arXiv:2301.12529v1 [math.AC] 29 Jan 2023

广义样条模的基底条件

SEHER F˙IS¸EKC˙I 和 SAMET SARIO ˘GLAN

Abstract. 边标记图 (G, α) 上的广义样条定义为一种顶点标记，使得相邻顶点上的标记之差属于由边标记生成的理想。我们研究最大公因数整环上的广义样条，并给出任意图上广义样条模的行列式基底条件。本文的主要结果解答了多个论文中提出的一个猜想。

1. Introduction

样条是定义在多面体复形各面上的分段多项式函数，并满足光滑性条件。它们控制工程学和工业中曲面的曲率。样条还应用于数值分析、优化理论、计算机辅助设计与建模以及微分方程的解。

广义样条的概念由 Gilbert、Viel 和 Tymoczko 引入[GTV16]。作为经典样条的推广，广义样条定义在任意环上的边标记图上，而非多项式环上的多面体复形上。基环 R 上的边标记图上所有广义样条的集合 R具有环结构和模结构 [GTV16]。关于$R_{(G,\alpha)}$ 的模结构，研究主要集中于自由性、极小生成集和基[HMR14, BT15, BHKR15, PSTW17, SA24, AD21, AMT21, DM19, RS23]。此外，广义样条也通过同调代数方法以及组合和图论方法进行研究 [DiP17, ACFG+20, AAA+22]。

本文聚焦于关于最大公因子整环上的广义样条模的以下问题。最大公因子整环 R 是一种整环，其中任意两个元素 R 都有一个最大公因数。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C78, 15A15.
Key words and phrases. 广义样条，模，基。1

问题 1.1. 当基环 R 是最大公因子整环时，在什么条件下，给定的一组广义样条构成广义样条模的一个 R-模基?

问题 1.1 已在许多论文中针对特定类型的图和基环，采用基于行列式的方法进行了研究。Gjoni 研究了整数上的广义样条，并给出了圈上的基判据 [Gjo15]。类似的方法也用于研究整数上的菱形图广义样条 [Mah16、Bla18]。Altınok 和 Sarıo˘glan 将这些结果推广到了最大公因子整环上的圈、菱形图和树 [AS21a]。Calta 和 Rose 在边标记满足特定条件的情况下，为最大公因子整环上的任意图提出了基判据 $R_{(G,\alpha)}$ 广义样条 [RC22]。

本文旨在为最大公因子整环上任意图的广义样条模提出一种行列式基底条件。本文的最终结果定理5.3曾在两篇论文中作为猜想提出 [AS21a、RC22]。我们通过证明这一猜想填补了文献中的空白，并解决了该问题。在第 2 节中，我们给出基本定义并固定记号，并通过一个例子说明这些新记号。在第 3 节中，我们阐述基于行列式的方法。我们证明了适用于任意图的定理 3.3 ，而先前的研究仅针对特殊类型的图陈述了该定理。在第 4 节中，我们研究最大公因子整环上完全图的广义样条，并介绍一种可生成特殊广义样条的算法。我们通过一个例子说明该算法。随后，我们给出一个基底条件，以回答完全图上的问题1.1 。在第 5 节中，我们将结果推广到任意图。我们首先定义边标记图的完备化，随后阐明任意图上的问题 1.1 。

2. Preliminaries

我们从广义样条的定义开始。

定义 2.1. 给定一个具有 n 个顶点的有限图 $G=(V,E)$，以及一个有单位元的交换环 R ，在 G 上的边标记定义为一个函数 $\alpha: E \to I(R)$，其中 $I(R)$ 是 R 的理想集合。在 (G,α) 上的广义样条是一个顶点标记 $F=\big(F(v_1)\ F(v_2)\ldots,F(v_n)\big)\in R^n$，满足对每条边 uv，差值 $F(u)-F(v)\in\alpha(uv)$。

为了明确图本身，我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G的顶点集和边集。

令 $R_{(G,\alpha)}$ 表示基环为 R 的 (G,α) 上所有广义样条的集合。那么， $R_{(G,\alpha)}$ 在逐分量加法以及

乘以 R 中的元素所定义的环结构和-模结构。从现在起，我们将广义样条称为样条。我们使用主理想作为边标记，并以理想的生成元表示每个边标记。对于 G 中的一条边，我们使用记号 e_j 或 uv，并将相应的边标记记为 $\alpha(e_j) = l_j$ 和 $\alpha(uv) = l_{uv}$。我们也将边标记的生成元称为边标记。图 1 展示了一个基环为 $\mathbb{Z}$ 的边标记菱形图。

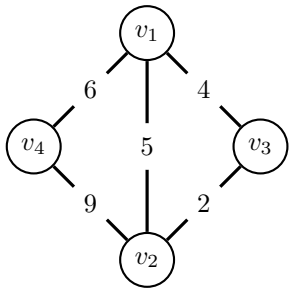

FIG. 1. 边标记菱形图

图 1 上的样条可表示为 $F = (2,32,34,50)$。

本文着重研究最大公因子整环上的样条。我们将记号 $\gcd(a,b)$ 和 $\operatorname{lcm}(a,b)$ 简写为 (a,b) 和 $[a,b]$。我们用 (A) 和 $[A]$表示集合 A 中元素的最大公因数和最小公倍数。除非另有说明，本文始终假设 R 是一个最大公因子整环。

给定最大公因子整环的非空子集 $A_1, A_2, \ldots, A_k$，定义它们的乘积为

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_k = \{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \mid a_i \in A_i, 1 \le i \le k\}.$$

以下引理可通过组合元素并利用最大公因数和最小公倍数的性质来证明。

引理2.2. 设 A_1、A_2、...、A_k 是最大公因子整环的非空子集。则，

(a) $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = (A_1) \cdot (A_2) \cdots (A_k)$。

