arXiv:2301.12482v1 [math.LO] 29 Jan 2023

可比较的二元关系与 amalgamation 性质

Paolo Lipparini

Abstract. 若假设第一个关系比第二个关系更粗，且每个关系都满足以下性质中选定的一组：传递性、自反性、对称性、反自反性和反对称性，那么二元关系理论具有强合并性质。当加入保持所有关系的若干族一元运算时，合并性质仍然成立。因此，我们得到了有限结构类存在 Fra¨ıss´é 极限。

对于一般的可比性条件，当考虑三个或更多二元关系，或加入只保持一个关系的运算时，这些结果不再成立。

1. 引言

合并性质已被证明在代数、模型论和代数逻辑中颇有用处，例如 [CP, GG, H, KMPT, MMT]。不言而喻，二元关系在数学中十分重要，因此，研究哪些具有一个或多个二元关系的理论拥有合并性质颇有意义。经典结果给出了偏序和图的肯定答案 [F2]。

作为初步观察，我们将上述结果置于一个统一的背景下。我们考察二元关系的以下性质：传递性、自反性、对称性、反自反性和反对称性，并验证满足这些性质中任意固定子集的二元关系所构成的结构类确实具有 amalgamation 性质。

更进一步地，我们证明了：当考察一对可比较的二元关系时，即使这两个关系所满足的性质集合不同，同样的结论仍然成立。当添加保持所有关系的一元运算时，amalgamation 性质仍得以保持。这些结果并非显然，因为在考察三个或更多关系，或考察仅保持一个关系的运算时，它们通常不再成立。

2020 *Mathematics Subject Classification*: 03C52; 06A75.*Key words and phrases*: amalgamation 性质；Fra¨ıss´e 极限，可比较二元关系；保关系运算。本文的研究工作是在 G.N.S.A.G.A. 的支持下完成的。部分研究经费来自 PRIN 2012“逻辑、模型与集合”。作者感谢授予数学系（罗马第二大学）的 MIUR系项目，项目编号为 CUP E83C18000100006。

因此，我们得到相应的有限结构类具有 Fra¨ıss´e 极限；而在不存在运算的情况下，相应的理论具有模型完备化。

现在我们回顾主要定义。结构是“一阶模型” [H]的同义词。提到结构类 $\mathcal{K}$ 时，我们总是假定该类中的所有结构都具有相同的类型（=语言、=签名）。为简便起见，我们只讨论在同构下封闭的类。

若一个在同构下封闭的类 $\mathcal{K}$ 具有强 amalgamation 性质（简称 SAP），则对于任意 A、B、C $\in \mathcal{K}$，若 C $\subseteq$ A、C $\subseteq$ B 且 $C = A \cap B$，便存在结构 D $\in \mathcal{K}$，使得 A $\subseteq$D、B $\subseteq$ D。

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{D} & \\ \\ \mathbf{A} & & \mathbf{B} \qquad (\text{with } C = A \cap B) \\ \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

我们将 A、B、C 称为待合并三元组（简称待 amalgamation 三元组）。若一个理论 T 具有 SAP，则其 T 模型类具有 SAP；对于我们将要介绍的其他性质，定义方式也类似。

若一个类具有合并性质（AP），则 SAP 中的结论放宽为：存在从 A 到 D 和从 B 到 D 的嵌入，且它们在 C上相同。换言之，在 SAP 下，我们可以得到这样的 D：两个元素 $a \in A \setminus B$ 和 $b \in B \setminus A$ 绝不会被认作同一元素；若只假设 AP，则未必如此。

如果 R 是某个集合上的二元关系，我们通常用 $a\ R\ b$ 代替$R(a, b)$ 或 $(a, b) \in R$。此外，$a\ R\ b\ S\ c$ 是 $a\ R\ b$ 和 $b\ S\ c$ 的简写。

在大多数情况下，我们将证明一个比 SAP 稍强的性质。如果$\mathcal{K}$ 是一个在给定二元关系符号 R的语言中、且对同构封闭的结构类，我们称 $\mathcal{K}$ 关于 R 具有 superamalgamation 性质，即 superSAP；也就是说，只要 A、B、C $\in \mathcal{K}$ 是一个待合并的三元组，就存在一个合并结构 D $\in \mathcal{K}$见证 SAP，并且对于每个 $a \in A \setminus B$和 $b \in B \setminus A$,

(i) 如果 $a\ R_{\mathbf{D}}\ b$，则存在 $c \in C$ 使得 $a\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ b$;
(ii) 如果 $b\ R_{\mathbf{D}}\ a$，则存在 $c \in C$ 使得 $b\ R_{\mathbf{B}}\ c\ R_{\mathbf{A}}\ a$。

当关系已明确时，我们将省略对 R 的提及。超 amalgamation 性质通常是针对某种序关系 [GM], 来讨论的，但在任意二元关系 [M] 的情况下也有应用。在超 amalgamation 性质的假设中，假定 $a \in A \setminus B$ 和 $b \in B \setminus A$ 将使陈述更简洁；但请注意，许多作者采用较弱的假设 $a \in A$ 和 $b \in B$。当然，如果 R 是自反关系，这两个定义便等价，因为

