arXiv:2301.12544v1 [math.SG] 29 Jan 2023

三角群普朗歇尔公式的泊松几何

Nicholas M. Ercolani†

数学系 ，亚利桑那大学，北圣丽塔大道617号，图森，AZ 85721-0089，美国 A

*通讯作者。电子邮箱：ercolani@math.arizona.edu ORCID：0000-0003-2010-4205†

摘要

本文确立了三角群上一类一般余伴随轨道存在典范坐标。这些轨道对应于相关对偶群上的一组满普朗歇尔测度集。这推广了 Flaschka 最初发现的一种广为人知的最小（非一般）类型余伴随轨道坐标化。后者与经典 Toda 格及其相关泊松几何有着密切联系。我们的结果进一步揭示了与完整科斯坦特-托达格及其泊松几何之间的联系。这带来了新的见解，将 Borel 李群普朗歇尔定理的具体细节与 Borel 子群及其子群的不变量理论联系起来。我们还讨论了这些结果对完整科斯坦特-托达格量子可积性的一些影响。

K关键词：轨道方法、Dixmier-Pukanszky 算子、Toda 格、极化、不变量理论

目录

1 引言 **2**

2 背景 **5**

2.1 实半单李群的分解.52.2 幺幂三角子群的分解.62.3 海森堡群的薛定谔表示.62.4 逐步平方可积表示.72.4.1 实极化.7 ̂2.4.2 构造 N 的本质部分.82.4.3 N 的普朗歇尔公式.82.5 三角幂零代数的泊松几何.9

3 Borel 子群 **9**

3.1 Dixmier-Pukanszky 算子.103.2 Plancherel 定理.11

4 泊松结构、轨道与不变量理论 **11**

4.1 泊松约化与归纳.114.2 N 的不变量理论.144.3 再论 Dixmier-Pukanszky 算子.164.3.1 两种视角的历史.17

5 轨道上的极化与典范结构 **18**

5.1 Borel 子群的 Pukanszky 极化.185.2 泊松结构的典范表示 $\mathfrak{b}^*$.215.3 重新审视 Plancherel 公式.23

6 结论 236.1 典范坐标与标准哈密顿系统.236.2 不变量的量子化与量子可积性.24

A 附录：包络代数 25

参考文献 26

1 引言

本文旨在阐明并进一步探讨群表示与泊松几何（即哈密顿力学所依据的几何）之间的深刻联系。我们对此采取的视角植根于可积系统理论，尤其关注与 Toda 格推广相关的内容。更具体地说，我们研究实（上）三角矩阵群的 Plancherel 定理与这些群的一般余伴随轨道的相空间几何之间的桥梁，即具有 $b_{ii} > 0$ 形式的群

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & * & \dots & \dots & * \\ & b_{22} & * & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

及这些群的一般余伴随轨道的相空间几何；后者是完全 Kostant Toda 格所依据的相空间几何[EFS93]。对于一般的群及相空间几何，这座桥梁被称为轨道方法计划，因此本文为该计划提供了更多具体实例，阐明了其中一些近期进展，并展示了新的结果。尽管我们将研究范围限定于三角群，但本文的阐述方式旨在自然地将结果推广到 $GL(n, \mathbb{R})$ 的一般 Borel 子群，以及其他实半单李群的 Borel 子群，因此我们常将三角群称为 Borel子群。本文也为量子 Toda 晶格的应用打开了大门，相关内容将在结论中讨论。

在概述我们的结果之前，我们先介绍一些关于普朗歇尔理论的一般性动机。（关于这一背景的更多细节，请参阅 [DM72]。）回顾一下最初的 Plancherel 定理，它是与傅里叶理论相关的经典调和分析的基石之一。对于一维酉群，S^1，Plancherel 定理指出，对于函数 $f(\theta) \in L^2(S^1)$，从 f 到其傅里叶系数 $\hat{f}(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$的映射是一个等距映射 $\left(||f||_2 = ||\hat{f}||_2\right)$。此外，这个等距映射可明确表示为

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n\theta} \tag{1.1}$$

也就是说，该级数在 L^2-范数下收敛到 $f(\theta)$。（下文中，我们将把类似 (1.1) 的公式称为普朗歇尔公式。）从群论的角度看，(1.1) 可视为对所有同态 $e^{2\pi i n\theta}$的展开，这些同态由 $n \in \mathbb{Z}$索引，且从 S^1 到 $\mathbb{C}^*$，通常称为特征标。由于 S^1是一个交换群，其不可约表示都是一维的，而这些特征标构成了 S^1的所有不可约酉表示。后一集合对应于加法群$\backsim\mathbb{Z}$，称为对偶群，在此记作 S^1。对于 $L^2(\mathbb{R})$，也有类似的结论，其中 $\mathbb{R}$ 被视为关于平移的群，这对应于 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$的傅里叶积分表示。

然而，当考虑非交换群G上的调和分析时，情况就大不相同了。一维同态已不足以对 $L^2(G)$进行完备分解。早在 Frobenius 研究有限群时，人们就认识到了这一点：他意识到，在非交换情形下，存在带有 $d > 1$的不可约表示（从 G 到 $GL(d, \mathbb{C})$的同态），而在对 L^2进行任何类傅里叶分解时，都需要用到它们的矩阵系数。对于紧群

这一过程的描述基于彼得–外尔定理 [Kn86] ，该定理对 G的所有不可约酉表示进行了分类。尽管这些表示不再总是一维的，但它们仍是有限维的，并且$\widehat{}$构成一个由 λ标记的等价类所组成的离散测度空间 G。对于每个 λ，等价类中的一个元素都是作用于有限维希尔伯特空间 V_λ上的矩阵表示 $\rho_\lambda(g)$。尽管 G 通常不再是一个群，人们仍$\widehat{}$将其称为对偶群。在这种情形下， $f(g) \in L^2(G)$在表示 λ 处的傅里叶系数，是通过将表示矩阵的伴随矩阵与 $f(g)$在群上的哈尔测度下积分得到的矩阵：

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\rho_\lambda(g)^* d\mu_{\text{Haar}}(g)$$

并且普朗歇尔公式为

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \dim(V_\lambda)\langle \hat{f}(\lambda), \rho_\lambda(g)^* \rangle. \tag{1.2}$$

这里出现的收缩， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是通过对配对中出现的两个矩阵的乘积取迹来定义的。离散测度， $\sum_{\lambda \in \widehat{G}} \dim(V_\lambda)\delta_\lambda$，是定义在 G上的测度，称为 G 的普朗歇尔测度；$\dim(V_\lambda)$则是表示 λ 在普朗歇尔公式中以同型（即等价）副本出现的重数。我们还有如下等距映射关系：

$$||f||^2_{L^2(G)} = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \dim(V_\lambda)\ ||\hat{f}(\lambda)||^2.$$

泊松几何进入这一论述的缘起，或许可以追溯到量子力学。这里我们也只简要谈几句背景，更多细节请参阅 [GuSt84] 。具有多种对称性的量子系统通常具有一个哈密顿量，它是一个与这些对称性对易的微分算子。当这使得系统拥有一个极大对易观测量集（算子）时，我们可以期待根据这些算子作用于其共同特征函数所得到的谱，对系统的相干态作出完整描述。这种分解与前面讨论的普朗歇尔公式相类似。例如，在 $G = SO(3)$ 的情形下，这些谱就是氢原子的量子数 [Si05]。这些量子系统的半经典极限对应于经典哈密顿动力系统，其中对易算子对应于泊松对易函数。在 20 世纪 60 年代和 70 年代的一系列论文中，基里洛夫和 Kostant [Ki62、Ko70] 提出了逆转这一过程的思想，从而避开量子力学的大部分复杂性，转而采用直接基于系统相关对称群李代数构造的相空间上的经典动力学表述。在若干情形下，他们证明了 G $\mathfrak{g}^*$ 的李代数对偶上的余伴随作用轨道，与 G中的元素一一$\widehat{}$对应。（从物理角度看，这些轨道是系统能量卡西米尔函数的等值集。）在这些描述中， $\mathfrak{g}^*$ 上的刘维尔测度与$\widehat{}$上的 G普朗歇尔测度相关。因此，人们开始关注将这一思想推广到更一般的群，由此产生了开篇提到的轨道方法纲领。多年来，这一直是一个活跃的研究领域 [Ki99]。

作为出发点，我们在此插叙一点：对于 S^1 ，其李代数是 $i\mathbb{R}$。其对偶李代数由线性泛函 $2\pi i\gamma\theta$ 构成。共轭在这些泛函上诱导的作用，即余伴随作用，由于该群是交换群，因而是平凡的。因此，此处的余伴随轨道就是单点线性泛函。然而，由于 S^1 的拓扑非平凡性，需要一个条件来确保这些泛函的指数函数（也就是特征）在 S^1 上定义良好。这个条件是 $\gamma = n \in \mathbb{Z}$。因此，尽管这种情形略显退化，但对偶群 S^1 的元素$\widehat{}$确实与经过适当量子化的余伴随轨道一一对应。这个量子化条件是轨道方法中量子力学联系所留下的最后痕迹。不过，对于我们现在要讨论的非紧群，实际上不需要任何量子化条件。

本文关注非紧非交换群的情形，例如 B。这带来了新的挑战，其中包括不可约表示通常会形成连续系列（类似于 $\mathbb{R}$ 的傅里叶积分），因此普朗歇尔测度并非简单的离散测度，甚至可能乍看之下都无法良好定义。此外，不可约表示在大多数情况下将是无限

维的（且要求是酉的）。我们尤其关注幂零群和可解群的普朗歇尔定理。这里也取得了一些进展，不过相对而言只是近几十年来的事，这要归功于 Moore、Wolf 及其合作者的开创性工作[MW73，LW78]。 [LW78] 给出的 $\widehat{}$的普朗歇尔公式 B 结果如定理 3.4所述。该结果用称为 B 的参数描述了对偶群 $\mathfrak{a}_{\diamond}^{*}$，并给出了相应的普朗歇尔测度；此外还引入了一项新内容，在经典类比式（1.2）中并无对应物。这项新内容是一个 Dixmier-Pukanzsky 算子，记作 D。之所以需要它，是因为与紧群甚至幂零群不同， B 并非幺模的（即其左、右哈尔测度并不相同）。本文前两节将回顾这一结果的推导，并解释所有这些术语的含义。不过，我们的目标不只是重述这一结果，而是以纯粹的泊松理论方式理解其中的基本要素，并阐明其对可积系统理论的意义。具体而言，我们将 $\mathfrak{a}_{\diamond}^{*}$ 明确表示为卡西米尔函数的形式，这些函数刻画了与 B相关联的李-泊松结构的辛叶。我们还将根据 B 的极大幺幂子群所关联的不变量理论，明确给出 B的 Dixmier-Pukanzsky 算子。据我们所知，这是文献中首次建立表示论与泊松几何之间这种特定联系。这些结果进而为更一般的托达格点的可积系统结构带来了一些新见解，并促成了对经典三对角托达格点一项标志性结果的推广。下面我们将对此作极简要的介绍；详细内容构成本文的主要部分。

Toda 格 [To67] 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$上的一个动力系统，其坐标为（p_1，……， p_n， q_1，……， q_n）。该系统相对于 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准辛结构是哈密顿系统，其哈密顿量为

$$H(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_j^2+\sum_{j=1}^{n-1}e^{q_j-q_{j+1}}. \tag{1.3}$$

在 Flaschka 发现的一种卓越坐标变换[Fl74], (1.3)下，可将其变为一个哈密顿系统；该系统相对于 B 的李代数对偶上的李-泊松结构（有关这一泊松结构的精确定义，见第4 节）。在对偶代数的自然坐标下，该系统的相空间可取为三对角黑森堡矩阵；即，形如 X 的矩阵

$$X=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

在这些变量下，经典 Toda 格的哈密顿量变为

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}X^2.$$

这一结果正是上一段提及的标志性结果。在这个相空间上，存在一族由 Tr 的取值参数化的余伴随轨道X；Tr 是余伴随作用的不变量（等价地说，是 Toda 系统的一个卡西米尔函数）。与这些轨道相对应的是 B 的无限维不可约酉表示，它们与 B 在经典Whittaker向量上的作用有关。Kostant [Ko78] 对此对应关系作了详细研究，充分展示了轨道方法在明确描述可解李群的表示方面的强大威力。然而，这些轨道属于维数最小的余伴随轨道之列。本文将对维数最大的轨道开展类似的分析。这些轨道对应于 B 的对偶群中的一个满测度集合，由此将本分析与本文的一个主题——普朗歇尔公式——联系起来。我们的方法可视为对 Flaschka 所采用方法的一种逆转。我们将寻求一种坐标变换，使完全 Kostant Toda 格及其底层的泊松几何能够用相对于标准辛结构的典范坐标来表示。我们将证明，对于最大维数的（一般）轨道，这种变换确实存在，并阐明其对表示论的一些启示。下一段将简要介绍其中一些启示。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们将以海森堡代数层级的形式，介绍构造幺正不可约表示所需的背景知识，这些表示对应于幺幂三角矩阵。在第 3 节中，我们将阐述 B 的普朗歇尔公式形式，这是我们工作的立足点。这需要

构造一些结构，使普朗歇尔测度有良好定义，并绕开与 B 的非幺模性相关的一个核心问题。特别是，这引出了 Dixmier-Pukanszky 算子的概念。这两节介绍的内容已见于文献，但为了使本文的论述自成一体，我们在此作较为详细的概述。我们在这部分采用的方法遵循 [Wo14、Wo16] 中较新的处理方式。第 4 节介绍关于 B 的对偶李代数泊松结构的核心结果，这些结果出自 [EFS93]。在命题 4.3 中，我们以不同于 [EFS93] 的方式、更为详细地陈述半不变量的相关结果，以满足本文的需要。我们还运用了 Kostant 关于不变量理论的较新进展，这些成果发表于我们此前的工作之后。随后，我们在定理 4.6 和推论 4.7 中，推导出与 B 的普朗歇尔公式相关的 Dixmier-Pukanszky 算子的完全泊松理论刻画。第 5 节包含其余的主要结果。在定理 5.5 中，我们为轨道上的辛结构确定了一种特别自然的极化，使我们能够将这些轨道解释为 B-齐次空间上的余切丛，$T^*(B/H)$，其中 H 是与该极化相关联的子群。根据 Pukanszky 的一个定理，轨道上的辛结构由此可识别为该余切丛的典范辛结构。在定理 5.6 中，我们利用这种极化证明上述典范坐标的存在性。这些坐标在一方面连接第 4 节所述的辛叶结构，另一方面连接第 2 节概述的海森堡层级。接着，在第 5.3 节中，我们将所有这些泊松视角与第 3 节所述的 B 的普朗歇尔公式联系起来，并说明其意义。我们将看到，与一般轨道相对应的表示所作用的希尔伯特空间可自然地识别为 $L^2(B/H)$。最后，在第 6 节中，我们概述本研究可能引出的若干未来研究方向。其中一个方向是重新考察最初促成轨道方法的、具有对称性的量子系统。研究与一般轨道相关联的量子托达格点将很有意义。本文的结果是评估这些系统是否量子可积的第一步。