(b) $[A_1 \cdot A_2 \cdots A_k] = [A_1] \cdot [A_2] \cdots [A_k]$。

一种特殊类型的样条称为流上类，其定义如下。

定义2.3. 给定一个边标记图（G，α），i阶流上类定义为满足 $F_{(i)}(v_j) = 0$ 的样条 $F_{(i)} \in R_{(G,\alpha)}$，其中 $j < i$，且 $F_{(i)}(v_i) \neq 0$。

例如，图 1 中的向上流类可列为 $F^{(1)} = (1, 1, 1, 1), F^{(2)} = (0, 30, 0, 48)$，$F_{(3)} = (0, 0, 8, 0)$ 和 $F_{(4)} = (0, 0, 0, 36)$。

设 (G,α) 是一个边标记图，且 $v_i, v_j \in V(G)$。从 v_i 出发并以 v_j 结束的 v_j-迹（记为 $\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}$）是由顶点和边构成的序列，且其中没有边重复。我们用迹上的边标记序列表示该迹。迹的长度（记为 $|\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}|$）是其包含的边数。我们将 $\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}$ 上边标记的最大公因数记为 $\left(\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}\right)$。

给定一个边标记图 (G,α)，固定一个满足 $i>1$ 的顶点 v_i，并将满足 $j<i$ 的顶点 v_j 标记为零。在这种情况下，$\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}$ 称为 v_i 的零迹。在此设定下，注意到 v_i 的每个零迹都对应于满足 $j<i$ 的 v_i 的一个 v_j-迹。v_i 的任意零迹记作 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}$。长度为 1 的零迹称为零边。设 v_i 的零迹集合为 $\left\{\mathrm{p}^{(v_i,0)}{}_t \quad | \, t=1,2,\ldots,k\right\}$。我们将元素 $\mathcal{L}_i \in R$ 定义为

$$\mathcal{L}_i = \left[\left(\mathbf{p}_1^{(v_i,0)}\right),\left(\mathbf{p}_2^{(v_i,0)}\right),\ldots,\left(\mathbf{p}_k^{(v_i,0)}\right)\right]$$

并且令 $\mathcal{L}_1 = 1$。在主理想整环上，对于每个 i 满足 $F^{(i)}(v_i) = \mathcal{L}_i$，存在流上类 $F^{(i)} \in R_{(G,\alpha)}$；这些流上类构成一个 R-模基，属于 $R_{(G,\alpha)}$ [AS21b]。然而，如果 R 不是主理想整环，则此类流上类可能不存在。

关于迹的第一个观察如下。

定理 2.4. 设 $v_i, v_j \in V(G)$ 和 $\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}$ 是 v_i 的 v_j-迹。若 $F \in R_{(G,\alpha)}$，则 $\left(\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}\right)$ 整除 $F(v_i) - F(v_j)$。

证明。假设 $\mathrm{p}^{(v_i,v_j)} = < l_{v_iu_1}, l_{u_1u_2}, \ldots, l_{u_{k-1}u_k}, l_{u_kv_j} >$。由于 $F \in R_{(G,\alpha)}$，我们有

$$\begin{aligned}
F(v_i) - F(u_1) &= r_1 l_{v_iu_1} \\
F(u_1) - F(u_2) &= r_2 l_{u_1u_2} \\
&\vdots \\
F(u_{k-1}) - F(u_k) &= r_k l_{u_{k-1}u_k} \\
F(u_k) - F(v_j) &= r_{k+1} l_{u_kv_j}
\end{aligned}$$

对于某些 $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1} \in R$。因此，我们写作

$$F(v_i) - F(v_j) = r_1 l_{v_iu_1} + r_2 l_{u_1u_2} + \ldots + r_k l_{u_{k-1}u_k} + r_{k+1} l_{u_kv_j}.$$

最大公因数 $\left(\mathrm{p}^{(v_i,v_j)}\right)$ 整除每一项，因此它整除 $F(v_i) - F(v_j)$。□

我们可以如下简化 $\mathcal{L}_i$ 的计算。

注释 2.5. 设 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_j$ 和 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_k$ 是 v_i 的两个零迹，其中 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_j \subset \mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_k$。在这种情况下，只需考虑 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_j$ 来计算 $\mathcal{L}_i$，因为 $(\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_k)$整除 $(\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_j)$。因此，我们只考虑不包含其他零迹的 v_i 的零迹。

令 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_t =< l_{t_1}, l_{t_2}, \ldots, l_{t_s} >$ 为 v_i 的一个零迹，满足 $t_s \neq 1$。我们将 $l_{t_j} = (\mathbf{p}_t^{(v_i,0)}) \cdot l_{t_j}^{(t)'})$ 记作 $1 \leq j \leq s$，其中 $l_{t_j}^{(t)'} \in R$ 满足 $\left(l_{t_1}^{(t)'}, l_{t_2}^{(t)'}, \ldots, l_{t_s}^{(t)'}\right) = 1$，并使用以下记号

$$D_t^i = \left\{l_{t_1}^{(t)'}, l_{t_2}^{(t)'}, \ldots, l_{t_s}^{(t)'}\right\} \text{ and}$$

$$\mathfrak{D}_i = \{D_1^i, D_2^i, \ldots, D_{k_i}^i\}$$

其中 k_i 是长度大于 1 的 v_i 零迹的数量。这里，对所有 t，都有 $(D_t^i) = 1$，因此，对所有 $2 \leq i \leq n-1$，都有 $(\mathfrak{D}_i) = \left((D_1^i), (D_2^i), \ldots, (D_{k_i}^i)\right) = 1$。我们定义以下集合，它类似于笛卡尔积，但其元素是子集而非元组

$$\times D^i = \left\{\{l_{j_1}^{(1)'}, l_{j_2}^{(2)'}, \ldots, l_{j_{k_i}}^{(k_i)'}\} \mid l_{j_t}^{(t)'} \in D_t^i,\ 1 \leq t \leq k_i\right\}$$

