arXiv:2301.12565v1 [math.OA] 29 Jan 2023

BJ正交图中 C^*代数的孤立顶点与直径

DRAGOLJUB J. KEČKIĆ 和 SRDJAN STEFAN OVIĆ

摘要。我们给出了任意 C^*代数中的元素成为与相互强 Birkhoff-James 正交相关的正交图的孤立顶点的充要条件。此外，我们证明，对于除 $\mathbb{C}$、$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ 和 $M_2(\mathbb{C})$ 之外的所有 C^*代数，所有非孤立点构成正交图的一个连通分支，其直径小于或等于 4；也就是说，任意两个非孤立点都可以通过至多含 4 条边的路径连接。文中还给出了一些相关结果。

1. 引言

巴拿赫空间中的 Birkhoff-James 正交已被研究多年。其定义如下。

定义 1.1。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x, y \in X$。若对任意$\lambda \in \mathbb{C}$，都有

$$\|x+\lambda y\| \geq \|x\|. \tag{1.1}$$

容易看出，如果 X 配备了一个生成该范数的内积，那么 (1.1) 蕴含通常意义下的正交性。然而，若X 上的范数不满足平行四边形法则，即 X 不是希尔伯特空间，那么 Birkhoff-James 正交存在一些不足。例如，它既不对称，也不具有可加性。下文中我们将 Birkhoff-James 正交简称为 BJ-正交。

关于 BJ-正交的更多细节，请读者参阅近期的一篇综述[5] 及其中的参考文献。

本文关注 C^*-代数。除了通常的 BJ-正交之外，还有强 BJ-正交的概念。

定义 1.2. 设 A 是一个 C^*-代数，且设 a、$b \in A$。
a) 若对于任意 $c \in A$，都有下式成立，则称 a 与 b强 BJ-正交，记作 $a \perp^S b$

$$\|a+bc\| \geq \|a\|. \tag{1.2}$$

b) 若 $a \perp^S b$ 且 $b \perp^S a$，则称 a 与 b 彼此强 BJ-正交，记作 $a \perp\!\!\!\perp^S b$。

注记 1.1。前一定义的 a) 部分出自 [7], , b) 部分出自 [6]。

2010 数学主题分类。主要分类：46L05、46L08，次要分类：05C12、46B20。关键词和短语。Birkhoff-James 正交， C^*-代数，正交图。本研究得到塞尔维亚教育、科学和技术发展部的资助，资助通过贝尔格莱德大学数学学院提供。

注记 1.2。 显然，先前定义的概念不依赖于标量倍。

备注 1.3：强 BJ-正交性的概念实际上源于对希尔伯特模的研究，即某个 C^*-代数上的模。通常考虑左模，其中标量写在向量的右侧。任意 C^*代数都可以视为其自身上的希尔伯特模。因此，(1.2) 是希尔伯特模上 BJ-正交性的一个特例。

最近，在 [6] 中引入了与 BJ-正交性相关的正交图。

定义 1.3。 设 A 是一个 C^*-代数，且设 S 是相应的射影空间，即 $S = (A \setminus \{0\})/a \sim \lambda a$，其中 λ 遍历 $\mathbb{C}$。

与相互强 BJ-正交性相关的正交图 $\Gamma(A)$ 是这样一个图：其顶点集合为 S，边由满足 $a \perp\!\!\!\perp^S b$ 的那些有序对 $(a, b) \in S \times S$ 构成。

文献 [6] 中证明了以下若干结果：

R1. 在含单位元的 C^* 代数中，任意右可逆元都是正交图的一个孤立顶点。

R2. 在以下 C^* 代数中，所有非右可逆元构成正交图的一个连通分支： $M_n(\mathbb{C})$、$n \geq 3$、 $B(H)$，其中希尔伯特空间 H 为无限维；以及 $C(K)$。对于 C^* 代数 $M_2(\mathbb{C})$，任意非孤立顶点都属于某个双元素连通分支。

R3. 还研究了正交图的直径。在某个连通分支中，给定两个顶点，它们之间的距离是连接这两个顶点所需的最少边数。正交图（或其连通分支）的直径，是任意两个相连顶点之间距离的最大值。以下给出了相应的结论：对于 $M_3(\mathbb{C})$，直径为 4。对于 $M_n(\mathbb{C})$、 $n \geq 4$ 和 $B(H)$，若 H 为无限维，直径为 3。对于 $C(K)$，若 K 不包含具有可数局部基的点，则直径为 2。否则， $C(K)$ 的直径为 3。

本文探讨以下与前述结果相关的问题。

Q1. R1 的逆命题是否成立：“含单位元的 C^*-代数中的任意孤立顶点都是右可逆的”？关于非含单位元的 C^* 代数，可以得出什么结论？（此问题见第 6] 节 [6, 。）

Q2. 一般情况下，我们能否估计 $\Gamma(A)$ 的直径?

Q3. $M_2(\mathbb{C})$ 是否是唯一一种不可逆元素不会构成连通分支的 C^* 代数?

第 2 节完整回答问题 1。第 3 节简要综述 Akemann 的非交换拓扑，这是下一节的主要工具。第 4 节肯定地回答问题 3，并给出一般情况下直径的精确估计（问题 2）。第 5 节讨论有限维 C^* 代数的直径。最后，第 6 节提出两个有待进一步研究的问题。

我们假定读者熟悉基本的 C^* 代数概念和技巧，例如态、纯态、Kadison 传递定理等。本文将更详细地介绍一些高级技巧，尤其是与给定 C^* 代数的二次对偶相关的技巧。关于 C^*-代数的基础和进阶知识，请读者参阅书籍 [9]和 [10]。

1.1. **化归为正元素**。 在陈述并证明我们的结果之前，我们将在接下来的两个引理中证明： BJ-正交性 a 与 b 之间的正交性仅取决于包含 a 和 b的最小子代数，同时也仅取决于绝对值 $|a^*| =(aa^*)^{1/2}$ 和 $|b^*| = (bb^*)^{1/2}$。

引理 1.1。 设 $A \subseteq B$ 是两个 C^*-代数，且 a、 $b \in A$。则 $a \perp^S b$ 属于 A 当且仅当 $a \perp^S b$ 属于 B。

