arXiv:2301.12572v1 [math.RA] 29 Jan 2023

关于具有无限基性质的李代数簇

VESSELIN S. DRENSKY

Abstract. 在任意正特征域上，我们构造了一个局部有限的李代数簇实例，该簇的多项式恒等式没有有限基。作为推论，我们构造了具有预定性质的李代数簇。

我们将使用 [1] 和 [2]中的记号。特别地，所有乘积均按左结合方式书写：$xyz = (xy)z$和$xy^n = x\,y\cdots y$。在 [1]和 [2]中，M. R. Vaughan-Lee 和$\overbrace{\quad\quad}^{n}$作者构造了正特征域上具有无限基的李代数簇实例。Yu. G. Kleiman 也构造了一个类似的实例（未发表）。关于这一点，Yu. A. Bahturin 提出了这样一个问题：是否存在局部有限且具有无限基的代数簇。就在最近，I. B. Volichenko [3] 在特征 2 的域情形下构造了这样的实例。利用 [1] 和 [2] 中的思想，我们给出了任意正特征域情形下的答案。

定理 1. 设 K 是一个正特征域 p。那么，由恒等式定义的 K 上的李代数簇

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{2p-1}x_{2p})x_{2p+1} = 0, \tag{1}$$

$$((x_1x_2)(x_3x_4))((x_5x_6)(x_7x_8)) = 0, \tag{2}$$

$$x_1x_2^{p^2+2} = 0, \tag{3}$$

$$(x_1x_2\cdots x_{k+2})(x_1x_2)^{p-1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

是局部有限且无限基的。

我们将分几个步骤证明该定理。我们将遵循[2, §2]中的论述。

1. 设 T_n 是集合 $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ 的所有子集构成的集合，并设 A_n 是一个以 K为基的代数

$$\{a_{\sigma s}^{(1)}, a_{\tau s}^{(k)}, b_s \mid \sigma, \tau \in T_n, |\tau| \text{ is odd}, k = 2, 3, \ldots, p-1, s = 0, 1, \ldots, p\}.$$

对于所有 $\tau \in T_n$，其中 $|\tau|$ 为奇数，我们规定：若 $|\tau| = 2n-1$，则 $a_{\tau s}^{(p)} = b_s$；若 $|\tau| < 2n-1$，则 $a_{\tau s}^{(p)} = 0$。我们按如下方式定义 A_n 中的乘法：

发表于 Vesselin S. Drensky，《无限基李代数簇》（俄文），Serdica 9（1983），第 1 期，79–82 页。Zbl 0525.17006，MR0725813。在线版本：http://www.math.bas.bg/serdica/1983/1983-079-082.pdf。

$$a_{\sigma s}^{(k)}a_{\tau t}^{(l)}=(-1)^{|\sigma|}a_{\pi s+t}^{(k+l)},$$

其中 $\pi=\sigma\cup\tau$，若 $k+l\le p, s+t\le p, \sigma\cap\tau=\varnothing, |\sigma|+|\tau|\equiv 1$（模 2），

$$a_{\sigma s}^{(k)}a_{\tau t}^{(l)}=0 \text{ in all other cases.}$$

考虑由以下等式定义的 A_n 的线性变换集合

$$\{g_{\lambda s}, h_{\mu s} \mid \lambda,\mu\in T_n, |\lambda| \text{ is odd}, |\mu| \text{ is even }, s=0,1,\dots,p\}, \tag{5}$$

由以下等式定义：

$a_{\sigma s}^{(k)}g_{\lambda t}=a_{\pi s+t}^{(k)}$，其中 $\pi=\sigma\cup\lambda$，若 $s+t\le p, \sigma\cap\lambda=\varnothing, |\sigma|$ 为奇数，

$a_{\sigma s}^{(k)}h_{\mu t}=ka_{\pi s+t}^{(k)}$，其中 $\pi=\sigma\cup\mu$，若 $s+t\le p, \sigma\cap\lambda=\varnothing$，

$a_{\sigma s}^{(k)}g_{\lambda t}=a_{\sigma s}^{(k)}h_{\mu t}=0$ 在所有其他情况下。

如 [2] 中所示，我们可以证明代数 A_n 是簇 $\mathfrak{A}^2\cap\mathfrak{N}_p$ 中的李代数，且变换 (5) 是代数 A_n 的导子，它们两两可交换。记 B_n 为代数 A_n 与由变换 (5) 生成的导子阿贝尔代数 D_n 的分裂扩张。根据 [2]，容易证明 B_n 满足恒等式 (1) 和 (2)。

