\psi_n \in L^2(\mathcal{V})$由下式给出：

$$\int_{\mathcal{V}} i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\psi_n(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \lambda_n\psi_n(\mathbf{x}), \tag{248}$$

对于某个 n。现在，如果我们将（有质量的）克莱因-戈尔登算符 $\left(\Box + m^2\right)$ 作用于该本征函数方程两边：

$$\left(\Box+m^2\right)\int_{\mathcal{V}} i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\psi_n\left(\mathbf{y}\right)d\mathbf{y}=\int_{\mathcal{V}}\left(\Box+m^2\right)i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\psi_n\left(\mathbf{y}\right)d\mathbf{y}=\lambda_n\left(\Box+m^2\right)\psi_n\left(\mathbf{x}\right),\tag{249}$$

ˆ 并利用 Pauli-Jordan 算子的虚数形式 $i\Delta$ 根据定义满足有质量的克莱因-戈尔登方程这一事实（因为 Pauli-Jordan算子 Δ 本身是推迟格林函数与超前格林函数之差）：

$$\left(\Box+m^2\right)i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=0,\tag{250}$$

我们立即看到，对应特征值 λ_n 不为零的特征函数 $\psi_n\in L^2(\mathcal{V})$ 本身也必须满足有质量克莱因-戈尔登方程：

$$\left(\Box+m^2\right)\psi_n\left(\mathbf{x}\right)=0,\tag{251}$$

由此可将特征函数确定到一个归一化常数和一个相位因子（相差一个归一化常数和一个相位因子）。于是，（有质量） d维连续统Wightman函数 $\hat{W}_m^{(d)}(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 可由以下非零特征值-特征函数对的总和给出：

$$\hat{W}_M^{(d)}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}:\lambda_n>0}\lambda_n\psi_n\left(\mathbf{x}\right)\left(\psi_n\left(\mathbf{y}\right)\right)^*,\tag{252}$$

此外，假定特征函数 $\psi_n\in L^2(\mathcal{V})$ 遵循以下归一化约定：

$$\forall n\in\mathbb{N}:\lambda_n>0,\qquad\|\psi_n\|=1,\qquad\text{where}\qquad\|\psi_n\|^2=\int_{\mathcal{V}}\left|\psi_n\left(\mathbf{x}\right)\right|^2d\mathbf{x}.\tag{253}$$

作为连续统泡利-ˆ 约当算子 $i\Delta(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ 的虚部变体进行特征分解的示例，我们考虑配备无质量标量场 ϕ 的 $1+1$维平直（闵可夫斯基）时空 $\mathbb{M}^2=\mathbb{R}^{1,\ 1}$，下文采用光锥坐标系（$u,\ v$）：

$$u=\frac{t+x}{\sqrt{2}},\qquad\text{and}\qquad v=\frac{t-x}{\sqrt{2}},\tag{254}$$

使得 $1+1$维达朗贝尔算子 $\Box$ 可化简为以下优雅形式 ：

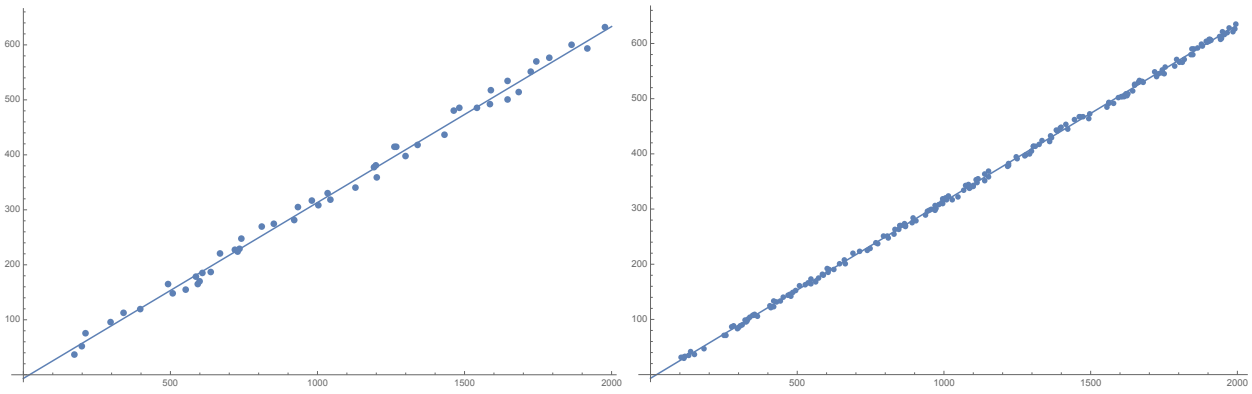

图 17：对 2000 个随机选取的因果集计算时空纠缠熵 S。这些因果集散布在一个 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空的菱形区域中，并在其中选取一个较小的菱形子区域（其边长等于整个菱形区域边长的 $1\,2$，且内部菱形区域的基数 N 介于 100 和 2000 之间），结果显示出预期的线性标度关系 $S=0.32N-6.64$。纠缠熵估计值分别采用简单/朴素方法（左）和广义/稳健方法（右）得出；图中省略了所有纠缠熵未定义的点，显示这两种方法在定量上高度一致。

$$\Box=2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}. \tag{255}$$

回顾一下，在 $1+1$维平直（闵可夫斯基）时空中，无质量推迟格林函数（G_R）$_0^{(2)}$ (x)的表达式为：

$$\left(G_R\right)_0^{(2)}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\theta(t)\,\theta\left(\tau^2\right), \tag{256}$$

对于海维赛德阶跃函数 $\theta(\alpha)$，且令 $\tau=\sqrt{t^2-x^2}$ 表示时空坐标 (t,x)，我们得到 Pauli-Jordan算子 $\Delta(u,v)$ 的如下显式形式：

$$\hat{\Delta}(u,v)=\left(G_R\right)_0^{(2)}(u,v)-\left(G_A\right)_0^{(2)}(u,v)=\frac{1}{2}\left[\theta(u)\,\theta(v)-\theta(-u)\,\theta(-v)\right]=\frac{1}{2}\left[\theta(u)+\theta(v)-1\right]. \tag{257}$$

在边长等于 L 的任意有限时空菱形区域内，即光锥坐标 $(u,\ v)$ 中的 $\mathcal{V}=[-L,L]\times[-L,L]$，显然，Pauli-Jordan 算子的虚数形式 $\hat{}i\Delta(u,\ v)$ 是希尔伯特-施密特算子，因为相关积分现在化简为：

$$\int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}}\left|i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right|^{2}d\mathbf{y}d\mathbf{x}=\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\left|i\hat{\Delta}\left(u-u',v-v'\right)\right|^{2}dv'dvdu'du=2L^{4}<\infty. \tag{258}$$

此外，我们也知道，Pauli-Jordan 算子 $i\hat{\Delta}\left(u,\ v\right)$ 的虚数形式的任意具有非零特征值的特征函数 $\psi_n \in L^2\left([-L,L]\times[-L,L]\right)$ 都必须满足无质量 Klein-Gordon 方程:

$$\Box\psi_n\left(u,v\right)=0, \tag{259}$$

因此，它们都具有以下一般形式:

$$\psi_n\left(u,v\right)=\left(\psi_n\right)_1\left(u\right)+\left(\psi_n\right)_2\left(v\right),\qquad\text{where}\qquad\left(\psi_n\right)_1,\left(\psi_n\right)_2\in L^2\left([-L,L]\right). \tag{260}$$

因此，可通过考察 Pauli-Jordan 算子的虚数形式 $i\Delta$ 作用于一组合适基函数的情形，来计算具有非零特征值的这些特征函数；依照 Johnston[32], ，我们选择 $\psi_k\left(u,\ v\right)=e^{iku}$、 $\psi_k\left(u,\ v\right)=e^{ikv}$和 $\psi_k\left(u,\ v\right)=1$, 得到:

$$\psi_k\left(u,v\right)=e^{iku},\qquad\Longrightarrow\qquad\left(i\hat{\Delta}\psi_k\right)\left(u,v\right)=\frac{L}{k}e^{iku}-\frac{L}{k}\cos\left(kL\right)+i\frac{v}{k}\sin\left(kL\right), \tag{261}$$

$$\psi_k\left(u,v\right)=e^{ikv},\qquad\Longrightarrow\qquad\left(i\hat{\Delta}\psi_k\right)\left(u,v\right)=\frac{L}{k}e^{ikv}-\frac{L}{k}\cos\left(kL\right)+i\frac{u}{k}\sin\left(kL\right), \tag{262}$$

and:

$$\psi_k\left(u,v\right)=1,\qquad\Longrightarrow\qquad\left(i\hat{\Delta}\psi_k\right)\left(u,v\right)=iL\left(u+v\right), \tag{263}$$

分别。

因此，如果我们现在引 入两族函数，记为 $\left(\psi_k\right)_1\left(u,\ v\right)$ 和 $\left(\psi_k\right)_2\left(u,\ v\right)$，其定义如下 :

$$\left(\psi_k\right)_1\left(u,v\right)=e^{iku}-e^{ikv},\qquad\text{where}\qquad k=\frac{n\pi}{L},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{264}$$

and:

$$\left(\psi_k\right)_2\left(u,v\right)=e^{iku}+e^{ikv}-2\cos\left(kL\right),\qquad\text{where}\qquad\tan\left(kL\right)=2kL,\qquad k\neq0, \tag{265}$$