并将 $\times D^i$ 的任意元素记为 $a^{(i)}$。

注释 2.6. 当 $i = n$时，除 v_i 以外的所有顶点都标记为零，并且 v_i 的每条零迹都包含一条零边。在这种情况下，根据注释 2.5，我们只考虑零边，因此，$\mathfrak{D}_n = \emptyset$。

对于每个元素 $a^{(i)} = \left\{l_{j_1}^{(1)'}, l_{j_2}^{(2)'}, \ldots, l^{(k_i)}{}_{j_{k_i}}{}'\right\} \in \times D^i$，我们称边标记 l_{j_s} 属于 $a^{(i)}$，对应于 $1 \leq s \leq k_i$。由构造可知，来自每条零迹 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}$ 且满足$|\mathbf{p}^{(v_i,0)}| > 1$ 的边标记都包含在 $l(a^{(i)})$ 中。所有属于 $a^{(i)}$ 的边标记组成的集合记为 $l(a^{(i)})$。我们用记号 $\prod a^{(i)}$ 表示 $a^{(i)}$中元素的乘积。

H 的子图 G 是一个图，满足 $V(H) \subset V(G)$且 $E(H) \subset E(G)$。对于每个元素 $a^{(i)} \in \times D^i$，我们定义边集为$E(H_{a^{(i)}}) = \{e_j \mid l_j \in l(a^{(i)})\}$的子图$H_{a^{(i)}} \subset G$。注意，根据 $a^{(i)}$的定义，对于 $j < i$，有 $v_iv_j \notin E(H_{a^{(i)}})$，因为 $< l_{v_iv_j} >$ 是 v_i的一条零边。

例 2.7. 考虑图 2 中标记为 K_4 的边 2。v_2 的零迹由 $\mathbf{p}^{(v_2,0)}{}_1 =< l_1 >$、$\mathbf{p}^{(v_2,0)}{}_2 =< l_2, l_3 >$、$\mathbf{p}^{(v_2,0)}{}_3 =< l_5, l_4 >$、$\mathbf{p}^{(v_2,0)}{}_4 =< l_2, l_6, l_4 >$以及 $\mathbf{p}^{(v_2,0)}{}_5 =< l_5, l_6, l_3 >$确定。因此，

$$\mathfrak{D}_2 = \left\{\{l_2^{(2)'}, l_3^{(2)'}\},\ \{l_5^{(3)'}, l_4^{(3)'}\},\ \{l_2^{(4)'}, l_6^{(4)'}, l_4^{(4)'}\},\ \{l_5^{(5)'}, l_6^{(5)'}, l_3^{(5)'}\}\right\}.$$

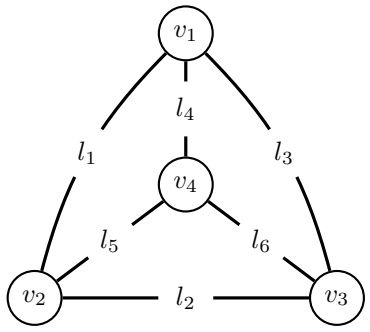

FIG. 2. 边标记 K_4

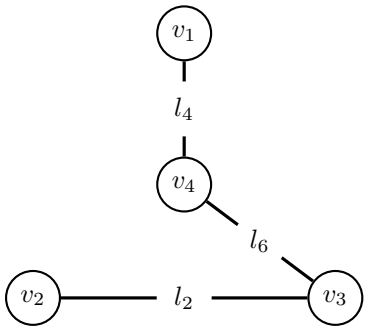

FIG. 3. 子图 H_a

这里 $a^{(2)} = \left\{l_2^{(2)'},\ l_4^{(3)'},\ l_6^{(4)'},\ l_6^{(5)'}\right\} \in \times D^2$ 以及子图$H_{a^{(2)}} \subset K_4$如图3所示。此外，$l\ (a^{(2)})\ = \{l_2, l_4, l_6\}$和 $\prod a^{(2)} = l_2^{(2)'} \cdot l_4^{(3)'} \cdot l_6^{(4)'} \cdot l_6^{(5)'}$。

注2.8. 子图$H_{a^{(i)}}$ 包含来自每条零迹 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}$ 的至少一条边，其中 $\left|\mathrm{p}^{(v_i,0)}\right| > 1$ 根据元素 $a^{(i)}$ 的定义。

由引理 2.2，我们给出以下命题。

命题2.9. 如果 $\mathbb{A}$ 是乘积 $\prod a^{(2)} \cdot \prod a^{(3)} \cdots \prod a^{(n-1)}$ 的集合 其中 $a^{(i)} \in \times D^i$ 是 $2 \le i \le n-1$ 的任意元素，则有

$$(\mathbb{A}) = \Big((\mathfrak{D}_2), (\mathfrak{D}_3), \ldots, (\mathfrak{D}_{n-1})\Big) = 1.$$

设 $a_1^{(i)}$、$a_2^{(i)} \in \times D^i$。如果 $a_1^{(i)} \subset a_2^{(i)}$，则称 $l(a_1^{(i)}) \subset l(a_2^{(i)})$。如果不存在满足 $a_2^{(i)} \subsetneqq a_1^{(i)}$ 的元素 $a_2^{(i)}$，则称 $a_1^{(i)}$ 为极小元。当 $a^{(i)}$ 为极小时，从 $H_{a^{(i)}}$ 中删除任意一条边，都会在 (G, α) 上得到一条零迹，且其中不包含的边均属于 $a^{(i)}$。图 2 中 $\times D^i$ 的极小元按照所包含的边标记列出如下：$l(a_1^{(2)}) = \{l_2, l_5\}$、$l(a_2^{(2)}) = \{l_3, l_4\}$、$l(a_3^{(2)}) = \{l_2, l_4, l_6\}$ 以及 $l(a_4^{(2)}) = \{l_3, l_5, l_6\}$。

