arXiv:2301.12506v1 [math.GR] 29 Jan 2023

群的可公度性与双重可解释性

Dan Segal

2023年1月31日

在 [NST], 第3节中，我们提出，在某个给定的群类中，有限可公理化这一性质应当能由有限扩张以及有限指数的可定义子群继承。其基本思想如下：若 H 是群 G中的有限指数可定义正规子群，那么 H 的一阶性质可以视为 G的性质，而 G 的一阶性质则可以编码为 H的性质。

表达这类情形的一般框架是双重可解释性这一概念，参见例如 [H], §§5.3、5.4。以下观察或许是众所周知的，但似乎值得记录：

定理 1 设 G 是一个群， $H \neq 1$ 是有限指数的可定义正规子群。以下条件等价:

a) 对某个到 G/H 的陪集代表系中的每个 t， t 在 H 上的共轭作用在 H 中是可定义的。

b) G 与 H 双重可解释。

证明。假设 (a)。不妨设 $|G : H| = m \geq 2$。令 $H = \kappa(G)$，取一个到 G/H 的陪集代表系 $\{t_1 = 1, t_2, \ldots, t_m\}$，并令 $\sigma_i : H \to H$ 为可定义函数 $h \longmapsto t_i h t_i^{-1}$。对每个 i和 j，定义 $c_{ij} \in H$ 和 $k(i,j)$，使其满足 $t_i t_j = c_{ij} t_{k(i,j)}$。

在 G 中解释 H。包含映射 $H \to G$ 将 H 与 $\kappa(G)$ 等同。群运算继承自 G。

在 H 中解释 G。取一个元素 $\xi \in H \smallsetminus \{1\}$。首先假设 $m \geq 3$。按如下方式定义子集 $\Gamma_{i,0}$, $\Gamma_{i,1} \subset H^m$:

$$\gamma \in \Gamma_{i,0} \iff \gamma_i \neq 1 \wedge \bigwedge_{j \neq i} \gamma_j = 1$$

$$\gamma \in \Gamma_{i,1} \iff \gamma_i = 1 \wedge \bigwedge_{j \neq i} \gamma_j = \xi.$$

那么，$\Gamma_{i,0}$和$\Gamma_{i,1}$都是 H^m 的可定义子集， $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{m} (\Gamma_{i,0} \cup \Gamma_{i,1})$ 也是如此。

设 $g = ht_i \in G$。定义 $\gamma(g) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ 如下：

$$\gamma_i = h, \quad \gamma_j = 1 \ (j \neq i) \ \text{ if } h \neq 1$$
$$\gamma_i = 1, \quad \gamma_j = \xi \ (j \neq i) \ \text{ if } h = 1.$$

因此 $\gamma(g) \in \Gamma_{i,\,0} \cup \Gamma_{i,\,1}$。事实上，$g \longmapsto \gamma(g)$ 将 $(H \setminus \{1\})t_i$ 对应到 $\Gamma_{i,\,0}$，并将$\{1.t_i\}$对应到$\Gamma_{i,\,1}$。

我们在 Γ 上定义一个二元运算，使得这个映射 γ 成为群同构。

因此，在 $\Gamma_{i,\,0} \times \Gamma_{j,\,0}$ 上：

$$(1, \ldots, h, \ldots, 1) \cdot (1, \ldots, k, \ldots, 1) = \begin{cases} (1, \ldots, hk^{\sigma_i} c_{ij}, \ldots, 1) \in \Gamma_{k(i,j),0} & \text{if} \quad hk^{\sigma_i} c_{ij} \neq 1 \\ (\xi, \ldots, 1, \ldots, \xi) \in \Gamma_{k(i,j),1} & \text{if} \quad hk^{\sigma_i} c_{ij} = 1 \end{cases};$$

在 $\Gamma_{i,\,1} \times \Gamma_{j,\,0}$ 上：

$$(\xi, \ldots, 1, \ldots \xi) \cdot (1, \ldots, k, \ldots, 1) = \begin{cases} (1, \ldots, k^{\sigma_i} c_{ij}, \ldots, 1) \in \Gamma_{k(i,j),0} & \text{if} \quad k^{\sigma_i} c_{ij} \neq 1 \\ (\xi, \ldots, 1, \ldots, \xi) \in \Gamma_{k(i,j),1} & \text{if} \quad k^{\sigma_i} c_{ij} = 1 \end{cases};$$