备注 1.4。 换言之，强 BJ-正交性是元素 a、 b 的内禀性质，并且不依赖于环境代数。

证明。 在 [7, 定理 2.5。] 中已证明，在任意希尔伯特 C^*-模中， $a \perp^S b$ 当且仅当 $a \perp b \langle b、 a\rangle$ ——即基本的、非强 BJ-正交性。在希尔伯特模就是代数本身的情况下，内积由 $\langle b、 a\rangle = b^*a$ 给出。因此

$$a \perp^S b \quad \text{iff} \quad a \perp bb^*a. \tag{1.3}$$

结论成立，因为（非强） BJ-正交性仅取决于 a 和 bb^*a 的线性张成空间。□

引理 1.2. 当且仅当 $a \perp^S b$ $|a^*| \perp^S |b^*|$。

证明。 事实上，由于 $|b^*||b^*|^* = (bb^*)^{1/2}(bb^*)^{1/2} = bb^*$ ，由 (1.3) 可立即得到 $a \perp^S b$ 当且仅当 $a \perp^S |b^*|$。

对于第一个论证，考虑 a、 $b \in A$ 以及 A 的包络 W^*-代数，记为 A''。存在一个偏等距 $v \in A''$ ，使得 $a = |a^*|v$ ，并且 $|a^*| = av^*$。设 $|a^*| \perp^S b$。那么对于所有 $c \in A \subseteq A''$ ，我们有

$$\|a\| = \||a^*|v\| \leq \||a^*|\| \leq \||a^*| + bcv^*\| = \|(a + bc)v^*\| \leq \|a + bc\|,$$

由此我们得出 $a \perp^S b$。类似地，若 $a \perp^S b$ 和 $c \in A$ 任意，则

$$\||a^*|\| = \|av^*\| \leq \|a\| \leq \|a + bcv\| = \|(|a^*| + bc)v\| \leq \||a^*| + bc\|,$$

由此我们得出 $a \perp^S |b^*|$。因此， $a \perp^S b$ 当且仅当 $|a^*| \perp^S b$。 □

2. Isolated vertices

本节将刻画含单位元和非含单位元 C^*-代数 A中正交图 $\Gamma(A)$的孤立顶点。

我们需要用到近似可逆性的概念，该概念由 [8] 以如下方式引入

定义 2.1。 设 A 是一个 C^*-代数，且设 $a \in A$。若存在一个网 $\{b_i\}_{i\in I}$ ，使得 bb_i 是 A的近似单位，则称 a 近似右可逆。

[8] 中给出的一些结果陈述如下两个命题。

命题 2.1。 设 A 是一个含单位元的 C^*-代数，且设 $a \in A$。那么， a 右可逆，当且仅当 a 近似右可逆。

证明。 证明见 [8, 命题 2.7] 及其紧接着的段落。□

命题 2.2。 设 A 是（可能不含单位元的） C^*代数，且 $a \in A$。以下条件等价：

(i) a 是近似右可逆；*(ii)* a 不属于任何右模理想；
(iii) 对任意纯态 ρ，有 $\rho(aa^*) > 0$。

证明。 这实质上是 [8, 定理 3.6]。

事实上，这一定理针对非含单位元的非交换 C^*-代数陈述，并对非含单位元的 C^*-代数证明（证明中并未用到非交换性）。不过，仔细阅读证明后可以得出结论：它在含幺情形下同样成立。为方便读者，我们概述含幺情形的证明。

在最一般的情形下，(ii) 与 (iii) 等价，见 [9, 定理 5.3.5]。

假设 (i) 不成立。则由命题 2.1 a 不是右可逆的，因此 $a \in aA \subsetneqq A$。所以，$Aa^* = (aA)^*$ 是 A 中的一个真左理想，并且根据 [9, 定理 5.3.3]，它包含于某个极大模左理想中，记为 J。于是，$a \in aA \subseteq J^*$，且 (ii) 不成立。

假设 (ii) 不成立，即对于某个极大模右理想 J， $a \in J$。那么 $aA \subseteq JA \subseteq J \subsetneqq A$。因此， a 不可逆，即 (i) 不成立。□

此外，我们还需要以下技术性引理。

引理 2.3. 设 A 是一个 C^*-代数，且设 a、 $b \in A$。若存在一个态 ρ，使得 $\rho(aa^*) = \|a\|^2$ 且 $\rho(bb^*) = 0$，则 $a \perp^S b$。

证明。 对任意 $c \in A$，由柯西-施瓦茨不等式可得 $|\rho(bc)|^2 \leq \rho(bb^*)\rho(c^*c) = 0$。假设 $\|a\| = 1$ （必要时将 a 除以 $\|a\|$ ）。我们有

$$\|a + bc\|^2 = \|(a + bc)(a + bc)^*\| \geq |\rho(aa^* + ac^*b^* + bca^* + bcc^*b^*)|.$$

然而， $\rho(bca^*) = \rho(bcc^*b^*) = 0$ ，且 $\rho(ac^*b^*) = \rho(bca^*) = \overline{0}$，而 $\rho(aa^*) = 1$。因此

$$\|a + bc\|^2 \geq 1 = \|a\|^2.$$

□

以下命题是我们的第一个结果，也是 R1 的逆命题。

命题 2.4. 设 A 是含单位元的 C^*-代数，且 $0 \neq a \in A$ 是一个非右可逆元素。则 a 不是正交图中的孤立点。

证明. 设 a 非右可逆。假设 $\|a\| = 1$。那么，由命题 2.1， a不是近似右可逆的。此外，由命题 2.2，存在一个纯态 ρ，使得 $\rho(aa^*) = 0$。

另一方面，还存在另一个纯态 τ，使得 $\tau(aa^*) = 1$。考虑 $b = \sqrt{1 - aa^*}$。我们有 $b \neq 0$；因为若 $b - 0$，则 $aa^* = 1$，从而 a 是右可逆的——矛盾。因此

$$\tau(bb^*) = \tau(1 - aa^*) = 0,$$

以及

$$\rho(bb^*) = \rho(1 - aa^*) = 1.$$

由引理 2.3，考虑态 τ 可得 $a \perp^S b$ ，考虑态 ρ也可得 $b \perp^S a$ 。因此 $b \perp\!\!\!\perp^S a$。□