以下命题在本文主要结果的证明中起着关键作用。

命题 2.10. 设 $a^{(i)} \in \times D^i$ 和 $l_{t_j}^{(t)'} \in a^{(i)}$ 是由 v_i的零迹 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}{}_t$ $=< l_{t_1}, l_{t_2}, \ldots, l_{t_s} >$产生的分量。那么，边标记 l_{t_j}整除$\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。

证明。回顾一下，$l_{t_j} = (\mathrm{p}_t^{(v_i,0)}) \cdot l_{t_j}^{(t)'})$。这里 $l_{t_j}^{(t)'}$ 整除乘积 $\prod a^{(i)}$ and$(\mathrm{p}^{(v_i,0)}{}_t)$ 整除 $\mathcal{L}_i$。因此，$(\mathrm{p}_t^{(v_i,0)}) \cdot l_{t_j}^{(t)'} = l_{t_j})$ 整除 $\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。 □

除了命题2.10之外，v_i 的任意零边的边标记也整除$\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。

命题 2.11。给定一条边标记为 (G,α)、 v_i的一条零边 e_j ， 以及 $a^{(i)} \in \bigtimes D^i$，边标记 l_j 整除 $\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。

证明。由于 e_j 是 v_i 的一条零边，因此边标记 l_j 整除 $\mathcal{L}_i$，所以 $\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。 □

3. Determinantal Methods

设 (G,α) 是一个具有 n 个顶点和 $A = \{F_1, \ldots, F_n\} \subset R_{(G,\alpha)}$ 的边标记图。我们可以将 A 改写为矩阵形式，其列为 A 的元素，例如

$$A = \begin{pmatrix} F_1(v_n) & F_2(v_n) & \ldots & F_n(v_n) \\ \vdots & & & \\ F_1(v_2) & F_2(v_2) & \ldots & F_n(v_2) \\ F_1(v_1) & F_2(v_1) & \ldots & F_n(v_1) \end{pmatrix}.$$

A 称为样条矩阵，其行列式 $|A|$ 记作 $|F_1 \ F_2 \ \ldots \ F_n|$。

给定一个具有 n 个顶点的边标记图 (G,α)，我们将元素 Q_G 表示为

$$Q_G = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i.$$

我们利用 $R_{(G,\alpha)}$ 、 Q_G 和行列式 $|A|$给出 Q_G 的基底条件。对于圈、菱形图和树， [Gjo15、Mah16、Bla18、AS21a]给出了 G 的边标记所对应的显式公式。当 Q_G 的边数大于顶点数时，确定这样的公式十分困难。对于任意图，我们无需给出

行列式 $|A|$ 的性质列举如下。

命题 3.1. 设 (G,α) 是一个具有 n 个顶点的边标记图。假设 $\{F_1, \ldots, F_n\}$ 构成 $R_{(G,\alpha)}$ 的一组基，并令 $\{G_1, \ldots, G_n\} \subset R_{(G,\alpha)}$。那么 $|F_1 \ F_2 \ \ldots \ F_n|$ 整除 $|G_1 \ G_2 \ \ldots \ G_n|$。

证明。 参见 [Gjo15]中的引理 5.1.4。 □

命题 3.2。设 (G,α) 是一个带有 n-顶点的边标记图。设$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset R_{(G,\alpha)}$。若 $|F_1 \ F_2 \ \ldots \ F_n| = r \cdot Q_G$，其中 $r \in R$是一个单位元，则 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ 构成 $R_{(G,\alpha)}$的一组基。

证明。 [AS21a] 中的引理 3.19 的证明适用于任意边标记图 (G, α)。 □

定理 3.3. 给定一个具有 n 个顶点的边标记图 (G,α) 和一组样条 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset R_{(G,\alpha)}$，元素 Q_G 整除 $|F_1 \ F_2 \ \ldots \ F_n|$。

证明。令 $F_i = \big(F_i(v_1)\ldots,F_i(v_n)\big)$ 和 $\mathbf{p}^{(v_2,0)}, \mathbf{p}^{(v_3,0)}\ldots,\mathbf{p}^{(v_n,0)}$ 为 v_i 中关于 $2 \le i \le n$ 的任意零迹。于是，$\mathbf{p}^{(v_i,0)}$ 对应于 v_i 的一个 v_{i_j}-迹，其中含有$i_j < i$。通过对样条矩阵 A 进行初等行变换，我们将 A 的第 $(n-i+1)$ 行替换为

$$\big(F_1(v_i)\ ,\ldots,\ F_n(v_i)\big) \to \big(F_1(v_i) - F_1(v_{i_j})\ ,\ldots,\ F_n(v_i) - F_n(v_{i_j})\big).$$

这里 $\big(\mathbf{p}^{(v_i,0)}\big)$ 根据定理 2.4 将这一新行除以。请注意，这类行变换会固定 A 的最后一行。经过这些适当的行变换后，可得乘积 $\big(\mathbf{p}^{(v_2,0)}\big)\cdot\big(\mathbf{p}^{(v_3,0)}\big)\cdots\big(\mathbf{p}^{(v_n,0)}\big)$ 整除行列式 $\big|A\big|$。由于零迹是任意选取的，我们得出集合中的每个元素

$$\mathbb{P} = \Big\{\big(\mathbf{p}^{(v_2,0)}\big)\cdot\big(\mathbf{p}^{(v_3,0)}\big)\cdots\big(\mathbf{p}^{(v_n,0)}\big) \mid \mathbf{p}^{(v_i,0)} \text{ is a zero trail of } v_i \text{ for } 2 \le i \le n\Big\}$$

整除 $\big|A\big|$。因此，最小公倍数

$$\big[\mathbb{P}\big] = \mathcal{L}_1\cdot\mathcal{L}_2\cdot\mathcal{L}_3\cdots\mathcal{L}_n = Q_G$$