2. 记 C_n 为由集合生成的 B_n 的子代数

$$\{a_{\sigma 0}^{(1)}, g_{\lambda 0}, h_{\sigma 1}, h_{\mu 0} \mid \sigma=\varnothing, \lambda=\{1\}, \mu=\{2,3\},\{4,5\},\dots,\{2n-2,2n-1\}\}.$$

代数 C_n 作为 K-向量空间有一组基

$$\begin{aligned}\{a_{\sigma s}^{(k)}, g_{\lambda 0}, h_{\mu 0}, h_{\nu 1} \mid \sigma\in T_n \text{ with } a_{\sigma s}^{(k)}\in C_n, k=1,2,\dots,p, s=0,1,\dots,p,\\ \lambda=\{1\}, \mu=\{2,3\},\{4,5\},\dots,\{2n-2,2n-1\}, \nu=\varnothing\}.\end{aligned} \tag{6}$$

我们将证明 C_n 是幂零类为 $2p+n$ 的幂零代数，并满足恒等式 (3)：

在由 (6) 中元素构成的任意非零乘积 $l_1l_2\cdots l_m$ 中，元素 $a_{\sigma s}^{(k)}$ 至多出现 p 次，元素 $h_{\nu 1}$ 至多出现 p 次，而每个元素 $g_{\lambda 0}$、$h_{\mu 0}$ 至多出现一次。因此 $m\le 2p+n$ 且 $C_n\in\mathfrak{N}_{2p+n}$。

设 $m\ge p^2+2$。我们将证明 $x_1x_2^m=0$ 属于 C_n。令 l_1、$l_2\in C_n$、$l_2=a+d$，其中 $a\in A_n$、$d\in D_n$。于是 $l_1l_2=a_1\in A_n$。我们将在乘积 $l_1l_2^m=(l_1l_2)l_2^{m-1}=a_1(a+d)^{m-1}$ 中展开括号：

$$l_1l_2^m=\sum a_1c_1c_2\cdots c_{m-1}, \tag{7}$$

其中 $c_i=a$ 或 $c_i=d$、$i=1$、2、.....、$m-1$。若 $a_1c_1c_2\cdots c_{m-1}\ne 0$，则 a 在 c_1、c_2、.....、c_{m-1} 中出现的次数不超过 $p-1$；若 a 恰好出现 $p-1$ 次，则 $c_{m-1}=a$（因为 $a_{\sigma t}^{(p)}$ 属于 C_n 的中心）。因此，和式（7）中的非零乘积具有以下形式

$$a_1d^{k_1}ad^{k_2}a\cdots ad^{k_s}a^{\varepsilon}, \quad s\le p-1, \varepsilon=0,1, \tag{8}$$

以及 $k_1+k_2+\cdots+k_s+(s-1)+\varepsilon=m-1$。因此

$$m=k_1+k_2+\cdots+k_s+s+\varepsilon\le k_1+k_2+\cdots+k_s+p. \tag{9}$$

元素 d 是式 (6) 中导子的线性组合，即 $d=\sum\alpha_id_i$、$\alpha_i\in K$，并且 d_i 两两可交换。于是 ($\mathrm{char}K=p$)

$$\Big(\mathrm{ad}\sum\alpha_id_i\Big)^p=\sum\alpha_i^p(\mathrm{ad}d_i)^p, \tag{10}$$

$$(\mathrm{ad}d_i)^p=\begin{cases}0, & \text{if } d_i=g_{\lambda 0}, h_{\mu 0}, \mu\ne\varnothing,\\ \mathrm{ad}h_{\nu p}, & \text{if } d_i=h_{\nu 1}, \nu=\varnothing,\end{cases} \tag{11}$$

因为 $a_{\sigma s}^{(k)} h_{\nu 1}^{p} = k^{p} a_{\sigma s+p}^{(k)} = k a_{\sigma s+p}^{(k)} = a_{\sigma s}^{(k)} h_{\nu p}$、 $\nu = \varnothing$。我们来考虑式 (8) 中的乘积 $a_1 d^{k_1} \cdots a d^{k_s} a^{\varepsilon}$。令

$$k_i = \max(k_1, \ldots, k_s), \quad k_j = \max(\{k_1, \ldots, k_s\} \setminus \{k_i\}). \tag{12}$$