2 背景

2.1 实半单李群的分解

在本节 中，我们将介绍后续研究中涉及的基本李群和李代数结构 h.
我 们考虑 $n \times n$ 矩阵的李代数分解

$$\mathfrak{gl} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \quad = \quad \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}_+$$

其中，$\mathfrak{n}_-$ 是下三角幂零子代数（幂零根），$\mathfrak{b}_+$ 是补充的极大可解子代数，称为 Borel子代数：

$$\mathfrak{n}_- = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ * & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ * & \dots & \dots & * & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b}_+ = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ & * & * & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & * \end{pmatrix}.$$

我们还将用 $\mathfrak{n}$ 表示 $\mathfrak{n}_-$ 的转置，并用 $\mathfrak{b}_-$ 表示 $\mathfrak{b}_+$ 的转置。利用主幂零元，

$$\varepsilon \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

我们引入仿射平移,

$$\varepsilon+\mathfrak{b}_- \quad = \quad \begin{pmatrix} * & 1 & & & \\ * & * & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ * & \dots & \dots & * & * \end{pmatrix},$$

相对于定义在 $\mathfrak{gl}$ 上的 G-不变非退化内积（Killing 型）$X,Y = \mathrm{Tr}XY$，来表示对偶代数 $\mathfrak{b}_+^*$。仿射空间 $\varepsilon+\mathfrak{b}_-$ 是所有下 Hessenberg 矩阵构成的空间，我们将其记为 $\mathcal{H}$。下面引入代数投影和群投影，这将很有用,

$$\begin{aligned} \pi_- &: \mathfrak{gl} \to \mathfrak{n}_-, \qquad \Pi_- : G \to N_- \\ \pi_+ &: \mathfrak{gl} \to \mathfrak{b}_+, \qquad \Pi_+ : G \to B_+ \end{aligned}$$

其中 $G = GL(n,\mathbb{R})$, N_-（下幺幂矩阵）是代数 $\mathfrak{n}_-$ 的指数群；而 B_+（可逆上三角矩阵中的恒等元连通分支）是代数 $\mathfrak{b}_+$ 的指数群。$\Pi_\pm$ 定义在 G 的开稠密子集上，该子集中的矩阵具有 LU 分解。我们还用 N 表示上幺幂矩阵。

2.2 幺幂三角子群的分解

我们进一步分解幂零代数 $\mathfrak{n}$，这将在本文余下部分发挥根本作用。令 $e_{i,j}$ 表示这样一个初等矩阵：其 (i,j) 项为 1，其余各项均为 0。于是我们对 $1 \le r \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor := R$ 作如下定义。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_r &:= \mathrm{span}\{e_{r,j}, e_{i,n-r+1} | r < i,j < n-r+1\} \cup \mathbb{R}e_{r,n-r+1} \\ \mathfrak{n}_r &:= \bigcup_{s \le r} \mathfrak{m}_s. \end{aligned}$$

$\mathfrak{m}_r$ 是 $\mathfrak{n}$ 的一个子代数，与维数为 $2(n-2r)+1$的海森堡代数同构；对于 $0 < r \le R$， $\mathfrak{n}_r$是 $\mathfrak{n}$的一个理想。$\mathfrak{m}_r$ 的中心是一维的：$\mathfrak{z}_r = \mathbb{R} \cdot e_{r,\ n-r}$。注意，当 n 为偶数时， $\mathfrak{m}_R = \mathfrak{z}_R$。我们还定义以下分解。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_r &= \mathfrak{z}_r + \mathfrak{v}_r && (2.2) \\ \mathfrak{n} &= \mathfrak{s} + \mathfrak{v} \text{ 其中} && (2.3) \\ \mathfrak{s} &= \oplus \mathfrak{z}_r \text{ and } \mathfrak{v} = \oplus \mathfrak{v}_r && (2.4) \\ d_r &= \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{m}_r/\mathfrak{z}_r)(= n-2r) \implies \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{s}) = d_1 + \cdots + d_R && (2.5) \end{aligned}$$

在群层面，相应地有,

$$\begin{aligned} N_r &= M_1 M_2 \cdots M_r \text{ is normal in } N \text{ and} && (2.6) \\ N_r &= N_{r-1} \rtimes M_r && (2.7) \\ N &= M_1 M_2 \cdots M_R && (2.8) \\ S &= Z_1 Z_2 \cdots Z_R = Z_1 \times \cdots \times Z_R \text{ where } Z_r = \text{ the center of } M_r. && (2.9) \end{aligned}$$

2.3 海森堡群的薛定谔表示

诸如 M_r 这样的海森堡群的表示论已发展成熟，并由 Stone-von Neumann 定理确立；它们对应于海森堡代数 $\mathfrak{m}_r$。我们考虑 M_r 的不可约酉表示 $\pi_{\lambda_r}, \lambda_r \in \mathfrak{z}_r^* \equiv \mathbb{R}$，称为 Schr ¨odinger 表示，它作用于希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^{d_r})$，定义如下

$$\left[\pi_{\lambda_r}(\vec{q},\vec{p},c)f\right](\xi) = e^{i\lambda_r(\vec{p}\cdot\xi + \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}+c)} f(\xi+\vec{q})$$

其中， $\vec{p}$ 是与基元素 $e_{r,\ r+1}, \cdots e_{r,\ r+d_r}$ 相关联的坐标向量， $\vec{q}$ 是与基元素 $e_{r+1,\ n-r}, \cdots e_{r+d_r,\ n-r}$ 相关联的坐标向量，而 c 是与 $e_{r,\ n-r+1}$ 相关联的坐标。（注意，尽管这些元素最初是作为代数 $\mathfrak{m}_r$ 的一组基所关联的元素引入的，但由于 M_r 是一个指数群，它们也可作为其上的坐标。）

定理 2.1。*[除89]* 外， $\lambda_r = 0$在酉等价意义下， π_{λ_r} 是所有 M_r的无限维不可约酉表示。

由此，Heisenberg 群的 Plancherel 定理的标准结果可应用 [MW73]。酉对偶 $\widehat{M_r}$ 上的普朗歇尔测度支撑在 π_{λ_r} 上，其中 $\lambda_r \neq 0$，且由 $2^{d_r} d_r! |\lambda_r| d\lambda_r$ 给出。对于 $f \in L^1(M_r)$，定义 $\hat{f}(\lambda_r) = \int_{M_r} f(\vec{p}, \vec{q}, c) \pi_{\lambda_r}(\vec{p}, \vec{q}, c) d\vec{p} d\vec{q} dc$。此处与第 1 节提到的傅里叶变换的等距映射相对应的 Plancherel 定理版本为

$$||f||^2_{L^2(M_r)} = 2^{d_r} d_r! \int_{\mathfrak{z}^*} ||\hat{f}(\lambda_r)||^2_{HS} |\lambda_r|^{d_r} d\lambda_r$$

对于 $f \in L^1(M_r) \cap L^2(M_r)$，并以 $||\cdot||_{HS}$ 表示 Hilbert–Schmidt 范数。与（1.2）相对应的结果为

$$f(x) = 2^{d_r} d_r! \int_{\mathfrak{z}^*} \Theta_{\pi_{\lambda_r}}(R_x f) |\lambda_r|^{d_r} d\lambda_r$$

其中， x 是对应于（$\vec{p}$， $\vec{q}$， c）的群元素， R_x 表示作用于函数的右平移（$(R_x f)(g) = f(gx)$），而 $\Theta_{\pi_{\lambda_r}}$ 是 π_{λ_r} 的分布特征，定义如下

$$\Theta_{\pi_{\lambda_r}}(f) = \mathrm{Tr}\ \pi_{\lambda_r}(f)$$

对于 $f \in C_c^\infty(M_r)$。

2.4 逐步平方可积表示

（2.2）–（2.9）中总结的结构，为递归构造 N 的不可约酉表示（简称不可约酉表示）奠定了基础，其起点是上一小节讨论的 Schr¨odinger 表示。这一构造的完整细节见 Moore 和 Wolf 的奠基性论文 [MW73]，以及后续工作； [Wo16]对这些工作作了很好的综述。这里我们将先介绍一些背景知识，再陈述本文所需的结果。为便于比较，我们大部分采用 [Wo16]中的记号。递归构造的基本归纳联系是（2.7）： $N_r = N_{r-1} \rtimes M_r$。在本小节接下来的各部分中，我们将首先回顾实极化的机制，借此将一个不可约表示从 N_{r-1} 提升到 N_r；然后陈述 Mackey 小群方法的推论： N_r 的一个不可约酉表示可由提升后的表示与 M_r 的一个 Schr¨odinger 表示的希尔伯特空间张量积来实现，这些 Schr¨odinger 表示已在第2.3节中介绍。需要指出的是，这构成了 N_r中的一个满测度集。最后，我们给出 N的 Plancherel 公式的明确表述。

2.4.1 实极化

考虑一个李代数 $\mathfrak{g}$，其对应的连通李群为 G。在矩阵群的情形下（本文所讨论的正是这种情形）， G通过共轭自然地作用于 $\mathfrak{g}$，我们将此伴随作用记为 Ad_g，其中 $g \in G$ ($Ad_g(x) \doteq gxg^{-1} \doteq g \cdot x$对于 $x \in \mathfrak{g}$)。此作用在线性泛函 $\ell \in \mathfrak{g}^*$上诱导出相应的余伴随作用；即， $Ad_g^*(\ell)(x) \doteq \ell(Ad_g(x)) \doteq g \cdot \ell$。令 G_ℓ 表示余伴随作用下 G 在 ℓ 处的各向同性子群。

定义 2.2. 取 $\mathfrak{g}$上的一个线性泛函 ℓ。若子代数 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 在 ℓ处是一个实极化，则称 *if*

1. $\{Ad_g \mathfrak{k} | g \in G_\ell\} = \mathfrak{k}$
2. $\ell([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = 0$
3. $2 \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_\ell$，其中 $\mathfrak{g}_\ell$ 是 G_ℓ的李代数。

在对李代数 $\mathfrak{g}$（它们是 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 的子代数）的余伴随作用进行计算时，通常再次使用不变内积（X,Y） $=\mathrm{Tr}$ XY来表示 $\mathfrak{g}^*$，就像我们在第2.1节中所做的那样。首先考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}_r$ 作为例子。这里我们将用相反代数 $\mathfrak{m}_r^\dagger$ 中的转置（在 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ 中）来表示 $\mathfrak{m}_r^*$。我们考虑这样的情形： ℓ 由 $\ell(X)=(e_{n-r+1,r},X)$（其中 $X\in\mathfrak{m}_r$）给出。那么，余伴随作用在 ℓ 上的表示由 $\pi_{\mathfrak{m}_r^\dagger}Ad_g^{-1}(e_{n-r+1,r})$ 给出，其中 $g\in M_r$，而 $\pi_{\mathfrak{m}_r^\dagger}$ 表示投影到 $\pi_{\mathfrak{m}_r^\dagger}$。直接计算可得（$M_r$）$_\ell=\mathbb{I}+\mathfrak{z}_r$。我们断言， ℓ处的一个极化由 $\mathfrak{k}=\mathfrak{z}_r\oplus\mathfrak{v}_r^+$给出，其中 $\mathfrak{v}_r^+=$张成 $\{e_{r,j}|r<j<n-r+1\}$。根据定义 2.2，条件 (1) 显然成立；李括号 $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]=0$，因此条件 (2) 也立即成立。最后，(3) 成立，因为 $\dim\mathfrak{k}=d_r+1$，而 $\dim\ \mathfrak{m}_r+\dim(\mathfrak{m}_r)_\ell=2d_r+1+\dim\ \mathfrak{z}_r=2d_r+1+1=2\dim\ \mathfrak{k}$。由此证明了这一断言。我们注意到，根据第2.3节所述的 M_r 的薛定谔表示， $\mathfrak{v}_r^+$ 由 $\vec{p}$ 参数化，对应于自由粒子的经典动量。此外， π_{λ_r} 的希尔伯特空间为 $L^2(M_r/K)=L^2(\mathbb{R}^{d_r})$，其中 K是对应于 $\mathfrak{k}$ 的连通群，而 $\mathbb{R}^{d_r}$ 由 $\vec{q}$ 参数化，对应于自由粒子的经典位置变量。

不可约酉表示的系列 N 将建立在类似极化的阶梯之上。现在我们描述该阶梯的第一个阶级，由此便可清楚地了解如何迈向更高的阶级。因此，取 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_2$，并在上一段的构造中取 $r=1$，使得 $\mathfrak{n}_1=\mathfrak{m}_1$、 λ_1 成为对应于 $e_{n,1}$的线性泛函，其中 $\mathfrak{w}_1$ 表示我们针对这一情形找到的极化。将其以零延拓后， λ_1 便是 $\mathfrak{n}_2$ 上的一个线性泛函，仍由 $e_{n,1}$ 表示，但现在被视为 $\mathfrak{n}_2^\dagger$ 中的一个元素。为强调这一点，该延拓将记作 λ_1'。再次计算其余伴随稳定子，可得（N_2）$_{\lambda_1'}=\mathbb{I}+\mathfrak{z}_1\oplus\mathfrak{m}_2$。依照前述方法，可以证明 $\mathfrak{w}_1'=\mathfrak{z}_1\oplus\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{v}_1^+$是 λ_1'处的一个极化。由此可见，$N_2/K_1'=N_1/K_1$，从而 L^2（N_2/K_1'）$=L^2$（N_1/K_1），这就是 π_{λ_1}的表示空间。由此$\widehat{\ }$可知，该表示可延拓为一个不可约酉表示，即 π_{λ_1}' 在 N_2 中满足 $d\pi_{\lambda_1}'$ 在 $\mathfrak{z}_2$上为零。

$\widehat{\ }$2.4.2 构造 N的本质部分

接下来推进的关键步骤是 Mackey 小群方法，它适用于从正规子群诱导表示的情形。将其应用于上一小节的情形，可得到关于 N_2的以下结果。

$\widehat{\ }$命题2.3。 *[Ma58]* 的元素 N_2 其在 N_1 上的限制是 π_{λ_1} 的倍数，且为希尔伯特空间张量积 $\pi_{\lambda_1}'\widehat{\otimes}\gamma$ 其中 $\gamma\in\widehat{M_2}=\widehat{N_2/N_1}$。