例如，若 $a \in A \cap B$ 和 $a\ R\ b$，则在 (i) 中可以取 $c = a$，(ii) 的情形也类似。

如果同一语言下的结构类 $\mathcal{K}$ 具有联合嵌入性质（JEP），那么对于任意 A、B $\in \mathcal{K}$，都存在一个结构 D $\in \mathcal{K}$，以及嵌入映射ι: A $\rightarrowtail$ D 和 κ : B $\rightarrowtail$ D。从某种意义上说，JEP 可以看作 C 为空结构时 AP 的特殊情形；然而，这并不总是合理的，例如当语言中包含常量时。

如果 $\mathcal{K}$ 是可数语言中的有限生成结构类，那么 $\mathcal{K}$ 的 Fra¨ıss´é 极限是一个年龄为 $\mathcal{K}$的可数超齐次结构。详情请参见 [H 第 7 节。1] 经典例子包括有理数的有序集和随机图；它们分别是有限线性有序集类和有限图类的 Fra¨ıss´é 极限。

一阶理论 T 有模型伴随，当且仅当 T 与某个模型完备理论 T^*具有相同的全称后果。若此外 T 具有 amalgamation 性质，则理论 T^* 是 T [H]的模型完备化。

2. 一个带算子的关系

下一个命题的部分内容可由 [F1, 9.3]的证明推出。另可参见 [J，引理 3.3]。其他情形都很简单且广为人知 [F2]。该命题以相当统一的方式处理了所有情形，也涉及额外的算子；这一结果或许是新的。若 $\mathcal{K}$ 是一个结构类，则 $\mathcal{K}^{fin}$ 表示 $\mathcal{K}$中有限成员所构成的类。

命题 2.1. 考虑二元关系 R的以下性质。
1. R是传递的；2. R是自反的；3. R是对称的；4. R 是反自反的，也就是说，$x\ R\ x$ 永不成立；5. R是反对称的。

于是以下结论成立。
(A) 对每个 $P \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，具有满足相应性质的二元关系 R 的结构类 $\mathcal{K}_P$ 都具有 superSAP。(B) 对每个 $P \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，令 $\mathcal{K}_P^f$ 为添加了一元运算 f 的结构类，其中 f 保持 R，也就是说，

$$x\ R\ y\ \textit{implies}\ f(x)\ R\ f(y). \tag{2.1}$$

那么 $\mathcal{K}_P^f$ 具有 superSAP。
(C) 对每个 $P \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，令 $\mathcal{K}_P^g$ 为添加了一元运算 g 的结构类，其中 g 反转 R，也就是说，

$$x\ R\ y\ \textit{implies}\ g(y)\ R\ g(x). \tag{2.2}$$

那么 $\mathcal{K}_P^g$ 具有 superSAP。

(D) 对于每个 $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ 以及每一对集合 F、G，令 $\mathcal{K}^{F,\ G}_{P}$ 为这样一类模型：它们由 $\mathcal{K}_P$ 中的成员添加一个由 F 索引、满足 (2.1) 的一元运算集合，以及一个由 G 索引、满足 (2.2) 的一元运算集合而得。

那么 $\mathcal{K}^{F,\ G}_{P}$ 具有 superSAP。

对于 (A)–(D) 中考虑的任意一个类 $\mathcal{K}$，类 $\mathcal{K}^{fin}$ 都有一个 Fra¨ıss´e 极限；其中 (D) 还要求集合 F 和 G 是有限的。在情形 (A) 中，对于每个 $P \subseteq \{1,2,3,4,5\}$，如果 M 是 $\mathcal{K}^{fin}_P$ 的 Fra¨ıss´e 极限，那么 M 的一阶理论 Th(M) 是 ω-范畴的，并且具有量词消去；此外，Th(M) 是 $Th(\mathcal{K}_P)$ 的模型完备化。

证明。设 A、B、C 是一个 TBA 三元组（一个待合并的三元组）。(A) 的证明分为两种情形。

（A，情形 a）假设 $1 \notin P$。那么令 R 在 $A \cup B$ 上由 $R = R_{\mathbf{A}} \cup R_{\mathbf{B}}$ 定义。也就是说，当且仅当 $d\ R\ e$

$$\underline{\text{either}}\ d, e \in A \text{ and } d\ R_{\mathbf{A}}\ e, \underline{\text{or}}\ d, e \in B \text{ and } d\ R_{\mathbf{B}}\ e. \tag{2.3}$$

令 D $= (A \cup B, R)$。那么，根据构造，A $\subseteq$ D 且 B $\subseteq$ D，这里用到了 C 是 A 和 B 的子结构这一假设。如果 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$都具有自反性（对称性、反自反性、反对称性），那么 R也具有相同性质。对称性和反自反性的情形显然。对于自反性，利用假设 $D = A \cup B$。至于反对称性，假设 $R_{\mathbf{A}}$ 和$R_{\mathbf{B}}$ 都是反对称的。如果 $d\ R\ e$、$e\ R\ d$ 成立，并且这两个关系都由例如 $R_{\mathbf{A}}$见证，那么 $d = e$，因为 $R_{\mathbf{A}}$ 是反对称的。另一方面，若例如 $d\ R_{\mathbf{A}}\ e$ 且 $e\ R_{\mathbf{B}}\ d$，那么必然有 d、$e \in A \cap B = C$，因此 $d\ R_{\mathbf{C}}\ e$ 和$e\ R_{\mathbf{C}}\ d$，因为 C 是 A 和 B 的子结构。因此在这种情形下，$d = e$ 也成立，因为 $R_{\mathbf{C}}$ 是反对称的。

在这种情况下，超 amalgamation 显然成立，因为如果 $a \in A \setminus B$ 和 $b \in B \setminus A$，那么 a 和 b 就不与 R相关。

