arXiv:2301.12625v2 [math.SG] 5 Feb 2024

相对辛上同调刻画重性

CHEUK YU MAK、YUHAN SUN 和 UMUT VAROLGUNES

Abstract. 对于闭辛流形（M，ω）的紧子集 K，我们证明，K 是重的，当且仅当其在诺维科夫域上的相对辛上同调非零。作为应用，我们证明：如果两个紧集都不是重的且彼此泊松对易，那么它们的并集也不是重的。我们还讨论了超重性，并给出了一些部分结果。

Contents

1. 引言 致谢 2. 预备知识 2.1. 谱不变量 2.2. 1
重性与超重性 2.3. 相对辛上同调 2.4. 辛理想 4
值拟测度 2.5. 链级乘积结构 3. 结果证明 4
3.1. 一个代数引理 3.2. 重性 3.3. 超重性 参考 5
文献 8
9
11
11
12
12
13
15
19

1. Introduction

设 (M,ω) 是一个闭辛流形。若对任意哈密顿微分同胚 ϕ，都有 $\phi(K)\cap K'\neq\emptyset$，则称子集 $K\subset M$ 与另一个子集 K' 不可相离。若 K 与自身不可相离，则称其为不可相离；否则称其为可相离。若 K 属于 M，且 K 与 (T^*S^1,ω_{st}) 的零截面 Z_{S^1} 的乘积在 $M\times T^*S^1$ 中不可相离，则称子集 K 在稳定意义下不可相离。关于这些概念的详细讨论，请参阅 [9]。

例如，注意到对于任意 $K\subset M$，子集 $K\times Z_{S^1}\subset M\times T^*S^1$ 都可以通过辛同伦与自身相离。另一方面，也有许多有趣的稳定不可相离子集的例子，例如 $K=M$。

对于涉及某些有趣刚性现象的可位移性问题，Floer理论提供了强大的工具。例如，拉格朗日Floer上同调在寻找将一个拉格朗日子流形从另一个拉格朗日子流形上移开的障碍方面非常有效。对于一般的紧子集，Entov-Polterovich [8, 9] 引入了重性和超重性这两个辛同胚不变量概念，它们具有以下性质。

定理 1.1（定理 1.4 [9]）。对于 M 的紧子集 K：
(1) 如果 K 是重集，则它与自身稳定不可置换。(2) 如果 K 是超重集，则 K 与任意重集相交。

Date：2024年2月6日。

(3) 超重集是重集，但一般而言，反之不成立。

重子集和超重子集的定义基于哈密顿弗洛尔理论中的谱不变量 [18]（关于我们所采用约定下的定义，见第 2.2 节）。

注 1.2. 我们指出，对于专家而言，为简便起见，在整个引言中我们只使用量子上同调中的单位元作为幂等元；但在论文主体部分，我们的结果对所有幂等元都统一陈述（并且均成立）。

紧子集的相对辛上同调 [27, 28] 是处理可位移性问题的另一种替代方法。具体而言，第三作者和 Tonkonog 提出了以下定义 [24, 3], ，这些定义也具有辛同胚不变性。

定义 1.3. 设 K 是 M 中的一个紧集，并设 $SH_M(K;\Lambda)$ 为 M 上以诺维科夫域 Λ 为系数的 K 的相对辛上同调（见 (2.1)）。

(1) K 称为 SH-可见，当 $SH_M(K;\Lambda) \neq 0$ 时；否则称为 SH-不可见。(2) K 称为 SH-满，如果包含在 $M-K$ 中的每个紧集都是 SH-不可见的。

其动机在于，如果 $SH_M(K;\Lambda) \neq 0$，那么 K 就不能与其自身稳定可位移 [27]。在[24], 中，以下猜想已隐含其中：

猜想 1.4。闭辛流形的一个紧子集是重集，当且仅当它是 SH-可见的。

本文证实了这一猜想。SH-满的定义旨在类比超重性，其灵感来自超重集与重集相交这一事实。猜想 1.4 得到证实后可知，SH-满集实际上可刻画为与所有闭重集相交的子集。我们可以合理地认为，这一条件弱于超重性。

注 1.5. K 称为近似 SH-可见，如果任何内部包含 K 的紧区域都是 SH-可见的。由限制映射的幺性可知，SH-可见集总是近似 SH-可见的。事先并不清楚这两个概念是否不同，参见 [3]中的脚注 7。不过，本文将证明它们等价（见推论 3.8）。