整除 $\big|A\big| = \big|F_1\ \ F_2\ \ \ldots\ \ F_n\big|$ 根据引理 2.2。 □

4. Basis Condition on Complete Graphs

一个具有 n 个顶点的完全图，记作 K_n，是指满足以下条件的图：对于每一对不同的顶点 $u,v \in V(K_n)$，都有 $uv \in E(K_n)$。由于任意一对顶点之间都有边相连，且需要检查许多样条条件，因此完全图是研究样条时最具挑战性的图类型。此前，行列式方法从未被高效地用于 $R_{(K_n,\alpha)}$ 的模基。本节聚焦于最大公因子整环上的完全图样条，并给出 $R_{(K_n,\alpha)}$ 的行列式基判据。

本节的首要目标是回答以下问题。

问题 4.1. 设 (K_n,α) 为一个边标记完全图，且 R 是一个最大公因子整环。固定一个满足 $2 \le i \le n-1$ 的整数 i。对于 $a^{(i)} \in \times D^i$ 的每个元素，我们能否找到一个样条 $F \in R_{(K_n,\alpha)}$，使得对于所有 $v \in V(K_n)$，都有 $F(v) \in \Big\{0,\ \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i\Big\}$？我们用 $F_{a^{(i)}}$ 表示这样的样条。

问题 4.1 在以下情形中，对于任意类型的图，这个问题都很容易回答。

命题 4.2. 设 (G,α) 为任意边标记图，并假设对于所有 $uv_i \in E(G)$，l_{uv_i}属于 $a^{(i)} \in \times D^i$。满足 $g_{a^{(i)}}(v_i) = \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i$ 且对于 $v \ne v_i$ 满足 $g_{a^{(i)}}(v) = 0$ 的顶点标记 $g_{a^{(i)}}$ 是 $R_{(G,\alpha)}$ 上的样条。

证明。考虑边 $uv \in E(G)$。假设 u 或 v 等于 v_i，则 $F(u)-F(v) = \pm\prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i$，并且根据命题 2.10，$l_{uv}$ 整除该差。因此，样条条件在 uv 上成立。若 u 和 v 都不等于 v_i，则 $g_{a^{(i)}}(u) = g_{a^{(i)}}(v) = 0$，且样条条件在 uv 上成立。因此，$g_{a^{(i)}} \in R_{(G,\alpha)}$。□

我们考虑 l_{uv_i} 不属于 $a^{(i)}$ 对某个 $uv_i \in E(K_n)$ 的情形，见算法 4.4。不过，我们先将问题 4.1 归约为 $\times D^i$的极小元。

定理 4.3. 设 $a^{(i)} \in \times D^i$ 为极小元。对于任意满足$a^{(i)} \subset a^{*(i)}$的元素 $a^{*(i)} \in \times D^i$，样条 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$ 诱导出一个样条 $F_{a^{*(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$。

证明。由于 $a^{(i)} \subset a^{*(i)}$，我们有 $H_{a^{(i)}} \subset H_{a^{*(i)}}$，且 $\prod a^{(i)}$ 整除 $\prod a^{*(i)}$。我们如下定义诱导样条 $F_{a^{*(i)}}$。

$$F_{a^{*(i)}}(v) = \begin{cases} \prod a^{*(i)}\cdot\mathcal{L}_i & \text{if } F_{a^{(i)}}(v) = \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i, \\ 0 & \text{if } F_{a^{(i)}}(v) = 0. \end{cases}$$

为证明 $F_{a^{*(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$，考虑任意一条边 $uv \in E(K_n)$。若 $uv \notin E(H_{a^{*(i)}})$，则有 $uv \notin E(H_{a^{(i)}})$ 和 $F_{a^{*(i)}}(u) = F_{a^{*(i)}}(v)$，因为 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$。因此样条条件成立。若 $uv \in E(H_{a^{*(i)}})$，由命题2.10 可知，$\alpha(uv)$ 整除 $\prod a^{*(i)}\cdot\mathcal{L}_i$，样条条件再次成立。因此，$F_{a^{*(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$。□

我们在例 4.7 的末尾展示定理 4.3 的一个应用。我们介绍以下算法来构造样条 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$，其中 R 是最大公因子整环。

算法 4.4。设 (K_n,α) 是一个边标记完全图，且 $a^{(i)} \in \times D^i$ 是一个极小元。假设 $v_iv_{k_1},\ldots,v_iv_{k_t} \notin E(H_{a^{(i)}})$，其中 $k_j > i$ 对于 $1 \le j \le t$ 成立。按如下方式在 (K_n,α) 上定义顶点标记 $g_{a^{(i)}}$。

(1) 令 $g_{a^{(i)}}(v_i)$ 为 $= \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i$。(2) 对于 $1 \le j \le t$，令 $g_{a^{(i)}}(v_{k_j})$ 为 $= \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i$。(3) 对于满足 $s > i$ 且 $v_iv_s \in E(H_{a^{(i)}})$ 的顶点 v_s，若对于 $1 \le j \le t$，$v_sv_{k_j} \in E(H_{a^{(i)}})$，则令 $g_{a^{(i)}}(v_s)$ 为 $= 0$。否则，令 $g_{a^{(i)}}(v_s)$ 为 $= \prod a^{(i)}\cdot\mathcal{L}_i$。

回顾一下，根据 $a^{(i)} \in \times D^i$ 的设定，任何带有 $s < i$ 的顶点 v_s 都预先标记为零。算法 4.4 与这些预先标记的顶点一致：假设带有 $s < i$ 的 $v_s \in V(K_n)$，那么 $< l_{v_sv_{k_j}}, l_{v_{k_j}v_i} >$ 是 v_i 的零迹，且对于$1 \le j \le t$，$v_{k_j}v_i \notin E(H_{a^{(i)}})$。因此，根据注2.8，对于所有 j，$v_sv_{k_j} \in E(H_{a^{(i)}})$，并且 $g_{a^{(i)}}(v_s) = 0$。