（A，情形 b）假设 $1 \in P$，特别是，$R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$ 都具有传递性。令 $d\ R\ e$，如果满足 (2.3)，或者

$$\begin{aligned} &d \in A、\ e \in B，\text{并且存在 } c \in C \text{ 使得 } d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ e，\ \mathrm{o}\quad \mathrm{r} \\ &d \in B、\ e \in A，\text{并且存在 } c \in C \text{ 使得 } d\ R_{\mathbf{B}}\ c\ R_{\mathbf{A}}\ e. \end{aligned} \tag{2.4}$$

因此在这种情况下，我们令 $R = R_{\mathbf{A}} \cup R_{\mathbf{B}} \cup (R_{\mathbf{A}} \circ R_{\mathbf{B}}) \cup (R_{\mathbf{B}} \circ R_{\mathbf{A}})$。同样，令 D $= (A \cup B, R)$。

容易验证，A 和 B 都嵌入 D。比如，如果 $d, e \in A$ 和 $d\ R\ e$由某个 $d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ e$ 见证，其中 $c \in C$，那么必有 $e \in A \cap B = C$，因此 $c\ R_{\mathbf{C}}\ e$，因为 C 嵌入 B；于是 $c\ R_{\mathbf{A}}\ e$，因为 C 嵌入 A，因此$d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{A}}\ e$，并且根据 $R_{\mathbf{A}}$的传递性有 $d\ R_{\mathbf{A}}\ e$。

不难验证，R 是传递的。事实上，我们将证明R 是包含 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$的最小传递关系，也就是说，

$$R = \bigcup_{n \geq 1} R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n, \quad \text{where each } R_k \text{ is either } R_{\mathbf{A}} \text{ or } R_{\mathbf{B}}. \tag{2.5}$$

由于 $R_{\mathbf{A}}$ 是传递的，因此 $R_{\mathbf{A}} \circ R_{\mathbf{A}} \subseteq R_{\mathbf{A}}$；对 $R_{\mathbf{B}}$也同理，所以我们可以假设 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$ 在 (2.5) 中交替出现。这里我们用到了这样一个事实： $\circ$ 是结合的，并且关于包含关系单调。如果我们还证明了 $R_{\mathbf{A}} \circ R_{\mathbf{B}} \circ R_{\mathbf{A}} \subseteq R_{\mathbf{A}}$，那么再利用对称结果，便可得出在 (2.5) 的并集中只需取 $n \leq 2$，由此可知 R是传递的。事实上，设 $d\ R_{\mathbf{A}}\ e\ R_{\mathbf{B}}\ g\ R_{\mathbf{A}}\ h$。那么 $e, g \in A \cap B = C$，因此 $e\ R_{\mathbf{B}}\ g$ 推出 $e\ R_{\mathbf{C}}\ g$，因为 C $\subseteq$ B。但 C $\subseteq$ A 也成立，因此 $e\ R_{\mathbf{A}}\ g$，于是根据 $R_{\mathbf{A}}$的传递性，$d\ R_{\mathbf{A}}\ h$。我们已经证明 R 是传递的。

如果 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$ 是自反的（对称的），那么显然 R也是如此。对于自反性，再次使用 $D = A \cup B$这一假设。如果 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$ 是反自反的，那么 R也是，因为 A 和 B 都嵌入 D，且 $D = A \cup B$。

现在讨论反对称性。假设 $R_{\mathbf{A}}$ 和 $R_{\mathbf{B}}$ 是反对称的， $d\ R\ e$ 和 $e\ R\ d$，前一个关系由某个 $d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ e$见证，其中 $c \in C$。由于我们已经证明 R 是传递的，因此由 $c\ R_{\mathbf{B}}\ e\ R\ d$可得 $c\ R\ d$。由于 c， $d \in A$ 且 A $\subseteq$ D，因此 $c\ R_{\mathbf{A}}\ d$，从而 $c = d$，因为 $R_{\mathbf{A}}$ 是反对称的。接着由 $e\ R\ d$ 可得 $e\ R\ c$，于是 $e\ R_{\mathbf{B}}\ c$；按照上面的论证，因为 e， $c \in B$。但还有 $c\ R_{\mathbf{B}}\ e$，因此 $e = c = d$，因为 $R_{\mathbf{B}}$ 是反对称的。其他情形类似或更简单。

在这种情形下，超 amalgamation 性质由 R的定义立即得出。

我们已经完成了 (A) 的证明。

由 (A) 的证明可知，(B)、(C) 和 (D) 几乎显而易见。若 D 同时扩张 A 和 B，则运算 f在 $D = A \cup B$上由 $f(a) = f_{\mathbf{A}}(a)$ 唯一确定，其中 $a \in A$，且 $f(a) = f_{\mathbf{B}}(a)$，其中 $a \in B$；这是定义良好的，因为 $C = A \cap B$，并且 C 是 A 和 B 的子结构。对 g 也有类似的说明。

如果 R 在 D 上的定义如情形 a，那么 (2.1) 和 (2.2) 显然分别在 D 中成立。如果 R 在 D 上的定义如情形 b，且 $d\ R\ e$ 由某个 $d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ e$ 见证，其中 $c \in C$，那么 $g_{\mathbf{B}}(e)\ R_{\mathbf{B}}\ g_{\mathbf{B}}(c) = g_{\mathbf{A}}(c)\ R_{\mathbf{A}}\ g_{\mathbf{A}}(d)$，因为 A 和 B 都扩张 C，并且根据假设满足 (2.2)。于是 $g(e)\ R_{\mathbf{B}}\ g(c)\ R_{\mathbf{A}} g(d)$，因此由 (2.4) 得 $g(e)\ R\ g(d)$。其余情形类似或更简单。