由第 2.1 节 可知，表示 π_{λ_2}，与 $\lambda_2\in\mathfrak{z}_2^*$ 相对应，且是$\widehat{\ }$的非零倍数，$e_{n-r+1,\ r}$构成了 M_2中一个满测度集合。由命题2.3 可知，表示 $\pi_{\lambda_1}'\widehat{\otimes}\pi_{\lambda_2}$（记作 $\pi_{\lambda_1+\lambda_2}$）是 $\widehat{N}_2$中的互不等价不可约酉表示。显然$\widehat{\ }$可以归纳地继续这一构造，从而得到定义在 N 上的一族不可约酉表示，它们由一列线性泛函 $0\neq\lambda_r\in\mathfrak{z}_r^*$、 $r=1$、…、…、R记作 π_λ其中 $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_R$。关于 N 的 Plancherel 公式的相关性质的完整描述，见 Moore 和 Wolf 的以下基本结果。

定理2.4。 *[MW73]*记 $\deg(\pi_\lambda)=\deg(\pi_{\lambda_1})\ldots\deg(\pi_{\lambda_R})$，其中 $\deg(\pi_{\lambda_r})=|\lambda_r|^{d_r}$。那么，不可约酉表示 π_λ 在 N 上的系数$f_{z,\ w}(x)=\langle z,\pi_\lambda(x)w\rangle$ 属于 $L^2(N/S)$，并满足

$$||f_{z,w}||^2_{L^2(N/S)}=\frac{||z||^2||w||^2}{\deg(\pi_\lambda)}=\frac{||z||^2||w||^2}{\prod|\lambda_r|^{d_r}}.$$

由于构造这些表示的递归结构以及前述定理， π_λ 被称为逐步平方可积表示 N，相对于分解（2.6）-（2.9）。

$\widehat{\ }$命题2.5。 *[Wo16]* 上的普朗歇尔测度 N （将在第*2.4.3*节说明）集中于逐步平方可积表示 π_λ。

2.4.3 N的普朗歇尔公式

为了完整陈述 N 的普朗歇尔公式，我们希望更明确地将 π_λ 的分布特征描述为温和分布。我们从 $\mathfrak{m}_r$ 上的海森堡代数入手

可以将其视为一个线性泛函，其核是 $\mathfrak{m}_r$ 的非中心元素。考虑 $\mathfrak{m}_r^*$ 中 λ_r 的余伴随轨道 $Ad^*(M_r)\lambda_r$。分布特征最初表示为迹，也可以改写为该轨道上的积分。在 $(\mathfrak{m}_r/\mathfrak{z}_r)^*$ 上使用勒贝格测度 $d\nu_r$，并将其归一化，使得傅里叶变换是从 $L^2(\mathfrak{m}_r/\mathfrak{z}_r)$ 到 $L^2(\mathfrak{m}_r/\mathfrak{z}_r)^*$ 的等距映射。轨道的切空间是 $\mathfrak{m}_r^*$ 中某个超平面的仿射平移，因此 $d\nu_r$ 可以平移为轨道上的测度 $d\nu_{\lambda_r}$。表示分布特征的轨道积分于是可以写作

$$\Theta_{\pi_{\lambda_r}}(f) = c_r^{-1}|\lambda_r|^{-d_r}\int_{Ad^*(M_r)\lambda_r}\widehat{f_1}(\xi)d\nu_{\lambda_r}(\xi)$$

其中 $c_r = 2^{d_r}d_r!$，$f_1(\xi) = f(\exp(\xi))$，而 $\widehat{f_1}$ 是关于轨道上的勒贝格测度的傅里叶变换。通过定义，这一切都可以推广到 N

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}^* &= \{\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_R \in \mathfrak{s}^*, 0 \neq \lambda_r \in \mathfrak{z}_r^* \ \forall r\} && (2.10)\\
\rho(\lambda) &= \lambda_1^{d_r}\lambda_2^{d_r}\ldots\lambda_R^{d_R} && (2.11)\\
c &= c_1c_2\ldots c_R = 2^{d_1+\cdots+d_R}d_1!d_2!\ldots d_R! && (2.12)\\
d\nu_\lambda &= d\nu_{\lambda_1}\times\cdots\times d\nu_{\lambda_R} && (2.13)\\
\mathcal{O}(\lambda) &= Ad^*(N)\lambda = Ad^*(M_1)\lambda_1\times\cdots\times Ad^*(M_R)\lambda_R. && (2.14)
\end{aligned}$$

直接验证可知，$\mathfrak{t}^*$ 是 N的泛型（维数最大的）余伴随轨道的一个截面。因此有

定理 2.6. *[Wo16]* 的分布特征是

$$\Theta_{\pi_\lambda}(f) = Tr\ \pi_\lambda(f) = \frac{1}{c}\frac{1}{|\rho(\lambda)|}\int_{\mathcal{O}(\lambda)}\widehat{f_1}(\xi)d\nu_\lambda(\xi) \tag{2.15}$$

并且 N 具有普朗歇尔公式

$$f(x) = c\int_{\mathfrak{t}^*}\Theta_{\pi_\lambda}(R_xf)|\rho(\lambda)|d\lambda. \tag{2.16}$$

2.5 三角幂零代数的泊松几何

根据上一小节中的构造，自然会考虑

$$b_{\lambda_r} := (x,y)\mapsto\lambda_r([x,y])$$

它们分别是辛双线性形式，在 $\mathfrak{m}_r/\mathfrak{z}_r$上非退化。每个形式都在 $\mathfrak{m}_r^*$上为函数定义一个泊松括号，称为李-泊松括号，其定义为 $\{F,G\} = b_{\lambda_r}(\nabla F,\nabla G)$。对于这个括号，出现在第 $\vec{q},\vec{p}$ 节薛¨定谔表示中的变量2.3 是正则的，分别对应位置和动量。这一切自然都可推广到 N 上，作为

$$b_\lambda := b_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus b_{\lambda_R}, \tag{2.17}$$

一个辛双线性形式，在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{s}$ 上非退化，它为 $\mathfrak{n}^*$上的函数确定一个泊松括号。出现在（ $\mathcal{O}(\lambda)$）中的余伴随轨道 2.14 ）和（ 2.15 ）是这一泊松结构的辛叶，由 $\mathfrak{t}^*$ 参数化。（定义在 $\mathfrak{s}^*$ 上的函数是这一泊松结构的卡西米尔函数。）这完美体现了基里洛夫－科斯坦特轨道方法的承诺。在 $\widehat{\ }$上不可约酉表示的等价类，在 N 中构成满测度集合；它们与 N 的一般余伴随轨道一一对应（等价地，与相应泊松括号的一般辛叶一一对应），正如定理的普朗歇尔公式所述2.6。还值得注意的是，上一小节引入的 $\rho(\lambda)$ 等于 b_λ的 Pfaffian。

3 Borel 子群

上一节中讨论的受限三角群 N，是实上三角矩阵 $GL(n,\mathbb{R})$ 的 Borel子群 B_+ 中的一个连通幺幂子群。我们将只关注其连通

单位元所在的分支 B_+，它由 B_+ 中对角线元素全为正的元素组成。为简化记法，我们将这个连通分支简称为 B。

尝试将用于推导 N 的普朗歇尔公式的归纳构造方法推广到 B 时，会遇到一个障碍：N 是幺模的，而 B 则不是。局部紧群 Y 的左不变哈尔测度等于其右不变哈尔测度时，称该群为幺模群；也就是说，它具有双不变测度。对于非幺模群，这两种不变测度之间相差一个乘法因子，即定义在群上的函数 δ_Y，称为模函数。阿贝尔群显然是幺模的。群 Y 是幺模的，当且仅当 $Y/Z(Y)$ 是幺模的，其中 $Z(Y)$ 是 Y 的中心。因此，对 n 步幂零群 N 的中心列长度作直接归纳，可证明 N 是幺模的。然而，B 不是幺模的，并且具有一个非恒定的模函数，稍后将会介绍。

3.1 Dixmier-Pukanszky 算子

非幺模性给普朗歇尔公式的表述带来了问题。假设非幺模群也满足定理 2.6 中的关系。那么对于 $x = 1$，即单位元，相应的（2.16）形式会表明 $f(1) = C \int_{\widehat{G}} \Theta_{\pi_\lambda}(f) d\mu_K$，其中 μ_K是左不变测度或右不变测度。左边显然在共轭下保持不变，而通常共轭会通过模函数变换 $\pi_\lambda(f)$，进而变换（2.15）。对于 B （以及某些其他抛物子群），可以在普朗歇尔公式中引入一个半不变量算子，即 Dixmier-Pukanszky 算子，来弥补这种不匹配。这要归功于 Wolf 及其合作者的研究 [LW78、Wo14]，下面我们将概述其结果。

注意，$B = AN$，其中 A 是由对角矩阵表示的极大环面的分裂部分。利用以下事实，可以加快计算 B 的模函数：

$$\delta_B(an) = \alpha(a)\delta_A(a)\delta_N(n)$$

其中 $\alpha(a)$ 是 A上的正函数，使得对所有 $f \in C_c(N)$，$\int_N f(Ad_a(n))d\mu_N = \alpha(a) \int_N f(n)d\mu_N$和$d\mu_N$ 是 N上的左哈尔测度。应用变量替换公式可知，$\alpha(a)$ 恰好等于线性映射 $Ad_a|_N$ 的雅可比矩阵行列式的倒数。由于 $\delta_A(a) = 1 = \delta_N(n)$，

$$\begin{aligned} \delta_B(an) &= \left(\det Ad_a|_N\right)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i^{2i-n-1} \end{aligned}$$

对于 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$。为便于后续使用，我们将其写成一种与根结构更自然相关的形式 $\mathfrak{gl}$,

$$\begin{aligned} \delta_B(an) &= \prod_{r=1}^{R} \left(\frac{a_r}{a_{n-r+1}}\right)^{d_r+1} \\ &= \prod_{r=1}^{R} \left(\exp \beta_r(\log a)\right)^{d_r+1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\{\beta_1, \ldots, \beta_R\}$ 是根 $\beta_r = e^*_{r,\ r} - e^*_{n-r+1,\ n-r+1}$。

Dixmier-Pukanszky 算子是一个正的、自伴且可逆的微分算子，作用于 $L^2(B)$，其定义基于傅里叶变换，并在 B的伴随作用下为半不变量。为了定义三角情形，Wolf [Wo16] 指出，根据（2.10）和（2.11），Pfaffian $\rho(\lambda)$ 可自然地视为 $\mathfrak{s}^*$上的多项式，在 $\mathfrak{t}^*$上不为零。由对偶性，也可以将 β_r 视为 $\lambda \in \mathfrak{s}^*$上的线性泛函，进而定义 $\mathrm{Det}_{\mathfrak{s}^*}(\lambda) := \prod_r \beta_r(\lambda)$。通过直接计算即可验证以下结论。

命题 3.1. 乘积 $\rho \cdot \mathrm{Det}_{\mathfrak{s}^*}$ 是 $\mathfrak{s}^*$ 上的 $\mathrm{Ad}(B)$-半不变量多项式，其次数为$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{s})$，权等于模函数 δ_B。

利用 $V = \exp(\mathfrak{v})$，将多项式的傅里叶变换作用于 $B = AN = AVS$，即通过作用于 $S = \exp(\mathfrak{s})$，定义微分算子 D：

$$\mathcal{F}(Df)(\lambda, w) = \rho(\lambda)\mathrm{Det}_{\mathfrak{s}^*}(\lambda)\mathcal{F}(f)(\lambda, w) \tag{3.2}$$

$$\mathcal{F}(f)(\lambda, w) = \int_S f(z, w) e^{-i(\lambda, z)} dz \tag{3.3}$$

其中 z 是 S 上的欧几里得坐标， w 是 AV 上的坐标。最后有

定理 3.2. *[Wo16]* D 是一个可逆自伴微分算子，其阶为$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{s})$，作用于 $L^2(B)$，其定义域在 B 上包含施瓦茨类且稠密，并且是 Ad(B) 半不变量，其权等于模函数δ_B。因此， $|D|$ 是 B上的 Dixmier-Pukanszky 算子。

对此定理 D 还有一种表述方式，它可以自然地推广到更一般的极小抛物子代数；相关内容见 [LW78] 和 [Ko12]。我们将在第4 节介绍这一表述，并揭示其在 上李-泊松结构的卡西米尔函数方面的诠释 $\mathfrak{b}_+$。

3.2 Plancherel 定理

现在可以为 B表述 Plancherel 定理。任意一个 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 在 $\mathfrak{s}^*$的每个直和项$\mathfrak{z}_r^*$ 上都有非零投影。 $a \in A$ 在 $\mathfrak{z}_r^*$ 上的共轭作用相当于乘以 exp(β_r(log a))。由此可得， A 在 $\mathfrak{t}^*$ 上的余伴随作用的各向同性代数和子群分别为，

$$\mathfrak{a}_\diamond = \{\xi \in \mathfrak{a} | \beta_r(\xi) = 0, r = 1, \dots, R\} \tag{3.4}$$
$$A_\diamond = \exp(\mathfrak{a}_\diamond). \tag{3.5}$$

注意，这些各向同性子群在所有 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$处都相同。对偶群 $A_\diamond$ 由酉特征标 exp($i\phi$(log a)) 组成，其中 $\phi \in \mathfrak{a}_\diamond^*$。随后可以像之前一样，通过 Mackey 小群方法构造不可约酉表示。

$$\pi_{\lambda,\phi} = \mathrm{Ind}_{NA_\diamond}^{NA}(\pi'_\lambda \otimes \exp(i\phi)); \ \lambda \in \mathfrak{t}^*, \phi \in \mathfrak{a}_\diamond^* \tag{3.6}$$

其中， π'_λ 是逐步平方可积表示 π_λ 从 N 到 $NA_\diamond$的自然延拓。$\pi_{\lambda,\ \phi}$ 和$\pi_{\lambda',\ \phi'}$ 等价，当且仅当 $\lambda' \in$Ad*(A)λ 且 $\phi = \phi'$。

命题 3.3。 *[Wo16]* 的普朗歇尔测度 $B = AN = NA$ 集中于上述不可约表示 $\{\pi_{\lambda,\phi}\}$的等价类集合上。