ˆ 分别如此，则不难看出，Pauli-Jordan 算子的虚数形式 $i\Delta$

以所需的方式作用于这两族，即得到：

$$\left(i\hat{\Delta}\left(\psi_k\right)_1\right)(u,v)=\frac{L}{k}\left(\psi_k\right)_1(u,v),\qquad\text{and}\qquad\left(i\hat{\Delta}\left(\psi_k\right)_2\right)(u,v)=\frac{L}{k}\left(\psi_k\right)_2(u,v),\tag{266}$$

分别由此可得，$(\psi_k)_1(u,\ v)$ 和 $(\psi_k)_2(u,\ v)$ 确实是 $i\hat{\Delta}(u,\ v)$ 的有效特征函数族（对应非零特征值）。现在可通过注意到这些特征函数的 $L^2([-L,L])$ 范数为下列数值，对其进行适当归一化：

$$\left\|\left(\psi_k\right)_1\right\|^2=8L^2,\qquad\text{and}\qquad\left\|\left(\psi_k\right)_2\right\|^2=8L^2-16L^2\cos^2(kL),\tag{267}$$

此外，回顾特征值 λ_n 和特征函数$\psi_n\in L^2([-L,L]\times[-L,L])$ 必须满足以下求和条件，我们可以确认，$(\psi_k)_1(u,\ v)$ 和 $(\psi_k)_2(u,\ v)$ 构成了仅有的具有非零特征值的特征函数族：

$$\sum_n\lambda_n^2=\int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}}\left|i\hat{\Delta}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2d\mathbf{y}d\mathbf{x}.\tag{268}$$

所有非零特征值之和，与特征函数族 $(\psi_k)_1(u,\ v)$ 和 $(\psi_k)_2(u,\ v)$ 相关，其值为：

$$\sum_{n=-\infty:n\neq0}^{\infty}\left(\frac{L^2}{\pi n}\right)^2+\sum_{\tan(x)=2x:x\neq0}\left(\frac{L^2}{x}\right)^2=2L^4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2}+\sum_{\tan(x)=2x:x>0}\frac{1}{x^2}\right),\tag{269}$$

上式中的第一项求和来自特征函数族 $(\psi_k)_1(u,\ v)$（对所有 $k=\frac{n\pi}{L}$ 定义，其中$n\in\mathbb{N}$），通过巴塞尔问题的解可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi n)^2}=\frac{1}{6},\tag{270}$$

而第二个求和则来自（ψ_k）$_2$（u,v）特征函数族（该函数族定义于所有满足超越方程 $\tan(kL)=2kL$ 的 k，该方程存在可数无穷多个实数解），其计算结果为[73]:

$$\sum_{\tan(x)=2x:x>0}\frac{1}{x^2}=\frac{5}{6}.\tag{271}$$

因此，我们确实证明了：

$$\sum_n \lambda_n^2 = \sum_{n=-\infty:n\neq 0}^{\infty} \left(\frac{L^2}{\pi n}\right)^2 + \sum_{\tan(x)=2x:x\neq 0} \left(\frac{L^2}{x}\right)^2 = 2L^4$$
$$= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \left|i\hat{\Delta}\left(u-u', v-v'\right)\right|^2 dv'dvdu'du = \int_{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} \left|i\hat{\Delta}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)\right|^2 d\mathbf{y}d\mathbf{x}, \quad (272)$$

符合要求，由此成功确定了所有非零特征值（及其对应的特征函数）。因此，非零特征值 λ_k 由 $\lambda_k = \frac{L}{k}$ 给出（以及与之对应的伙伴 $1-\lambda_k$）。我们注意到，按照 Sorkin 和 Yazdi[34], 的说法，仅保留那些绝对值至少为 $\lambda_{min} \sim \frac{\sqrt{N}}{4\pi}$ 的特征值 λ（及其对应的 $1-\lambda$ 伙伴）的谱截断，是紫外截断的一种自然选择（其中 N 表示内部或外部菱形区域的基数，具体取决于被截断的是定义在内部还是外部菱形区域上的算子的特征值），因为这既符合底层因果集的喷洒密度，也符合熵面积定律预期的维数。对离散泡利-约当算子 $\hat{\Delta}_{\mathcal{C}}(x,\ y)$ 的谱施加这一截断（并相应地对 Sorkin-Johnston Wightman 函数 $W_{SJ}(x,\ y)$ 施加截断）后，我们得到内部菱形区域的基数 N 与估算的纠缠熵 S之间相同的对数关系（表明存在空间面积定律），即 $S = 0.346 \log\left(\frac{\sqrt{N}}{4\pi}\right) + 1.883$，如图 18 所示。

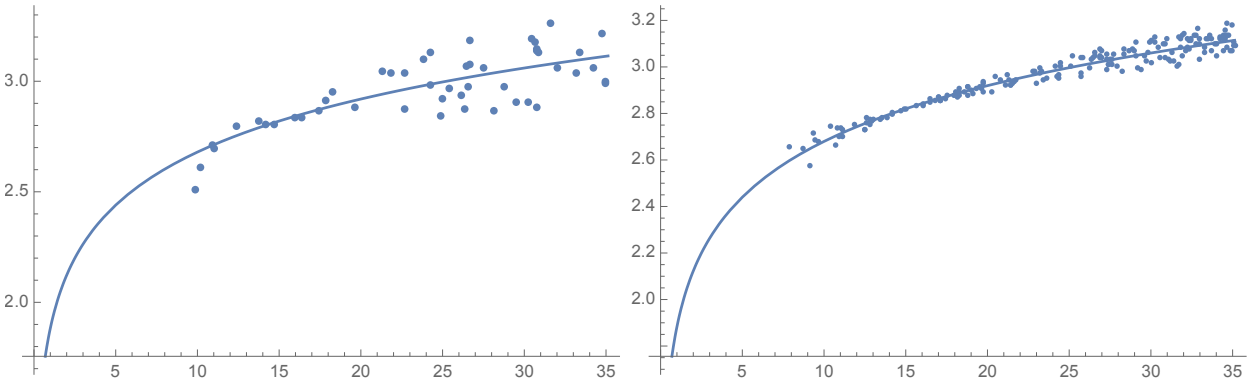

图 18：针对 2000 个随机选取并散布在一个 $1+1$ 维平直（闵可夫斯基）时空菱形区域中的因果集，计算时空纠缠熵 S。在其中选取一个较小的菱形子区域（其边长等于整体菱形边长的 $\frac{1}{2}$），内部菱形区域的基数 N 介于 100 至 2000 之间），结果显示出预期的对数标度关系 $S = 0.346 \log\left(\frac{\sqrt{N}}{4\pi}\right) + 1.883$；此处的 x 轴标为 $\frac{\sqrt{N}}{4\pi}$。纠缠熵估计值采用简单/朴素方法（左）和广义/稳健方法（右）得出；省略了所有纠缠熵未定义的点，显示两种方法在定量上高度一致。

5 Wolfram模型/超图重写案例

通过 Wolfram 模型演化动态生成算法式 因果集，是一个相对直接的过程[18]；首先从一个初始的（有限、通常为有向）超图 $H=(V,\ E)$开始，即普通（有向）图的一种推广，其中超边可以连接顶点的任意（非空）子集[12][13][14][15]:

$$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}, \tag{273}$$

其中， $\mathcal{P}$ 表示幂集函数。图19展示了简单（有向）超图的示例，它们以有限个元素间（有序）关系的集合形式抽象表示。随后，通过抽象重写规则 R 来确定 Wolfram 模型系统的动力学:

$$R: \qquad H_1=(V_1,E_1) \to H_2=(V_2,E_2), \tag{274}$$

粗略地说，其中与 H_1 所给模式匹配的子超图会被与 H_2所给模式匹配的另一个子超图取代。Wolfram 模型超图重写语义的完整严谨描述，可以通过（选择性）黏着范畴上的双推出重写规则[20][21][24]给出。图20展示了一个简单（有向）超图重写规则的示例，它以集合替换系统的形式抽象表示（即在元素间有序关系集合的子集上定义的重写规则）。图21展示了将此规则迭代应用于简单超图初始条件（由一对形如 $\{\{0,0\},\{0,0\}\}$的“自环”组成）后，Wolfram 模型系统产生的演化。请注意，在每一步中，规则都会同时应用于最大的互不重叠匹配子超图集合。



图19：简单有向超图示例，分别对应元素 $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,1\}\}$ 和 $\{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$ 之间的有限有序关系集合。

现在可以表　　呈现重写规则 b 连续应用之间的因果相互作用　　y

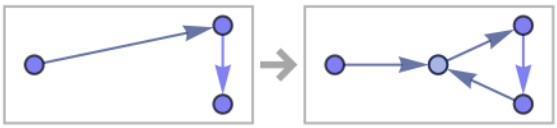

图20：一个简单超图重写规则的示例，对应于集合替换规则$\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{w,y\},\{y,z\},\{z,w\},\{x,w\}\}$。

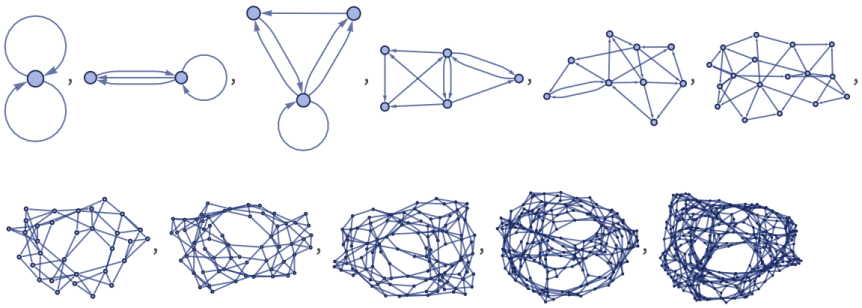

图21：从双自环初始条件$\{\{0,0\},\{0,0\}\}$出发，超图重写/集合替换规则
$\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{w,y\},\{y,z\},\{z,w\},\{x,w\}\}$的一种可能的10步演化历史。