下面的命题 2.5 和 2.6 对非含单位元的C^*代数给出了完整的答案。

命题 2.5. 设 A 是 C^*代数，且 $b \in A$ 是近似右可逆元。则 b 是正交图中的一个孤立点。

证明。 假设 $b \perp\!\!\!\perp^S a$。那么 $a \perp^S b$，因此对于所有 $c \in A$，我们有

$$\|a + bc\| \geq \|a\|.$$

取 $c = -b_i a$，其中 b_i 是一个近似右逆元，即 bb_i 是一个近似单位元。于是

$$\|a\| \leq \|a - bb_i a\| \to 0,$$

这意味着 $a = 0$。 □

命题 2.6。 假设 $a \in A$ 不是近似右可逆的。那么a不是正交图中的一个孤立点。

证明。 假设 $\|a\| = 1$。若 a 不是近似右可逆的，则由命题 2.2 可知，存在一个纯态 ρ，使得 $\rho(aa^*) = 0$。此外，还存在另一个纯态，记作 τ，使得 $\tau(aa^*) = 1$。由于 ρ 是纯态，因此存在某个 $b' \geq 0, \|b'\| = 1$，使得 ρ 在其上取到范数，即 $\rho(b') = 1$。（存在这样的 b' 直接由 Kadison 传递性定理 [10, 3.13.2], 得出；另见 [10,3.13.14] 的证明。）

考虑元素 $b = ((1 - aa^*)b'(1 - aa^*))^{1/2}$。显然， $b \geq 0$。尽管A 可能不是含单位元的，但最后一项仍然成立。也就是说， A 是其单位化$\tilde{A}$中的一个理想；因此，对任意 $x, y \in A$，都有 $(1_{\tilde{A}} - x)y \in A$。

此外，

$$\rho(b^2) = \rho((1 - aa^*)b'(1 - aa^*)) = \rho(b' - aa^*b' - b'aa^* + aa^*b'aa^*).$$

由于， $\rho(aa^*) = 0$，我们有 $\rho(aa^*b') = \rho(b'aa^*) = \rho(aa^*b'aa^*) = 0$，从而得到$\rho(b^2) = \rho(b') = 1$。因此 $\|b\| = 1$，特别是 $b \neq 0$。然而 $\tau(1 - aa^*) = 0$，这意味着 $\tau(b^2) = 0$。

因此，我们可以应用引理 2.3，得出 $a \perp^S b$ 以及 $b \perp^S a$。所以， a不是孤立点。□

例 2.1。 令 $A = C_0(0, 1)$。则，当且仅当对于所有 $t \in (0, 1)$， $f(t) \neq 0$ 时， $f \in A$ 是正交图$\Gamma(C_0(0, 1))$的孤立点。事实上， A 上的纯态具有如下形式： $f \mapsto f(t)$， $t \in (0, 1)$。根据命题 2.5 和 2.6 f， $f \in A$ 是孤立点当且仅当 f 是近似右可逆的；而根据命题 2.2，这等价于对所有纯态 ρ都有$\rho(ff) > 0$，即对于所有 $t \in (0, 1)$， $f(t) \neq 0$。

例 2.2. 设 $A = K(H)$ 是某个希尔伯特空间 H 上所有紧算子的代数。那么， $T \in A$ 是正交图 $\Gamma(K(H))$ 的一个孤立点，当且仅当 T 的值域稠密。事实上， $K(H)$ 上的所有纯态均由 $T \mapsto \langle Tx, x\rangle$ 给出。与前一个例子一样， T 不是孤立点，当且仅当 $\langle TT^*x, x\rangle > 0$，这等价于 T^* 是单射，即 T 的值域稠密。

3. 非交换拓扑

本节总结 Akemann 的四篇经典论文 [1], [2],[3] 和 [4] 中的结果，这些结果是后续论述所必需的。

设 A 是一个 C^* 代数，并设 π 表示它在某个希尔伯特空间 H 上的普适表示。众所周知， $\pi(A)$ 的双交换子记作 $\pi(A)''$，下文将其简记为 A''，作为巴拿赫空间可与 A 的二次对偶 A^{**} 等同。此等同使得 A^{**} 具有冯·诺依曼代数

结构。这个二次对偶，或普适表示中的双交换子，通常称为 包络代数。下文中，我们将用 A'' 表示包络代数。

虽然 A 不一定含有任何投影（例如 $A = C_0(0,1)$），但其包络代数是冯·诺依曼代数，因此拥有大量投影。在所有投影中，我们区分开投影和闭投影。

定义 3.1. 设 $p \in A''$ 是一个投影。

a）若 p 是某个来自 A 的正元素递增网 a_α 的上确界，则称其为开投影；

b）若 $1 - p$ 是开投影，则称 p 为闭投影。

c）若 p 是闭投影，且存在某个 $a \in A$、 $a \geq 0$ 使得 $ap = p$，则称其为紧投影。（当然，这只对非含单位元的 A 有意义，否则我们可以取 $a = 1_A$。）

注记 3.1。注意这与连续函数的类比。具体而言， E 是开集，当且仅当 χ_E 是正连续函数的上确界； E 是紧的，当且仅当它被某个在无穷远处消失的连续函数控制，等等。

注记 3.2。还要注意，某个正 $a \in A$ 的谱投影在相应区间为开区间（分别为闭区间）时，是开（分别为闭）的。特别地， a 的核上的投影（对应于 $\{0\}$）是闭的。

我们的主要工具是下面的非交换乌雷松引理。

定理 3.1。设 p、 $q \in A''$ 为投影，满足 p 是紧的， q 是闭的，并且$pq = 0$。则存在 $a \in A$，使得 $0 \leq a \leq 1$、 $ap = p$ 以及 $aq = 0$。

证明。这是 [4, 引理 III.1]。 □

除该定理外，我们还需要一些技术性结果。

引理 3.2。设 p 和 $q \in A''$ 为闭投影。若 $\|p(q - p \wedge q)\| < 1$，则$p \vee q$ 也为闭投影。

证明。这是 [2, 定理 II.7]。 □

回顾一下，在某个冯·诺依曼代数 A 中，投影 p 称为极小，若$pAp = \mathbb{C}p$；在这种情况下，这等价于：若 $q \leq p$，则 $q = 0$ 或$q = p$。包络代数 A'' 有许多极小投影。每个极小投影都是闭的，见 [2, 命题 II.4]，另见 [1, 推论 2]。