若 $k_i \leq 2p-1$, $k_j \leq p-1$, 则 ($s \leq p-1$ 由 (12) 得出)

$$k_1 + \cdots + k_s \leq (2p-1) + (s-1)(p-1) \leq (2p-1) + (p-2)(p-1) = p^2 - p + 1$$

并由 (9) 得到 $m \leq p^2 + 1$，这是不可能的。因此有两种情况： $k_j \geq p$ 或$k_i \geq 2p$。为方便记号起见，我们假设 $i = 1$, $j = 2$ （一般情形的讨论相同）。

(i) 设 $k_2 \geq p$。那么，由 (10) 和 (11) 可得,

$$a_1 d^{k_1} a d^{k_2} = a_1 d^{p} d^{k_1 - p} a d^{p} d^{k_2 - p} = a_1 \left(\sum \alpha_i d_i \right)^{p} d^{k_1 - p} a \left(\sum \alpha_i d_i \right)^{p} d^{k_2 - p}$$

$$= a_1 \left(\sum \alpha_i^{p} \mathrm{ad}^{p} d_i \right) d^{k_1 - p} a \left(\sum \alpha_i^{p} \mathrm{ad}^{p} d_i \right) d^{k_2 - p} = \alpha^{2p} a_1 h_{\nu 1}^{p} d^{k_1 - p} a h_{\nu 1}^{p} d^{k_2 - p}$$

$$= \alpha^{2p} a_1 h_{\nu p} d^{k_1 - p} a h_{\nu p} d^{k_2 - p} = 0, \quad \nu = \varnothing.$$

（这里 α 是 $d_{i_0} = h_{\nu 1}$ 在 $\sum \alpha_i d_i$中的系数。）因此在这种情况下，乘积 (8) 等于零。

(ii) $k_1 \geq 2p$。那么由 (10) 和 (11) 可知,

$$a_1 d^{k_1} = a_1 d^{p} d^{p} d^{k_1 - 2p} = a_1 \left(\sum \alpha_i d_i \right)^{p} \left(\sum \alpha_i d_i \right)^{p} d^{k_1 - 2p}$$

$$= a_1 \left(\sum \alpha_i^{p} \mathrm{ad}^{p} d_i \right)^{2} d^{k_1 - 2p} = \alpha^{2p} a_1 \mathrm{ad}^{2p} h_{\nu 1} d^{k_1 - 2p} = \alpha^{2} a_1 h_{\nu p}^{2} d^{k_1 - 2p} = 0, \quad \nu = \varnothing.$$

再次，乘积 (8) 等于零。因此，代数 C_n 满足恒等式 (3)。

3. 由恒等式 (1)、(2) 和 (3) 定义的簇是可解的，并满足 Engel 恒等式。根据 K. W. Gruenberg 的定理 [4]，它是局部幂零的，因此也是局部有限的。

4. 与 [2, 引理 2.1、2.2 及定理 2.3] 中一样，我们可以证明 C_n 在 C_n 中满足关于 $k < n$ 和 $(x_1 x_2 \cdots x_{n+2})(x_1 x_2)^{p-1} \neq 0$ 的所有恒等式 (4)。由于 C_n 的幂零类为 $2p + n$，它也满足关于 $k > n$ 的 (4)，也就是说，恒等式 (4) 模恒等式 (1)、(2) 和 (3) 是相互独立的。定理得证。

利用 A.Yu. Ol'shanskiĭ [6] 和 [5] 的思想以及定理 1，我们可以构造一些具有指定性质的李代数簇的例子。

定理 2. 在任意正特征域上，都存在连续统多个局部有限李代数簇，它们按包含关系构成严格递增链。

证明. 我们对 $\mathbb{Q}$ 有理数集进行排序:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, \tag{13}$$

并考虑李代数集 $\{L_r \mid r \in \mathbb{Q}\}$。这里 $L_r \cong C_m$，其中 m 是式 (13) 中的 r 数，而 C_m 是定理 1 证明中的代数。对于任意实数 α，我们定义簇

$$\mathfrak{W}_{\alpha} = \mathrm{var}\{L_r \mid r \leq \alpha\}. \tag{14}$$

由定理 1 证明的第4部分可知，若 $\alpha < \beta$，则 $\mathfrak{W}_{\alpha} \subsetneqq \mathfrak{W}_{\beta}$。 □