通过因果图来表示：这是一种有向无环图，其中每个顶点对应一次重写规则的应用，每条边对应这些重写之间的因果关系。更具体地说，当且仅当满足以下条件时，有向边 $A\to B$ 存在：

$$\mathrm{In}\,(B)\cap\mathrm{Out}\,(A)\neq\varnothing, \tag{275}$$

当且仅当规则应用 B 的输入使用了由规则应用 A的输出生成的超边时，也就是说，应用 B 不可能在应用 A 先发生之前发生。再次强调，超图重写系统因果语义的完整严格描述，可以通过因果 2-范畴和多路演化因果图[24]来给出。请注意，Wolfram模型因果图的传递约简会得到相应因果集的（哈斯图）。然而，一般而言，对于给定的 Wolfram 模型规则，并不存在单一的规范重写顺序（因而也不存在单一、唯一的演化历史），因为在任意给定的时间步，都可能存在许多匹配子超图的极大不相交集合；在物理上，这对应于不存在普遍优先的时空规范选择这一事实[14][18][19]。因此，可以借助多路系统，或者更确切地说，借助多路

演化图：一种有向无环图，其中每个顶点对应于超图的一个全局状态，每条边对应一次重写。更具体地说，当且仅当存在一次重写规则应用，将超图 A 转换为超图 B时，才存在有向边 $A \to B$ 。上文所述 Wolfram 模型系统演化所对应的因果演化图和多路演化图示例，分别见图 22 和图 23；请注意，在这些图中（以及后文中），多路演化图中出现的同构超图对会通过图同构与规范化的“唯一性树”算法的广义版本检测并合并[74] 。Wolfram模型的完全广义相对论表述，取决于其底层超图重写规则是否为因果不变 （即超图重写系统中广义协变性的离散类比）；这意味着无论选择经过多路系统的哪条路径，因而无论选择哪种更新顺序／演化历史，因果图始终同构[14][18][19]。

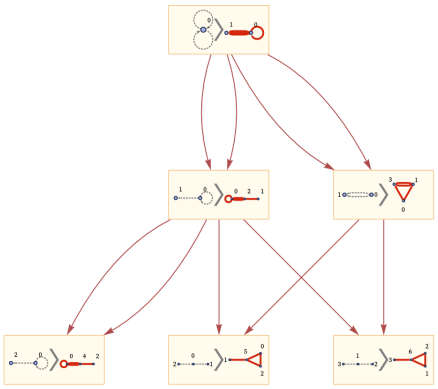

图22：从双自环初始条件$\{\{0,0\},\{0,0\}\}$出发，应用超图重写/集合替换规则 $\{\{x,y\},\{y,z\}\} \to \{\{x,y\},\{x,w\},\{y,w\},\{z,w\}\}$ 3 步后得到的因果图。

由此得到的多路系统具有伴随对称紧闭幺半范畴[20][21], 的代数结构[20][21], ，这表明它配备了对称张量积运算 $\otimes$ （这是对有限维希尔伯特空间通常张量积的推广），以及一个对合的“伴随”运算

$\dagger$ （将线性映射上的厄米伴随/共轭转置运算推广至此）以及紧结构/对偶结构 $*$ （将有限维向量空间范畴中的对偶空间概念推广至此），都遵循这类运算所应满足的标准结合性、幺元性、一致性等公理。宽泛地说，张量积结构 $\otimes$ 表示多路系统相邻分支上超图状态/重写应用的并行复合，匕首结构 $\dagger$表示多路演化边的反演，而紧结构 $*$ 表示交换

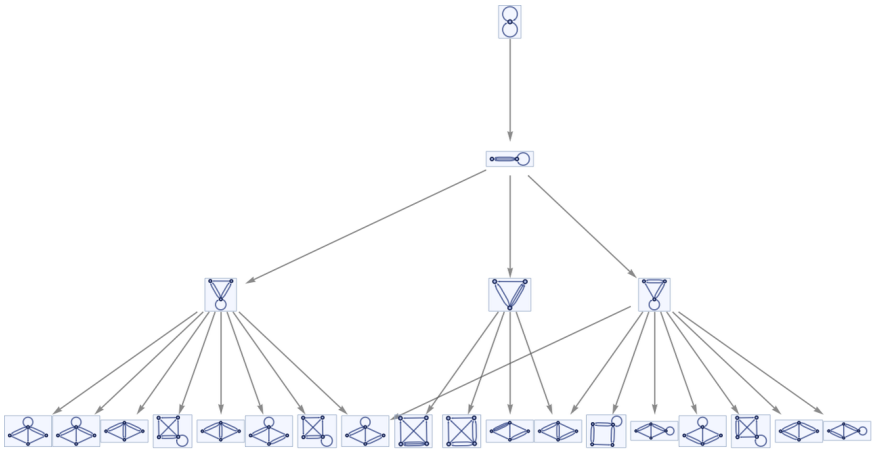

图 23：表示超图重写/集合替换规则 $\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{w,y\},\{y,z\},\{z,w\},\{x,w\}\}$ 的非确定性演化的多路演化图，其起始状态为双自环初始条件 $\{\{0,0\},\{0,0\}\}$。

给定超图中的顶点集与超边集（从而得到超图对偶的形式化概念）。这些基本的范畴论原语，便可以依照 Abramsky 和 Coecke 提出的范畴量子力学[75][76]表述思路，定义（有限维）量子力学的所有标准代数运算。给定多路演化的张量积结构，可以通过分支图形式体系清晰地可视化：多路演化图 $G_{multiway}=($ $V_{multiway},E_{multiway})$被“叶状分解”为一系列按时间排序的离散“分支状超曲面”（类似于时空叶状分解中的类空超曲面/柯西曲面） Σ_t，其中 t 是一种普适时间函数 $t:V_{multiway}\to\mathbb{Z}$，它将多路系统中的超图态映射到相应的离散时间坐标，使得分支状超曲面恰好是该函数的等值面，并满足：

$$\forall t_0\in\mathbb{Z},\qquad \Sigma_{t_0}=\{p\in V_{multiway}:t\,(p)=t_0\}\,, \tag{276}$$

and:

$$\forall t_1,t_2\in\mathbb{Z},\qquad \Sigma_{t_1}\cap\Sigma_{t_2}=\varnothing\qquad\Leftrightarrow\qquad t_1\neq t_2, \tag{277}$$

也就是说，这些超曲面不应相交。由此产生的 分支图 以组合方式表示这些抽象的分支状超曲面，具体而言，是通过有效展示在普适时间函数 t取给定值时，超图态之间的祖先距离；更确切地说，无向边 $A\leftrightarrow B$ 存在于分支

图中，当且仅当顶点 A 和 B 所对应的超图态在多路演化图中共享某个共同祖先C 。图 24 展示了这种多路“叶状分解”的一个示例，针对的是上文所述的非确定性 Wolfram 模型演化；相应的分支图／分支状超曲面序列则展示于图 25。将多路演化图／分支图中的每个顶点解释为纯本征态后，可以根据通过多路演化图并通向该状态的不同演化路径数量，为每个顶点赋予一个数值权重，并将其解释为量子振幅的（大小），使得每个分支图表示其顶点集[15]中所有本征态的瞬时叠加。如果分支图中顶点的权重表示本征态在叠加态中的振幅，那么整个分支图的组合结构就表示该叠加态的张量积结构：更具体地说，每条无向分支边表示一对已被“张量化”在一起的纯本征态，因此它们不再构成可分离多体量子态[20][21]。为了更明确地阐释这一点，我们可以通过迭代应用平方根非门量子门来构造一个多路演化图：

$$\sqrt{NOT} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}, \tag{278}$$

到由纯本征态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$组成的初始叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$。在图 26 中，我们看到了由此产生的多路演化图的典型“叶状分解”；在图 27 中，我们通过一系列按时间排序的分支图，观察到了本征态在由此产生的叠加态中的振幅演化，以及其张量积结构的演化。

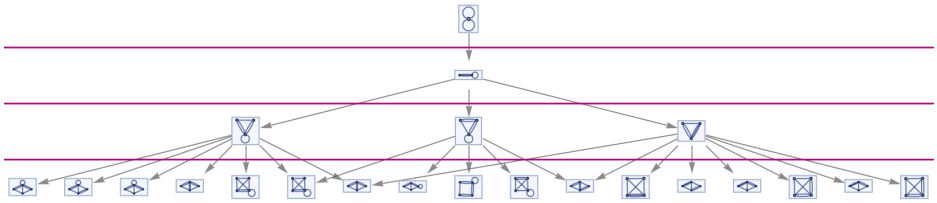

图 24：多路演化图的一种典型“叶状分解”，该图表示从双自环初始条件 $\{\{0,0\},\{0,0\}\}$ 出发，按照超图重写/集合替换规则 $\{\{x,y\},\{y,z\}\} \to \{\{w,y\},\{y,z\},\{z,w\},\{x,w\}\}$ 进行的非确定性演化。

由于分支图的组合结构与量子态的张量积结构之间存在这种对应关系，当其顶点集的基数趋于无穷大时，分支图上诱导出的度量/线元收敛至[15][20]:

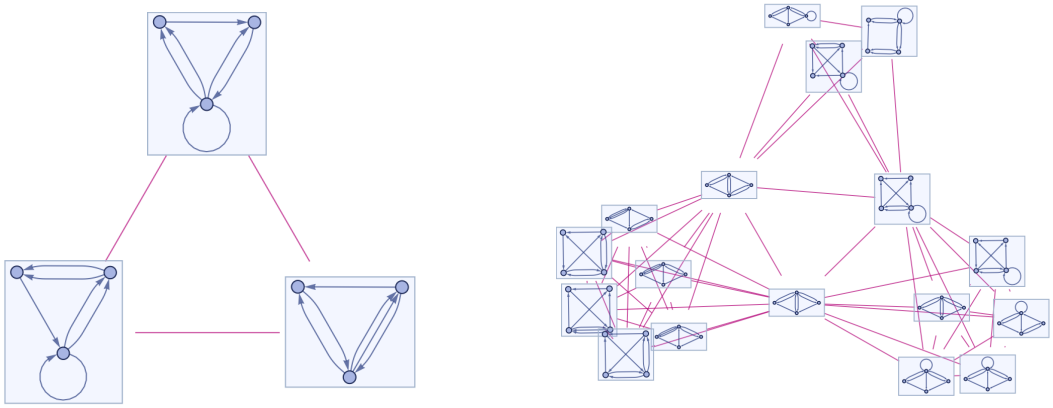

图 25：与多路演化图的一种典型“叶状分解”相对应的分支图时间序列，该多路演化图表示超图重写/集合替换规则 $\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{w,y\},\{y,z\},\{z,w\},\{x,w\}\}$ 的非确定性演化，起始于双自环初始条件 $\{\{0,0\},\{0,0\}\}$。

$$ds^2=\frac{\langle d\psi|d\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}-\frac{\langle d\psi|\psi\rangle\langle\psi|d\psi\rangle}{\left(\langle\psi|\psi\rangle\right)^2},\tag{279}$$

其中， $|\psi\rangle$ 表示一个纯态:

$$|\psi\rangle=\sum_{k=0}^{n}Z_k\,|e_k\rangle=[Z_0:Z_1:\cdots:Z_n],\tag{280}$$

$|d\psi\rangle$ 表示其无穷小变化，而 $\{|e_k\rangle\}$ 是某个 n维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的标准正交基集。我们可以看到，这无非是复射影希尔伯特空间 $\mathbb{CP}^n$ 上（线元的）*Fubini- Study*度量的一个特例:

$$ds^2=\frac{|\mathbf{Z}|^2\,|d\mathbf{Z}|^2-\left(\bar{\mathbf{Z}}\cdot d\mathbf{Z}\right)\left(\mathbf{Z}\cdot d\bar{\mathbf{Z}}\right)}{|\mathbf{Z}|^4}=\frac{Z_\alpha\bar{Z}^\alpha dZ_\beta z\bar{Z}^\beta-\bar{Z}^\alpha Z_\beta dZ_\alpha\bar{Z}^\beta}{\left(Z_\alpha\bar{Z}^\alpha\right)^2},\tag{281}$$

其中 $\mathbf{Z}=[Z_0,\ldots,Z_n]$ 充当射影簇的齐次坐标。为明确这种极限分支度量与量子纠缠标准度量之间的联系，我们遵循 Cocchiarella 等人[41] 针对一般有限维混合量子系统构造纠缠距离的方法。请注意，在下文中，我们使用上下张量指标并非为了区分分量的逆变变换与协变变换，而是为了区分矩阵族和向量族的索引（上标）与这些族中元素的分量 索引（下标）；例如，按照我们的记号约定， A^μ 表示矩阵族 $\{A^\mu\}_\mu$中的第 μ 个矩阵， A^μ_{ij} 表示

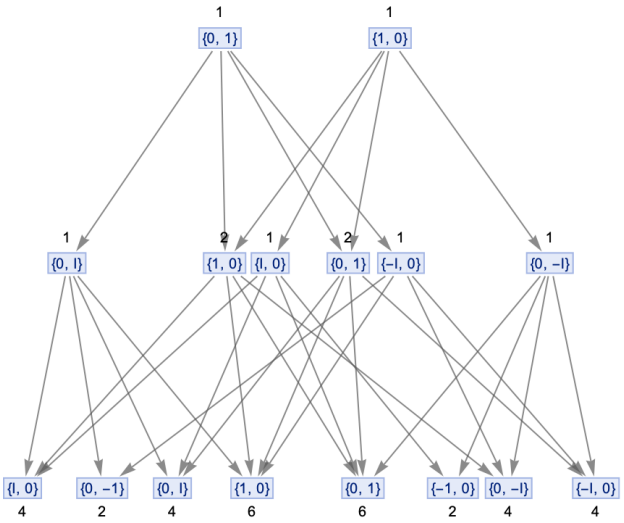

图 26：表示平方根非门量子门（$\sqrt{NOT}$）量子演化的多路演化图。该量子门作用于纯本征态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的初始叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$；顶点权重对应于通向给定状态的不同演化路径数量（即相应振幅的大小）。

该矩阵中的第 (i, j) 个元素，而 $\mathbf{A}_i^\mu$ 表示该矩阵中位于 i 位置的行向量，等等。假设总希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 可分解为 M 个有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{d_\mu}$的张量积，且每个空间的维数均为 d_μ（对于 $\mu = 0, \mathbf{1}, \ldots M-1$）：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d_0} \otimes \mathcal{H}_{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{d_{M-1}}, \tag{282}$$

我们可以通过以下方式测量 $\mathcal{H}$ 中一般态 $|s\rangle$ 的纠缠 $E(|s\rangle)$：

$$E(|s\rangle) = \sum_{\mu=0}^{M-1} \left[\mathrm{tr}\left(A^\mu\right) - 2\left(d_\mu - 1\right)\right], \tag{283}$$

其中， A^μ 构成一组 M 矩阵，其显式分量如下：

$$A_{ij}^\mu = \langle s| T^{\mu i} T^{\mu j} |s\rangle - \langle s| T^{\mu i} |s\rangle \langle s| T^{\mu j} |s\rangle, \tag{284}$$

其中， $T^{\mu\ell}$ 是广义盖尔曼矩阵：一组 $d_\mu^2 - 1$ 矩阵，每个矩阵的维数为 $d_\mu \times d_\mu$，构成与特殊酉群 $SU(d_\mu)$相关的李代数 $\mathfrak{su}(d_\mu)$生成元的基本表示，其中 $d_\mu \geq 2$。具体而言，如果我们定义 E^{jk}（其中 j， $k = 1$，……，d_μ）为一个矩阵，其第（j， k）个元素为 $\mathbf{1}$，其余位置均为 $\mathbf{0}$，那么我们可以将广义盖尔曼矩阵直接写成如下形式的一组对称矩阵：

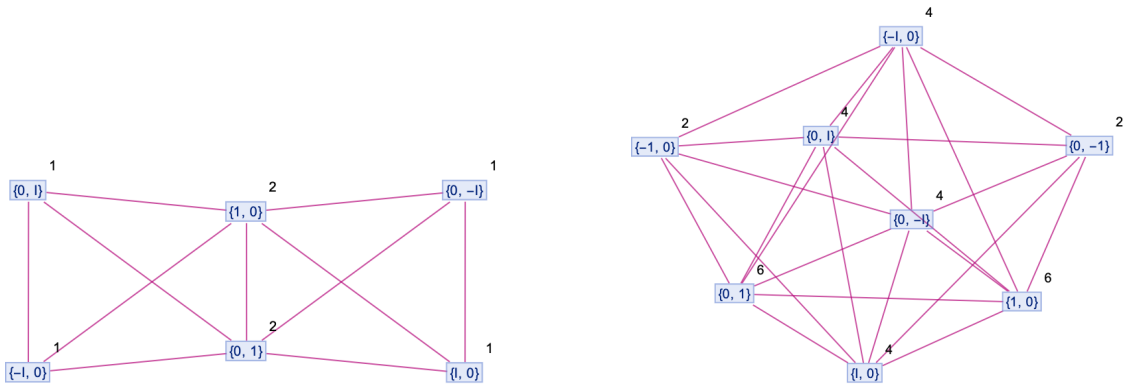

图 27：与多路演化图的一种典型“叶状分解”相对应的分支图时间序列，该多路演化图表示平方根非门量子门（$\sqrt{NOT}$）作用于纯本征态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的初始叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 所产生的量子演化；顶点权重对应于通向给定状态的不同演化路径的数量（即相应振幅的大小）。

$$T^{\mu\ell} = \left(E^{jk} + E^{kj}\right), \tag{285}$$

其中：

$$\ell = 2\,(k-j) + (j-1)\,(2d_\mu - j) - 1, \qquad j = 1, \ldots, d_\mu - 1, \qquad k = j+1, \ldots, d_\mu, \tag{286}$$

一组形式如下的反对称矩阵：

$$T^{\mu\ell} = -i\left(E^{jk} - E^{kj}\right), \tag{287}$$

其中：

$$\ell = 2\,(k-j) + (j-1)\,(2d_\mu - j), \qquad j = 1, \ldots, d_\mu - 1, \qquad k = j+1, \ldots, d_\mu, \tag{288}$$

以及一组形式如下的对角矩阵：

$$T^{\mu\ell} = \sqrt{\frac{2}{k\,(k+1)}}\left[\left(\sum_{j=1}^{k} E^{jj}\right) - kE^{k+1,k+1}\right], \tag{289}$$

其中：

$$\ell = d_\mu \left(d_\mu - 1\right) + k, \qquad k = 1, \ldots, d_\mu - 1. \tag{290}$$