引理 3.3。 A 上的纯态与 A'' 中的极小投影之间存在双射对应，使得若极小 $p \in A''$ 对应于纯态 φ，则

$$pap = \varphi(a)p \tag{3.1}$$

证明。设 φ 是 A上的纯态。它可以唯一地延拓为 A''上的正规态。由于 A'' 总是含单位元的，在整个证明过程中，$\mathbf{1}$ 始终表示 A''中的单位元。

根据 [10, 定理 3.13.6]，存在一个极小投影 p，使得 $\varphi(1 - p) = 0$。后者意味着，对于所有 $a \in A$， $\varphi(a(1 - p)) = \varphi((1 - p)a) = 0$。由 p 的极小性可知，对于适当的 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $pap = \lambda p$。然而， $\varphi(a) = \varphi(pap) = \varphi(\lambda p) = \lambda$，因此得到 (3.1)。

设 $p \in A''$ 为极小。则对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $pap = \lambda p$。定义 $\varphi(a) := \lambda$，即 (3.1) 是给定 p 时 φ 的定义。容易验证，φ 是线性的、正的且范数为一，因此是一个态。此外，$\varphi(1-p) = 0$。若存在另一个正线性$\psi \leq \varphi$，则同样有 $\psi(1-p) = 0$，从而 $\psi(a) = \psi(pap) = \psi(\varphi(a)p) = \varphi(a)\psi(p)$，这意味着 $\psi = c\varphi$。（这里，我们将 φ、ψ 与它们到 A'' 的正规延拓等同。）□

注 3.3。前一个引理的证明也可以通过 [10]，中的若干命题来追踪，例如 3.6.11、3.10.7、3.11.10 和 3.13.6。为方便读者，下面给出另一种完整的证明。

引理 3.4。设 A 是一个 C^*-代数，A'' 是其包络代数，且 $p \in A''$ 是一个极小投影。那么 p 是紧的。

证明。每个极小的 $p \in A''$ 都是闭的，正如前面所提到的。此外，根据引理 3.3，A 上存在唯一的纯态 φ_p，使得 $\varphi_p(p) = 1$，并且对每个 $a \in A$，都有 $pap = \varphi_p(a)p$。根据 Kadison 传递定理，存在一个正的 $a \in A$，使得 $\|a\| = 1$ 且 $\varphi_p(a) = 1$。因此，$pap = p$。根据 C^*-恒等式

$$\|(1-a)^{\frac{1}{2}}p\|^2 = \|p(1-a)p\| = \|p - pap\| = 0,$$

我们得到 $(1-a)^{\frac{1}{2}}p = 0$，因此 $(1-a)p = 0$。由此我们证明了 $ap = p$，根据定义，这确保了 p 是紧的。

（正如我们之前提到的，1 是 A''中的单位元。）□

引理 3.5。设 a 是 C^*-代数 A $(a \neq 0)$的一个正元素。那么，存在一个极小投影 $p \in A''$ 使得

$$ap = p \qquad and \qquad p \leq a/\|a\|.$$

证明。假设 $\|a\| = 1$，否则将 a 除以 $\|a\|$。存在一个纯态 φ，使其在 a上取到其范数。令 $p \in A''$ 为与φ对应的极小投影，即对于所有 $b \in A$，有 $\varphi(p) = 1$，$pbp = \varphi(b)p$。于是，如同前面的证明，我们可以得出 $ap = p$，并且

$$a - p = a - pap = p(1_{A''} - a)p \geq 0.$$

□

引理 3.6。设 $p, q \in A''$ 为极小投影。那么 $p \vee q$ 是闭的。此外，如果 r 是满足 $pr = qr = 0$的投影，那么$(p \vee q)r = 0$ 也成立。

证明。若 $p = q$，则该结论显然成立。否则，$p \wedge q = 0$，因为若非如此，则 $p \wedge q$会是一个小于某个极小投影的非平凡投影。

再次，我们将 A 上的纯态与其到包络代数 A''的正规延拓相对应。

设 φ_p 是与 p相关联的（唯一）纯态，即满足 $\varphi_p(p) = 1$ 且$pap = \varphi_p(a)p$。我们断言 $\varphi_p(q) < 1$。假设并非如此，即 $\varphi_p(q) = 1$。那么 $pqp = p$，也就是说 $0 = p(1-q)p = ((1-q)p)^*(1-q)p$，由 C^*-恒等式可推出 $(1-q)p = 0$。因此$qp = p$，这意味着 $q \geq p$，由于 q的极小性，这是不可能的，除非$q = p$。

因此，$\varphi_p(q) < 1$，从而

$$\|qp\|^2 = \|pqp\| = \|\varphi_p(q)p\| < 1.$$

因此，$\|p(q - p \wedge q)\| = \|pq\| < 1$，这意味着根据引理 3.2，$p \vee q$ 是闭的。

对于第二部分，注意到 $pr = 0$ 等价于 $p \leq 1 - r$，且 $qr = 0$等价于 $q \leq 1 - r$。由此可得 $\sup\{p, q\} = p \vee q \leq 1 - r$，即 $(p \vee q)r = 0$。□

4. 正交图的直径

本节讨论正交图 $\Gamma(A)$的直径。

回顾一下，路径是由顶点构成的有限序列，其中每对相邻项都由边连接；路径的长度是边的数量。此外，同一连通分支中两个顶点之间的距离，是连接这两个顶点的路径的最小长度。最后，图（以及它的连通分支）的直径，是任意两个顶点之间距离的最大值。

在 [6] 中，针对多种具体的 C^*-代数讨论了这个问题，具体包括全矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$、 $n \geq 2$、 $B(H)$（某个无限维希尔伯特空间 H 上所有有界算子构成的代数），以及交换代数$C(K)$，其中 K 为紧豪斯多夫空间。

[6] 中给出的答案如下：

1) 代数 $M_2(\mathbb{C})$ 有些特殊。所有非平凡连通分支都恰好由两个元素组成；更具体地说，这两个元素是值域互相正交的秩一线性算子。因此，所有连通分支的直径都等于 1。