注意，正如证明所示，在 (D) 中并不需要假设 F 和 G 不相交。

为了证明最后几个结论，首先注意，对于每个正在考虑的类 $\mathcal{K}$，类 $\mathcal{K}^{fin}$ 都具有 AP，因为证明给出了一个在 $D = A \cup B$ 上的合并结构。由于这里允许考虑空的 C，因此可得 JEP。然后使用 [H 定理 7.1.2 和 7.4.1]。在 (D) 中假设 F 和 G 是有限的，这对于确保同构意义下的结构数量可数是必要的。□

在命题 2.1 的证明中，情形 a 和情形 b 所采用的方法都无法适用于所有情况。参见下文注4.1。事实上，下文命题 3.5(a)(b) 表明，对于 R 在 D 上的定义，不存在一种合理的“单调的”定义能够涵盖命题 2.1 中的所有可能情况。

注 2.2. 设 $(A, \leq_A)$、$(B, \leq_B)$、$(C, \leq_C)$ 是一个偏序的 TBA 三元组，而 $(D, \leq_D)$ 是通过命题 2.1 证明中情形 b 的构造得到的。若令

$$e < f \quad \text{if} \quad e \leq f \text{ and } e \neq f \tag{2.6}$$

在每个模型中，那么（D，$<_D$）是将情形 b 应用于模型（A，$<_A$）、（B，$<_B$）、（C，$<_C$）后得到的。

换言之，从某个偏序转到相应的严格序时，2.1 中的构造保持不变。特别地，我们可以等价地在严格或非严格意义下处理序。

$\leq$ 的反对称性是上述论证所必需的。事实上，设 R 是一个传递但不反对称的关系。若我们将 R' 定义为

$$e \; R' \; f \quad \text{if} \quad e \; R \; f \text{ and } e \neq f,$$

那么 R' 可能会变得不传递，因此甚至无法应用情形 b。相关反例见命题 4.2。

若 P 是一个偏序集，则函数 $f\colon P \to P$ 是严格保序（严格反序）的，当且仅当分别满足

$$a < b \quad \text{implies} \quad f(a) < f(b),$$
$$a < b \quad \text{implies} \quad f(b) < f(a),$$

对所有 $a, b \in P$。

推论2.3。以下每个类都具有 superSAP 和联合嵌入性质。此外，在以下每种情形中，只要下文的集合 F 和 G 是有限的，有限结构类就有 Fra¨ıss´e 极限。

(1) 以下各类

(a) 偏序集，(b) 预序集，(c) 无向图（带有对称反自反二元关系的集合），(d) 有向图（带有反自反二元关系的集合），(e) 带有等价关系的集合，(f) 带有二元传递关系的集合，(g) 带有二元对称自反关系（容忍关系）的集合；即使再加入一个由 F 索引的、保持关系的（2.1）一元运算族，以及一个由 G 索引的、反转关系的（2.2）一元运算族，也仍然如此。

(2) 带有额外的一族保序、反序、严格保序及严格反序一元运算的偏序集类。

证明。由命题 2.1 可立即得出。第 (2) 项也可以直接轻松证明（例如，[L, 推论 2.4]）；无论如何，它也可由注释 2.2 和命题 2.1 再次推出。□

将上述第 (2) 项在严格情形下推广到非序关系的做法并不成立：参见命题 4.2。

3. 带有可比较性条件的两个二元关系。

给定定义域相同的两个二元关系 R 和 S，如果 $R \subseteq S$，就称 S比 R 更粗；更明确地说，对于定义域中的所有 a和 b，若 $a\ R\ b$，则 $a\ S\ b$。在这种情况下，我们也称 R 比S更细。请注意，我们始终以“更粗于或等于”的含义使用“更粗”一词。

回顾命题 2.1 中的性质 1.- 5.。按此顺序，它们分别对应传递性、自反性、对称性、反自反性和反对称性。

定理 3.1。
(A) 对于每一对 $P, Q \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$，由满足 (a) P 中性质的二元关系 R，以及满足 (b) Q 中性质的更粗关系 S 构成的结构类 $\mathcal{K}_{P,Q}$ 具有强合并性质。实际上，相对于 R和 S，superSAP 都同时成立。$\mathcal{K}_{P,Q}$ 的有限结构子类具有 Fra¨ıss´e 极限 M。一阶理论 Th(M) 是 ω-范畴的，并具有量词消去；此外， Th(M) 是理论 $Th(\mathcal{K}_{P,Q})$ 的模型完备化。(B) 即使加入以下运算族，superSAP 仍然成立：(i) 同时保持 R 和 S 的一元运算；(ii) 同时反转 R 和 S 的一元运算；(iii) 保持 R 的一元运算；(iv) 反转 R 的一元运算；只要加入的运算数量有限，有限结构的 Fra¨ıss´e 极限仍然存在。(C) 另一方面，具有传递关系 R、更粗的二元关系 S 以及保持 S 的函数 f 的结构类不具有合并性质（这里不要求 f 保持 R）。(D) 类似地，具有偏序 $\leq$、更粗的对称且自反关系 S_1 以及保持 S_1 的函数 f 的结构类不具有合并性质。