这个广义定义分别在 $d_\mu = 2$ 和 $d_\mu = 3$ 情况下重现了标准的泡利矩阵和盖尔-曼矩阵。

要证明 $E(|s\rangle)$ 确实满足纠缠单调量[41], 所需的公理，只需证明 $E(|s\rangle)$ 的值有上下界；其最小值（$E(|s\rangle) = 0$）在 $|s\rangle$ 为完全可分态时取得，最大值则在 $|s\rangle$ 为最大纠缠态时取得；此外，还需证明对 $E(|s\rangle)$ 应用局域酉算符[2]后，其值保持不变。首先，由广义盖尔曼矩阵 $T^{\mu k}$满足的以下一般恒等式可得:

$$\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1} T^{\mu k} T^{\mu k} = \frac{2\left(d_\mu^2 - 1\right)}{d_\mu} \mathbb{I}, \tag{291}$$

wh其中 $\mathbb{I}$ 表示恒等张量，我们可以直接将矩阵 A^μ 的迹表示为 :

$$\operatorname{tr}\left(A^\mu\right) = \frac{2\left(d_\mu^2 - 1\right)}{d_\mu} - \sum_{k=1}^{d_\mu^2-1} \left(\langle s| T^{\mu k} |s\rangle\right)^2, \tag{292}$$

因此，我们可以将总体纠缠度量 $E(|s\rangle)$ 表示为:

$$E\left(|s\rangle\right) = \sum_{\mu=0}^{M-1} \left[\frac{2\left(2_\mu - 1\right)}{d_\mu} - \sum_{k=1}^{d_\mu^2-1} \left(\langle s| T^{\mu k} |s\rangle\right)^2\right]. \tag{293}$$

此外，对于归一化态 $|s_\mu\rangle \in \mathcal{H}_{d_\mu}$，广义盖尔曼矩阵 $T^{\mu k}$ 满足以下恒等式:

$$\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1} \left(\langle s_\mu| T^{\mu k} |s_\mu\rangle\right)^2 = \frac{2\left(d_\mu - 1\right)}{d_\mu}, \tag{294}$$

也就是说，整个矩阵集合中绝对值最大的特征值为 $\sqrt{2(d_\mu - 1)}$，因此可得出关于 A^μ 的迹的以下界:

$$\operatorname{tr}\left(A^\mu\right) \geq \frac{2\left(d_\mu^2 - 1\right)}{d_\mu} - \frac{2\left(d_\mu - 1\right)}{d_\mu} = 2\left(d_\mu - 1\right), \tag{295}$$

因此:

$$\operatorname{tr}\left(A^{\mu}\right)-2\left(d_{\mu}-1\right)\geq 0, \qquad \Longrightarrow \qquad E\left(|s\rangle\right)\geq 0, \tag{296}$$

因为 $E(|s\rangle)$ 化简后为非负实数之和，符合要求。只有当 $|s\rangle$ 是基向量的归一化张量积时，才能取得这个最大绝对特征值；而这只有在 $|s\rangle$ 是如下形式的完全可分态时才有可能：

$$|s\rangle=|s_0\rangle\otimes\cdots\otimes|s_{M-1}\rangle\,, \tag{297}$$

在这种情况下，$\operatorname{tr}\left(A^{\mu}\right)=2\left(d_{\mu}-1\right)$，因此 $E\left(|s\rangle\right)=0$。其次，由于纠缠度量 $E(|s\rangle)$ 定义中的第二项 $\sum_{k=1}^{d_{\mu}^{2}-1}\left(\langle s|\,T^{\mu k}\,|s\rangle\right)^{2}$ 是一组非负实数之和，因此 $E(|s\rangle)$ 的上界为：

$$E\left(|s\rangle\right)\leq\sum_{\mu=0}^{M-1}\frac{2\left(d_{\mu}-1\right)}{d_{\mu}}, \tag{298}$$

该上界仅在最大纠缠态 $|s\rangle$ 下取得，因为只有此时广义盖尔曼矩阵 $T^{\mu k}$ 才满足以下恒等式：

$$\forall\mu\in\{0,\ldots M-1\}\ \text{ and }\ k\in\left\{1,\ldots,d_{\mu}^{2}-1\right\},\qquad\langle s|\,T^{\mu k}\,|s\rangle=0, \tag{299}$$

因此：

$$E\left(|s\rangle\right)=\sum_{\mu=0}^{M-1}\frac{2\left(d_{\mu}-1\right)}{d_{\mu}}, \tag{300}$$

如所需。

最后，若 $|s\rangle\in\mathcal{H}$ 是一个归一化态，且 U^{μ} 表示作用于张量积中第 μ 个子系统的局部酉算子，其一般形式为：

$$U^{\mu}:\mathcal{H}_{d_{\mu}}\rightarrow\mathcal{H}_{d_{\mu}}, \tag{301}$$

即，U^{μ} 是 $SU\left(d_{\mu}\right)$中的任意元素（假设行列式为 1），那么在 U^{μ}的作用下，广义盖尔曼矩阵 $T^{\mu k}$ 具有以下不变性：

$$\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1}\left(\langle s|\left(U^\mu\right)^\dagger T^{\mu k}U^\mu|s\rangle\right)^2=\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1}\sum_{\alpha=1}^{d_\mu^2-1}\left(n_\alpha^k\right)^2\left(\langle s|T^{\mu\alpha}|s\rangle\right)^2=\sum_{\alpha=1}^{d_\mu^2-1}\left(\langle s|T^{\mu\alpha}|s\rangle\right)^2\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1}\left(n_\alpha^k\right)^2, \tag{302}$$

其中， n_α^k 表示单位向量的分量（见下文），因此:

$$\sum_{\alpha=1}^{d_\mu^2-1}\left(\langle s|T^{\mu\alpha}|s\rangle\right)^2\sum_{k=1}^{d_\mu^2-1}\left(n_\alpha^k\right)^2=\sum_{\alpha=1}^{d_\mu^2-1}\left(\langle s|T^{\mu\alpha}|s\rangle\right)^2. \tag{303}$$

因此，我们的纠缠度量 $E(|s\rangle)$ 在此类局域幺正变换下保持不变。于是，给定一族作用于 $|s\rangle$ 的此类算子 U^μ for $\mu=0,\ \ldots,M-1$，我们得到以下共享相同纠缠度的状态等价类:

$$|U,s\rangle=\prod_{\mu=0}^{M-1}U^\mu|s\rangle, \tag{304}$$

并由此得到以下状态的无穷小变化的等价类 s:

$$|dU,s\rangle=\sum_{\mu=0}^{M-1}d\tilde{U}^\mu|U,s\rangle. \tag{305}$$

这个状态等价类使我们能够推导出纠缠度量 $E(|s\rangle)$ 与分支图上原始的极限 Fubini-Study 度量之间的关系:

$$ds^2=\langle d\psi|d\psi\rangle-\frac{1}{4}\left(|\langle\psi|d\psi\rangle-\langle d\psi|\psi\rangle|\right)^2, \tag{306}$$

˜因为第 μ 个子系统 dU^μ 上的无穷小 $SU(d_\mu)$ 变换可以写成以下形式:

$$d\tilde{U}^\mu=-i\left(\mathbf{n}^\mu\cdot\mathbf{T}^\mu\right)d\xi_\mu, \tag{307}$$

其中，$\mathbf{n}^\mu$ 是 $\mathbb{R}^{d_\mu}$ 中的一个单位向量，而$\mathbf{T}^\mu$ 表示由 $\mathfrak{su}(d_\mu)$ 李代数的生成元 $T^{\mu\alpha}$、 $\alpha=1$、.....、 d_μ^2-1构成的向量。因此，Fubini-Study度量张量 $g(\mathbf{v})$的分量$g_{\mu\nu}(\mathbf{v})$可写为:

$$\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}(\mathbf{v})\,d\xi_\mu d\xi_\mu=\sum_{\mu,\nu}\left(\langle s|\left(\mathbf{v}^\mu\cdot\mathbf{T}^\mu\right)\left(\mathbf{v}^\nu\cdot\mathbf{T}^\nu\right)|s\rangle-\langle s|\left(\mathbf{v}^\mu\cdot\mathbf{T}^\mu\right)|s\rangle\langle s|\left(\mathbf{v}^\mu\cdot\mathbf{T}^\nu\right)|s\rangle\right)d\xi_\mu d\xi_\nu, \tag{308}$$

其中， $\mathbb{R}^{d_\mu}$ 中的单位向量$\mathbf{v}^\mu$ 只是$\mathbf{n}^\mu$的旋转：

$$\mathbf{v}^\nu \cdot \mathbf{T}^\nu = (U^\nu)^\dagger \, \mathbf{n}^\nu \cdot \mathbf{T}^\nu U^\nu. \tag{309}$$

这给出了以下明确关系：一般态 $|s\rangle$ 的 Fubini-Study度量张量的分量 $g_{\mu\mu}(\mathbf{v}^\mu)$ 与由广义盖尔曼矩阵 $T^{\mu k}$ 导出的矩阵 A^μ 的分量 A^μ_{ij} 之间存在如下关系：

$$g_{\mu\mu}\left(\mathbf{v}^\mu\right) = \sum_{i,j} v_i^\mu v_j^\mu A_{ij}^\mu, \tag{310}$$

因此证明了矩阵 A^μ 的迹（从而纠缠单调量 $E\left(|s\rangle\right)$）与分支图上的极限 Fubini-Study 度量 $g(\mathbf{v})$ 之间存在单调关系。