最近，Dickstein-Ganor-Polterovich-Zapolsky [5] 引入了他们的量子上同调理想值拟测度。例如，当且仅当一个紧集是 SH-满的时，它具有满测度（见 [5, 注 1.46]）。他们还定义了一种称为 SH-重的新概念，并提出了如下猜想：

猜想 1.6（猜想 1.52 [5]）。闭辛流形的一个紧子集是重的，当且仅当它是 SH-重的。

以下概述我们的主要结果。

定理 1.7. 设 (M,ω) 是一个闭辛流形。对于 M 的任意紧子集 K，以下结论成立。

(A) (推论 3.4，定理 3.5) K 是 SH-可见的，当且仅当 K 是重的。
(B) (命题 3.9) 如果 K 是 SH-重的，那么 K 是重的。
(C) (推论 3.10) 如果 K 是超重的，那么 K 是 SH-满的。

我们最基本结果的证明——即 SH-可见蕴含重——依赖于一种链级乘积结构，该结构最近在 [1] 中构造出来。我们只使用了那篇论文所构造结构中的一小部分。

下面是定理 1.7 的 (A) 部分以及相对辛上同调的 Mayer–Vietoris 性质的一个有趣推论：

推论 1.8。设 K_1 和 K_2 是 M 中泊松对易的紧子集，参见定义 2.17。若它们都不是重集，则它们的并集 $K_1 \cup K_2$ 也不是重集。

证明。设 K_1、K_2 是两个非重集。于是，定理 1.7 的 (A) 部分表明，$SH_M(K_1;\Lambda) = SH_M(K_2;\Lambda) = 0$，因此，根据限制映射的单位元性，也有 $SH_M(K_1\cap K_2;\Lambda)=0$。此外，若 K_1、K_2 泊松对易，则相对辛上同调的 Mayer–Vietoris 性质表明，$SH_M(K_1\cup K_2;\Lambda)=0$。□

一个重要的例子是 K_1 与 K_2 不相交的情形。据我们所知，这类结果仅在非常特殊的 M 和 K_i 情形下得到证明，例如，当 M 是非球面的，且 K_i 是不可压缩李乌维尔域 [13, 23] 时。

我们还利用推论 1.8 以及 $SH_M(M;\Lambda)\simeq H^*(M;\Lambda)\neq 0$，对 [6, 问题 4.9] 给出了肯定的回答。

推论 1.9。任意对合映射 $\Phi: M\to\mathbb{R}^N$ 至少有一个重纤维 .

该推论又意味着，我们对 [6, 问题 3.4] 给出了肯定的回答，即关于利用齐次化谱不变量构造的辛拟态的无色散性问题，参见 [6, 定理 3.1]。关于这一问题更深入的讨论，参见 [20, 第 6 节.2]。论文首个预印本版本发布后，Adi Dickstein、Yaniv Ganor、Leonid Polterovich 和 Frol Zapolsky 将这一推论告知了我们。这里若要介绍辛拟态相关的定义或概念，篇幅就太长了，因此请读者参阅 [6] 。如注 1.2 所述，引言中陈述的结果实际上适用于所有幂等元（而不只是单位元），我们将在下文中用到这一点。

推论 1.10. 定理 3.1] 中构造的、对应于 $QH(M;\Lambda)$ 的某个域因子中单位元的每个辛拟态都是无色散的。

证明. 拟态 z 是无色散的，当且仅当对于每个连续函数 f，它满足 $z(f^2) = z(f)^2$。

令 z 为对应于 $QH(M;\Lambda)$ 的某个域因子中单位元的辛拟态。根据 C^0-Lipschitz 性质 z（参见定理 2.5(4)），只需证明对于每个光滑函数 f，$z(f^2) = z(f)^2$。考虑 f 作为对合映射 $f: M\to\mathbb{R}$。推论 1.9 表明该映射存在一个重纤维，设其位于点 $t\in\mathbb{R}$。由于 z 是一个真正的拟态，根据定理 4.1.e.]，此纤维也是超重的。由重和超重的定义（例如参见定义 2.8）可直接得出，推前泛函 f_*z 实际上就是在 t 处取值。因此，$z(f^2)$ 就是函数 $x\mapsto x^2$ 在 t 处的取值，也就是 t^2：$z(f^2) = t^2$。但是 $z(f) = t$，也就是说$z(f^2) = t^2 = z(f)^2$。由此可知，z 是无色散的。□