其他各种情形也类似。

关键在于，这是 H^m 的可定义子集 Γ 上的可定义运算。

双解释。复合单同态 $H \to G \to \Gamma \subseteq H^m$ 将$h \in H$ 映射到

$$(h, 1, \ldots, 1) \quad (h \neq 1)$$
$$(1, \xi, \ldots, \xi) \quad (h = 1).$$

这是可定义的。

复合单同态 $G \to \Gamma \subseteq H^m \subseteq G^m$ 将 $g \in G$ 映射到 $\gamma(g)$。现在

$$g \in (H \setminus \{1\})t_i \Longleftrightarrow G \models \kappa(gt_i^{-1}) \wedge g \neq t_i.$$

由于映射 γ 在集合 $(H \setminus \{1\})t_i$中的每个集合以及元素t_i上都是可定义的，因此 γ：$G \to G^m$ 是可定义的。

这就完成了 $m \geq 3$时 (b) 的证明。如果 $m = 2$，上述定义给出 $\gamma(\xi) = (\xi, 1) = \gamma(t_2)$，因此我们需要对其进行调整。一种方法是将 γ替换为 γ^*：$G \to \Gamma^* \subset \Gamma \times \{1, \xi\} \subseteq H^3$，其中

$$\gamma^*(h) = (h, 1, 1), \quad \gamma^*(ht_2) = (1, h, 1) \quad \text{if } 1 \neq h \in H$$
$$\gamma^*(t_2) = (\xi, 1, \xi), \quad \gamma^*(1) = (1, \xi, \xi).$$

群运算的定义方式与前一种情况类似，因此（b）再次成立。

现在假设（b）。对于每个带有来自 G 的参数 g 的公式 ϕ(g; x)，都对应一个带有来自 H 的参数 h 的公式 ψ(h; y) 以及一个可定义函数β：$H^r \to H^s$，其中某个 s 满足：对每个 a $\in H^r$，

$$G \models \phi(\mathbf{g}; \mathbf{a}) \iff H \models \psi(\mathbf{h}; \beta(\mathbf{a}))$$

（参见 [H], 定理 5.3.2）。现在固定 $t \in G$，令 ϕ(*t*; x, y) := ($xt = ty$)，并令 ψ(h; y) 为相应的公式。那么对于 $a, b \in H$，我们有

$$b = t^{-1}at \iff G \models \phi(t; a, b) \iff H \models \psi(\mathbf{h}; \beta(a, b)).$$

因此，映射 $a \longmapsto t^{-1}at$：$H \to H$ 是可定义的，故 (a) 成立。 ■

在许多情况下，可定义性条件 (a) 要么不成立，要么不易验证。在较弱的假设下，[NST] 的定理 3.1 表明，如果 H 是有限公理化的，那么 G 也是如此。将该定理的证明应用于有限生成抽象群，可得以下简单结论：

定理 2 令 $\mathcal{C}$ 为一个有限生成群类，且在取有限指数正规子群时封闭。令 $G = \langle g_1, \ldots, g_d \rangle \in \mathcal{C}$，并令 $H = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle$ 为 G 中一个有限指数可定义正规子群。若 (*H*, h) 在 $\mathcal{C}$ 中是有限公理化的，则 (*G*, g) 也如此。

（该假设的含义是：H 满足一个句子 σ_H(h)，使得对于任意群 $\tilde{H}$ 和元组 h $\in \tilde{H}^s$，如果 $\tilde{H}$ 满足 σ_H(h)，那么就存在一个同构 $H \to \tilde{H}$，对每个 i都将 h_i 映到 $\tilde{h}_i$。）

鉴于定理 1，只要加入假设 (a)，逆命题也成立。

谨此感谢 Andre Nies 和 Katrin Tent 提供的宝贵意见。

参考文献

[H] W. Hodges，《模型论》，剑桥大学出版社，1993 年。

[NST]A. Nies、D. Segal 和 K. Tent，《有限群的有限公理化》，《伦敦数学学会会刊》(3) 123 (2021)，597-635。