然而，为了对通过分支图计算得到的纠缠熵与通过 Sorkin-Johnston 构造计算得到的纠缠熵进行系统的数值比较，首先需要将分支图方法改写为显式协变形式（目前，将 Wolfram 模型多路系统分解为一系列分支图——每个分支图由一组离散类空超曲面构成——等同于选定一种优选的时空规范，因此与定义合理时空熵概念所需的协变性不相容）。利用因果多路系统的形式体系，可以非常自然地实现这一点。在这种系统中，多路演化图的每个顶点对应的并非某个特定的超图态（因而也不是某个特定的类空超曲面），而是超图重写系统截至该点的完整因果历史（因而对应于离散时空中的一个延展区域）[18]。由此，因果多路系统（它们实际上表示给定离散时空的所有可能因果历史的叠加态）构成了因果集理论中经典和量子序贯增长动力学的推广。图28展示了一个这样的因果多路系统，它由一条简单 Wolfram 模型规则的非确定性演化生成，实际上表示了某个离散（算法）时空的若干种可能因果历史的叠加态。利用相应的因果分支图，可以表示将这些因果历史“因子分解”或“分解”为经典离散时空的张量积（进而分解为“单路”因果图，即对应于穿过多路系统的单一演化路径选择的因果图），如图29所示。我们选取具有给定超图签名的 Wolfram 模型规则的随机样本（本例中为 $2_2 \to 4_2$ 签名，表示输入由两个元数为 2 的超边构成，输出由四个元数为 2 的超边构成），并

在非确定性演化所选规则后，从所得因果分支图中随机选取一对因果历史。随后，可以利用前一节基于 Sorkin-Johnston 构造推导出的广义特征值算法，计算这两个离散时空（视为因果集）之间的纠缠熵；也可以按照上述方法，仅通过确定相应因果分支图中这两个离散时空之间的分支距离，计算另一种纠缠熵。图30展示了这两种方法的数值比较，清晰地呈现了算法生成的因果集的两种离散时空纠缠熵概念之间预期的单调关系，并证实了此前在 [77] 中获得的初步数值结果。

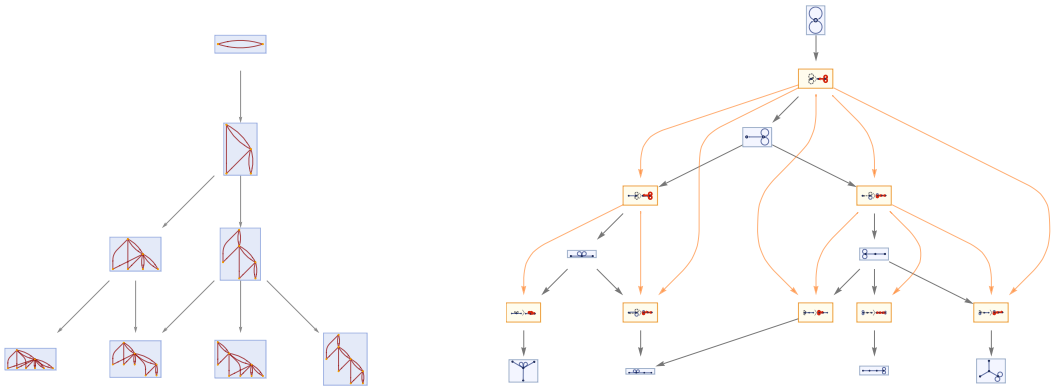

图28：左侧是因果多路演化图，表示超图重写／集合替换系统 $\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{x,y\},\{y,z\},\{z,w\}\}$ 从双自环初始条件 $\{\{0,0\},\{0,0\}\}$ 开始的非确定性演化。右侧是同一系统对应的多路演化因果图（演化边以灰色显示，因果边以橙色显示）。



图29：左侧是因果分支图，对应于因果多路演化图的一种典型“叶状分解”；该图表示超图重写／集合替换系统 $\{\{x,y\},\{y,z\}\}\to\{\{x,y\},\{y,z\},\{z,w\}\}$ 从双自环初始条件$\{\{0,0\},\{0,0\}\}$ 开始的非确定性演化。右侧是同一系统对应的多路因果图（根据相应希尔伯特空间的张量积结构，将因果分支图中的各个因果图“粘合”在一起而得到）。

请注意，由于　由于演化因果多路系统的　y

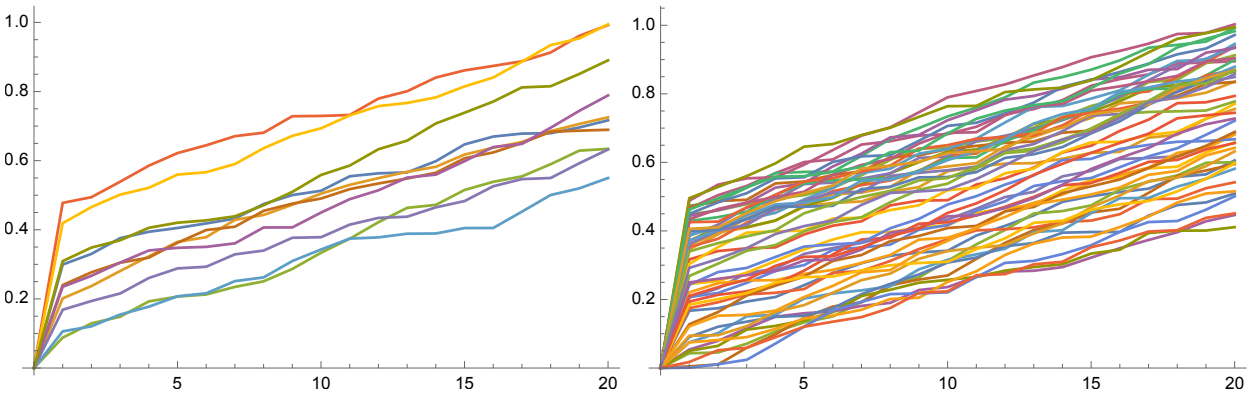

图30：对超图规则签名 $2_2 \to 4_2$ 的 10 个（左）和 50 个（右）随机选取的 Wolfram 模型演化计算时空纠缠熵 S；纵轴表示使用上一节详述的广义特征值方法计算的纠缠熵，横轴表示使用分支图/Fubini- Study度量距离计算的纠缠熵，结果显示两种方法之间存在稳健的单调一致性。

系统需要大量时间步，计算成本相当高昂，因此我们在生成这些结果时采用了蒙特卡罗抽样方法，以便更直接地在大规模并行超级计算机架构上执行计算。更具体地说，每个并发线程都会计算整体因果多路系统的一条不同（随机选取的）演化历史，并将各线程的结果组装起来，作为一个（相对廉价的）后处理步骤。随后继续抽样，直至组装后的因果多路系统似乎达到稳态构型。

6 总结

鉴于 Wolfram 模型演化实际上为因果集的自然生成提供了一种显式的算法动力学[18], ，离散量子引力的两种方法具有许多形式上的共同特征，或许并不令人意外。然而，两种看似截然不同的定义离散时空上量子场论的方法（一种本质上是为因果集配备一整套定义在其元素上的代数场论工具，另一种则是采用一种直接的组合方法，基于超图重写方法本身的非确定性动力学），竟能在诸如确定一般算法生成时空中的时空纠缠熵这样基本的计算中得出等价结果，这既颇为令人惊讶，也相当令人鼓舞。此外，这些结果或许暗示着某种更深层的潜在原理：如前所述，在一般 Wolfram 模型多路系统上对量子力学的标准表述

实际上通过假定将其分解为一系列按时间排序的分支图，且每个分支图都由一组瞬时类空超曲面组成，从而破坏了协变性。正如我们所展示的，一旦通过将普通多路系统提升为因果多路系统（其中因果分支图现在由延展的离散时空区域构成）重新引入显式协变性，同一套数学工具便会立即导出一种天然不存在紫外发散的代数量子场论；其二点关联函数在解析和数值上均与通过因果集量子场论中的 Sorkin-Johnston 构造得出的结果一致，而且无需对离散算子的谱施加事后截断。这引出了一个极具诱惑力的猜想：在因果多路演化图上得到的代数量子场论，在某种意义上是“典范的”（具体而言，其“典范性”与普通多路演化图上得到的范畴量子力学模型相同，即它满足范畴论意义上的某种普遍性质[20][21][24]）。值得注意的是，尽管 Wolfram 模型情形下得到的量子场论不存在紫外发散，因此无需正则化或重整化便可产生有限可观测量，但为了将所需的格林函数／传播子从整数维时空“解析延拓”到更一般的非整数维情形，仍需采用一种在形式上等价于维数正规化的程序[38] 。这或许表明存在一种相当普遍的潜在一致性条件：在某种意义上，即使转向离散时空，也无法“规避”对正则化的需求；因为，虽然对时空施加离散截断／格点正则化或许可以实现紫外有限性，但最终可能要以无法保证极限流形具有（齐次的）整数维数为代价。这意味着两种解析延拓之间的等价性不仅是数学上的，也是物理上的；尤其是，这表明理解维数正规化为何适用于费曼积分的一种方式是：它在形式上等价于从连续（整数维）时空中的紫外发散量子场论，转向离散（非整数维）时空中的紫外有限量子场论。这些猜想高度推测性十足，却也极富启发性，似乎值得运用本文提出的方法开展进一步、更系统的研究。

从实用角度来看，尽管通过因果分支图导出的量子场论在概念上可以说比 Sorkin-Johnston 构造更为优雅，至少在计算时空纠缠熵的情况下如此（部分原因是无需进行特征值截断即可得到所需的面积定律），但也值得注意的是，这种方法通常需要更多的计算资源，