2) 在其他所有讨论过的例子中，只有一个非平凡连通分支，且其直径有限；事实上，至多为 4。对于 $M_3(\mathbb{C})$，直径恰好为 4；对于所有 $M_n(\mathbb{C})$、 $n \geq 4$ 和 $B(H)$，直径均为 3；而对于 $C(K)$，若 K 中至少有一个点具有可数局部基，则直径为 3；若没有点具有可数局部基，则直径为 2。

我们将在定理 4.5 中陈述的结果排除了三个较小的代数： $\mathbb{C} \cong M_1(\mathbb{C})$、$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cong M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ 和 $M_2(\mathbb{C})$，它们都是含单位元的。由于这些代数结构简单，我们可以轻松描述它们的正交图。

命题 4.1. 代数 M_1 没有非平凡的不可逆元，且其射影空间是一个单点集。因此，其正交图 $\Gamma(M_1)$ 只有一个顶点，没有边。

代数 $M_1 \oplus M_1$ 中，除相差一个标量倍外，有两个非平凡的不可逆元：$(1,0)$ 和 $(0,1)$。它们彼此 BJ-正交。因此，除孤立点外，其正交图 $\Gamma(M_1 \oplus M_1)$还有两个顶点，以及一条连接它们的边。

在代数 M_2 中，所有不可逆元都属于其正交图中某个恰有两个成员的连通分支。

证明。 第一个和第二个断言显然，而代数 M_2 已在 [6, 命题 2.4] 中考察。□

引理 4.2. 设 $p, q \in A''$ 是两个不同的极小投影。那么 $q' = p \vee q - p$也是极小的。

证明。如引理 3.6 所示， $p \wedge q = 0$。根据著名的卡普兰斯基公式，我们有 $q' = p \vee q - p \sim q - p \wedge q = q$。因此，存在一个偏等距 v，使得 $q = v^*v$且 $q' = vv^*$。此外，由于 $v = vv^*v$，我们有 $q' = vv^*vv^* = vqv^*$，因此

$$q'A''q' = vqv^*A''vqv^* \subseteq vqA''qv^* = v(\mathbb{C}q)v^* = \mathbb{C}q'.$$

因此，按定义， q' 是极小的。 □

命题 4.3. 设 A 是一个不与 M_1、$M_1 \oplus M_1$ 或 M_2 同构的 C^*-代数，并设 p、$q \in A''$ 是两个极小投影。那么，存在另一个极小投影 $r \in A''$，使得 $pr = qr = 0$。

证明。记作 $s = p \vee q$。由引理 3.6，s 是闭的。

首先，假设 $s \neq 1 = 1_{A''}$。那么 $1 - s$ 是非平凡开投影，因此存在 A 中的一个正元素网，其上确界为 $1 - s$。特别地，存在一个非平凡正元素 $a \in A$，使得 $a \leq 1 - s$。由引理 3.5，存在一个极小的 $r \leq a \leq 1 - s$。因此 $sr = 0$。

剩下要证明的是，若 $s = 1$，那么 A 必与所提到的三个小代数之一同构。因此，假设 $s = 1$；那么 $sAs = A$。由引理 4.2，$s = p + q'$，其中 $pq' = 0$，且 p 和 q' 均为极小的。对于每个 $a \in A$，我们有

$$a = pap + q'ap + paq' + q'aq'. \tag{4.1}$$

我们将证明，这四个加项都是某些固定元素的标量倍。设 φ_p 和 $\varphi_{q'}$ 为相应的纯态。于是 $pap = \varphi_p(a)p$ 且 $q'aq' = \varphi_{q'}(a)q'$。剩下需要考察 $q'ap$ 和 paq'。在 A'' 中，我们有极分解$q'ap = v|q'ap|$，其中偏等距 v适当选取。然而，$|q'ap|^2 = paq'ap \in pA''p \cong \mathbb{C}p$，因此 $|q'ap| \in \mathbb{C}p$。于是，对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $|q'ap| = \lambda p$，且 $q'ap = \lambda vp$。记 vp 为 w。容易验证 $w^*w = p$ 和 $ww^* = q'$。我们证明w 在模为一的倍数意义下唯一。事实上，假设 u 是另一个满足 $u^*u = p$ 和 $uu^* = q'$的元素，并考察 u^*w。由于 $wp = up = p$，我们有$u^*w \in pA''p$，因此对某个模为一的 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $u^*w = \lambda p$。因此，任意两个连接 p 和 q 的偏等距互为标量倍。因此，无论 a为何，$q'ap = \lambda vp = \lambda w$ 都是某个固定元素的标量倍。

因此，分解（4.1）给出了从 A 到 $M_2(\mathbb{C})$ 的单同态。若对于某个 $a \in A$，四个项都非平凡，则它是同构。在这种情况下，$A \cong M_2$。然而，若对于所有 $a \in A$，$q'ap = paq' = 0$，则 A 同构于所有对角 2×2 矩阵的集合，即同构于 $M_1 \oplus M_1$。最后，若 A 中不存在两个不同的极小投影，则 $A \cong M_1$。□

引理 4.4. 设 a、$b \in A$ 是范数为一的正元素，并且存在一个投影 p（不一定是极小投影），使得 $pa = p$ 且 $pb = 0$。那么 $b \perp^S a$。此外，若存在另一个投影 q，使得 $qa = 0$、$qb = q$，则 $a \perp\!\!\!\perp^S b$。

注记 4.1。根据引理 1.1，前一个引理对 $p \in A$ 和 $p \in A''$ 均成立。

证明。对于任意 $c \in A$，我们有

$$\|a + bc\| \geq \|p(a + bc)\| = \|pa\| = \|p\| = 1 = \|a\|.$$

第二部分直接由第一部分得出。□

定理 4.5。设 A 是一个不与 M_1、$M_1 \oplus M_1$ 或 M_2 同构的 C^*-代数。那么，所有非近似可逆元素构成其正交图中的一个连通分支。此外，该连通分支的直径不超过 4。

证明。设 a、$b \in A$ 是不可近似可逆的元素。不失一般性，假设 $a, b \geq 0$（引理 1.2）且 $\|a\| = \|b\| = 1$。由命题 2.2，存在分别湮灭 a^2、b^2 的纯态 φ_a、φ_b。将它们的支撑投影分别记为 q_a 和 q_b。