另一个直接推论是得到对 [24] 中猜想 1.3 的解答。

推论 1.11. 若 L 是一个拉格朗日子流形，且存在一个边界链使其 Floer上同调非零，那么 L 不包含在某个 SH-不可见集 K中。

证明。根据定理 m 1.6，在 [10] 中，L 是重的，因此定理 1.7 的 (A) 部分推出 $SH_M(L;\Lambda)\neq 0$. □

注 1.12. 若 K 是拉格朗日子流形 $\{K_i\}$ 的并，还可以看出 Fukaya范畴的（分裂）生成这一概念与超重性/SH-满这一概念之间存在某些相似之处。Yash Deshmukh 向我们提出了一个令人信服（且并不太难）的论证，表明若 $\{K_i\}$ 满足 Abouzaid生成判据，则 $K=\cup K_i$ 是 SH-满的。

我们注意到定理 1.7 的 (C) 部分的如下部分逆命题。

定理 1.13. 设 K 是 M 的一个紧子集，且 $K_0\supset K_1\supset\dots$ 是一些紧子集，它们都将 K 包含在其内部，并满足 $\bigcap K_i = K$。若 $c_1(TM)$ 在 $\pi_2(M)$ 上消失，且 $\mathbb{Z}$-分次相对辛上同调余链复形 $SC^*_M(K_n;\Lambda)$ 对所有 $n\geq 1$ 的所有次数都具有有限边界深度，那么 K 为 SH-满即意味着它是超重。

注 1.14. 我们的方法也可以推广到某些负单调和正单调情形，从而证明类似的结果（参见命题 3.13 及其后的讨论），但我们不确定这些方法是否有用且是否最优。因此，我们不再详细讨论。

例如，作为推论，现在可以证明 [24] 的定理 1.24 中的骨架是超重的。为避免引入本文其他地方不会用到的记号，我们省略其完整证明。

我们从一个更一般的结果——定理 3.18——推出定理 1.13。该结果涉及一个与约化辛上同调 $SH_M^{red}(M;\Lambda)$ 有关的条件。它可以定义为 $SH_M(M;\Lambda)$ 除以其赋值 ∞ 子空间所得的商（参见围绕 (3.6) 的讨论）。

最后，我们指出以下结果，这是我们讨论的一个副产品：

命题 1.15. $SH_M^{red}(K;\Lambda) = 0$ 蕴含 $SH_M(K;\Lambda) = 0$.

证明 在所有必要概念得到恰当引入后，于第 3.3 节给出。

致谢。我们感谢 Leonid Polterovich 和索班·赛法迪尼的有益讨论以及他们的关注。我们也感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。

C.M. 得到了西蒙斯同调镜像对称合作项目 #652236 以及¨ ˙英国皇家学会大学研究奖学金的资助。U.V. 得到了 TUBITAK 2236（Co-Circ2）计划的资助，资助编号为 121C034。

2. Preliminary

首先 w e 指定将要使用的环和域。诺维科夫域 Λ 定义为

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{Q}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i < \lambda_{i+1}, \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty \right\} \tag{2.1}$$

其中 T 是一个形式变量。存在一个赋值 $\mathrm{val}: \Lambda \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，其定义为 $\mathrm{val}(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i}) := \min_i\{\lambda_i | a_i \neq 0\}$，且 $\mathrm{val}(0) := +\infty$。于是，对于任意实数 r，我们将 $\Lambda_{>r}$ 定义为赋值大于 r 的元素所组成的子集。类似地，我们定义 $\Lambda_{\geq r}$。特别地，$\Lambda_{\geq 0}$ 称为诺维科夫环。它是一个带单位元 $1 \in \mathbb{Q}$ 的交换环。$\Lambda_{>r}$ 和 $\Lambda_{\geq r}$ 都是 $\Lambda_{\geq 0}$ 上的模。当 $r \geq 0$ 时，它们是 $\Lambda_{\geq 0}$ 的理想。