因为它需要模拟整个因果多路系统的演化（其中离散并行历史的数量可能没有上限）。此外，它的通用性也明显较弱，因为计算时需要完整掌握 Wolfram 模型演化的全部多路／分支结构，因此不适用于计算通过向预定义的洛伦兹几何中喷洒而得到的因果图（例如其中的纠缠熵）；而 Sorkin-Johnston 方法的适用范围足够广，可以用于任意有限因果集（包括通过 Wolfram 模型演化算法生成的因果集）。不过，由于存在一些算法，可以构造出能够严格证明可从任意初始柯西数据[19], 模拟爱因斯坦场方程演化的 Wolfram 模型演化规则（例如通过 ADM、BSSN 或 CCZ4 初值形式），而这一点最近已通过 Gravitas框架实现，因此这项限制并不像乍看之下那么严重。

本文所述研究开辟了许多潜在的未来研究方向，其中最直接的或许是将这些方法专门应用于已知的极限时空几何，尤其是黑洞时空。在全息和弦理论语境中，时空纠缠熵与贝肯斯坦–霍金熵定律之间的联系已得到广泛研究（例如，作为反德西特/共形场论对应的一个特例）[78][79][80]。最终目标是确定，本文概述的离散时空方法是否足以完整描述时空微观态（尤其是黑洞微观态），从而能够从第一原理推导出贝肯斯坦–霍金定律等半经典结果（例如通过纯粹的计数论证）。与此相关的是，通过考察极大延拓的反德西特-施瓦西黑洞的离散模型（例如在克鲁斯卡尔–塞凯赖什坐标中，如 [19]所研究的那样），或许可以确定 ER= EPR 猜想[44][45]所预言的纠缠熵与爱因斯坦–罗森虫洞极限几何之间的关联是否也适用于离散情形[46]。由于 Wolfram 模型演化允许将时空叶状分解为破坏协变性的离散类空超曲面（纯因果集模型无法做到这一点，至少不如前者自然），因此甚至有可能像标准（连续）量子场论描述（包括弯曲时空中量子场的半经典描述）中非显式协变的纠缠熵定义那样，将量子场限制在类空超曲面上。在数学方面，人们通常认为，与纯代数方法相比，多路系统更适合用同伦[47][48] 或函子[49]方法来描述（具体而言，使用同伦类型论和函子场论的语言）。因此，若能将本文所发展的方法从海森堡（代数）图景扩展到薛定谔（函子）图景，将会非常有益

；直观而言，这相当于将对所得场论的描述从基于分支图的形式（因为分支图实际上编码了端同态代数及其同构所构成的范畴[15][20]，，正如海森堡/代数图景中所用的那样），转变为直接基于多路演化图的形式（因为多路演化图实际上编码了向量空间及其同构所构成的范畴[20][21]，，正如薛定谔/函子图景中所用的那样）。除此之外，这种重新表述或许还能为在离散时空情形下建立拓扑场论和共形场论的严格概念提供契机，例如通过阿蒂亚-塞加尔公理化[81][82][83]。最后，为了简化分析，本文仅讨论了无质量自由标量场论。扩展到有质量标量场论应该相对直接，因为我们已在前文中隐式推导出了相关的有质量离散传播子/格林函数形式。扩展到完全相互作用标量场论则更为复杂，至少初期可能需要运用微扰理论方法，研究偏离纯高斯态时四次微扰的影响。将对称福克空间扩展到反对称福克空间，进而将玻色量子场的描述扩展到费米量子场（例如通过旋量丛的离散表述），也仍是一个令人振奋的开放研究前沿。

致谢

作者谨向 Fabrizio Genovese 和 Bob Coecke 致谢，感谢他们早期就将严谨的图解方法扩展至相对论量子力学和量子场论所进行的有益交流；感谢 Shivaji Sondhi 以及牛津大学鲁道夫·佩尔斯理论物理中心允许我们展示这些成果的初步版本并提供宝贵反馈；也感谢 Stephen Wolfram 一直以来的鼓励，以及在此期间进行的许多澄清性交流。

参考文献

[1] S. Popescu and D. Rohrlich(1997)，《热力学与纠缠度量》，《物理评论*A*》**56** (5)：R3319(R)。https://arxiv.org/abs/quant-ph/9610044。

[2] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin and P. L. Knight(1997)，《纠缠的量化》，《物理评论快报》**78**(12)：2275。https://arxiv.org/abs/quant-ph/9702027.

[3] R. D. Sorkin (1983), 《视界外真空的熵》, 第十届国际广义相对论与引力会议第二卷, B. Bertotti、F. de Felice 和 A. Pascolini（编）: 734–736。https://arxiv.org/abs/1402.3589.

[4] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee and R. D. Sorkin(1986), 《黑洞熵的量子来源》, 《物理评论*D*》**34** (2): 373. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/ PhysRevD.34.373.

[5] S. Ryu, T. Takayanagi (2006), 《反德西特空间／共形场论对应中的纠缠熵全息推导》, 《物理评论快报》**96** (18): 181602. https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001.

[6] L. Bombelli, J. Lee, D. A. Meyer and R. D Sorkin (1987), 《时空作为因果集》, 《物理评论快报》**59** (5): 521. https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.59. 521.

[7] L. Bombelli and D. A. Meyer (1989年), "洛伦兹几何的起源", 《物理快报*A*》**141**(5-6): 226–228。https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037596018990474X。

[8] R. D. Sorkin (1997), "时空与因果集", 第七届*SILARG*相对论与引力会议: 经典与量子, J. C. D' Olivo、E. Nahmad-Achar、M. Rosenbaum、M. P. Ryan、L. F. Urrutia和F. Zertuche（编）: 150–173。World Scientific出版社, 新加坡。https://www2. perimeterinstitute.ca/personal/rsorkin/some.papers/66.cocoyoc.pdf。

[9] R. D. Sorkin (1997), "通往量子引力之路上的岔路", 《国际理论物理学杂志》**36**: 2759–2781。https://arxiv.org/abs/gr-qc/9706002。

[10] S. W. Hawking, A. R. King and P. J. McCarthy (1976), "一种整合因果、微分和共形结构的弯曲时空新拓扑", 《数学物理学杂志》**17**(2): 174–181。https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.522874。

[11] D. B. Malament (1977年), "连续类时曲线的类别决定了时空的拓扑", 《数学物理学杂志》 **18**(7): 1399–1404。https://aip.scitation.org/doi/10. 1063/1.523436。

[12] S. Wolfram (2002年), 《一种新科学》。伊利诺伊州尚佩恩: Wolfram Media, Inc. https://www. wolframscience.com

[13] S. Wolfram (2020), “具有表征基础物理潜力的一类模型”,《复杂系统》 **29**(2): 107–536. https://arxiv.org/abs/2004.08210.[14] J. Gorard (2020), “Wolfram模型的一些相对论与引力性质”, 《复杂系统》 **29**(2): 599–654. https://arxiv.org/abs/2004.14810.[15] J. Gorard(2020), “Wolfram模型的一些量子力学性质”, 《复杂系统》**29**(2): 537–598. https://www.complex-systems.com/abstracts/v29_i02_a02/.

[16] T. Bolognesi (2010), “基于简单计算模型的因果集”, 《非常规计算国际期刊》**6**(6): 489–524。https://arxiv.org/abs/1004.3128。

[17] T. Bolognesi (2012), “面向计算时空的算法因果集”, 可计算的宇宙, H. Zenil（编）: 451–477。World Scientific出版社。https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9789814374309_0024。

[18] J. Gorard (2020), “算法因果集与 Wolfram 模型”, *arXiv* 预印本: https://arxiv.org/abs/2011.12174。

[19] J. Gorard (2021), “通过 Wolfram 模型演化对广义相对论中的柯西问题进行超图离散化”, *arXiv* 预印本: https://arxiv.org/abs/2102.09363。

[20] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla (2020), “ZX演算与扩展超图重写系统 I: 范畴量子信息论的多路方法”, *arXiv*预印本: https://arxiv.org/abs/2010.02752。

[21] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla (2021), “ZX演算与扩展Wolfram模型系统 II: 快速图示推理及其在量子电路简化中的应用”,*arXiv*预印本: https://arxiv.org/abs/2103.15820。

[22] B. Coecke and R. Duncan(2008), “相互作用量子可观测量”, 自动机、语言与编程国际学术会议, 《计算机科学讲义》**5126**: 298–310。Springer 出版社, 柏林、海德堡。https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-70583-3_25。

[23] B. Coecke and R. Duncan(2011),《相互作用量子可观测量: 范畴代数与图示法》, 新物理学杂志 **13**(4): 043016。https://arxiv.org/abs/0906.4725.