定理 3.4。*[Wo16]* 分布特征标 $\Theta_{\pi_{\lambda,\ \phi}}(f)$: $f \mapsto$ Tr $\pi_{\lambda,\ \phi}(f)$ 是温和分布。若 f在 B上属于施瓦茨类，则

$$f(x) = c \int_{\mathfrak{a}_\diamond^*} \int_{\mathfrak{t}^*} \Theta_{\pi_{\lambda,\phi}}(D(R_x f)|\rho(\lambda)|d\lambda d\phi.$$

我们注意到，这种对 Plancherel 定理的实现揭示了如下两者之间的关系：在（ D 3.2）中构造的 Dixmier-Pukanszky 算子与普朗歇尔测度 $d\mu = |\rho$（λ）$|d\lambda d\phi$。一般而言，它们各自都不唯一；然而， $D \otimes \mu$ 是唯一的。这里所作的选择与所采用的构造方式相契合。将 D 视为半不变量，其性质也表明它与B 的普遍包络代数之间存在联系，这又进一步暗示它与 $\mathfrak{b}_+^*$上的李-泊松结构有关。这使人自然地期待， 作为测度空间的 B 与该泊松结构的辛叶（余伴随轨道）叶状分解及其相应的刘维尔测度之间存在对应关系。

4 泊松结构、轨道与不变量理论

本节将阐述与上一节介绍的 B 的 Plancherel 定理相关的泊松几何。本节最后将给出若干结果，以泊松半不变量的方式描述 Dixmier-Pukanszky 算子及相关算子。我们还将指出，这种描述如何将表示论领域的视角与可积系统领域的视角联系起来。

4.1 泊松约化与归纳

如前所述 第 2.1节中，我们将 $\mathfrak{b}_+$、 $\mathfrak{b}_+^*$ 关于 $\mathfrak{gl}$ 上的 Killing 型视为其对偶空间，
作为$\varepsilon + \mathfrak{b}_-$， 在下 Hessenberg 矩阵空间 $\mathcal{H}$ 中。从李理论的角度来看，这个空间 它是 ju e is

是将 $\mathfrak{b}_-$ 沿简单正根向量之和 ε 平移所得的空间。在对偶空间的这一表示下，对于 $\mathfrak{gl}$ 上的函数 f、g，李-泊松括号可具体表示为

$$\{\tilde{f},\tilde{g}\}(X) \quad = \quad (X,[\pi_+\nabla f(X),\pi_+\nabla g(X)]) \tag{4.1}$$

其中 $\tilde{f}=f|_{\mathcal{H}}$ 和 ∇ 表示相对于 Killing 型的梯度。确定这一结构所蕴含的辛几何，与是否存在相对于李括号和卡西米尔函数（即与所有其他函数泊松对易的函数）的对易函数族（哈密顿量）密切相关。Thimm 方法 [Th82] 提供了一种构造极大对易哈密顿量族的方法（也称为 完全可积哈密顿系统）；在我们的情形中，这些系统由包含 $\mathfrak{gl}$ 且包含 $\mathfrak{b}_+$的子代数的卡西米尔函数构造，这类子代数称为抛物子代数。该方法通过考察这类抛物子代数的包含链，以及它们的对偶之间相应的投影链来实现。

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_+ \quad &= \quad \mathfrak{p}_m \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_k \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{gl} \\ \mathfrak{b}_+^* \quad &= \quad \mathfrak{p}_m^* \leftarrow \cdots \leftarrow \mathfrak{p}_k^* \leftarrow \cdots \leftarrow \mathfrak{p}_0^* = \mathfrak{gl}^*\end{aligned} \tag{4.2}$$

（4.2）中的投影是泊松映射，这意味着，在 $\mathfrak{p}_{k-1}^*$ 上两个函数的李-泊松括号经拉回后，等于它们在 $\mathfrak{p}_k^*$ 上的拉回函数的李-泊松括号。我们用 P_k 表示与 B_+对应的抛物群（其中包含 $\mathfrak{p}_k$）。

可以证明，在 $\mathfrak{p}_{k-1}^*$ 上对 P_{k-1} 的余伴随作用不变的函数，与 $\mathfrak{p}_{k-1}^*$ 上的所有函数泊松对易；也就是说，它们是卡西米尔函数。由于 (4.2) 中的投影都是泊松映射，因此可以将所有这些按序不变函数依次整体拉回到 $\mathfrak{gl}^*$，从而在此处形成一个对合（对易）函数族。然后将此函数族限制到 $\mathfrak{b}_+^*$，便得到 $\mathcal{H}$ 上的一个对合函数族。关于上述内容的详细说明，请参阅 [EFS93]。在该论文中，作者选取了一条特定的抛物子群链，以及每个抛物子群上的一类不变函数，并由此得到卡西米尔函数。随后证明，在 $\mathcal{H}$ 上得到的对合函数族是极大的。所使用的抛物子群链相对于 $\mathfrak{gl}$ 中矩阵的反对角线具有对称性：$\mathfrak{p}_r=[\mathfrak{g}\backslash\mathfrak{n}_r]^\dagger$、$r=0$、$\ldots\left[\frac{n-1}{2}\right]$；其中，对于子代数 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{gl}$，$\mathfrak{h}^\dagger$ 表示 $\mathfrak{h}$ 的转置子代数。相应的抛物子群 P_r 是 G 中满足以下条件的元素集合：在前 r 列中位于对角线下方的元素，以及在最后 r 行中位于对角线左侧的元素，均为零。上面所述的 $\varepsilon+\mathfrak{b}_-$ 上的极大对合函数族，可通过以下构造来实现。该构造的基本思想源自 [DLNT86]，他们利用这一思想证明了完整对称 Toda 格的完全可积性；随后，[EFS93]，对其进行了调整，以证明完全 Kostant Toda 格具有这一性质。由于后文的工作将以此为基础，我们在这里重现后者背景下的主要细节。

定义 4.1. 对于 $r=0$、.....、R 和 $X\in\mathfrak{gl}$，用 $(X-\eta\mathbb{I})_{(r)}$ 表示从 $(X-\eta\mathbb{I})$ 中删去前 r 行和末尾 r 列后的结果。我们将其称为 X 的 r-剪切，并将其行列式在 η 中的系数记为

$$\det(X-\eta\mathbb{I})_{(r)}=E_{0,r}\eta^{n-2r}+\cdots+E_{n-2r,r}. \tag{4.3}$$

为了与不变量建立联系，我们需要一个中间概念。我们将再次利用 Killing 型，将对偶代数 $\mathfrak{p}_r^*$ 与 $\mathfrak{gl}$ 中 $\mathfrak{p}_r$ 的一个平移——即转置——相识别；具体而言，$\mathfrak{p}_r^*\simeq\tau_r+\mathfrak{p}_{r-}$ 其中 $\tau_r=e_{1,\ 2}+\cdots+e_{r,\ r+1}+e_{n-r,\ n-r+1}+\cdots+e_{n-1,\ n}$。换句话说，$\tau_r$ 是正单根中那些负根不属于 $\mathfrak{p}_r$ 的根向量之和。另请注意，$\tau_R=\varepsilon$。对于 $X\in\tau_r+\mathfrak{p}_{r-}$，$P_r$ 的余伴随作用由下式实现

$$Ad_p^*X=\tau_r+\pi_{\mathfrak{p}_{r-}}p^{-1}\cdot(X-\tau_r),\quad X\in\mathfrak{p}_{r-},\ p\in P_r \tag{4.4}$$

其中 $g\cdot Y=gYg^{-1}$。

定义 定义 4.2. 如果函数 f 在 $\tau_r+\mathfrak{p}_{r-}$ 上满足以下条件，则称其为 P_r 的余伴随半不变量：

$$f\left(Ad_p^*X\right)=\chi(p)f(X)\quad\forall p\in P_r$$

对于某个特征标 χ，我们称其为半不变量的权。当 χ 是平凡特征标时，我们称 f 为余伴随不变量。或者，我们也可以称其为抛物不变量或抛物卡西米尔元。

命题 4.3. $E_{m,r}(X)$ 都是 P_r 在 $\mathfrak{p}_r^*$上的余伴随作用的半不变量，其权为

$$\chi_r(p) = \frac{p_{1,1}\cdots p_{r,r}}{p_{n-r+1,n-r+1}\cdots p_{n,n}}. \tag{4.5}$$

i) 对于 $r=0$， $\{E_{m,0}\}$ 在 $GL(n,\ \mathbb{R})$ 下通过共轭作用是不变量，并生成 $\mathfrak{gl}^*$上的卡西米尔函数的完整泊松交换代数。这等价于由 $\{TrX^m\}$生成的族，其中 $X \in \mathfrak{gl}$。限制到 $\mathfrak{b}^*(X \in \varepsilon + \mathfrak{b}_- = \mathcal{H})$后，它们不再全都是卡西米尔函数，但确实构成一个对合族。$\mathrm{Tr}X^2$ 是著名托达格系统——更准确地说，是完全科斯坦特托达系统 *[EFS93]*——的哈密顿量。

ii) 由于对于每个固定的 r，权是相同的，因此存在由 P_r-卡西米尔函数组成的集合

$$I_{m,r} = E_{m,r}/E_{0,r}, \quad r = 1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

它们是 $\mathfrak{p}_{r-}$上坐标的有理函数。定义 $\mathcal{H}$ 中的一般矩阵子集为

$$\mathcal{H}_{gen} = \left\{ X \in \varepsilon + \mathfrak{b}_- | E_{0,r}(X) \neq 0 \quad r = 1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right] \right\}$$

这是 $\mathcal{H}$的一个 Zariski 开子集。将所有这些合在一起， $\{\mathrm{Tr}X^m, I_{m,\ r};\ r\ =\ 1,\ .....,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\}$ 是 $\mathcal{H}_{gen}$ 上李-泊松结构的一个极大对合族（尽管该族中的元素并不全是B-不变量）。它同时也是完全科斯坦特托达流的一组完备交换运动常数，说明了该系统在一般余伴随轨道上的完全可积性。

iii) $\{E_{0,r}\}$ 的首项系数是 N 在 $\mathfrak{n}_-$上的余伴随作用的不变量。注意，在此我们允许 r 从 1 取到 R ，并且 R 可以大于 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$。

iv) 由 $\{\mathrm{Tr}X、I_{1、\ r}\}$ 生成的子族是$\mathcal{H}$上的李-泊松括号的完备卡西米尔函数族。因此，这些卡西米尔函数的通用等值集是该括号的最大维辛叶，同时也是 B的主余伴随轨道。

证明。 为证明 $E_{m、\ r}(X)$ 确实是 P_r 的半不变量，其权为 (4.5，我们首先将 (4.3) 改写为外幂空间 $V_{n-r} = \bigwedge^{n-r}\mathbb{R}^n$上的收缩形式。对于 $GL(n,\ \mathbb{R})$，这是一个基本表示空间，给出如下

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-r}) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_{n-r.}$$

由于 $GL(n,\mathbb{R})$是 $\mathfrak{gl}$ 的矩阵子群，该定义可扩展到 $\mathfrak{gl}$的所有元素。限制后，这同样适用于 P_r、 $\mathfrak{p}_r$和 $\mathfrak{p}_{r-}$。关于 $\mathbb{C}^n$ 的标准基 e_1，...， e_n，在 V_n 上定义厄米内积如下:

$$\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} \rangle = \delta_{i_1,j_1}\cdots\delta_{i_n,j_n}.$$

令 $v^{(n-r)} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-r}$和 $v_{(n-r)} = e_{r+1} \wedge \cdots \wedge e_n$分别为该基本表示中相对于字典序的最高权向量和最低权向量 [FuHa91]。现在很容易看出

$$\det(X - \eta\mathbb{I})_{(r)} \quad = \quad \langle (X - \eta\mathbb{I})\, v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \rangle. \tag{4.6}$$

将余伴随作用（4.4）作用于该表示，可得

$$\begin{aligned}
\langle \left(Ad_p^* X - \eta \mathbb{I}\right) v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \rangle &= \left\langle \left(\tau_r + \left(\pi_{\mathfrak{p}_{r-}} p^{-1} \cdot (X - \tau_r)\right) - \eta \mathbb{I}\right) v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.7)\\
&= \left\langle \left(\left(\pi_{\mathfrak{p}_{r-}} p^{-1} \cdot (X - \tau_r)\right) - \eta \mathbb{I}\right) v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.8)\\
&= \left\langle \left(\left(p^{-1} \cdot (X - \tau_r)\right) - \eta \mathbb{I}\right) v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.9)\\
&= \left\langle p^{-1} \cdot (X - \tau_r - \eta \mathbb{I})\, v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.10)\\
&= \left\langle p^{-1} (X - \tau_r - \eta \mathbb{I})\, p v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.11)\\
&= \left\langle (X - \tau_r - \eta \mathbb{I})\, v^{(n-r)}, (p^{-1})^\dagger v_{(n-r)} \right\rangle && (4.12)\\
&= p_{1,1} \cdots p_{r,r} \det C_r \left\langle (X - \tau_r - \eta \mathbb{I})\, v^{(n-r)}, (p^{-1})^\dagger v_{(n-r)} \right\rangle && (4.13)\\
&= \frac{p_{1,1} \cdots p_{r,r} \det C_r}{p_{n-r+1,n-r+1} \cdots p_{n,n} \det C_r} \left\langle (X - \tau_r - \eta \mathbb{I})\, v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle && (4.14)\\
&= \chi_r(p) \left\langle (X - \eta \mathbb{I})\, v^{(n-r)}, v_{(n-r)} \right\rangle . && (4.15)
\end{aligned}$$

其中 C_r 表示 p 的 Levi 因子（ p 的 $(n-r) \times (n-r)$ 中心核）。从 (4.7) 到 (4.8)，我们只需注意到 τ_r 是 $\mathfrak{n}_r$ 的一个元素。 $\mathfrak{n}_r$ 中的所有元素都会消去 e_1 ，因此也会消去 $v^{(n-r)}$。从 (4.8) 到 (4.9) 的差再次是 $\mathfrak{n}_r$ 的一个元素，所以这两行也相等。在 (4.10) 中，共轭只是穿过恒等式，而在 (4.11) 中则将该共轭显式写出。在 (4.12) 中， p^{-1} 通过转置从“bra”移到“ket”。最高权向量和最低权向量分别由 p 和 p^{-1} 稳定，其乘子如 (4.13) - (4.14) 所示，并可从 P_r 的分块形式中读出。最后，如同一开始那样，可以消去 τ_r ，得到 (4.15)。这表明，对于所有 η，(4.3) 都是权为 (4.5) 的半不变量。因此，对于所有 $E_{m,\ r}(X)$，情况也同样如此。

对于 $r = 0$ (4.3) 只是 $X \in \mathfrak{gl}$ 的特征多项式，其系数显然在共轭下不变，并且生成与 $\{\mathrm{Tr} X^m\}$相同的代数。陈述 (i) 的其余部分由 Adler-Kostant-Symes 定理 [EFS93]即可推出。