此外，令 p'_a、p'_b 表示 a、b 对应于闭集 $\{1\}$ 的谱投影。所有 p'_a、p'_b、q_a、q_b 都是闭的，而且 q 均为极小。此外，$p'_a q_a = 0$、$p'_b q_b = 0$。

我们可以将 p'_a 和 p'_b 缩小，并且得到具有相同性质的极小投影 p_a, p_b：$p_a a = p_a, p_b b = p_b$ 和 $p_a q_a = p_b q_b = 0$。事实上，存在一个纯态，例如 ψ，它在 a上达到其范数，即 $\psi(a) = 1$。设 p_a 为对应于 ψ的极小投影。我们有 $p_a a p_a = p_a$，这意味着 $p_a \leq a$（见引理 3.5 的证明）。

根据命题 4.3，存在另一个极小投影 r，使得 $q_a r = q_b r = 0$。显然，在 A'' 中我们有

$$p_a \perp\!\!\!\perp^S q_a \perp\!\!\!\perp^S r \perp\!\!\!\perp^S q_b \perp\!\!\!\perp^S p_b.$$

然而，这个关系是 A'' 中的固有关系，应当加以平滑处理，使其回到 A中。

我们利用乌雷松引理的非交换版本——引理 3.1——构造元素 c_1, c_2 和 $c_3 \in A$。由构造可知，q_a 是紧的，而根据引理 3.6，$p_a \vee r$ 是闭的，因此存在 $c_1 \in A$，使得 $c_1 q_a = q_a$ 且 $c_1(p_a \vee r) = 0$，即 $c_1 p_a = c_1 r = 0$。类似地，我们可以构造 c_2，使得 $c_2 r = r, c_2 q_a = c_2 q_b = 0$ 和 c_3，且满足 $c_3 q_b = q_b, c_3 r = c_3 p_b = 0$。

由引理 4.4 可得

$$a \perp\!\!\!\perp^S c_1 \perp\!\!\!\perp^S c_2 \perp\!\!\!\perp^S c_3 \perp\!\!\!\perp^S b.$$

□

5. C^*-代数直和的直径估计

设 A 是一个 C^*-代数。用 $PS(A)$ 表示 A 上所有纯态构成的空间。对于 C^*-代数 A 和 B 上的两个态 $\rho: A \to \mathbb{C}$ 和 $\tau: B \to \mathbb{C}$，我们定义映射 $\rho \oplus \tau: A \oplus B \to \mathbb{C}$ 如下：

$$(\rho \oplus \tau)(a \oplus b) = \rho(a) + \tau(b).$$

容易证明，若 ρ 和 τ 是态（分别定义在 A 和 B 上），则 $\rho \oplus 0$ 和 $0 \oplus \tau$（定义在 $A \oplus B$ 上）也具有相同性质。

引理 5.1. 设 A 和 B 是 C^*-代数，且设 $C = A \oplus B$。则

$$PS(C) = (PS(A) \oplus 0) \cup (0 \oplus PS(B)).$$

证明。首先，我们证明若 ρ 是 A 上的纯态，则 $\rho \oplus 0$ 是 C 上的纯态。假设对于某个 $\lambda \in \in (0, 1)$ 以及 C 上的某些态 φ、ψ，有 $\rho \oplus 0 = \lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$。定义 $\varphi_1: A \to \mathbb{C}$ 和 $\psi_1: A \to \mathbb{C}$，使得 $\varphi_1(a) = \varphi(a \oplus 0)$ 且 $\psi_1(a) = \psi(a \oplus 0)$。类似地，定义 $\varphi_2: B \to \mathbb{C}$ 和 $\psi_2: B \to \mathbb{C}$，使得 $\varphi_2(b) = \varphi(0 \oplus b)$ 且 $\psi_2(b) = \psi(0 \oplus b)$。所有这些映射都是正线性泛函，并且有

$$\rho = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\psi_1 \quad \text{and} \quad 0 = \lambda\varphi_2 + (1-\lambda)\psi_2.$$

显然，$\varphi_2 = \psi_2 = 0$，因此 $\|\varphi_1\| = \|\psi_1\| = 1$。所以 φ_1 和 ψ_1 是态。由于 ρ 是纯态，我们有 $\varphi_1 = \psi_1 = \rho$。

类似地，我们得出：若 τ是 B上的纯态，则 $0 \oplus \tau$是 C 上的纯态。

现在设 ρ 是 C 上的一个纯态。定义 $\rho_1: A \to \mathbb{C}$ 和 $\rho_2: B \to \mathbb{C}$，使得 $\rho_1(a) = \rho(a \oplus 0)$ 且 $\rho_2(b) = \rho(0 \oplus b)$。设

$$\|\rho_1 \oplus 0\| \neq 0, \qquad \|0 \oplus \rho_2\| \neq 0. \tag{5.1}$$

那么我们可以写成

$$\rho = \|\rho_1 \oplus 0\| \left(\frac{1}{\|\rho_1 \oplus 0\|}(\rho_1 \oplus 0) \right) + \|0 \oplus \rho_2\| \left(\frac{1}{\|0 \oplus \rho_2\|}(0 \oplus \rho_2) \right).$$

注意，方括号中的泛函范数为一，因此是态。此外，由$1 = \|\rho\|$和 $\rho(a \oplus b) = \rho($ $a \oplus 0) + \rho(0 \oplus b) = \rho_1(a) + \rho_2(b)$，可知 $\|\rho_1 \oplus 0\| + \|0 \oplus \rho_2\| = 1$。因此，根据纯态的定义， $\|\rho_1 \oplus 0\|$和 $\|0 \oplus \rho_2\|$中恰有一个等于零，这与（5.1）矛盾。于是，要么 $\|\rho_1 \oplus 0\| = 0$，从而 $\rho = 0 \oplus \rho_2$；要么 $\|0 \oplus \rho_2\| = 0$，因此 $\rho = \rho_1 \oplus 0$。□

引理5.2. 若 $a_1 \perp\!\!\!\perp^S a_2$ 且 $b_1 \perp\!\!\!\perp^S b_2$，则 $(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2)$。特别地

$$(a, 0) \perp\!\!\!\perp^S (0, b) \tag{5.2}$$

只要 a、 $b \neq 0$, 就成立。

证明. 令 c、 $d \in A$。则

$$\begin{aligned} \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)(c, d)\| &= \|(a_1 + a_2 c, b_1 + b_2 d)\| \\ &= \max\{\|a_1 + a_2 c\|, \|b_1 + b_2 d\|\} \\ &\geq \max\{\|a_1\|, \|b_1\|\} = \|(a_1, b_1)\|, \end{aligned}$$