证明。（A）当情形 a 或情形 b 都可以应用于 R 和 S 时，由命题 2.1 的证明显然可得该结论，因为 (2.3) 和 (2.4) 保持粗糙性。类似地，当情形 a 应用于 R 且情形 b 应用于 S 时，该结论也成立，因为与情形 a 相比，情形 b 总是给出更粗的关系。

因此，我们可以假设 $1 \in P$和 $1 \notin Q$，也就是说， R 是传递的，而 S不必是传递的。若 A、B、C 是一个 TBA 三元组，令 $D = A \cup B$，并按照命题 2.1 的证明中情形 b 的做法，在 D 上定义 R，即 $d\ R\ e$

当 (2.3) 或 (2.4) 适用时，该结论成立。根据命题 2.1 的证明，R 在 D上继承了 A 和 B 中 P所具有的所有性质。

接下来需要定义 S 在 D上的关系。需要考虑两种情况。情况 $3 \in Q$。这意味着要求 S 是对称的。在这种情况下，我们定义 S 在 D上为 $d\, S\, e$，如果

$$\underline{\text{either}}\ d, e \in A \text{ and } d\ S_{\mathbf{A}}\ e, \underline{\text{or}}\ d, e \in B \text{ and } d\ S_{\mathbf{B}}\ e, \underline{\text{or}}\ d\ R\ e, \underline{\text{or}}\ e\ R\ d. \tag{3.1}$$

注意，按构造，S 是对称的，且比 R 更粗。接着注意，如果 d、$e \in A$ 和 $d\, R\, e$，那么 $d\, R_{\mathbf{A}}\, e$，因为如命题 2.1 所证，$(A, R_{\mathbf{A}})$ 嵌入到 (D, R) 中，因此 $d\ S_{\mathbf{A}}\ e$ 也成立，因为在 A 上，R 比 S 更细。如果 d、$e \in B$，也有类似的结论。因此，在应用 (3.1) 中最后两个析取项时，我们可以仅考虑 $d \in A \setminus B$ 和 $e \in B \setminus A$ 成立，或反之的情形。由此立即可知，$(A, S_{\mathbf{A}})$ 和 $(B, S_{\mathbf{B}})$ 都嵌入到 (D, S) 中。特别是，如果 S 在 A 和 B 上是自反的（反自反的），那么 S 在 D上也是自反的（反自反的）。

稍微展开一下这个论证，我们就得到相对于 S 的 superSAP（注意，相对于 R 的 superSAP 可由命题 2.1 推出）。事实上，假设 $d \in A \setminus B$、$e \in B \setminus A$ 和 $d\, S\, e$，那么根据 S 的定义，要么 $d\, R\, e$，要么 $e\, R\, d$。不妨设后者成立。于是，由 (2.4) 可知，存在 $c \in C$ 使得 $e\, R_{\mathbf{B}}\, c\, R_{\mathbf{A}}\, d$。由于 R 比 S 更细，我们得到 $e\, S_{\mathbf{B}}\, c\, S_{\mathbf{A}}\, d$，因此，由 $S_{\mathbf{A}}$ 和 $S_{\mathbf{B}}$ 的对称性可得 $d\, S_{\mathbf{A}}\, c\, S_{\mathbf{B}}\, e$。接着，根据 S 的定义可得 $d\, S\, c\, S\, e$，这正是我们要证明的。

当 $5 \in Q$ 时，也就是说，要求 S 具有反对称性，这种情形是显然的，因为在对称且反对称的关系下，任意两个不同元素都不会是 S-连通的。（回想一下，我们已经证明 A 和 B 都嵌入 D，且 $D = A \cup B$。）我们已经证明，若 $3 \in Q$，则 Q 中的所有性质都得以保持。

情形 $3 \notin Q$。这意味着 S 不必是对称的。在这种情形下，我们在 D 上定义 S：若

$$\underline{\text{either}}\ d, e \in A \text{ and } d\ S_{\mathbf{A}}\ e, \underline{\text{or}}\ d, e \in B \text{ and } d\ S_{\mathbf{B}}\ e, \underline{\text{or}}\ d\ R\ e. \tag{3.2}$$

与情形 $3 \in Q$ 一样，S 比 R 更粗，而 (3.2) 给出了 S-嵌入。剩下唯一需要验证的非平凡情形是要求 S 反对称的情形；唯一非平凡的部分是当 $d\ S\ e$、$e\ S\ d$，并且不妨设 $d \in A \setminus B$ 和 $e \in B \setminus A$ 时。因此，$d\, S\, e$ 和 $e\, S\, d$ 可由 $d\, R\, e$、$e\, R\, d$ 见证；于是，由于 R 在 D 上由 (2.4) 定义，存在 c、$c' \in C$ 使得 $d\ R_{\mathbf{A}}\ c\ R_{\mathbf{B}}\ e$ 且 $e\ R_{\mathbf{B}}\ c'\ R_{\mathbf{A}}\ d$。那么 $c\ R_{\mathbf{B}}\ e\ R_{\mathbf{B}}\ c'$，因此 $c\ R_{\mathbf{B}}\ c'$，因为 $R_{\mathbf{B}}$ 是传递的，所以 $c\ S_{\mathbf{B}}\ c'$，因为 $R_{\mathbf{B}}$ 比 $S_{\mathbf{B}}$ 更细；又有 $c\ S_{\mathbf{C}}\ c'$，因为 c、$c' \in C$，且 C 嵌入 B。同理，$c'\ S_{\mathbf{C}}\ c$，因此 $c = c'$，因为 $S_{\mathbf{C}}$ 是反对称的。因此 $c\ R_{\mathbf{B}}\ e\ R_{\mathbf{B}}\ c$，于是 $c\ S_{\mathbf{B}}\ e\ S_{\mathbf{B}}\ c$，进而由 $S_{\mathbf{B}}$ 的反对称性可得 $c = e$；同理，$c = d$，因此 $e = d$，这正是我们要证明的。