在向量空间层面上，我们将量子上同调 $QH^*(M;\Lambda)$ 识别为 $H^*(M;\Lambda) = H^*(M;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$。以下三个（上）同调类将被频繁使用：

(1) $1 \in H^0(M;\Lambda)$，单位类；(2) $[vol] \in H^{2n}(M;\Lambda)$，体积类；(3) $[M] \in H_{2n}(M;\Lambda)$，基本类，

其中 $\langle [vol], [M]\rangle = 1$ 在上同调-同调配对下。

另一个相关的 $\mathbb{Z}$-分次代数 $\Lambda_\omega = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Lambda_\omega^n$ 定义如下：

$$\Lambda_\omega^n := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{A_i} \mid a_i \in \mathbb{Q}, A_i \in \pi_2^n(M)/\sim, \lim_{i\to\infty} \omega(A_i) = +\infty \right\}$$

其中 $\pi_2^n(M)$ 是 $\pi_2(M)$ 中满足 $2c_1(M)[A] = n$ 的类所构成的子集，而 $\sim$ 是如下关系：

$$A \sim A' \quad \text{iff} \quad \omega(A) = \omega(A').$$

注意，我们有一个代数映射 $\Lambda_\omega \to \Lambda$，由 $e^A \mapsto T^{\omega(A)}$ 给出。

注 2.1. 分阶段构造映射 $\Lambda_\omega \to \Lambda$ 是很有启发性的：

(1) 忘掉分次。(2) 对由 $\{\omega(A) = 0\} \subset \pi_2(M)$ 的群代数给出的子代数取商。(3) 进行完备化，得到阿贝尔群 $\omega(\pi_2(M))$ 的完备群代数。(4) 使用显然的包含 $\omega(\pi_2(M)) \subset \mathbb{R}$.

注 2.2。我们定义的诺维科夫环以 $\mathbb{Q}$ 为基域。但我们的所有定理对任何包含 $\mathbb{Q}$ 的基域都成立。此外，如果完整的哈密顿弗洛尔理论体系能在 M 上定义于其他某个交换环之上，那么我们的结果对这些交换环也同样成立。

2.1. 谱不变量。从一开始就要指出，在一般的闭辛流形上建立哈密顿弗洛尔理论需要使用虚拟技术。这里我们沿用 [27]，中的相同惯例，其中使用了 Pardon 方法 [19] 。另一方面，本文的分析不依赖于这一选择，因此我们不会在讨论中详述 Pardon 的隐式图册等相关必要技术细节和术语。我们也会基本省略对几乎复结构的讨论。

有鉴于此，我们简要回顾 Hamilton Floer 群的定义，详情请参见 [12] 。[1] 设 (M,ω) 是一个闭辛流形，且 H 是一个非退化哈密顿函数$M \times S^1 \to \mathbb{R}$。设 γ 是 H 的一个可缩一周期轨道，u 是 γ 的一个圆盘封盖。(γ, u) 的作用量为

$$\mathcal{A}_H(\gamma, u) := \int_\gamma H + \int u^*\omega,$$

并且我们可以利用康利–泽恩德指数 $CZ(\gamma, u)$ 为其赋予一个整数次数。我们在带封盖轨道上定义如下等价关系：

$$(\gamma, u) \sim (\gamma', u') \text{ if and only if } \gamma = \gamma' \text{ and } \mathcal{A}_H(\gamma, u) = \mathcal{A}_H(\gamma', u') \text{ and } CZ(\gamma, u) = CZ(\gamma', u').$$

等价类记作 $[\gamma, u]$。经典的次数为$n \in \mathbb{Z}$的哈密顿弗洛尔复形，即 $CF^n(H)$，由所有如下形式的形式和构成

$$x = \sum_i x_i \cdot [\gamma_i, u_i], \quad \mathcal{A}_H([\gamma_i, u_i]) \to +\infty.$$

这里，系数 x_i 属于 $\mathbb{Q}$，而 $[\gamma_i, u_i]$ 是次数为 n 的带封盖轨道的等价类。这种带封盖轨道的 $\mathbb{Q}$-线性组合的赋值，定义为系数非零的各项作用量的最小值。诺维科夫环 Λ_ω 通过 $e^A \cdot [\gamma, u] := [\gamma, u + A]$ 作用在 $CF^*(H)$ 上，使得 $CF^*(H)$ 成为一个自由分次 Λ_ω-模。为每个一周期轨道选取一个参考封盖，将为 $CF^*(H)$ 给出一组特定的基。