现在可以直接得出陈述 (ii) 中关于 P_r 卡西米尔函数的结论。对合性由前文概述的 Thimm 构造和 Adler-Kostant-Symes 定理得出。极大性则来自 B 的一般余伴随轨道上的完全可积性，关于这一点，我们再次请读者参阅 [EFS93]。

陈述 (iii) 对本节余下部分的内容至关重要。由于权（4.5）的形式，$E_{m,\ r}(X)$ 只依赖于 $B = AN$ 的 A 因子，因此它们在 $\tau_r + \mathfrak{p}_{r-}$ 上是 N 不变的。一般而言，将它们限制到 $\mathfrak{n}_-$ 上时，它们并不不变。然而，由于未受限制的 $E_{0,\ r}(X)$ 只依赖于 $\mathfrak{n}_-$ 中的坐标，因此这些系数仍保持 N 不变性。

类似地，可以看出 $E_{1,\ r}(X)$ 仅取决于 $\mathfrak{b}_-$ 中的坐标，因此当限制在 B上时，它仍然是一个 $\mathcal{H}(= \varepsilon + \mathfrak{b}_-)$ 上的半不变量。关于 $\{\mathrm{Tr} X、I_{1,\ r}\}$ 在 $\mathcal{H}_{gen}$ 上的独立性与 (ii) 中相同，而陈述 (iv) 中所断言的这一族卡西米尔函数的完备性，则是定理5.5中将要描述的极化所带来的结果。 □

这些系统的一个关键特征是，不变量 $I_{m,\ r}$，对于 $r > 0$而言是有理函数。极点集，即 $I_{m,\ r}$ 未定义之处，对应于 $\mathcal{H}$ 中余伴随轨道并非主轨道的点集，因此相应的辛叶并非一般情形；人们也不会期待它们对 $\widehat{\ }$上的普朗歇尔测度贡献不可忽略的支撑。在另一方面，这些奇点可能会给普朗歇尔测度的轨道论表述及其应用带来问题。为着手处理这些问题，我们现在引入不变量理论；它在李理论中发挥着核心作用，尤其是在第 3 节讨论的表示论中。

4.2 N的不变量理论

我们暂且考虑李代数 $\mathfrak{g}$ 及其相应的（连通）李群 G的一般情形。存在一个线性同构

$$\sigma : \mathbb{S}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{D}(G)$$

介于 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$（即 $\mathfrak{g}$上的对称代数）与 $\mathbb{D}(G)$（即 D上所有左不变微分算子的空间）之间。另有一个典范同构，连接 G。 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathbb{S}(\mathfrak{g}^*)$，后者是$\mathfrak{g}$上的多项式空间。于是， σ 本质上就是微分算子与其符号之间的对应关系。关于精确描述和详细内容，请参见附录 A 。令 $\mathbb{S}(\mathfrak{g}^*)^G$ 表示余伴随不变多项式；在同构 σ下，它们对应于 G上的双不变微分算子。本文的一个要点是，在我们的情形中，这一同构是普朗歇尔测度与 Dix mier-Pukanszky 算子之间关系的核心。

现在我们将运用 Kostant 的一个定理，该定理描述了与我们相关情形下的不变量空间。为使论述更加自洽，我们将详细介绍这一结果，然后将其应用于命题 4.3中所给出的半不变结构。Kostant 首先令 $\mathfrak{n}_-$ 表示 $\mathfrak{n}^*$ 相对于 Killing 型，并考察 N 所表示的余伴随作用

$$\begin{array}{rcl} N \times \mathfrak{n}_- & \to & \mathfrak{n}_- \\ (n, \ell) & \mapsto & \pi_{\mathfrak{n}_-}(Ad_{n^{-1}}\ell). \end{array}$$

接下来限制于主轨道（最大维轨道），它们构成一个 Zariski 开子集 X，属于$\mathfrak{n}_-$ （因此 $\overline{X} = \mathfrak{n}_-$）。进一步可以注意到， $\mathfrak{t}^*$ 的对偶（记作 $\mathfrak{t}^\times$）提供了该轨道的一个截面。因此 $X = \cup_{\lambda\in\mathfrak{t}^\times}\mathcal{O}(\lambda)$。此外，所有主轨道 $\mathcal{O}(\lambda)$ 都同构于 N/S。这一切都与（2.10）—（2.14）中的描述一致。同样容易验证， $\mathfrak{t}^*$ 是 A 在余伴随作用下的一个轨道，并且对于 $a \in A$， $a \cdot \mathcal{O}(\lambda) = \mathcal{O}(a \cdot \lambda)$。 $B = AN$ 的余伴随作用保持 $\mathfrak{n}_-$ 不变，其中子群 N 沿其轨道作用，而 A 则如前一句所述横向作用。

定理 4.4. *[Ko12]* 存在一个同构

$$X \to N/S \times \mathfrak{t}^\times.$$

X 是一个仿射簇；令 $\mathcal{A}(X)$ 表示其仿射环，则有如下 B-模同构，

$$\mathcal{A}(X) \simeq \mathcal{A}(N/S) \otimes \mathcal{A}(\mathfrak{t}^\times).$$

由此可得 $\mathcal{A}(X)^N \simeq \mathcal{A}(\mathfrak{t}^\times)$。

由此定理的最后一个观察可知，分裂环面 A 在 N-不变量模 $\mathcal{A}(X)^N$ 上的限制作用，可分解为在 $\mathcal{A}(\mathfrak{t}^\times)$ 上按 A-权作用。我们将使用以下权滤过。

$$\begin{array}{rcl} A\text{-weight lattice} & \Lambda & \subset \mathfrak{a}^* \\ & \cup & \\ \text{root lattice} & \Lambda_{ad} & \\ & \cup & \\ \text{cascade sublattice} & \Lambda_{\mathcal{B}} & = \oplus_{\beta\in\mathcal{B}}\mathbb{Z}\beta, \end{array}$$

其中 $\mathcal{B}$表示由 $\{\beta_1, \ldots, \beta_R\}$ 在（3.1）中定义的根集。它被称为 强正交正根级联，因为它是 Kostant 级联构造的一个例子 [Jo77, Ko12]。由于这些根两两正交，上文最后一行的直和分解由此得出。因此， $\Lambda_{\mathcal{B}}$是一个秩为 R（$= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$）的自由模，其中出现的每个权的重数均为 1。若 M是一个 B-模，令 $\Lambda(M) \subset \Lambda$表示 A在 M 的权分解中出现的权集。由于$\mathcal{A}(X)$是一个仿射代数，因此存在自然嵌入

$$\mathbb{S}(\mathfrak{n}) \subset \mathcal{A}(X) \subset \mathbb{Q}(\mathfrak{n})$$

其中我们注意到 $\mathbb{S}(\mathfrak{n}) = \mathcal{A}(\mathfrak{n}_-)$，而 $\mathbb{Q}(\mathfrak{n})$ 是 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})$ 的分式域。这在 N-不变量上诱导出作为 A-模的包含关系。

$$\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N \subset \mathcal{A}(X)^N \subset \mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N.$$

但由定理 4.4 可知

$$\Lambda\left(\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N\right) \subset \Lambda(\mathcal{A}(\mathfrak{t}^\times)) \subset \Lambda\left(\mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N\right).$$

通过显式计算可知 $\Lambda(\mathcal{A}(\mathfrak{t}^{\times})) = \Lambda_{\mathcal{B}}$ 因此

$$\Lambda\left(\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N\right) \subset \Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda\left(\mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N\right).$$

进一步注意到，由于 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})$ 同构于一个多项式环，它是唯一分解整环，因此 $q \in \mathbb{Q}(\mathfrak{n})$ 中的任意元素都可以唯一地表示为标量倍的 $q = f/g$，其中 f 和 g 是 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})$ 中的互素元素。根据这一唯一性，如果 q 是一个 N 不变元，那么 N 的作用也必须分别保持 f 和 g，相差一个标量倍；也就是说，相差相应的特征标。然而，由于 N 是幺幂的，任何这样的特征标都是平凡的，因此 $f, g \in \mathbb{S}(\mathfrak{n})^N$。由此可知， $\mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N$ 是 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N$ 的分式域，并且根据最后一串包含关系可得

定理 4.5。*[Ko12]* $\Lambda\left(\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N\right)$ 中的每个 A-权在 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N$ 中的重数为 1。此外， $\Lambda\left(\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N\right) = \Lambda_{\mathcal{B}} \cap \Lambda_{dom}$，其中 Λ_{dom} 是支配权的集合；也就是说，是满足对于所有正根 ϕ 都有 $(\psi, \phi) \geq 0$ 的那些权 ψ。 $\gamma \in \mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N$ 中的每个权在 $\mathbb{Q}(\mathfrak{n})^N$ 中的重数为 1，并且具有 $\gamma = \nu - \mu$ 的形式，其中 $\mu, \nu \in \Lambda\left(\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N\right)$。此外， $\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N$ 中任意元素的素因子也属于 $\mathbb{S}(\mathfrak{n})^N$。

4.3 重新审视 Dixmier-Pukanszky 算子

在我们的情形中， $\Lambda_{\mathcal{B}} \cap \Lambda_{\mathrm{dom}}$ 中的生成元具有如下形式： $\nu + \nu^*$，其中 ν 是某个基本表示的最高权，而 ν^* 是最低权；或者，也可以将其刻画为对偶表示的最高权。于是， $\nu + \nu^*$ 是表示 $V_\nu \otimes V_\nu^*$的一个支配权。但现在可以看出，系数 $E_{m,\ r}(X)$是这类表示的矩阵元；具体而言，是满足 $V_\nu = \bigwedge^{n-r} \mathbb{C}^n$的那个表示。从这一视角来看，最自然的做法是将 (4.1) 中出现的r-截断 $(X - \eta\mathbb{I})^{(r)}$ 视为在 End $V_\nu = V_\nu \otimes V_\nu^*$中诱导出一族元素。所有的 $E_{m,\ r}(X)$都是该空间中对应于权 $\nu + \nu^* \in \Lambda_{\mathcal{B}} \cap \Lambda_{\mathrm{dom}}$的元素；然而，根据命题 4.3(iii)，其中只有一个是 $\mathbb{S}(\mathfrak{n}^*)^N$中该权的重数为 1 的代表元，即 $E_{0,\ r}(X)$。由此得到以下定理。

定理 4.6. $\mathfrak{n}$ 的包络代数中心背后的不变量理论，可用 r-chops 明确描述如下。 $\mathbb{S}(\mathfrak{n}^*)^N \simeq \mathbb{R}\left[E_{01}(X) \ldots . E_{0,\ R}(X)\right]$ 其中 $E_{0,\ r}(X)$在命题 *4.3* 中明确给出，其中 $X \in \mathfrak{n}_{-}$。 $E_{0,\ r}(X)$是 r 次齐次的。

现在我们从其模权（3.1）观察到，Dixmier-Pukanszky 算子是 N-不变的；此外，根据命题 3.1，它仅依赖于 $\mathfrak{n}^*$，因此实际上是 $\mathbb{D}(N)$上的双不变微分算子。因此，在 σ 下，其符号对应于 $\mathbb{S}(\mathfrak{n}^*)^N$的一个元素。由该定理可知，此符号可用 $E_{0,\ r}(X)$唯一表示。

推论 4.7. 算子的符号 D，即 Plancherel 定理的 Dixmier-Pukanszky 算子（定理 *3.4*）中出现的符号，可在 $\mathbb{S}(\mathfrak{n}^*)^N$ 中唯一表示为

$$\begin{aligned} \sigma(D) &= \prod_{r=1}^{R} E_{0,r}^2(X) \quad \textit{for } n \textit{ odd} \\ &= E_{0,R}(X) \prod_{r=1}^{R-1} E_{0,r}^2(X) \quad \textit{for } n \textit{ even} \end{aligned}$$

因此其为次数为 $R(R+1)$ 的齐次函数，当 n 为奇数时，次数为 R^2；当 n 为偶数时亦然。在两种情况下，令 $R = \lfloor n/2 \rfloor$，可见该次数等于 $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{n} + \dim \mathfrak{s})$，与定理 D 3.2 中所述算子 的阶一致。

证明。根据定理可知，该符号有唯一的如下形式的表示

$$\sigma(D) = \prod_{r=1}^{R} E_{0,r}^{\alpha_r}(X) \quad \text{for unique } \alpha_r \in \mathbb{N}.$$

由（4.5）可知，$E_{0,\ r}$ 的权为 $\sum_{\ell=1}^{r}\beta_\ell$。因此

$$\begin{aligned}\text{weight}\,(\sigma(D)) &= \sum_{r=1}^{R}\alpha_r\left(\sum_{\ell=1}^{r}\beta_\ell\right)\\ &= \sum_{\ell=1}^{R}\left(\sum_{r=\ell}^{R}\alpha_r\right)\beta_\ell\end{aligned}$$

其中第二行只是交换了求和的顺序。另一方面，根据定义，该权由（3.1）确定，

$$\text{weight}\,(\sigma(D)) = \sum_{\ell=1}^{R}(d_\ell+1)\beta_\ell.$$

比较这两个表达式可得方程组

$$\sum_{r=\ell}^{R}\alpha_r = d_\ell+1$$

利用（2.1），并将 n 替换为 R，可将其改写为 Toeplitz 形式：

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^R)(\alpha_1,\ldots,\alpha_R)^\dagger &= (d_1+1,\ldots,d_R+1)^\dagger\\ (\mathbb{I}-\varepsilon)^{-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_R)^\dagger &= (d_1+1,\ldots,d_R+1)^\dagger\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_R)^\dagger &= (\mathbb{I}-\varepsilon)(d_1+1,\ldots,d_R+1)^\dagger\\ &= (2,\ldots,2)^\dagger \quad \text{for odd } n\\ &= (2,\ldots,2,1)^\dagger \quad \text{for even } n\end{aligned}$$