因为对于每个 c、 $d \in A$，都有 $\|a_1 + a_2 c\| \geq \|a_1\|$且 $\|b_1 + b_2 d\| \geq \|b_1\|$。因此，我们证明了 $(a_1, b_1) \perp^S (a_2, b_2)$，另一个方向的证明类似。

为证明 (5.2)，注意到对于任意 a， $a \perp\!\!\!\perp^S 0$。（通常，正交图中不包含 0，否则所有元素都会彼此相连。然而，对于 a、 $b \neq 0$，数对 $(a,0)$、$(0, b) \neq 0$。）□

注记 5.1。注意，若 $(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2)$，则它未必是 $a_1 \perp\!\!\!\perp^S a_2$ 或$b_1 \perp\!\!\!\perp^S b_2$。事实上，令 I 和 P 分别为 $M_2(\mathbb{C})$ 中的单位矩阵和秩一投影。那么 $(I, P) \perp\!\!\!\perp^S (P, I)$，但 $I \perp\!\!\!\perp^S P$并不成立，因为 $I \perp^S P$和$P \not\perp^S I$。

引理5.3。设 A 和 B 是（非平凡的） C^*-代数，且令 $C = A \oplus B$。那么

(1) $A \oplus B$ 是含单位元的，当且仅当 A 和 B 都是含单位元的。(2) 设 A 和 B 含单位元。(a, b) 在 $A \oplus B$ 中不是右可逆的，当且仅当 a、 b中至少有一个在 A、 B 中相应地不是右可逆的。(3) (a, b) 在 $A \oplus B$ 中不是近似右可逆的，当且仅当 a、 b中至少有一个在 A、 B 中相应地不是近似右可逆的。

证明。(1) 和 (2) 是显然的，因此我们只对 (3) 给出证明。

如果 (a, b) 不是近似右可逆的，那么根据命题 2.2，存在纯态 ρ，使得 $\rho((a, b)(a, b)$ $^*) = 0$。根据前一个引理中对纯态的刻画，在 A 上存在一个纯态 ρ_1，或者在 B 上存在一个纯态 ρ_2，使得 $(\rho_1 \oplus 0)((a, b)(a, b)^*) = 0$ 或 $(0 \oplus \rho_2)((a, b)(a, b)^*) = 0$。因此，$\rho_1(aa^*) = 0$ 或 $\rho_2(bb^*) = 0$，于是根据命题 2.2， a 和 b 中至少有一个不是近似右可逆的。

反过来，假设 a 不是近似右可逆的。那么存在 A 上的一个纯态 ρ_1，使得 $\rho_1($ $aa^*) = 0$。但是 $(\rho_1 \oplus 0)((a, b)(a, b)^*) = (\rho_1 \oplus 0)((aa^*, bb^*)) = 0$。然而 $\rho_1 \oplus 0$ 是纯态；因此 (a, b) 不是近似右可逆的。□

命题 5.4。 设 A 和 B 是（非平凡的） C^*-代数，且不同构于$M_2(\mathbb{C})$，并设 $C = A \oplus B$。那么， C 的正交图中只有一个非平凡连通分支，且其直径 $\mathrm{diam}(C)$ 满足

$$\mathrm{diam}(C) \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B), 3\}.$$

证明。设（a_1， b_1）、（a_2， b_2） $\in C$为非孤立点，因此不是近似右可逆的。于是， a_1、 b_1 中至少有一个不是近似右可逆的， a_2、 b_2中也至少有一个不是近似右可逆的。下面考虑以下可能性:

1. 设 a_1、 b_2 不是近似右可逆的。假设 $a_1 \neq 0$、 $b_2 \neq 0$。那么， a_1、 b_2 分别是 A、 B 中的非孤立点。因此，存在 $a' \in A$和 $b' \in B$ ，使得 $a_1 \perp\!\!\!\perp^S a'$ 和 $b' \perp\!\!\!\perp^S b_2$。于是我们得到以下长度为 3 的路径:

$$(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (a', 0) \perp\!\!\!\perp^S (0, b') \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2). \tag{5.3}$$

注意，如果 a_1、 b_2 中的一个或两个等于 0，并不会损失一般性，即同一路径（5.3）仍然成立（对于任意的 a' 和/或 b'），甚至当 $a_1 = 0$、 $b_2 = 0$时，还可以将其缩短为（0， b_1） $\perp\!\!\!\perp^S$（a_2, 0）。

2. 设 b_1 和 b_2 均非近似右可逆，并假设 $0 \neq b_1 \neq b_2 \neq 0$。由于 B 与 $M_2(\mathbb{C})$ 不同构，它只有一个非平凡连通分支。因此，在 B 中存在一条长度为 $k \leq \mathrm{diam}(B)$ 的路径:

$$b_1 \perp\!\!\!\perp^S b^{(1)} \perp\!\!\!\perp^S \cdots \perp\!\!\!\perp^S b^{(k-1)} \perp\!\!\!\perp^S b_2.$$

于是 $A \oplus B$ 中存在一条路径

$$(a_1, b_1) \perp\!\!\!\perp^S (0, b^{(1)}) \perp\!\!\!\perp^S \cdots \perp\!\!\!\perp^S (0, b^{(k-1)}) \perp\!\!\!\perp^S (a_2, b_2).$$

它连接 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2)，长度同样为 k。

若 $b_1 = b_2$ 或 $b_1 = 0$ 或 $b_2 = 0$ 成立，或它们全部成立，则 b_1 和 b_2 可由长度为 2 或 1 的路径连接。若 $b_1 = b_2$，则对于某些 $b' \in B$、$b' \perp\!\!\!\perp^S b_1$，有 $b_1 \perp\!\!\!\perp^S b' \perp\!\!\!\perp^S b_2 = b_1$，无论 $b_1 = 0$ 是否成立。若 $b_1 = 0$，则 $b_1 = 0 \perp\!\!\!\perp^S b_2$，对于$b_2 = 0$ 也同理。