Floer 微分 $d\colon CF(H) \to CF(H)$ 是通过计数 Floer圆柱来定义的。我们指出，关于 Floer 方程和 Conley-Zehnder 指数的约定遵循 [27, 3]。特别地，微分会增大带帽轨道的作用量和指数。由此得到的同调记作$HF^*(H)$。对于任意 $p \in \mathbb{R}$，我们定义

$$CF_{\geq p}(H) := \{x \in CF(H) \mid \mathcal{A}_H(x) \geq p\}.$$

由于微分 d 会增大作用量，我们还有同调 $HF^*_{\geq p}(H) := H^*(CF_{\geq p}(H), d)$。此外，由包含诱导出自然映射 $i_p^* : HF^*_{\geq p}(H) \to HF^*(H)$。

接下来，令 $PSS^H\colon QH^*(M; \Lambda_\omega) \to HF^*(H)$ 为 PSS 同构 [21]，它连接 M 的量子上同调与 $HF(H)$。在上下文明确时，我们通常省略上标 H。对于任意非零纯次数类 $a \in QH^n(M; \Lambda_\omega)$，谱不变量 $c(a; H)$ 定义为

$$c(a; H) := \max\{p \in \mathbb{R} \mid PSS^H(a) \in \mathrm{im}(i_p^n)\}.$$

可以验证，它也等于 $\max\{\mathcal{A}_H(x) \mid x \in CF^n(H), dx = 0, [x] = PSS^H(a)\}$。

注2.3。在谱不变量的定义中写作 max 时，我们依赖于 Usher 关于最佳代表元存在性的结果，即文献 [25] 中的定理 1.3 和定理 1.4。

这是谱不变量文献中通常采用的设置。我们将对其稍作简化（使用更简单的 Novikov 覆盖），并说明这样做不会造成任何损失。考虑 Floer 复形$CF(H; \Lambda)$，它是由 1-周期轨道（不带封装）生成的 Λ-向量空间。我们赋予其 $\mathbb{Z}/2$ 分次，该分次由相应不动点的 Lefschetz 符号决定。对 Floer 微分有贡献的圆柱按拓扑能量加权。更确切地说，

[1]本文始终讨论闭辛流形，并且仅使用可缩轨道来定义 Hamilton Floer 群。

令 u 为连接两个轨道 γ_-, γ_+ 的 Floer圆柱。那么它在微分中的贡献按 $T^{E_{top}(u)}$ 加权，其中

$$E_{top}(u) := \int_{\hat{\gamma}} H - \int_{\hat{\gamma}} H + \int u^*\omega.$$

注意，我们有 $E_{top}(u) \geq 0$。我们将所得的同调记为 $HF(H; \Lambda)$。对于由轨道 γ_i 和 $x_i \in \Lambda$ 构成的 $x = \sum x_i\gamma_i$ with，我们定义

$$\mathrm{val}(x) := \min_i \{\mathrm{val}(x_i)\}.$$

我们有映射

$$CF(H) \otimes_{\Lambda_\omega} \Lambda \to CF(H;\Lambda) : \quad [\gamma, u] \otimes T^E \to T^{\mathcal{A}_H([\gamma,u])+E} \cdot \gamma.$$

它是链复形之间的一个同构，同时也保持赋值不变。

我们有一个定义为以下复合的 PSS-映射（在 Λ 上）：

$$PSS^H_\Lambda : QH(M;\Lambda) \to HF(H) \otimes_{\Lambda_\omega} \Lambda \to HF(H;\Lambda).$$

类似地，对于任意非零类 $a \in QH(M; \Lambda)$，我们定义

$$c_\Lambda(a; H) := \max\{\mathrm{val}(x) \in \mathbb{R} \mid x \in CF(H;\Lambda), dx = 0, [x] = PSS^H_\Lambda(a)\}.$$

下面给出一个实用的比较结果。

命题2.4. 设 H 是一个非退化函数， $a \in QH(M; \Lambda_\omega)$ 是一个非零的纯整数次数类。设 $\tilde{a} \in QH(M; \Lambda)$ 是 a 在映射 $QH(M; \Lambda_\omega) \to QH(M; \Lambda)$ 下的像，该映射由 $\Lambda_\omega \to \Lambda$ 诱导。那么有 $c(a; H) = c_\Lambda(\tilde{a}; H)$。