这就确立了所述的 $\sigma(D)$ 表达式。随后，根据相应的 $E_{0,\ r}$ 的齐次次数为 r，即可得到齐次次数的计算结果。□

4.3.1 两种视角的某些历史

正如截至目前的讨论所显示的，半不变量 $E_{0,\ r}$ 分别在 Borel 子群的表示论以及这些李群的一般余伴随轨道上的自然可积系统的发展中发挥了重要作用。然而，据我们所知，推论 4.7 首次明确指出了这两种作用之间的联系。为突出这一点，我们简要提及这两个独立学科中的一些历史先例。在可积系统理论方面，我们所知的最早参考文献来自 Arhangel'skii [Arh79]，他通过直接检查子式，基本上将 $E_{0,\ r}$ 和 $E_{1,\ r}$ 识别为 B-余伴随作用下的半不变量，并应用 Miscenko-Fomenko 的平移方法生成一个对合族。在 [Tro80], Trofimov 将这一方法推广，用于确定其他单李代数的辛叶维数。Deift、Li、Nanda 和 Tomei [DLNT86] 则独立研究了与 $\mathfrak{gl}$ 的另一种分裂相关的对称矩阵上的李-泊松结构。他们在这一对称情形中引入了 chop 半不变量。这为生成半不变量和对合族提供了一个更具概念性的框架，并且可以将其与 X 的 Ritz 值联系起来。[EFS93] 所设定的目标，是通过以李理论的方式表述，将 r-chop 所提供的概念框架置于尽可能广泛的背景下。正如本节前文所述，这一工作针对三角群完成了（并指出了向其他经典 Borel 子代数的推广），其表述基于更一般的抛物子群的不变量理论。进而，这被用于构造与半单李代数相关的旗流形上 chop-不变量交换流的环面线性化。Gekhtman 和 Shapiro [GS99] 后来将这一方法推广，用于建立单李代数（包括例外李代数）的 Toda 流的一般完全可积性。这项工作根本性地利用了与强正交根的极大级联相关的李理论结构；这一结构此前已被提及，并由 Joseph 和 Kostant 发展。

在表示论中，半不变量$E_{0,\ r}$ 最早出现在 Dixmier 对 [Dix59] 的 Plancherel 定理的早期表述中。N随后，在开创性的论文 [LW78], 中，Lipsman 和 Wolf 阐述了 Dixmier-Pukanszky 算子在更一般的 Plancherel 定理中的核心作用。他们将其与一种构造联系起来：通过“良好”抛物子群的半不变量来构造 D；事实上，他们发现这些算子源自具有以下性质的矩阵系数

与级联根相关的最高权，类似于前文定理 4.6 之前所述的 chop 半不变量。Kostant 系统地分析了 $\mathfrak{n}$ 的包络代数中的不变量，正如我们前文所概述的；随后 [Ko13] 利用这一分析弥补了 Lipsman-Wolf 构造中的一个缺口。这并未改变 [LW78] 的结论，却使我们更清楚地认识到，该构造与我们在命题 4.3 中的泊松理论计算之间的联系；这最初促使我们证明定理 4.6 和推论4.7。

5 轨道上的极化与典范结构

一般余伴随轨道上的辛几何与 B 相应不可约酉表示之间的联系，可以通过确定这些轨道上的典范坐标得到进一步阐明。从内蕴角度看，这意味着这些轨道可以表示为 T^*B/H，即某个适当子群 H的齐性空间的余切丛。实现这一点的方法是，首先针对每个轨道上的辛结构，求出一个实极化（定义 2.2）。要以一种相对于主轨道叶状结构一致的方式做到这一点，还需要一个额外条件，该条件由 Pukanszky 提出 [Pu71]。

5.1 Borel 子群的 Pukanszky 极化

再次采用我们惯用的对 $\mathfrak{b}^*$ 的对偶识别，选取一般轨道上的一个元素 $f \in \mathcal{H} = \varepsilon + \mathfrak{b}_-$，并令$B_f$ 表示它在余伴随作用下的各向同性子群。

定义 5.1. 若子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ 在 f 处是一个满足 Pukanszky 条件的实极化，则称其为

1. $\{Ad_g\mathfrak{h} | g \in B_f\} = \mathfrak{h}$2. $(f, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$3. 2 维 $\mathfrak{h} =$维 $\mathfrak{b} +$
维 $\mathfrak{b}_f$4. $f + \mathfrak{h}^\perp \subseteq \mathcal{O}(f)$，其中 $\mathfrak{h}^\perp = \{\ell \in \mathfrak{b}^* | \ell(h) = 0,$
$\forall h \in \mathfrak{h}\}$

(4) 是 Pukanszky 条件。

有了这样的实极化，便可以推导出余伴随轨道的典范描述。这是通过 T^*B 上的标准动量映射来实现的；该空间配备典范辛结构，并与 B 通过右平移进行辛同胚作用相关联。（背景知识请参见 [GuSt84] 。）关于余切丛相对于左不变向量场的平凡化，其表达式十分简洁：

$$\begin{aligned} J_R : T^*B = B \times \mathfrak{b}^* &\to \mathfrak{b}^* \\ (b, \ell) &\to \ell. \end{aligned} \tag{5.1}$$

假设 B_f 是连通的（我们的情形确实如此）。定义 H 为 B 的连通李子群，其李代数为 $\mathfrak{h}$。H 是 B 的闭子群。现在我们还考虑与 H 的左作用相关联的动量映射；在平凡化下，它的形式为

$$\begin{aligned} J_L : B \times \mathfrak{b}^* &\to \mathfrak{h}^* \\ (b, \ell) &\to (Ad^*_{b^{-1}}\ell)\,|_{\mathfrak{h}}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

这表示将 ℓ 的余伴随平移限制到 $\mathfrak{h}$ 上。这样便可以在一般取值 f 处，针对 J_L 进行辛约化，从而得到一个约化辛流形

$$\left(J_L^{-1}(f)/H, \omega_f\right) \tag{5.3}$$

其中 ω_f 是约化辛形式。动量映射 J_R 自然限制在纤维 (5.3) 上，从而得到一个约化映射 J_R^f 到 $\mathfrak{b}^*$。关于 B 的一般余伴随轨道上典范结构的存在性及一般形式，将由下一个命题给出。有关这一基本结果的一般背景和细节，请参阅 [BGR17] 。

命题 5.2。以下陈述等价。

1. $\mathfrak{h}$满足 Pukanszky 条件;
2. 辛约化 (5.3) 可自然地识别为标准正则结构 $(T^*(B/H)\ \omega_{can})$。约化动量映射 $J_R^f\colon (T^*(B/H)\ \omega_{can}) \to \varepsilon + \mathfrak{b}_-$ 满射到经过 f, $\mathcal{O}(f)$的辛叶（余伴随轨道）;
3. B 在 $T^*(B/H)$上的辛作用是传递的;
4. $J_R^f : (T^*(B/H)\ \omega_{can}) \to (\mathcal{O}(f)\ \omega_{\mathcal{O}(f)})$ 是一个辛微分同胚，其中$\omega_{\mathcal{O}(f)}$是负的轨道辛的 *bit form*

$$\omega_{\mathcal{O}(f)}(\ell)(X,Y) = -(\ell,[X,Y]), \quad \ell \in \mathcal{O}(f),\ X,Y \in \mathfrak{b}.$$

注记 5.3. 一般而言，约化辛形式会包含一个磁项；然而，由于这里讨论的是指数群，因此不会出现这样的项。

为了描述我们将要选取的极化，$\mathfrak{h}$，我们首先利用 Arhangel'skii 为 B 的一般余伴随轨道构造的一个截面 [Arh79]，Gekhtman 和 Shapiro 也曾在 [GS99]中以此为动机并加以充分运用。其形式如下。

$$f = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 1 & & & & & \\ & \kappa_2 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & \iddots & & \ddots & 1 & \\ & 1 & & & & \kappa_2 & 1 \\ 1 & & & & & & \kappa_1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

其中，对角线元素关于反对角线对称，超对角线上的元素全为 1，主对角线下方反对角线上的元素全为 1，其余元素均为 0。

我们注意到，式（ κ_r ）中出现的参数可以用卡西米尔函数 $\{\mathrm{Tr}X、I_{1、r}\}$表示（见定理 5.6）。我们还注意到，从式（3.1）后面 β_r 的定义可以明显看出，κ_r、r =1、.....、$n-R$构成了 $\mathfrak{a}_\diamond$上的坐标。因此，一般轨道构成一个扎里斯基开仿射子簇，$\mathcal{X}$，它$\varepsilon + \mathfrak{b}_-$ 可以表示为在 $\mathfrak{a}_\diamond$上的纤维化。

$$\mathcal{X} = \cup_{a\in\mathfrak{a}_\diamond} \mathcal{O}_a.$$

我们定义相对于 f 的极化为子空间

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathrm{span}\left[\{e_{1,1}+e_{n,n},\dots,e_{R,R}+e_{n-R+1,n-R+1}\} \cup \{e_{i,j} | i<j\le n-i+1\}\right] \quad \text{for } n \text{ even;} && (5.5)\\ &= \mathrm{span}\left[\{e_{1,1}+e_{n,n},\dots,e_{R,R}+e_{n-R+1,n-R+1}, e_{R+1,R+1}\} \cup \{e_{i,j} | i<j\le n-i+1\}\right] \text{ for } n \text{ 奇。} && (5.6)\end{aligned}$$

要证明这确实是 $\mathfrak{b}$ 的一个子代数，我们先汇集第2节和第 3 节中的一些概念和记号（特别参见（2.3）、（2.4）、（2.17）、（3.1）和（3.4））。

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\diamond &= \{\xi \in \mathfrak{a} \,|\, \beta_r(\xi) = 0, r = 1,\dots,R\} \\ \mathfrak{s} &= \oplus \mathfrak{z}_r = \mathrm{span}\{e_{1,n},\dots,e_{r,n-r},\dots,e_{R,n-R}\} \\ \mathfrak{v}^+ &= \mathrm{span}\{e_{i,j} | i<j<n-i+1\} \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{v}^+$ 也可描述为辛形式 b_λ 在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{s}$上的极大迷向子空间。因此

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_\diamond \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{v}^+. \tag{5.7}$$

由结构关系可知

$$[e_{i,j}, e_{k,\ell}] = \delta_{j,k} e_{i,\ell} - \delta_{i,\ell} e_{k,j} \tag{5.8}$$

对于 $\mathfrak{gl}$,

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{v}^+ \tag{5.9}$$

确认 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{b}$的子代数。接下来我们计算 f的各向同性子群。

引理 5.4。

$$B_f = A_\diamond.$$

证明。注意到 $B = AN = NA$，因此只需分别考虑 A 和 N 的作用。容易验证

$$\begin{aligned} Ad_a^* f &= \varepsilon + \pi_{\mathfrak{b}_-} a^{-1} \cdot (f-\varepsilon) \quad \text{for } a \in A_\diamond, \\ &= \varepsilon + a^{-1} \cdot (f-\varepsilon) \\ &= \varepsilon + f - \varepsilon = f. \end{aligned}$$

因此，$A_\diamond \subset B_f$。另一方面，来自 $A_\diamond$ 补集的一个 a 的作用会对 f的反对角线元素进行非平凡缩放。最后，对于 $n \in N$，$Ad_n^* f$会保持 $f-\varepsilon$的对角线元素不变，因为共轭只会将该元素扩散到 $\mathfrak{b}$中。另一方面，存在一个保持 $f-\varepsilon$的反对角线元素不变的 N 元素，当且仅当存在一个元素 $\xi \in \mathfrak{n}$，其与 $f-\varepsilon$的反对角线部分的李括号属于 $\mathfrak{n}$。然而，直接观察可知，该李括号在 $\mathfrak{gl}$内作用于 ξ，将其顶部的 R 行与底部的 R 行互换，并将最后的 R 列与最前面的 R 列互换（符号改变）。由此可见，ξ 的每个元素都会被移至 $\mathfrak{b}_-$中的至少一个独立元素位置。因此，李括号为 0 当且仅当 $\xi = 0$。

□

现在我们可以验证 $\mathfrak{h}$ 满足定义5.1 的条件，并从命题5.2推导出一些相应的推论。

定理 5.5。 $\mathfrak{h}$ 由(5.7) 给出，是 f 由(5.4)指定的实极化。此外，

$$\{Ad_h^* f | h \in H\} = f + \mathfrak{h}^\perp$$

这意味着 Pukanszky 条件得以满足。

证明。根据引理5.4，定义5.1 的条件 1 转化为要求 $\{Ad_g \mathfrak{h} | g \in A_\diamond\} = \mathfrak{h}_\diamond$。然而，由于 $A_\diamond$ 包含单位元，这一点显然成立。容易看出 $(f, \mathfrak{v}^+) = 0$。由 (5.9) 可知，条件 2 也得以满足。接下来，我们计算维数，

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{b}_f &= \dim \mathfrak{a}_\diamond \\ 2\dim \mathfrak{h} &= 2\dim \mathfrak{a}_\diamond + 2\dim \mathfrak{s} + 2\dim \mathfrak{v}^+ \\ &= 2\dim \mathfrak{a}_\diamond + 2\dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n}/\mathfrak{s} \\ &= 2\dim \mathfrak{a}_\diamond + \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n} \\ 2\dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{b}_f &= \dim \mathfrak{a}_\diamond + \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n} \\ &= n - R + R + \dim \mathfrak{n} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim \mathfrak{b} &= \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

由此可见条件 3 得以满足。最后，我们讨论 Pukanszky 条件。相对于 $\mathfrak{gl}$ 上的 Killing 形式应用对偶性，容易看出 $\mathfrak{h}^\perp = \left[\left(\mathfrak{a}_\diamond^\perp \cap \mathfrak{a}\right) \oplus \mathfrak{v}^-\right]^\dagger$。我们记

$$f = \varepsilon + \kappa + Z$$

其中，$\kappa = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_2, \kappa_1)$是 f的对角分量，而 Z是这样的分量：其对角线下方反对角线上的元素全为 1，其余元素全为 0：$Z = e_{n,\ 1} + e_{n-1,\ 2} + \cdots + e_{n-R+1,\ R}$。再次回顾，余伴随作用由下式给出

$$Ad_h^* f = \varepsilon + \pi_{\mathfrak{b}_-} h^{-1} \cdot (f - \varepsilon).$$

我们可以分别考察它在各个分量上的作用。对于 κ，由于 h 充当升算子，很容易看出 $\pi_{\mathfrak{b}_-}h^{-1}\cdot\kappa=\kappa_\diamond$ 要确定 $\pi_{\mathfrak{b}_-}h^{-1}\cdot Z$ 的形式，只需考察其无穷小形式 $\pi_{\mathfrak{b}_-}[\mathfrak{h},Z]$；由于这里处理的是指数群，无穷小作用值域的指数映射会微分同胚地映射到余伴随作用的像上。根据线性，只需计算式（5.5）或（5.6）中基元素上的李括号，对此可利用结构关系（5.8）。由引理 5.4 可知 $[\mathfrak{a}_\diamond,Z]=0$，这意味着该作用的指数映射在 Z上是恒等映射。因此，只需考察 $[\mathfrak{s},Z]$ 和 $[\mathfrak{v}^+,Z]$。首先，我们计算

$$\begin{aligned}&[e_{r,n-r+1},e_{n,1}+e_{n-1,2}+\cdots+e_{n-R+1,R}]\quad\text{for } 1\le r\le R\\ =\;& e_{r,r}-e_{n-r+1,n-r+1}\quad 1\le r\le R\end{aligned}$$