算法4.4的结果如下所示。

命题 4.5。顶点标记 $g_{a^{(i)}}$ 是 $R_{(H_{a^{(i)}},\alpha)}$中的一个样条。

证明。 设 $uv \in E(H_{a^{(i)}})$。若 $g_{a^{(i)}}(u) - g_{a^{(i)}}(v) = 0$，则样条条件成立。假设 $g_{a^{(i)}}(u) - g_{a^{(i)}}(v) = \prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。由命题 2.10， l_{uv}整除$\prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$，样条条件再次成立。因此， $g_{a^{(i)}} \in R_{(H_{a^{(i)}},\alpha)}$。 □

我们将算法 4.4 的主要结果表述如下。

定理 4.6. 顶点标记 $g_{a^{(i)}}$ 是$R_{(K_n,\alpha)}$中的一个样条。

证明。由于图是完全图，算法 4.4 覆盖了所有顶点 v_j 和 $j > i$ 。设 $uv \in E(K_n)$。若 $uv \in E(H_{a^{(i)}})$，则根据命题 4.5，样条条件成立。设 $uv \notin E(H_{a^{(i)}})$，并假设样条条件在 uv上不成立。不失一般性，设 $g_{a^{(i)}}(u) = \prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$ 且 $g_{a^{(i)}}(v) = 0$，其中 $u = v_s$和 $v = v_{s'}$。注意，由于标记 $g_{a^{(i)}}(u)$，所以 $s > i$。我们通过比较指标 s' 和 i，分两种情况完成证明。

假设 $s' < i$，那么根据 $a^{(i)}$ 的构造可得 $vv_i \notin E(H_{a^{(i)}})$。若 $uv_i \notin E(H_{a^{(i)}})$，则我们有 v_i 的零迹 $< l_{v_iu}, l_{uv} >$，其中没有任何边属于 $a^{(i)}$，这与注2.8矛盾。若 $uv_i \in E(H_{a^{(i)}})$，则有另一个顶点 v_k，满足 $k > i$，且 $v_iv_k, v_ku \notin E(H_{a^{(i)}})$，因为 $g_{a^{(i)}}(u) = \prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$。在这种情况下， v_i 的零迹 $< l_{v_iv_k}, l_{v_ku}, l_{uv} >$ 上没有任何边属于 $a^{(i)}$，再次与注2.8矛盾。

假设 $s' > i$，那么由于 $g_{a^{(i)}}(v) = 0$，可得 $vv_i \in E(H_{a^{(i)}})$。此外，由于其他情况会与 v 的标记矛盾，因此 $uv_i \in E(H_{a^{(i)}})$。鉴于 $uv_i \in E(H_{a^{(i)}})$ 和 $g_{a^{(i)}}(u) = \prod a^{(i)} \cdot \mathcal{L}_i$，存在一个顶点 v_k，满足 $k > i$，使得$v_kv_i \notin E(H_{a^{(i)}})$ 且 $uv_k \notin E(H_{a^{(i)}})$。由于 $g_{a^{(i)}}(v) = 0$，我们称 $vv_k \in E(H_{a^{(i)}})$。由于 $a^{(i)}$ 是极小的，存在一条零迹 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}$，使得 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}$ 上唯一属于 $a^{(i)}$ 的边是 vv_k。然而，在 $\mathrm{p}^{(v_i,0)}$ 上用 l_{v_ku}，l_{uv} 替换 l_{vv_k}，会得到另一条零迹 $\mathrm{p}*^{(v_i,0)}$，使得 $\mathrm{p}*^{(v_i,0)}$ 上没有任何边属于 $a^{(i)}$，这与注2.8矛盾。

由于所有可能的情形都会导致矛盾，因此假设不成立，样条条件在 uv 上成立。因此， $g_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$。 □

在本文余下部分，我们将顶点标记 $g_{a^{(i)}}$ 记为 $F_{a^{(i)}}$ 。我们在以下示例中运行算法4.4 。

例 4.7。 考虑图中标记为（K_5， α）的边，见图 4。一个极小元$a^{(2)} \in \times D^i$ 可表示为 $l\ (a^{(2)}) = \{l_2, l_4, l_7, l_5, l_9, l_{10}\}$， 以边标记表示。子图$H_{a^{(2)}}$ 以实线表示，其他边则以虚线表示如下。

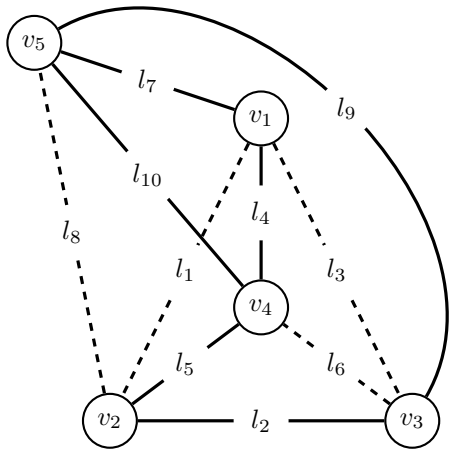

FIG. 4. 边（K_5, α）标记

我们按以下方式执行算法4.4 。

(1) $g_{a^{(2)}}(v_1) = 0$ 作为预标记顶点。(2) 设 $g_{a^{(2)}}(v_2) = \prod a^{(2)} \cdot \mathcal{L}_2$。(3) 设 $g_{a^{(2)}}(v_5) = \prod a^{(2)} \cdot \mathcal{L}_2$，因为 $v_5v_2 \notin E(H_{a^{(2)}})$。(4) 设 $g_{a^{(2)}}(v_3) = g_{a^{(2)}}(v_4) = 0$，因为 $v_5v_3, v_5v_4 \in E(H_{a^{(2)}})$。