证明. 我们可以构造一个链级PSS映射

$$cPSS^H : CM(f, \Lambda_\omega) \to CF(H),$$

其中 f 是 M 上的 Morse函数，而该映射对连接 f 的临界点与 H 的轨道的带尖刺圆盘进行计数。通过基变换并利用上面的作用量缩放映射，我们还得到 $cPSS^H_\Lambda : CM(f, \Lambda) \to CF(H; \Lambda)$，从而得到如下链映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} CM(f;\Lambda_\omega) & \xrightarrow{cPSS^H} & CF(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CM(f;\Lambda) & \xrightarrow{cPSS^H_\Lambda} & CF(H;\Lambda) \end{array}$$

显然， $c_\Lambda(\tilde{a}; H) \geq c(a; H)$。对于反向结论，注意对所有 $n \in \mathbb{Z}$，映射 $CF^n(H) \to CF(H; \Lambda)$ 均保持赋值（因此是单射），而 $HF^n(H) \to HF(H; \Lambda)$ 是单射。

我们考虑一个简单的情形来说明证明。假设 $x = T^E\gamma \in CF(H; \Lambda)$ 表示$PSS^H_\Lambda(\tilde{a})$，且 $PSS^H(a)$ 由 y表示，其中 $y = [\gamma_1, u_1]$是一个带帽轨道。由上述交换图的交换性可知， $T^E\gamma$与 $y_T = T^{\mathcal{A}_H([\gamma_1,u_1])}\gamma_1$在 $CF(H; \Lambda)$ 中同调等价。假设

$$T^{\mathcal{A}_H([\gamma_1,u_1])}\gamma_1 - T^E\gamma = dz, \text{ with } z = T^{E_2}\gamma_2$$

对某个 γ_2成立。那么必定存在从 γ_2 到 γ_1的刚性 Floer 圆柱 u_2，以及从 γ_2 到 γ 的刚性 Floer 圆柱 u_3。我们有

$$E_2 + E_{top}(u_2) = \mathcal{A}_H([\gamma_1, u_1]), \quad E_2 + E_{top}(u_3) = E.$$

我们可以直接验证， $[\gamma, u_3 - u_2 + u_1]$ 是一个带帽轨道，其次数与表示 $PSS^H(a)$ 的 $[\gamma_1, u_1]$ 相同，且作用量为 E。

现在给出证明。由于 H 是非退化的，我们有有限个一周期轨道$\{\gamma_j\}_{j=1, \cdots, N}$其模 2 次数为 a，即 $\deg(\tilde{a})$，以及 $\{\beta_k\}_{k=1, \cdots, L}$次数为 $\deg(\tilde{a}) - 1$。Let

$$x = \sum_{j=1}^{N} \sum_l x_j^l T^{E_j^l}\gamma_j, \quad x_j^l \in \mathbb{Q}$$

是一个表示 $PSS^H_\Lambda(\tilde{a})$ 且赋值为 $c_\Lambda(\tilde{a};\ H)$ 的元素，并且

$$y=\sum_{j=1}^{N}\sum_i y_j^i[\gamma_j,u_j^i],\quad y_j^i\in\mathbb{Q},\quad \lim_{i\to+\infty}\mathcal{A}_H([\gamma_j,u_j^i])=+\infty$$

是一个表示 $PSS^H(a)$ 的纯次数元素。基变换后，我们得到

$$y_T:=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j(\sum_i y_j^i T^{\mathcal{A}_H([\gamma_j,u_j^i])})$$

使得 x 和 y_T 同调等价。也就是说，我们有另一个元素 z，满足 $dz=y_T-x$。我们记

$$z=\sum_{k=1}^{L}\sum_m z_k^m T^{E_k^m}\beta_k,\quad z_k^m\in\mathbb{Q}.$$

设 n 是 a的次数。若 $rT^E\gamma_j$ 满足 $r\in\mathbb{Q}^*$

$$E=\mathcal{A}_H([\gamma_j,u])$$

对于 γ_j的某个指标 n cap u，我们称其为好；否则称其为坏。

考虑 $d(T^E\beta_k)$ 的 $\mathbb{Q}$-线性表达式。上面简单情形中的论证表明，其中的项要么全是好项，要么全是坏项。相应地，我们称带有 $r\in\mathbb{Q}^*$ 的 $rT^E\beta_k$ 为好或坏。定义 z'：从 z 的 $\mathbb{Q}$-线性表达式中删去所有坏项。因此，dz' 是由（可能无穷多个）好项构成的 $\mathbb{Q}$-线性组合。我们定义 x' 如下：$dz'=y_T-x'$.