关于 Fra¨ıss´e 极限和模型完备化的陈述被证明为命题 2.1，其中再次使用了 [H、定理 7.1.2 和 7.4.1]。

为了证明 (B) (i)，设 f is 是 TBA 三元组 A、B、C 上保持 R 和 S 的一元函数，以唯一相容的方式在 $D = A \cup B$ 上定义 f。根据命题 2.1 的证明，f 保持 R；此外，除 $1 \in P$ 和 $1 \notin Q$ 这一例外情形外，2.1 的证明还蕴含了 S 保持性。剩下需要证明的是，在该情形下，f 也保持 S。如果 $d\ S\ e$ 由 (3.1) 或 (3.2) 中的 $d\ S_{\mathbf{A}}\ e$ 或 $d\ S_{\mathbf{B}}\ e$ 给出，这一点显然成立。如果 $d\ S\ e$ 由（比如说）(3.1) 中的 $e\ R\ d$ 给出，那么我们知道 $f(e)\ R\ f(d)$。但应用 (3.1) 可得，$f(d)\ S\ f(e)$。其他情形稍微简单一些。

(B) (ii) 完全类似。

(B) (iii) 和 (iv) 直接由命题 2.1(D) 的证明得到。

(C) 令 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$，其中没有一对元素彼此 R-相关，$c_1\ S\ c_2\ S\ c_3$，没有其他 S-关系，并且 f 恒等函数。通过令$A = C \cup \{a\}$、$a \notin C$、$a\ R\ c_2$、$a\ S\ c_2$ 以及除由 C 嵌入 A 这一假设所产生的关系之外，不再有其他 R-或 S-关系，将 C 扩展为 A。令 $f(a) = c_1$。类似地，令 $B = C \cup \{b\}$，其中 $A \cap B = C$、$c_2\ R\ b$、$c_2\ S\ b$，没有其他不必要的R-或 S-关系，并且 $f(b) = c_3$。

在任何合并结构中，根据 R 的传递性，我们应有 $a\ R\ b$，因此根据粗化假设，有 $a\ S\ b$。但是，f 的 S-保持性意味着 $c_1 = f(a)\ S\ f(b) = c_3$，这就产生了矛盾。

可以用类似的方式得到 (D) 的一个反例，例如，令 $\leq$ 为包含上文 (C) 中所定义的 R 的最小偏序，并令此处的 S_1 为包含 (C) 中所定义的 S 的最小自反对称关系。□

当考虑三个或更多关系时，定理 3.1(A) 的类似结论不成立。参见命题 3.5(a)(b)。关于 3.1(C) 的一个相关反例，参见命题 3.5(c)。

特别地，由定理 3.1 可知，如果 R 是一个二元关系，并且假定其满足推论2.3(1) 中 (a)-(g) 条款的某个条件，而 S 是另一个关系，并且假定其满足 (a)-(g) 中可能不同的某个条件，那么所有满足 S 比 R 更粗的结构所组成的类具有强合并性质。我们特别列出几个值得关注的情形。

推论 3.2. 下列理论对于其中涉及的两种关系都具有 superSAP。

(1) 两个偏序的理论，其中一个比另一个更粗。(2) 带有一个更粗预序关系的偏序理论。(3) 带有一个更粗容差关系的偏序理论。(4) 带有一个更粗图关系的严格偏序理论。(5) 带有一个更粗严格序关系的有向图理论。

若加入保持或反转两种关系的一元运算族，则强合并性质仍然成立。

注 3.3。推论 3.2(1)(2) 中的理论已在许多截然不同的领域得到应用，例如代数几何、域论、信息

系统、拓扑学和广义相对论的基础。更多详情及参考文献请参见 [L2] 。

推论 3.2(5) 中考虑的理论 T似乎很有意思。显然， T 的任意模型的图约化都是无环图。另一方面，无环图类不具有 amalgamation 性质，尽管每个无环图都可以扩充为（且扩充方式并不唯一） T的一个模型。这种矛盾只是表面上的，下面我们用一个例子来说明其中的缘由。

设 C 是一个有向图，其中有 $C = \{c, d\}$，且各元素之间没有连接。设 $A = C \cup \{a\}$，其中有一条从 c 到 a 的边，以及一条从 a 到 d的边。设$B = C \cup \{b\}$，其中有一条从 d 到 b 的边，以及一条从 b 到 c的边。显然，在无环有向图类中，A 和 B 无法在 C 上 amalgamate。

现在我们尝试为 A、B 和 C 配备更粗的序关系。我们对 C 没有任何限制。然而，根据粗化假设，在扩充后的 A 中必定有$c < a < d$ 。这并不构成矛盾：如果$c < a < d$，因此 A 中有 $c < d$，那么（某个可能的扩充后的）C 中必定有 $c < d$，因为我们希望 C 是 A 的子结构。