其张成 $\left(\mathfrak{a}_\diamond^\perp\cap\mathfrak{a}\right)$。在第二种情况下，我们考虑

$$\begin{aligned}&\pi_{\mathfrak{b}_-}[e_{i,j},e_{n,1}+e_{n-1,2}+\cdots+e_{n-R+1,R}]\quad\text{for } i<j<n-i+1\\ =\;&\pi_{\mathfrak{b}_-}\left(e_{i,n-j+1}-e_{n-i+1,j}\right)\quad i<j<n-i+1\\ =\;&-e_{n-i+1,j}\quad i<j<n-i+1.\end{aligned}$$

其张成 $(\mathfrak{v}^-)^\dagger$。综合以上所有观察，我们看到

$$\begin{aligned}\{Ad_h^*f|h\in H\}&=\varepsilon+\pi_{\mathfrak{b}_-}\left(\kappa+Z\oplus\left(\mathfrak{a}_\diamond^\perp\cap\mathfrak{a}\right)\oplus(\mathfrak{v}^-)^\dagger\right)\\ &=\varepsilon+\kappa+Z\oplus\left(\mathfrak{a}_\diamond^\perp\cap\mathfrak{a}\right)\oplus(\mathfrak{v}^-)^\dagger\\ &=f+\mathfrak{h}^\perp.\end{aligned}$$

这就证明了定理。

□

5.2 $\mathfrak{b}^*$的泊松结构的典范表示

刚才描述的实极化现在可以为 $\mathfrak{b}^*$ 提供全局坐标描述，将其视为典范相空间，这与构造逐步平方可积表示所依据的海森堡代数相一致；这些表示已在第 2.4节中介绍。现在我们可以换一种方式来表示

$$\mathcal{X}=\{X\in\varepsilon+\mathfrak{b}_-\big|E_{0,r}(X)\neq 0,\forall r\}$$

作为一个显式乘积。我们定义

$$\mathcal{F}=\{f\in\varepsilon+\mathfrak{b}_-\big|\text{ such that } f \text{ is of the form (5.4)}\}.$$

由命题4.3 (iv) 可知，$\mathcal{X}$ 由极大辛叶构成叶状结构，B/B_f 并且根据引理 5.4，其中每个叶都与 $B/A_\diamond$微分同胚。

定理 5.6. $\mathcal{F}$ 是辛叶叶状结构的一个截面，因此，将 $\mathcal{X}$ 中的元素映射到其在 $\mathcal{F}$中的唯一代表元的映射 $\mathcal{X}\to\mathcal{F}$ 给出了微分同胚

$$\mathcal{X}\to B/A_\diamond\times\mathcal{F}. \tag{5.10}$$

a) 通过注意到以下事实，可显式地实现约化辛流形 (5.3) 在 f 处：

$$\begin{aligned}J_L^{-1}(f)&=\left\{(b,\ell)\in B\times(\varepsilon+\mathfrak{b}_-)\big|Ad_{b^{-1}}\ell\in f+\mathfrak{h}^\perp\right\}\\ &=\left\{(b,\ell)\in B\times(\varepsilon+\mathfrak{b}_-)\big|Ad_{b^{-1}}\ell\in f+\left[\left(\mathfrak{a}_\diamond^\perp\cap\mathfrak{a}\right)\oplus\mathfrak{v}^-\right]^\dagger\right\}\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{v}^-=$张成$\{e_{i,j}|n-j+1<i<j\}$。由于 f是正则值，H在该纤维上自由且适当地作用，因此商空间 $J_L^{-1}(f)/H$是一个光滑流形，而 ω_f是该商空间上唯一的辛形式，其在 $J_L^{-1}(f)$上的拉回等于 T^*B上的典范形式在 $J_L^{-1}(f)$上的限制。

b) $B/B_f(=B/A_\diamond)$在 f 处的切空间可分解为

$$T_f(B/B_f)=\left[\left(\mathfrak{a}_\diamond^{\perp}\cap\mathfrak{a}\right)\oplus\mathfrak{v}^-\right]\bigoplus\left[\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{v}^+\right].$$

在指数映射下，第一个因子局部微分同胚地映入 B/H，而第二个因子与 H/B_f 微分同胚。

c) $\mathcal{X}$ 具有如下形式的自然坐标化

$$\begin{pmatrix}
a_1+q_{0,1} & 1 & & & & & \\
p_{1,1} & a_2+q_{0,2} & 1 & & & & \\
p_{2,1} & p_{1,2} & a_3+q_{0,3} & 1 & & & \\
p_{3,1} & p_{2,2} & p_{1,3} & a_4 & 1 & & \\
p_{4,1} & p_{3,2} & p_{0,3} & q_{1,3} & a_3-q_{0,3} & 1 & \\
p_{5,1} & p_{0,2} & q_{1,2} & q_{2,2} & q_{3,2} & a_2-q_{0,2} & 1 \\
p_{0,1} & q_{1,1} & q_{2,1} & q_{3,1} & q_{4,1} & q_{5,1} & a_1-q_{0,1}
\end{pmatrix} \tag{5.11}$$

其中，$q_{i,\ j}$ 可作为 B/H 在 f 附近的局部坐标，而 $p_{i,\ j}$ 可作为 B/H 在 f 处的余切纤维上的局部坐标。不过，这些坐标之间存在由每个轨道上的卡西米尔函数所决定的全局约束。

证明。 从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{F}$ 在（5.10）中的映射由以下关系明确给出： [Ra20],

$$\kappa_1+\cdots+\kappa_r=\frac{\mathrm{Tr}X-I_{1,r}(X)}{2}$$

给定轨道上卡西米尔函数的固定值 $I_{1、\ r}(X)$ 和 Tr（X）后，这些关系确定了（5.4）中 f 的对角线元素 $\vec{\kappa}$。这些卡西米尔函数在 $\mathcal{X}$ 上彼此独立，且共有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个。还需注意， $\vec{\kappa}$ 从 κ_1 变化到 $^{\kappa_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}$，并且 dim $\mathfrak{a}_\diamond=n-R=\left[\frac{n+1}{2}\right]$。由引理 5.4 可知， $\mathfrak{a}_\diamond$参数化了一般辛叶。这与 f 为余伴随作用提供截面相符，也证实了命题 4.3（iv）中的陈述： $\{\mathrm{Tr}X、\ I_{1、\ r}\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一组最大独立卡西米尔函数。再次由引理 5.4 可知，每个 B/B_f 都与 $B/A_\diamond$ 微分同胚，这也给出了（5.10）中到第一个因子的投影。

在定理 (a) 部分的第一个等式中，我们首先注意到，在 (5.2) 中，

$$T^*B=B\times\mathfrak{b}^*=B\times(\varepsilon+\mathfrak{h}),$$

因此，利用对偶性，动量映射可以重新表示为

$$\left(Ad^*_{b^{-1}}\ell\right)|_{\mathfrak{h}}\quad=\quad\pi_{\mathfrak{h}^\dagger}\left(Ad_{b^{-1}}(\ell-\varepsilon)\right)+\varepsilon,$$

其中 ℓ表示 $\varepsilon+\mathfrak{b}_-$ 的对偶元素（相对于 Killing 型），对应于左侧的线性泛函ℓ。投影 $\pi_{\mathfrak{h}^\dagger}$ 是到 $\mathfrak{h}$ 的转置上的投影，而该转置包含于 $\mathfrak{b}_-$。根据我们在定理 5.5 证明中的论证可知，$\pi_{\mathfrak{h}^\dagger}$ 在 $\mathfrak{b}_-$ 中的核恰好是 $\mathfrak{h}^\perp$。因此，f 在动量映射下的原像 J_L 由 (a) 中第一个等式右侧给出。第二个等式仅用到了此前在定理 $\mathfrak{h}^\perp$ 5.5 的证明中得到的 的明确表达式。(a) 中其余结论则直接由辛约化的标准事实得到。

(b) 部分概述了第 5.1 节中进行的李代数计算。(c) 部分所述的坐标化，是通过将指数映射局部应用于 (b) 得到的。 □

注 5.7。 需要指出，(5.11) 中的坐标化体现了 n步海森堡结构，该结构属于幂零根 N 包含于 B。

5.3 重新审视 Plancherel 公式

我们回顾定理 3.4中关于 B的 Plancherel 公式的表述：对于 $f(x)$ 上的施瓦茨类函数， B 有

$$f(x) = c \int_{\mathfrak{a}_\diamond^*} \int_{\mathfrak{t}^*} \Theta_{\pi_\lambda,\phi}(D(R_x f)|P(\lambda)|d\lambda d\phi.$$

此外，由 (3.6) 可知，π_λ 与 ϕ 当且仅当 $\lambda' \in \mathrm{Ad}^*(A)\lambda$ 且 $\phi = \phi'$ 时，$\pi_{\lambda'}$ 与 ϕ' 等价。利用 $\mathfrak{gl}$ 上的 Killing 型，我们可以将元素 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 与对角线下方的反对角线元素相对应，且这些元素的各项均非零。正如引理 5.4 的证明中所指出的，由 a 中属于 $A_\diamond$ 补集的元素进行共轭，会对表示 λ 的元素的反对角线元素进行非平凡缩放。事实上，对于任意其他这样的 λ'，都存在一个 a，将 λ 变为 λ'。由此可知，对于固定的 $\phi \in \mathfrak{a}_\diamond^*$，所有 π_λ、ϕ 都等价，因而在 B 中仅表示一个 $\widehat{}$ 酉不可约表示等价类。它们的分布特征在普朗歇尔公式中表现为积分直和中的同型分量，可以将其视为它们在普朗歇尔测度中的重数的表示。另一方面，不同 ϕ 对应的 π_λ、ϕ 彼此不等价。由命题 3.3 可知，这些对象参数化了一组互不相同的等价类，且该集合在 B 中具有满测度。

我们也可以从泊松视角来看待这一点。由定理5.6 可知， $\mathfrak{b}^*$ 中的主余伴随轨道由对角参数 $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-R}$参数化，这些参数出现在 $f(5.4)$ 中。然而，在对偶关系下， $\vec{\kappa}$ 与 $\mathfrak{a}_\diamond^*$一一对应。因此我们有

$\widehat{}$定理 5.8。 上述 B 的开稠密子集与 $\mathfrak{b}^*$ 中的一般余伴随轨道之间的对应关系，明确验证了 Auslander 和 Kostant 抽象确立的轨道方法 *[AK71]* 的有效性。此外，直接结合命题 *5.2* (2)，我们可以将表示 $\pi_{\lambda,\phi}$ 的希尔伯特空间识别为 $L^2(B/H)$。此外，普朗歇尔公式中出现的 Dixmier-Pukanszky 算子 D 的符号由推论*4.7*明确给出。

6 结论

在[AK71] Auslander 和 Kostant 从一般原理出发，确立了这样一个事实：对于 I 型可解李群，其不可约酉表示、对偶群与余伴随轨道的等价类之间存在一一对应关系。Kostant [Ko78] 随后对所谓的 Whittaker 表示这一特殊情形给出了明确描述。这些表示对应于最小的不可分解余伴随轨道；在三角群的情形下，这些轨道就是三对角（Jacobi）轨道。这项工作为表示论与经典 Toda 格相关的可积系统理论之间建立深刻联系打开了大门。近来，这也促成了与概率论[BBO05、O13], 数论 [Sh10] 和组合学 [BBF11]等领域的重要联系。

本文的结果为类似 Kostant 所做的那种明确描述奠定了基础，不过这里考察的是对偶群中的一般元素，即对应于维数最大的余伴随轨道的元素。具体而言，我们明确揭示了三角群普朗歇尔公式中所有要素之间的联系，B，这些要素一方面由 [LW78、Wo14] 等人的研究所发展，另一方面则与 $\mathfrak{b}^*$ 在完全 Kostant Toda 格框架内发展的余伴随轨道泊松几何相关。我们以一种自然的方式完成了这项工作，使得结果可以推广到一般复半单李群的 Borel 子群。由此，人们可以进一步探索与可积系统及相关领域之间更深层的联系，类似于 Whittaker-经典Toda情形中已发现的联系。我们预计未来的研究将继续推进这一方向；不过在此，我们只简要指出本文的工作可能对这些研究作出的具体贡献。

6.1 典范坐标与标准哈密顿系统

正如第5节中所述，为一般轨道构造极化和典范结构一样，也可以对三对角形式的极小轨道进行类似的构造。关于这一点的详细说明，读者可参阅[BGR17] 。在相应的坐标变换下，由（1.4）确定的、具有哈密顿量 TrX^2 的三对角Toda系统，用标准典范变量 $\{p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots\ldots, q_n\}$表示时，呈现为（1.3）的形式。这里所谓“标准”，是指在这些变量下，泊松括号“对角化”为 $\{p_i, p_j\} = 0 = \{q_i, q_j\}$、 $\{p_i, q_j\} = \delta_{i,\ j}$。

作为定理5.5的推论，命题5.2 表明，在一般轨道的情形下，这样的坐标确实存在；然而，坐标变换的显式形式，以及Toda 哈密顿量或与之对易的任何其他哈密顿量将采取何种形式，并不能立即看清。不过，在[Sy80] Symes概述了一种基于极化来构造该变换的一般方法。此外，式（5.11）中明显呈现的分层海森堡结构表明，我们所寻求的典范坐标可能与正则海森堡变量有着密切联系。因此，这是一个富有希望的开端，未来的研究将继续推进这一方向。

6.2 不变量的量子化与量子可积性

正如引言中所提到的，轨道方法起源于具有多种对称性的系统的量子力学。我们已经详细研究了该方法在三角群情形下的应用，因此很自然地会回过头来探讨它对相关量子系统，尤其是完全 Kostant Toda 格的量子对应物，可能有何影响。对于三对角轨道，这一问题已在原始 Toda 格的情形下得到解决。在这种情况下，量子 Toda 格的形式为

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \sum_{j=1}^{n-1} e^{q_j - q_{j+1}} \tag{6.1}$$