显然，x' 属于 $CF^n(H)\to CF(H;\Lambda)$ 的像（例如，属于 $\tilde{y}$ 的像），且它表示 $PSS_\Lambda(\tilde{a})$。由此可知，$\tilde{y}$ 的赋值至少与 x 的赋值一样大，因为 x' 的 $\mathbb{Q}$-线性展开中的项只是 x 中项的一个子集。因此，$\tilde{y}$ 的赋值，从而 $c(a;H)$ 的赋值，至少与 $c_\Lambda(\tilde{a};H)$ 的赋值一样大。

□

本文其余部分将采用谱不变量的第二种定义，但使用第一种记法 $c(a;H)$。它具有许多良好性质，现列举如下；证明及更多讨论参见 [18, 10, 9] 。

定理 2.5. 设 a 是 $QH(M;\Lambda)$ 中的一个非零类，H 是一个非退化哈密顿函数。数值 $c(a;H)$ 具有以下性质。

(1)（有限性）$c(a;H)$ 是一个有限数。(2)（赋值平移）对于任意非零 $x\in\Lambda$，$c(xa;H)=c(a;H)+\mathrm{val}(x)$。(3)（哈密顿平移）对于 S^1 上的任意函数 $\lambda(t)$，$c(a;H+\lambda(t))=c(a;H)+\int_{S^1}\lambda(t)$。(4)（Lipschitz 性质）$\min_M(H_1-H_2)\le c(a;H_1)-c(a;H_2)\le\int_{S^1}\max_M(H_1-H_2)$。特别地，如果 $H_1\ge H_2$，那么 $c(a;H_1)\ge c(a;H_2)$。(5)（三角不等式）$c(a_1*a_2;H_1\#H_2)\ge c(a_1;H_1)+c(a_2;H_2)$，其中 $*$ 是量子乘积。(6)（同伦不变性）对于生成相同 $\phi\in\mathrm{Ham}(M)$ 的任意两个归一化哈密顿函数 $\widetilde{\ }$，$c(a;H_1)=c(a;H_2)$。

□

根据 Lipschitz 性质，我们可以通过 C^0 逼近将谱数的定义扩展到所有连续函数 $M\times S^1\to\mathbb{R}$ 。

注 2.6. 另请注意，通过单调逼近，可以为下（或上）半连续函数 $M\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 定义谱数。下半连续函数的一个重要例子是

$$\chi_K(x)=\begin{cases}0, & if\ x\in K\\ \infty, & otherwise\end{cases}$$

对于 K 一个闭子集。

接下来我们回顾一个庞加莱对偶性质。对于两个类 $a,b\in QH(M;\Lambda)$，我们定义

$$\Pi(a,b):=\pi\langle a*b,[M]\rangle. \tag{2.2}$$

这里，$*$表示量子乘积，$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^*(M;\Lambda)\times H_*(M;\Lambda)\to\Lambda$表示上同调与同调之间的配对，而 $\pi\colon\Lambda\to\mathbb{Q}$ 是常数项投影。

引理 2.7（[7], 引理 2.2）。对于任意 $b\in QH(M;\Lambda)\setminus\{0\}$ 以及光滑的 $H\colon M\times S^1\to\mathbb{R}$，我们有