对称地论证， $d < b < c$ 在 B 中，因此若要使 C 嵌入 B，我们必须有 $d < c$。上述每个条件单独都可以实现，但不能同时满足这两个条件。因此，无法给 C 添加一种序关系，使它成为扩充后的 A 和 B（作为 T 的模型）的共同子结构。

我们得到了什么？只要再添加一种序关系，对某些元素对施加约束，使它们能够在某个扩张中的某条路径上“将来”相连，我们就能将无环图这一类转变为具有强合并性质的一类。

关于这一点，我们指出，扩充语言是模型论中一种广为人知的策略。我们不知道这一想法此前是否已用于当前情形。

问题 3.4. 如注 3.3(b) 所示，通过扩充将某个不具备 amalgamation 性质的理论转变为具有 amalgamation 性质的理论，这种可能性似乎颇为有趣。

推论 3.2(5)中的理论以及 3.3 中的评注有什么应用吗?

现在我们证明，定理 3.1 无法推广到有三种关系的情形。

命题 3.5。以下理论不具有 amalgamation 性质。
(a) 反对称关系 S 的理论，其中有两个偏序 $\leq$ 和 $\leq'$，且二者都比 S 更细。(b) 反对称关系 S 的理论，其中有两个传递关系都比 S 更细。(c) 偏序的理论，它带有一个更粗的反对称关系 S，以及一个保持 S 的双射一元运算。

证明。(a) 令 $C = \{c, d\}$ 中没有任何一对元素满足 S 关系，并令 c 和 d 都是 $\leq$ 和 $\leq'$ 下不可比较的。令 $A = C \cup \{a\}$ 带有 $a \notin C$、 $c \leq a$、 $a \leq' d$、 $c\, S\, a$、 $a\, S\, d$，且没有其他 S 关系或序关系，序的自反性除外。令 $B = C \cup \{b\}$ 带有 $A \cap B = C$、 $b \leq c$、 $d \leq' b$、 $b\, S\, c$、 $d\, S\, b$，且没有其他序关系或 S 关系，序的自反性除外。在任何满足该理论的合并结构中，我们必须有 $b \leq a$，因此 $b\ S\ a$，因为 $\leq$ 比 S 更细。同理，$a \leq' b$，因此 $a\ S\ b$，但这与 S 的反对称性矛盾。我们不能有 $a = b$，因为例如 $a\ S\ d$ 成立，但 $b\ S\ d$ 不成立，而且 A 和 B 都应嵌入 D。

（b）的证明没有显著差异。

（c）设 $C = \{c_1, d_1, c_2, d_2\}$，其中所有元素两两 $\leq$不可比较且 S无关。以下均令 f 为置换这些指标的双射。

用 $A = C \cup \{a_1, a_2\}$、 $a_1 \geq c_1$、 $d_2 \geq a_2$ 和 $d_i\ S\ a_i\ S\ c_i (i = 1, 2)$将 C 扩张为 A。用 $B = C \cup \{b_1, b_2\}$、 $c_1 \geq b_1$、 $b_2 \geq c_2$ 和$c_i\ S\ b_i\ S\ d_i$ $(i = 1, 2)$将 C 扩张为 B。

在任何合并结构中，根据 $\geq$的传递性，我们都应有 $a_1 \geq b_1$ 和 $b_2 \geq a_2$。然后根据粗化假设，有 $a_1\ S\ b_1$ 和 $b_2\ S\ a_2$。由于 f保持 S，因此 $b_1 = f(b_2)\ S\ f(a_2) = a_1$，故 $a_1 = b_1$，因为假设 S是反对称的。但这样一来，$c_1 = a_1 = b_1$，因为 $\leq$ 应为偏序，这就产生了矛盾。□

可以证明，定理 3.1 可以推广到任意数量的关系，前提是所考虑的所有关系都是传递的。相当出人意料的是，在处理多个关系时，即使其中一些关系可能不是传递的，定理 3.1 的推广仍然成立。我们将证明，合并的唯一障碍是：某些反对称关系被假定比一对不可比较的传递关系更粗；从本质上说，合并的唯一反例就是我们在命题 3.5 中描述的那些例子。然而，在加入运算的情况下，要求这些运算保持所有关系不变，参见定理 3.1(C)(D)和命题 3.5(c)。具体细节将另文给出。

4. 进一步说明

注4.1。在命题 2.1 的证明中，对情形 a 和情形 b 所采用的方法并不适用于所有情况。

一般而言，如果不假定传递性，可能会出现 $c\ R\ d$、 $d\ R\ e$属于 C，而 $c\ R\ e$ 不属于 C 的情况。那么，无论 A 和 B 的结构如何，应用条款（2.4）后，我们都会得到 $c\ R\ e$ 属于 D，因此 C 甚至不是 D 的子结构。

更糟的是！A 和 B 可能实际上是 D 的子结构，但反对称性却未能保留。设 $C = \{c, d\}$，且 C 中没有一对元素彼此R相关。设 $c\ R\ a\ R\ d$ 属于 A， $d\ R\ b\ R\ c$ 属于 B。那么 $a\ R_{\mathbf{A}}\ d\ R_{\mathbf{B}}\ b$,

因此，若 D 满足条款（2.4），则有 $a\ R\ b$，对称地也有 $b\ R\ a$。由于我们要求强合并性质，$a \neq b$，所以 D 中的反对称性失效。