[24] J. Gorard, M. Namuduri and X. D. Arsiwalla(2021),《利用多路因果结构对字符串图进行快速自动推理》，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2105.04057.[25] R. D. Sorkin (2014),《用（4D）场关联全局表达熵》，《物理学杂志：会议系列》第*484*卷。https://arxiv.org/abs/1205.2953.
[26] R. E. Peierls (1952),《相对论场论的对易定律》，《皇家学会会刊 *A* 辑》**214** (1117)：143–157。https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1952. 0158.[27] P. Jordan and W. Pauli Jr. (1928),《论无电荷场的量子电动力学》，*Zeitschriftf¨ur Physik* **47**：151–173。https://link.springer.com/article/10.1007/BF02055793.[28] F. Dowker and L. Glaser (2013),《不同维数下的因果集达朗贝尔算子》，《经典与量子引力》**30**(19)：195016。https://arxiv.org/abs/1305.2588.[29] R. D. Sorkin (2007),《局域性是否会在中间长度尺度失效》，《走向量子引力》，D. Oriti（编）：26–43。剑桥大学出版社。https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703099.
[30] S. Johnston (2008),《离散时空中的粒子传播子》，《经典与量子引力》**25**(20)：202001。https://arxiv.org/abs/0806.3083.[31] S. Johnston (2009),《因果集上的自由标量场费曼传播子》，《物理评论快报》**103**(18)：180401。https://arxiv.org/abs/0909.0944.[32] S. P. Johnston(2010),《因果集上的量子场》，博士论文，伦敦帝国学院。https://arxiv.org/abs/1010.5514.[33] R. D. Sorkin (2011),《历史形式下因果集上的标量场论》，《物理学杂志：会议系列》第*306*卷。https://arxiv.org/abs/1107.0698.[34] R. D. Sorkin and Y. K. Yazdi(2018),《因果集理论中的纠缠熵》，《经典与量子引力》**35**(7)：074003。https://arxiv.org/abs/1611.10281.
[35] P. Marian and T. A. Marian (2008),《Bures 距离作为对称双模高斯态纠缠度量》，《物理评论 *A*》**77** (6)：062319。https://arxiv.org/abs/0705.1138.

[36] Y. Ollivier (2007), “度量空间的里奇曲率”, Comptes Rendus Math ´ematique de l’Acad ´emie des Sciences 345 (11): 643–646. https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S1631073X07004414.[37] M. Eidi and J. Jost (2020), “有向超图的 Ollivier 里奇曲率”, 《科学报告》 10: 12466 https://arxiv.org/abs/1907.04727.[38] G. ’t Hooft and M. Veltman (1972), “规范场的正则化与重整化”, 《核物理B》44 (1): 189–213. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/ 0550321372902799.[39] J. Myrheim (1978), “统计几何”, CERN Preprint TH-2538. https://cds.cern.ch/record/ 293594?ln=en.[40] D. A. Meyer (1989), “因果集的维数”, 博士论文，麻省理工学院。https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/14328. [41] D. Cocchiarella, S. Scali, S. Ribisi, B. Nardi, G. Bel-Hadj-Aissa and R. Franzosi(2020), “任意 M 量子比特混合系统的纠缠距离”, 《物理评论A》101 (4): 042129. https://arxiv.org/abs/2003.05771.[42] J. D. Bekenstein (1972), “黑洞与第二定律”, 《新物理学杂志快报》 4 (15): 737–740. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02757029.[43] S. W. Hawking (1975), “黑洞产生粒子”, 《数学物理通讯》43 (3): 199–220. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020.[44] M. Van Raamsdonk (2010), “通过量子纠缠构建时空”, 《广义相对论与引力》42 (14): 2323–2329. https://arxiv.org/abs/1005.3035. [45] J. Maldacena and L. Susskind (2013), “纠缠黑洞的冷视界”, 《物理学进展》61 (9): 781–811. https://arxiv.org/abs/1306.0533.[46] R. Shah, J. Gorard (2019), “量子元胞自动机、黑洞热力学与量子复杂性定律”, 《复杂系统》28 (4): 393–410. https://arxiv.org/abs/1910.00578.[47] X. D. Arsiwalla, J. Gorard and H. Elshatlawy (2021), “多路（非确定性）重写系统中的同伦作为 n重范畴”, arXiv 预印本：https://arxiv.org/abs/ 2105.10822.

[48] X. D. Arsiwalla, J. Gorard (2021), “由沃尔夫勒姆模型重写系统构造的前几何空间作为同伦类型”, *arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2111.03460.[49] J. Gorard (2022), “（多）计算不可约性的函子视角”, *arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/2301.04690.[50] J. Henson (2009), “发现离散宇宙”, 空间与时间基础会议论文集。开普敦。https://arxiv.org/abs/1003.5890.
[51] D. M. T. Benincasa and F. Dowker(2010), “因果集的标量曲率”, 《物理评论快报》**104**(18): 181301. https://arxiv.org/abs/1001.2725.[52] I. Gel’fand and G. Shilov (1964), 广义函数。美国数学学会。ISBN: 978-1470426583.[53] Y. V. Egorov and M. A. Shubin (1994), 偏微分方程 *II*。Springer-Verlag 柏林、海德堡。ISBN: 978-3-540-52001-6.[54] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov (1959), 量子化场论导论第三卷。John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0471042235.[55] E. M. de Jager (1967), “克莱因-戈尔登方程的洛伦兹不变解”, 《应用数学学会期刊》**15**(4): 944–963. https://www.jstor.org/stable/2099798.[56] D. Rideout and S. Zohren (2006), “基本离散引力存在熵界的证据”, 《经典与量子引力》**23**(22): 6195–6213. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0606065.
[57] L. Bombelli (1987), “时空作为因果集”, 博士论文，雪城大学。https:// surface.syr.edu/phy_etd/88/.[58] D. C. Champeney (1987), 傅里叶变换手册。剑桥大学出版社。ISBN: 978-1139171823.
[59] N. D. Birrell and P. C. W Davies (1982), 弯曲时空中的量子场。剑桥大学出版社。ISBN: 978-0511622632.[60] S. A. Fulling (1989), 弯曲时空中的量子场论相关问题。剑桥大学出版社。ISBN: 978-1139172073.

[61] R. Forman (2003), 《单胞复形的 Bochner 方法与组合 Ricci 曲率》, 《离散与计算几何》29: 323–374。https://link.springer.com/article/10.1007/ s00454-002-0743-x。[62] Y. Ollivier(2009), 《度量空间上马尔可夫链的 Ricci 曲率》, 《泛函分析杂志》256（3）: 810–864。https://arxiv.org/abs/math/0701886。[63] Y. Ollivier (2011), 《黎曼曲率及其若干离散推广的可视化介绍》, 《度量测度空间的分析与几何：第50届高等数学研讨会（SMS）讲义》56：197–219。https://hal.inria.fr/hal-00858008/en。[64] M. Roy, D. Sinha and S. Surya (2013), 《小因果菱形的离散几何》, 《物理评论D》87（4）: 044046。https://arxiv.org/abs/1212.0631。[65] S. Khetrapal and S. Surya (2013), 《边界项对小因果菱形体积的贡献》, 《经典与量子引力》30（6）: 065005。https://arxiv.org/abs/1212.0629。[66] J. Jost (2011), 《黎曼几何与几何分析》。Springer-Verlag 柏林、海德堡。ISBN：978-3-642-21298-7。[67] A. Gray (2004), 《管状体》。Birkhäuser 巴塞尔。ISBN：978-3-7643-6907-1。[68] D. D. Reid (2003), 《因果集的流形维数：共形平直时空中的检验》, 《物理评论D》67（2）: 024034。https://arxiv.org/abs/gr-qc/0207103。[69] F. Carlson (1914), 《关于一类泰勒级数》, 博士论文, 乌普萨拉大学。[70] R. Haag and D. Kastler(1964), 《量子场论的代数方法》, 《数学物理学杂志》5（7）: 848。https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1704187。[71] A. S. Wightman and L. Gardin (1965), 《相对论量子理论中的场作为算子值分布》, Arkiv för Fysik 28（13）。https://www.osti.gov/biblio/4606723。[72] M. H. Stone(1932), 《希尔伯特空间中的线性变换》。美国数学学会。ISBN：978-0821810156。[73] M. R. Spiegel (1953), 《涉及超越方程的根的级数求和及相关应用》, 《应用物理学杂志》24（9）: 1103–1106。https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1721455。

[74] J. Gorard (2016), 《唯一性树：一种可能的图同构问题多项式方法》，*arXiv* 预印本：https://arxiv.org/abs/1606.06399。

[75] S. Abramsky and B. Coecke (2004年), 《量子协议的范畴语义》，*IEEE*计算机科学逻辑研讨会第*19*届会议论文集。芬兰图尔库：415–425。https://arxiv.org/abs/quant-ph/0402130。

[76] S. Abramsky and B. Coecke (2008), 《范畴量子力学》，《量子逻辑与量子结构手册》，K. Engesser、D. M. Gabbay 和 D. Lehmann（编）：261–323。爱思唯尔。https://arxiv.org/abs/0808.1023。

[77] J. Dannemann-Freitag (2021), 《比较Wolfram 模型与因果集纠缠熵》，*Wolfram*社区。https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2312623。

[78] R. Emparan (2006年), 《黑洞熵作为纠缠熵：一种全息推导》，《高能物理学杂志》**2006年**。https://arxiv.org/abs/hep-th/0603081。

[79] S. N. Solodukhin (2011), 《黑洞的纠缠熵》，《相对论综述》**14**(8)。https://arxiv.org/abs/1104.3712。

[80] T. Jacobson and A. Satz (2013), 《黑洞纠缠熵与重整化群》，《物理评论*D*》**87**(8)：084047。https://arxiv.org/abs/1212.6824。

[81] M. Atiyah(1988), 《三维和四维流形的新不变量》，《赫尔曼·外尔的数学遗产：纯数学研讨会论文集》**48**：258–299。https://archive.org/details/mathematicalheri0000symp/page/285/mode/2up。

[82] M. Atiyah (1988), 《拓扑量子场论》，高等科学研究所数学出版物 **68**(68)：175–186。https://link.springer.com/article/10.1007/BF02698547。

[83] G. B. Segal (1988), “共形场论的定义”, 《理论物理中的微分几何方法》，K. Bleuler 和 M. Werner（编）**250**：165–171。https://link.springer.com/ chapter/10.1007/978-94-015-7809-7_9。