按照正则量子化的形式规则，将 p_j 替换为 $i\hbar\partial/\partial q_j$。要使这一形式过程建立在严格的数学基础之上，会遇到若干障碍。第一个潜在问题是，量子化的选择通常并不唯一；可能存在多个算子选择，其半经典极限都导出相同的 H。（关于这一问题的更多细节，请参见 [Fo89] 。）然而，在 (1.3) 的情形下，显而易见的变量分离消除了这类歧义。 H 与 (6.1) 之间的关系符合附录 A 中所述的符号映射。下一个潜在障碍涉及将经典可积性，特别是泊松对易性，推广到量子层面。对于三对角情形，我们可以考虑命题 4.3 (i) 中由 $\{E_{m,0}(\vec{p},\vec{q})\}$给出的泊松对易不变量。它们是 X 取 (1.4) 形式、且 $a_i = p_i$ 和 $b_i = \exp q_i - q_{i+1}$时 $\det(X - \eta\mathbb{I})$ 的系数。我们注意到，限制在这个三对角相空间上时，命题 4.3 中提到的其他所有半不变量 $\{E_{m,r}\}$ （ $r > 0$）都恒等于零。然而， $r = 0$ 的不变量足以保证三对角 Toda 格的完全可积性。再一次，令人瞩目的是，这些不变量的量子化，记作 E_m,0，是唯一确定的；同样，只需将 p_j 替换为 $i\hbar\partial/\partial q_j$ [Gi97]即可得到。不过，泊松对易性并不必然意味着相应算子彼此对易，因为符号的乘法并不能不加变通地转化为算子的复合。无需进一步考察，我们唯一能得出的结论是，对易子至 $\hbar^2$ [Fo89]阶为零。尽管如此，我们确实发现，对于所有 m，都有 $[\widehat{H}, \widehat{E}_{m,0}] = 0$，这意味着这些算子起着量子守恒律的作用。它们也被称为一组完全的对易可观测量，并且都具有共同本征态。这就是量子可积性的含义。共同本征态所起的作用，正是本结论开头提到的惠特克函数所起的作用。

尝试将量子化及相关问题推广到完全 Kostant Toda 格的情形时，以上提到的所有障碍都会再次出现。由于哈密顿量及相关不变量将在一般轨道上而非仅在三对角轨道上求值（现在还会涉及所有 $\{E_{m,r}\}$），使三对角情形得以奏效的因素可能不再适用。基于本文结果而引入正则变量的做法，如第 6.1 节所设想的那样，或许会起到决定性作用，但这一点仍有待确定。推广到量子完全 Toda 时还有一个潜在障碍，而本文的结果或许能对此有所助益。正如我们所见， $r > 0$ 的不变量必然是有理函数，其对应的量子化算子应当以适当的傅里叶变换表示为伪微分算子。为表述这一点，我们可以利用 B 的普朗歇尔公式（定理 3.4），并利用 I_m 的不变性， r，

$$\widehat{I}_{m,r} f(x) = c\int_{\mathfrak{a}_\diamond^*}\int_{\mathfrak{t}^*} \Theta_{\pi_\lambda,\phi}(D\widehat{I}_{m,r}(R_x f))|\rho(\lambda)|d\lambda d\phi$$

其中 $\widehat{DI_{m,\ r}}$ 是一个有理半不变量算子，其模权与 D 相同，且定义方式与 D 在（3.2）–（3.3）中相同，符号为 $\sigma\left(D\widehat{I}_{m,r}\right)$。（注意，线性双射（A.1）可扩展到所涉及包络代数的函数域。）这里令人关注的是，对 $I_{m,\ r}$ 进行量子化所得的伪微分表示可能涉及奇异积分。根据本文的结果，尤其是推论4.7，可知

$$\sigma\left(\widehat{I}_{m,r}\right) = \frac{E_{m,r}}{E_{0,r}}$$
$$\sigma(D) = E_{0,R}^{p}(X)\prod_{r=1}^{R-1}E_{0,r}^{2}(X)$$

其中 $p=1$ 当 n 为偶数时，以及 $p=2$ 当 n 为奇数时。如果（A.1）是代数同态，那么乘积的符号就会是各符号的乘积；在我们的情形中，显然该符号乘积是一个多项式，因此没有奇异性。然而 σ 只是一个线性双射，乘积的符号仅在相差低阶项的意义下等于各符号的乘积。不过，众所周知，将其限制在不变量上时，对 σ 进行修正确实能够实现代数同构 [Du77]。目前正在研究能否将类似的方法推广到我们在此考虑的这类半不变量上。这也有助于解决本节前文提出的问题。

致谢

借此机会，我谨向 Hermann Flaschka 表达深切而持久的感激之情。多年前，他向我介绍了李理论与泊松几何之间由 Toda 格揭示的迷人联系。Hermann 本人将 Toda 格视为探索数学中诸多迷人领域的“载体”；这些领域与这一非线性系统之间往往有着出人意料而又优美的关联。本文所呈现的工作，受到我们早前研究的启发 [EFS93] 与 Stephanie Singer 合作的研究；其缘起是 Hermann 和我开展的一系列深入探索，这些探索始于2019年初，并持续到他于 2021年初突然离世之时。我希望他会喜欢这篇文章，也希望这里讨论的思想能有助于延续 Hermann 以早期关于 Toda 格的开创性工作所开启的数学传承。

A 附录：包络代数

我们回顾一些基本定义和事实。对于任意李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$，都有其普遍包络代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，它定义为结合代数

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$$

其中，$T(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的张量代数，而 I 是由 $\{X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y]\}$ 生成的双边理想，其中 X、$Y\in\mathfrak{g}$。$\mathfrak{g}$ 通过 $T^1(\mathfrak{g})$ 自然包含在 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 中。这可以用左不变微分算子作解析解释。给定 $X\in\mathfrak{g}$，定义一个作用于相关群流形 G 上光滑函数的一级算子 f，其定义为

$$\tilde{X}f(g) = \frac{d}{dt}f(g\exp tX)|_{t=0}.$$

（在我们的情形中，只考虑指数群，因此 $G=\exp(\mathfrak{g}.$）对于任意微分同胚 $\gamma\colon G\to G$，定义 γ 在 $\tilde{X}$ 上的作用为 $\tilde{X}^{\gamma}f(g) = Xf(g\circ\gamma)\circ\gamma^{-1}$。$\tilde{X}$ 是左不变的，具体而言，取 γ_h 为由固定元素 $h\in G$ 对 G 作左平移所对应的微分同胚，则对所有此类 h，都有 $X^{\gamma_h}=X$。

这自然地通过以下方式推广到 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$的单项式元素：

$$(X_1X_2\dots X_k)^{\sim}\cdot f = \frac{\partial^k}{\partial t_1\partial t_2\cdots\partial t_k}f(g\exp tX_1\exp tX_2\dots\exp tX_k)_{t_1=\dots=t_k=0}$$

以及 t 然后通过线性推广到所有 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$。事实上，存在结合代数同构 [He78]，

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\simeq\mathbb{D}(G),$$

其中 $\mathbb{D}(G)$ 表示 G 上所有左不变微分算子组成的空间，D（意即 $D^{\gamma_h}=D$）。沿着同样的思路，G 对 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用可扩展到 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$，

$$Ad_g(X_1X_2\dots X_k) = (Ad_gX_1)(Ad_gX_2)\dots(Ad_gX_k)$$

这对应于左不变微分算子上的伴随作用，$Ad_{g^{-1}}D$。（由于 D 是左不变的，这相当于由 g 的右平移所诱导的作用。）接着定义

$$ad_X D \doteq \frac{d}{dt} Ad_{\exp(tX)} D|_{t=0}$$

它与 ad 在 $\mathfrak{g}$ 上一致。由乘积法则可得

$$ad_Y X_1 \dots X_k = Y X_1 X_2 \dots X_k - X_1 X_2 \dots X_k Y.$$

由此可知，如果 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 中的一个元素与 $\mathfrak{g}$ 的所有元素都可交换，那么它就是 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 的中心中的一个元素，记作 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$；而后者又同构于双不变微分算子构成的交换代数。

作出这些对应后，我们便得到了与不变量理论的直接联系。设 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的对称代数。那么 [He84] $\exists!$ 线性双射

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{S}(\mathfrak{g}) &\to \mathbb{D}(G) \\ \ni \sigma(X^m) &= \tilde{X}^m. \end{aligned} \tag{A.1}$$

这不是代数同构；不过，σ 与 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$ 上的 Ad_G 作用可交换（该作用保持 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$）。自然地，我们将 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})$ 视为 $\mathfrak{g}^*$ 上的多项式函数空间。因此，$\mathfrak{g}$ 上的 Ad_G-不变多项式映射到 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$。此外，若多项式 $\{P_1, \dots, P_m\}$ 生成不变量子代数 $\mathbb{S}(\mathfrak{g})^G$，那么 $\{\sigma(P_1)$、.....、$\sigma(P_m)\}$ 就生成 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ 这个由双不变算子构成的代数。

参考文献

[Arh79] A.A. Arhangel'skii. 三角矩阵群上的完全可积哈密顿系统。（俄文）《数学文集》（新系列）108 (150), 134-142（1979年）。

[AK71] L. Auslander and B. Kostant. 可解李群的极化与酉表示。《数学发明》14，255-354（1971年）。

[BBO05] P. Biane、P. Bougerol 和 N. O'Connell。Littleman 路径与布朗路径。《杜克数学杂志》130，127-167（2005年）。[BGR17] A.M. Bloch、F. Gay-Balmaz 和 T.S. Ratiu。Flaschka 变换的几何性质。《数学物理通讯》352，457-517（2017年）。[BBF11] B. Brubaker、D. Bump 和 S. Friedberg。Eisenstein级数、晶体与冰。《美国数学会通报》58，1563-1571（2011年）。[DLNT86] P. Deift、L.C. Li、T. Nanda 和 C. Tomei。一般轨道上的 Toda 流是可积的。《纯粹与应用数学通讯》39，183-232（1986年）。

[Dix59] J. Dixmier. 关于幂零李群的酉表示 IV。《加拿大数学杂志》11，321-344（1959年）。

[Du77] M. Duflo. 李群上的双不变微分算子。《高等师范学校科学年刊》10，265-288（1977）。

[DM72] H. Dym 和 H. P. McKean。《傅里叶级数与积分》。概率与数理统计丛书，第14卷，Academic Press，纽约（1972年）。

[EFS93] N. M. Ercolani、H. Flaschka 和 S. Singer。《完全Kostant-Toda格的几何》。载于《可积系统》（吕米尼，1991年），数学进展第115卷。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州波士顿，181-225（1993年）。

[Fl74] H. Flaschka。《Toda格 II：积分的存在性》。《物理评论B》，9，1924–1925（1974）。

[Fo89] G.B. Folland。《相空间中的调和分析》。129，普林斯顿大学出版社（1989）。

[FuHa91] W. Fulton 和 J. Harris。《表示论：入门课程》。数学年刊研究丛书，第 122 卷，Springer-Verlag，纽约（1991 年）。

[GS99] M . I. Gekht^man an d M. Z. Shapiro. *Non-Commutati^ve an d Commutative Integra^bilit y of Generic Tod*
a 单李代数中的流。《纯粹与应用数学通讯》52(1)，53–84（1999）。[Gi97] A. Givental。《驻相积分、量子Toda晶格、旗流形与镜像猜想》。载于《奇点理论专题》，《美国数学会译丛》，第2辑，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州（1997）。[GuSt84] V. Guillemin 和 S. Sternberg。《物理学中的辛几何方法》。剑桥大学出版社（1984）。[He78] S. Helgason。《微分几何、李群与对称空间》。美国数学会（1978）。[He84] S. Helgason。《群与几何分析》。美国数学会（1984）。[Jo77] A.A. Joseph。《半单李代数素谱的一个预备定理》。《代数学杂志》48，241–289（1977）。[Ki62] A.A. Kirillov。《幂零李群的酉表示》。《俄罗斯数学评论》17，57–110（1962）。[Ki99] A.A. Kirillov。《轨道方法的优点与不足》。《美国数学会通报》36，433–488（1999）。[Ko70] B. Kostant。《量子化与酉表示》。《数学讲义》170，87–208（1970）。[Ko78] B. Kostant。《论Whittaker向量与表示论》。《数学新进展》48，101–184（1978）。[Ko79]B. Kostant。《广义Toda格的解与表示论》。《数学进展》34，195–338（1979）。[Ko12] B. Kostant。《正交根级联与半单李群Borel子群幂零根的余伴随结构》。《莫斯科数学杂志》12，1–16（2012）。[Ko13] B. Kostant。《中心 $U(\mathfrak{n})$、正交根级联与Lipsman-Wolf构造》。载于《李群：结构、作用与表示——为庆祝Joseph A. Wolf 75岁生日而作》，《数学进展》第306卷，Springer Science+Business Media，纽约，纽约州，163–173（2013）。[Kn86] A. Knapp。《半单群的表示论》。普林斯顿大学出版社（1986）。[LW78] R.L. Lipsman 和 J.A. Wolf。《经典群抛物子群的普朗歇尔公式》。《数学分析杂志》34，120–161（1978）。[Ma58] G. Mackey。《群扩张的酉表示 I》。《数学学报》99，265–311（1958）。[MW73] C.C. Moore 和 J.A. Wolf。《幂零群的平方可积表示》。《美国数学会汇刊》185，445–462（1973）。[O13] N. O'Connell。《几何RSK与Toda格》。《伊利诺伊数学杂志》57(3)，883–918（2013）。[Pu71] L. Pukanszky。《论指数群理论》。《美国数学会汇刊》126，487–507（1967）。[Ra20] J. Ramalheira-Tsu。《Kostant-Toda格、组合算法与超离散动力学》。可通过ProQuest学位论文与论文全球数据库（2461615150）获取。（2020）。[Sh10] F. Shahidi。《Eisenstein级数与自守L函数》。《美国数学会讨论会出版物》，普罗维登斯，罗德岛州（2010）。[Si05] S.F. Singer。《氢原子中的线性、对称性与预测》。《数学本科教材》，Springer-Verlag，纽约（2005）。[Sy80] W. W. Symes。《哈密顿群作用与可积系统》。《Physica D》1，339–374（1980）。[Th82] A. Thimm。《齐性空间上的可积测地流》。《Ergod. Th. & Dynam. Sys.》1，495–517（1982）。

[To67] M. Toda。《具有非线性相互作用的链振动》。《日本物理学会志》22(2)，431–436（1967）。[Tro 80] V.V. Trofimov。《李代数的有限维表示与完全可积系统》。（俄文）《数学文集》（新辑）111（153），610–621（1980）。[Wo14] J.A. Wolf。《极小抛物子群的普朗歇尔公式》。《李理论杂志》24，791–808（2014）。[Wo16] J.A. Wolf。《逐步平方可积表示：概念及其若干推论》。载于《李理论及其在物理学中的应用》，保加利亚瓦尔纳，2015年6月，《数学与统计学论文集》第191卷，Springer Nature，新加坡，181–202（2016）。