另一方面，关于情形 b，若要保持传递性，显然仅有子句(2.3)是不够的。

现在我们看到，命题 2.1 的所有可能变体并非都成立。

命题 4.2. 设 T 是一个理论，它包含二元自反传递关系 R 和一个严格保持 R 的一元函数 f，即：

$$d\ R\ e\ and\ d \neq e \quad imply \quad both\ f(d)\ R\ f(e)\ and\ f(d) \neq f(e).$$

那么 T 不具有
amalgamation 性质。

证明. 设 $C = \{c, d, e\}$ 含有三个不同元素，使得 $d\ R\ e\ R\ d$、$x\ R\ x$对所有 x均成立，并且 $f(d) = e$、$f(e) = d$以及 $f(c) = d$。令 A 扩张 C，并满足$A = \{a, c, d, e\}$、$a \notin C$、$a\ R\ c$、$a\ R\ a$以及 $f(a) = e$。令 B 扩张 C，并满足$B = \{b, c, d, e\}$、$b \notin C$、$b \neq a$、$c\ R\ b$、$b\ R\ b$以及 $f(b) = e$。

如果 D 在 C 上强合并 A 和 B，那么根据传递性，$a\ R\ b$，但此时 $f(a) = e = f(b)$，这与对 R 的严格保持相矛盾。因此，强合并性质不成立。我们不能在 D 中将 a 和 b 认作同一元素（因而甚至不可能有合并性质），因为 $c\ R\ b$在 B 中成立，但并未假定 $c\ R\ a$ 在 A 中成立，而在任何共同嵌入中都必须保留这类关系。□

另一方面请注意，带有二元自反传递关系 R 和保持 R 的双射函数 f 的理论 T 具有超强合并性质。这可由命题 2.1 的证明直接得出。显然，保持R的双射函数也严格保持 R。

例 4.3。带有等价关系 R 和严格保持 R 的一元函数f 的理论具有强合并性质，但不具有合并性质。强合并性质的反例很容易构造，只需令 $a \in A \setminus C$ 和 $b \in B \setminus C$ 满足 $f(a) = f(b) \in C$。为证明合并性质，给定一个 TBA 三元组 A、B、C，若$a\ R\ c\ R\ b$对某个 $c \in C$成立，并且 $f^n(a) = f^n(b) \in C$，就将 $a \in A$ 和 $b \in B$ 认作同一元素。经过上述认定后，$A \cup B$ 便成为适当的合并结构，其中 R 是 $R_{\mathbf{A}} \cup R_{\mathbf{B}}$ 的传递闭包，而 f 以唯一相容的方式定义。请注意，如果按照上述方式将 a 和 b 认作同一元素，那么 $f(a)$ 和 $f(b)$ 也会被认作同一元素，因为要么 $n = 1$且 $f(a) = f(b)$，要么 $n > 1$且 $f^{n-1}(f(a)) = f^n(a) = f^n(b) = f^{n-1}(f(b)) \in C$。此外，假设 $a\ R\ c\ R\ b$ 可确保我们不会将不同的 R-类认作同一类。

5. 声明与申报

伦理声明。本材料是作者自己的原创作品。本文真实、完整地反映了作者的研究和分析。所有使用的来源均已妥善披露。本研究未涉及人类受试者。本研究未使用动物。

作者声明不存在与本文内容相关的利益冲突。

References

[CP] *Amalgamation and interpolation in abstract algebraic* Czelakowski, J., *logic* *Models algebras* Pigozzi, D., , 载于 Caicedo, X., Montenegro, C. H.（编）, , , *and proofs (Bogotá, 1995)* **203**, 187 265 1999 , 《纯粹与应用数学讲义》, –（）。[F1] Fra¨ıss´e, R., *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, 《法国高等师范学校科学年鉴》（第 3 辑）, 71, 363–388（1954）。[F2] Fra¨ıss´e, R., *Theory of relations. Revised edition with an appendix by N. Sauer*, 《逻辑与数学基础研究》第 145 卷，阿姆斯特丹：North-Holland（2000）。[GM] Gabbay, D. M., Maksimova, *Interpolation and definability. Modal andintuitionistic logics*, 《牛津逻辑指南》第 46 卷，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津（2005）。[GG] *Modularity results for interpolation amalgamation and* Ghilardi, S., *superamalgamation* **169**, 731 754 2018 Gianola, , , 《纯粹与应用逻辑年刊》–（）。[H] Hodges, W., *Model theory*, 《数学及其应用百科全书》第 42 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。[J] J´onsson, B., *Universal relational systems*, 《斯堪的纳维亚数学杂志》4, 193–208（1956）。[KMPT] Kiss, E. W., M´arki, L., Pr¨ohle, P., Tholen, W., *Categorical algebraic properties.A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residualsmallness, and injectivity*, 《匈牙利数学研究学报》18, 79–140（1982）。[L] *Linearly ordered sets with only one operator have the amalgamation* Lipparini, P., , 《纯 *property* **172**, 103015, 15 2021 粹与应用逻辑年刊》, 论文编号（）。[L2] Lipparini, P., *A model theory of topology*, arXiv:2201.00335, 1–30（2022）。[M] Madar´asz, J. X., *Interpolation and amalgamation; pushing the limits. I*, 《逻辑学研究》61, 311–345（1998）。[MMT] *Amalgamation and interpolation in* Metcalfe, G., *ordered algebras* **402**, 21 82 2014 Montagna, F., Tsinakis, , 《代数学杂志》–（）。

Paolo Lipparini

数学系，科学研究大道，罗马第二大学“Tor Vergata”，I-00133 罗马 意大利