因此，$g_{a^{(2)}} = F_{a^{(2)}} = \left(0, \prod a^{(2)} \cdot \mathcal{L}_2, 0, 0, \prod a^{(2)} \cdot \mathcal{L}_2\right)$。作为定理4.3的一个应用，$F_{a^{(2)}}$ 诱导样条 $F_{a^{*(2)}} = \left(0, \prod a^{*(2)} \cdot \mathcal{L}_2, 0, 0, \prod a^{*(2)} \cdot \mathcal{L}_2\right)$ 对于$a^{(2)} \subset a^{*(2)}$ 具有 $l(a^{*(2)}) = \{l_2, l_4, l_7, l_5, l_9, l_{10}, l_3\}$。

注 4.8。由于 $\mathfrak{D}_n = \emptyset$根据注 2.6，我们固定 $F_{a^{(n)}} = (0, 0, \ldots\ldots, \mathcal{L}_n)$ 。由命题 $F_{a^{(n)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$ 可得 2.11。

注 4.9。样条 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$ 至少有 i 个零分量。为此，注意到对于所有 $j < i$，都有 $F_{a^{(i)}}(v_j) = 0$，其中 $2 \leq i \leq n-1$。当 $i = n$ 时，我们有 $F_{a^{(n)}} = (0, 0, \ldots, \mathcal{L}_n)$。

我们将命题4.2、定理 4.3、定理 4.6 以及注 4.9 总结为以下推论。

推论 4.10。设 (K_n, α) 是一个边标记完全图，R 是一个最大公因子整环。对于任意满足 $i = 2 \leq i \leq n-1$ 的元素 $a^{(i)} \in \times D^i$，都存在一个样条 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$，其零分量至少有 i 个。

推论4.10 对问题 4.1 给出了肯定的回答，适用于完全图。本节的主要结果陈述如下。

定理4.11. 设 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset R_{(K_n,\alpha)}$。若 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ 构成 $R_{(K_n,\alpha)}$ 的一组基，则 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_{K_n}$，其中 $r \in R$ 是一个单位元。

证明。 假设 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ 构成 $R_{(K_n,\alpha)}$ 的一组基。根据定理 3.3，Q_{K_n} 整除 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right|$，设 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_{K_n}$。我们证明 r 是一个单位元。

根据推论4.10，存在一个样条 $F_{a^{(i)}} \in R_{(K_n,\alpha)}$，其零分量至少有 i 个，适用于任意 $a^{(i)} \in \times D^i$ 和 $2 \le i \le n-1$。构造样条矩阵

$$A = \left(1 \;\; F_{a^{(2)}} \;\; F_{a^{(3)}} \;\; \ldots \;\; F_{a^{(n-1)}} \;\; F_{a^{(n)}}\right)$$

其中 $1 = (1, \ldots, 1)$ 是平凡样条。矩阵 A 是上三角矩阵，因为 $F_{a^{(i)}}$ 的前 $i-1$ 个分量为零。因此，

$$\begin{aligned} |A| &= \mathcal{L}_2 \cdot \prod a^{(2)} \cdot \mathcal{L}_3 \cdot \prod a^{(3)} \cdots \mathcal{L}_{(n-1)} \cdot \prod a^{(n-1)} \cdot \mathcal{L}_n \\ &= \prod a^{(2)} \cdot \prod a^{(3)} \cdots \prod a^{(n-1)} \cdot Q_{K_n}. \end{aligned}$$

根据命题 5.1，$\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_{K_n}$ 整除 $\left|A'\right|$，因此 r 整除 $\prod a^{(2)} \cdot \prod a^{(3)} \cdots \prod a^{(n-1)}$。由于 $a^{(i)} \in \times D^i$ 是任意的，我们得出 r整除集合中的每个元素

$$\mathbb{D} = \left\{ \prod a^{(2)} \cdot \prod a^{(3)} \cdots \prod a^{(n-1)} \mid a^{(i)} \in \times D^i, \;\; 2 \le i \le n-1 \right\}.$$

因此，r 整除最大公因数 $(\mathbb{D})$ 根据命题2.9，因此，r 是一个单位元。□

我们通过汇总命题$R_{(K_n,\alpha)}$ 和定理4.2，给出4.11在最大公因子整环上的基底条件。

定理 4.12. 设 $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subset R_{(K_n,\alpha)}$ 且 R 是一个最大公因子整环。那么，当且仅当 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_{K_n}$ 时，$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ 构成 $R_{(K_n,\alpha)}$ 的一组基，其中 $r \in R$ 是一个单位元。

5. Basis Condition on Arbitrary Graphs

在本节中，我们将定理 4.12 推广到任意图，并得出最大公因子整环上的一般基底条件。为此，我们定义边标记图的完备化。给定一个边标记图（G，α），我们通过添加缺失边 uv 并将其标记为$\alpha^*(uv) = 1$来定义它的完备化，记为（K_G，α^*）。若 $uv \in E(G)$，则令 $\alpha^*(uv) = \alpha(uv)$。

下面的命题说明，完备化不会影响样条集合。

命题 5.1. 设 (G,α) 是一个边标记图，(K_G,α^*) 是它的完备化。那么 $R_{(G,\alpha)} = R_{(K_G,\alpha^*)}$。

证明。设 $F \in R_{(G,\alpha)}$ 和 $uv \in E(K_G)$。若 $uv \in E(G)$，则 $F(u)-F(v) \in \alpha(uv) = \alpha^*(uv)$。否则，$F(u)-F(v) \in \alpha^*(uv) = 1$ 和 $F \in R_{(K_G,\alpha^*)}$。反过来，若 $F \in R_{(K_G,\alpha^*)}$，则 $F \in R_{(G,\alpha)}$，因为 $(G,\alpha) \subset (K_G,\alpha^*)$。因此，$R_{(G,\alpha)} = R_{(K_G,\alpha^*)}$。□