3. 类似地考虑 a_1、 a_2 在 A 中不是近似可逆的可能性。□

备注 5.2。 注意，即使其中一个直和项是 $M_1 \equiv \mathbb{C}$，前面的证明仍然成立。事实上，如果 $C = A \oplus M_1$，那么 b 可以是 0 或可逆元，证明完全不受影响。

推论 5.5。 设 $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$ 为有限维C^*-代数，且对所有 $1 \leq j \leq m$ 都有 $n_j \neq 2, 3$ 。则其正交图的直径至多为3。

证明。 事实上，根据 [6, 命题 2.7] ，所有直和项 $M_{n_j}(\mathbb{C})$ 的直径都不超过 3。由前面的命题即可得到结论。□

6. 问题

在本文末尾，我们提出两个有待未来研究的问题。

1. 确定任意有限维 C^*代数的正交图的精确直径。这个问题的一个具体难点是无法从 $A \oplus B$ 将其约化为各个直和项——见注释 5.1。

2. 用其他术语重新表述命题 4.3 的结论将会很有意思。更确切地说，以下条件是否彼此等价?

(1) 对任意 $p, q \in A''$ 极小，存在极小的 r 使得， $pr = qr = 0$，即命题 4.3 的结论；(2) A 中的任意两个极大模左理想都有非空交集；(3) A 的正交维数至少为 3。（这里，正交维数是指某个投影族 $\{p_i\}_{i\in I}$ 的最大基数，使得对于 $i \neq j$， $p_i p_j = 0$ ）；(4) 对于 A 上的任意两个纯态，都存在另一个与它们 BJ-正交的纯态。

注记 6.1。同样，若能用更具体的方式，借助不可约表示来重新表述前述条件，将会很有意思。

可以给出如下部分答案:

命题 6.1。 我们有 *(2)* 蕴含 *(4)*，且 *(2)* 等价于 *(1)*。

证明。 (2) $\Rightarrow$ (4)。

设 φ 和 ψ 是 A上的纯态，并设 N_φ 和 N_ψ 是它们的左理想，定义为

$$N_\varphi = \{a \in A \mid \varphi(ab) = 0, \text{ for all } b \in A\},$$

对于 N_ψ，也同理。由 (2)，交集 $C = N_\varphi \cap N_\psi$ 非空。 C 是理想，因此也是代数。取某些 $c > 0, c \in C$。存在 C上的一个纯态 τ ，使得 $\tau(c) = 1$。

只需证明 τ 可以扩张到整个 A。（我们可以假设 A有单位元。）由哈恩-巴拿赫定理， τ 存在一个范数为 1 的正扩张。这样的扩张是一个态，并且可以用标准方法证明它也是一个纯态。具体而言，所有这些扩张构成的集合 E 在 A上所有态的集合中是闭的（因此是紧的）且凸的。由克莱因-米尔曼定理， E中存在一个极端点，记为 τ'。假设 τ'不是 A上的纯态。这意味着τ'不是 A上所有态（而不仅仅是扩张 τ的态）集合中的极端点。因此，对某些其他态 σ_1, σ_2，有 $\tau' = \theta\sigma_1 + (1-\theta)\sigma_2$ ，并且

$$\tau = \tau'|_C = \theta\sigma_1|_C + (1-\theta)\sigma_2|_C.$$

态 τ在 C上是纯态，因此 $\sigma_1|C = \sigma_2|_C = \tau$，进而 $\sigma_1, \sigma_2 \in E$。最后， τ'是 E中的极端点，因此 $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau$。

(2) $\Leftrightarrow$ (1)。

由引理 3.3可知，对于 $p, q \in A''$ 这两个极小投影，存在纯态 φ_p 和 φ_q ，使得对每个 $a \in A$，都有 $\varphi_p(p) = \varphi_q(q) = 1$ ，且 $pap = \varphi_p(a)p$ ，以及 $qaq = \varphi_q(a)q$ 。注意， $pr = qr = 0$ 等价于 $prp = qrq = 0$，因此必有 $\varphi_p(r) = \varphi_q(r) = 0$。于是， $pr = qr = 0$ 等价于$r \in Ker(\varphi_p) \cap Ker(\varphi_q)$。□

参考文献

[1] C. A. Akemann。 W^*-代数对偶中的序列收敛。《数学物理通讯》，7(3)：222–224，1968。[2] C. A. Akemann。一般 Stone-Weierstrass 问题。《泛函分析杂志》，4(2)：277–294，1969。[3] C. A. Akemann。 C^*-代数的左理想结构。《泛函分析杂志》，6(2)：305–317，1970。[4] C. A. Akemann。 C^*-代数的 Gelfand 表示理论。《太平洋数学杂志》，39(1)：1–11，1971。[5] L. Arambašić、A. Guterman、B. Kuzma 和 S. Zhilina。Birkhoff–James 正交性：刻画、保持映射与正交图。载于 R. M. Aron、M. S. Moslehian、I. M. Spitkovsky 和 H. J. Woerdeman（编），算子与范数不等式及相关主题，第255–302页。施普林格国际出版，查姆，2022。

[6] L. Arambašić、A. Guterman、B. Kuzma、R. Rajić 和 S. Zhilina。 C^*-代数中与相互强 Birkhoff-James 正交性相关的正交图。$Banach\ J\ Math.\ Ann.$，14(4)：1751–1772，2020。[7] L. Arambašić 和 R. Rajić。Hilbert C^*-模上的强 Birkhoff–James 正交性。$Ann.\ Funct.\ Anal.$，5(1)：109–120，2014。[8] K. Esmeral、H. G. Feichtinger、O. Hutník 和 E. A. Maximenko。非幺范数代数中的近似可逆元，2021。[9] G. J. Murphy。 C^*-代数与算子理论。学术出版社，圣迭戈，1990。[10] G. K. Pedersen。 C^*-代数及其自同构群。纯粹与应用数学。爱思唯尔、学术出版社，伦敦、圣迭戈等，2018。

贝尔格莱德大学，数学学院，学生广场 16-18号，11000 贝尔格莱德，塞尔维亚电子邮箱地址: keckic@matf.bg.ac.rs

贝尔格莱德大学，数学学院，学生广场 16-18号，11000 贝尔格莱德，塞尔维亚电子邮箱地址: srdjan.stefanovic@matf.bg.ac.rs