推论3. 在任意正特征域上，存在连续统个两两具有不同序数函数的局部有限李代数簇。（局部有限簇 $\mathfrak{V}$ 的序数函数 $f_{\mathfrak{V}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 由等式$f_{\mathfrak{V}}(n) = \dim F_n(\mathfrak{V})$, $n = 1, 2, \ldots$ 定义，其中 $F_n(\mathfrak{V})$ 是 $\mathfrak{V}$ 中秩为 n 的相对自由代数。）

证明。考虑簇 (14)。若 $\alpha > \beta$ 则

$$\mathfrak{W}_\beta \subset \mathfrak{W}_\alpha \tag{15}$$

并且对于每个 n，都有一个典范满同态 $\psi_n: F_n(\mathfrak{W}_\alpha) \to F_n(\mathfrak{W}_\beta)$。由于包含关系 (15) 是严格的，存在一个 n 使得 $\ker \psi_n \neq 0$，这意味着 $f_{\mathfrak{W}_\alpha}(n) \neq f_{\mathfrak{W}_\beta}(n)$。□

注4。如同在 [6] 中一样，我们可以证明，在特征为 $p > 0$ 的域上存在两个不同的簇，它们具有相同的序数函数。例如，令$k = p^3 + p^2 + p + 2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^2 \cap \mathfrak{N}_k$。我们考虑 $\mathfrak{M}$ 的子簇 $\mathfrak{V}$ 和 $\mathfrak{W}$，它们分别由以下恒等式定义

$$v(x_1, x_2, y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}) = x_1 x_2 y_0^p y_1^p \cdots y_p^p y_{p+1}^{p^3} = 0,$$

$$w(x_1, x_2, y_0, y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}) = x_1 x_2 y_0^{p^2} y_1^{p^2} \cdots y_p^{p^2} y_{p+1}^p = 0.$$

于是 $f_{\mathfrak{V}}(n) = f_{\mathfrak{W}}(n)$。

注5。Yu. N. Mal'tsev 运用其论文 [7] 中的思想，构造了一个例子：在有限域上有两个极非交换簇，它们是结合代数的簇且具有相同的序数函数。运用 [6] 中的思想，我们可以构造下面这个简单的例子。设 K 是一个特征为$p > 0$ 的域，并令 $k = p^2 + p + 1$。定义结合代数$xy - yx = x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = 0$的簇 $\mathfrak{M}$，以及其子簇 $\mathfrak{V}$ 和 $\mathfrak{W}$，它们分别由以下恒等式定义

$$v(x_0, x_1, \ldots, x_p, y) = x_0 x_1 \cdots x_p y^{p^2} = 0, \quad w(x_0, x_1, \ldots, x_p, y) = (x_0 x_1 \cdots x_p)^p y = 0.$$

那么，$\mathfrak{V} \neq \mathfrak{W}$ 但 $\mathfrak{V}$ 和 $\mathfrak{W}$ 具有相同的序数函数。

本文的结果已收入作者 [8]的博士论文。作者谨向 Yu. A. Bahturin 致以诚挚谢意，感谢他提出问题并关注这项工作。

References

[1] M. R. Vaughan-Lee, 《李代数簇》, Quart. J. Math. Oxford (2), 21 (1970), 297-308。[2] V. S. Drensky, 《李代数中的恒等式》（俄文）, Algebra i Logika 13 (1974), 265-290。译文：Algebra and Logic 13 (1974), 150-165。[3] I. B. Volichenko, 《关于中心扩张后亚交换李代数簇》, 预印本第 16 号，1980 年，白俄罗斯国家科学院数学研究所，明斯克。[4] K. W. Gruenberg, 《关于恩格尔群的两个定理》, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953), 377-380。[5] A. Yu. Ol'shanskiĭ, 《关于某些无限恒等式系统》（俄文）, Tr. Semin. Im. I. G. Pet- rovskogo 3 (1978), 139-146。译文：Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 119 (1983), 81-88。[6] A. Yu. Ol'shanskiĭ, 《关于局部有限簇的自由群的阶》（俄文）, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 37 (1973), 89-94。译文：Math. USSR, Izv. 7 (1973), 85-90。[7] Yu. N. Mal'tsev, 《结合环的近交换簇》（俄文）, Sib. Mat. Zh. 17 (1976), 1086-1096。译文：Sib. Math. J. 17 (1976), 803-811。[8] V. S. Drensky, 《可解李代数簇》（俄文）, 博士论文，莫斯科国立大学力学与数学系，莫斯科，1979。