Q_G 与 Q_{K_G} 之间的关系如下所述。

命题 5.2. 设 (G,α) 是一个边标记图，(K_G,α^*) 是它的完备化。则 $Q_G = Q_{K_G}$。

证明。固定一个满足 $i > 1$ 的顶点 $v_i \in V(G)$。由于 $G \subset K_G$，(G,α) 上的任意零迹 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}$都是 (K_G,α^*) 上的零迹。假设 (K_G,α^*) 上的零迹 $\mathbf{p}^{(v_i,0)}{}_j$ 包含一条满足 $\alpha^*(uv) = 1$ 的边 uv，则 $\left(\mathbf{p}^{(v_i,0)}\right) = 1$，而这样的零迹不会影响 $\mathcal{L}_i$。因此，$\mathcal{L}_i$ 在 (G,α) 和 (K_G,α^*) 上相同，故 $Q_G = Q_{K_G}$。□

考虑 G、α 的完备化。根据定理 4.12，$\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ 构成 $R_{(K_G,\alpha^*}$的一个基当且仅当 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_{K_G}$，其中 $r \in R$是一个单位元。由于 $R_{(G,\alpha)} = R_{(K_G,\alpha^*)}$ 以及 $Q_G = Q_{K_G}$ 根据命题 5.1 和命题 5.2，定理 4.12 可推广到任意图，具体如下。

定理 5.3。设 (G,α) 是一个具有 n 个顶点的任意图，$\{F_1,F_2,\ldots,F_n\} \subset R_{(G,\alpha)}$ 且 R 是一个最大公因子整环。则 $\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$ 构成 $R_{(G,\alpha)}$ 的一个基，当且仅当 $\left|F_1 \;\; F_2 \;\; \ldots \;\; F_n\right| = r \cdot Q_G$，其中 $r \in R$ 是一个单位元。

Acknowledgements

第二作者获土耳其科学技术研究委员会面向¨ ˙土耳其公民的国际博士后研究奖学金计划 TUBITAK-2219（项目编号：1059B192201169）资助。此外，他感谢史密斯学院数学科学系的热情接待。

References

[AAA+22] Selma Altınok、Katie Anders、Daniel Arreola、Luisa Asencio、Chloe Ireland、Samet Sarıo˘glan 和 Luke Smith。《广义图样条与普适差分性质》。*arXiv e-prints*，https://arxiv.org/abs/2206.06981，2022年。[ACFG+20] Katherine Anders、Alissa Crans、Briana Foster-Greenwood、Blake Mellor 和 Ju- liannaTymoczko。《仅存在常数样条的图》。*Pacific Journal of Math-ematics*，304(2):385–400，2020。

[AD21] Selma Altınok 和 G¨ok¸cen Dilaver。《完全图的极小生成集》。*arXiv e-prints*, https://arxiv.org/abs/2107.05874，2021年。[AMT21] Portia Anderson、Jacob P. Matherne 和 Julianna Tymoczko。《带有两个标记的图上的广义样条与圈上的多项式样条》。 *arXiv e-prints*, https://arxiv.org/abs/2108.02757，2021年。[AS21a] Selma Altınok 和 Samet Sarıo˘glan。《基于行列式的广义样条模基判据》。 *Discrete Mathematics*，344(2)，2021年。[AS21b] Selma Altınok 和 Samet Sarıo˘glan。《任意图上广义样条模的流上基》。 *Journal of Algebra and Its Applications*, 20(10)，2021年。[BHKR15] Nealy Bowden、Sarah Hagen、MelanieKing 和 Stephanie Reinders。《圈上整数系数广义样条的基与结构常数》。 *arXiv e-prints*, https://arxiv.org/abs/1502.00176，2015年。[Bla18] Kathryn Elizabeth Blaine。《整数样条的行列式条件》。 *Bard CollegeSenior Projects Fall 2018*，2018年。[BT15] Nealy Bowden 和 J ulianna Tymoczko。《模 m 的样条》。 *arXiv e-prints*，https://arxiv.org/abs/1501.02027, 2015年。[DiP17] Michael DiPasquale。《广义样条与图形排列》。 *Journal of Algebraic Combinatorics*，45:171–189，2017年。[DM19] Radha Madhavi Duggaraju 和 Lipika Mazumdar。《一种用于生成图上广义样条的算法，例如完全图、完全二部图和超立方体》。 *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*，2019年。[Gjo15] Ester Gjoni。《 n-圈整数样条的基判据》。 *Bard College Senior ProjectsSpring 2015*，2015年。[GTV16] Simcha Gilbert、Julianna Tymoczko 和 Shira Viel。《任意图上的广义样条》。 *Pacific Journal of Mathematics*，281:333–364，2016年。[HMR14] Madeline Handschy、J ulie Melnick 和 Stephanie Reinders。《圈上的整数广义样条》。 *arXiv e-prints*, https://arxiv.org/abs/1409.1481，2014年。[Mah16] Emmet Reza Mahdavi。《菱形图上的整数广义样条》。 *Bard Col-lege Senior Projects Spring 2016*，2016年。[PSTW17] McCleary Philbin、Lindsay Swift、Alison Tammaro 和 Danielle Williams。《整数商环上的样条》。 *arXiv e-prints*, https://arxiv.org/abs/1706.00105，2017年。[RC22] Lauren L. Rose 和 Kariane Calta。《广义样条模的行列式条件》。 *arXiv e-prints*，https://arxiv.org/abs/2208.13062，2022年。[RS23] Lauren L. Rose 和 Jeff Suzuki。《任意图上的整数广义样条》。*Discrete Mathematics*，346(1):113139, 2023年。[SA24] Samet Sarıo˘glan 和 Selma Altınok。《图上的多元广义样条与奇异关系》。 *Journal of Algebra and Its Applications*，（即将出版），2024年。

TED University*Email address*:
seher.fisekci@tedu.edu.tr

Hacettepe University*Email address*，通讯作者:
ssarioglan@hacettepe.edu.tr