$$c(b;H)=-\sup\{c(a;\bar{H})|\Pi(a,b)\neq 0\}. \tag{2.3}$$

其中哈密顿量 $\bar{H}(x,t):=-H(\phi_H^t(x),t)$ 生成 $(\phi_H^t)^{-1}$。 □

恒等式 (2.3) 与 [7, 引理 2.2] 的数学内容相同，但采用了我们的符号约定。

给定 M 上一个与时间无关的光滑函数 H，以及一个非零幂等元 $a\in QH(M;\Lambda)$，齐次化谱不变量定义为

$$\mu(a;H):=\lim_{n\to+\infty}\frac{c(a;nH)}{n}.$$

这个极限定义良好，并且具有若干性质。参见 [8]。注意

$$c(a;H)\leq\mu(a;H), \tag{2.4}$$

这由三角不等式立即可得。

2.2. 重性与超重性。本节中，令 $a\in QH(M;\Lambda)$ 表示一个非零幂等元。

定义 2.8. 若紧子集 $K\subset(M,\omega)$ 满足对所有 $H\in C^\infty(M)$ 都有 $\mu(a;H)\leq\max_K H$，则称其为 a-重集。若对所有 $H\in C^\infty(M)$ 都有 $\mu(a;H)\geq\min_K H$，则称其为 a-超重集。当 a 为单位元时，我们通常在记号中省略它。

注 2.9. [9] 中（超）重集的原始定义采用谱不变量的同调版本。此外，还有一个对偶公式（ [15] 第 4.2 节）将它们与我们的上同调谱不变量联系起来。为简单起见，先考虑单位元的情形，有

$$c(1;H)=-c_{ho}([M];-H),\quad hence\quad \mu(1;H)=-\mu_{ho}([M];-H).$$

重性的定义是 [9] $\mu_{ho}([M];H)\geq\min_K H$对所有 H 都成立，这等价于 $\mu(1;H)=-\mu_{ho}([M];-H)\leq-\min_K(-H)=\max_K H$，因此也等价于上文的定义。超重性的定义类似。

引理 2.10（μ-重性与 c-重性）。紧子集 $K\subset(M,\omega)$ 是 a-重的，当且仅当对所有 $H\in C^\infty(M)$，$c(a;H)\leq\max_K H$。

证明。由不等式 (2.4)，我们有 $\mu(a;H)\geq c(a;H)$。因此，若 $\mu(a;H)\leq\max_K H$，则 $c(a;H)\leq\max_K H$。

另一方面，若对所有 H 都有 $c(a;H)\leq\max_K H$，则对所有 H，我们有 $c(a;nH)\leq\max_K nH=n\max_K H$。这意味着对所有 H，$\mu(a;H)\leq\max_K H$。□

注记 2.11. 我们不能用 $c(a;H)$ 代替 $\mu(a;H)$ 来定义超重性。考虑带有标准面积形式的单位球面 $S^2\subset\mathbb{R}^3$，令 $z\colon S^2\to[-1,1]$ 为高度函数。令 $K\subset S^2$ 为由 $z\geq 0$ 定义的上半球。众所周知，K 是超重的。考虑非退化自治哈密顿量 $H:=\epsilon z$，其中 $0<\epsilon\ll 1$。根据超重性，我们有 $\mu(1;H)\geq\min_K H=0$，但是

$$c(1;H)=-\epsilon<\min_K H.$$

现在我们回顾重性和超重性的两个判据。

引理 2.12. 设 K 是 M 中的一个紧集。

(1) K 是 a-重的，当且仅当对于 M 上任意满足 $H|_K = 0$的非负函数 H，都有$\mu(a; H) = 0$；(2) K 是 a-超重的，当且仅当对于 M 上任意满足 $H|_K = 0$的非正函数 H，都有 $\mu(a; H) = 0$。

证明。这是 [9]中的命题 4.1。注意，我们采用的符号约定与原证明不同。因此，正负性也互换了。□

注 2.13。回顾注 2.6。利用单调性和三角不等式，很容易证明，对于 K 紧的情形， $c(1; \chi_K)$ 等于 0 或 ∞。 K 是重的，当且仅当前一种情况成立。

人们或许会想用 $c(1; -\chi_K) = 0$来刻画超重集，但实际上这个等式仅对 $K = M$成立。选取一个非正的 C^2-小函数，使其在 K 上为零且在某处为负，即可证明这一点。 $c(1; -\chi_K)$ 的值也可能是一个负实数。

2.3. 相对辛上同调。现在我们回顾相对辛上同调的构造，该构造由 [27, 28] 引入。此构造可视为使用单调逼近对注 2.6 中 $c(a; \chi_K)$ 定义的范畴化。

设 M 为闭辛流形， K 为 M 的紧子集。考虑 $H_1 \leq H_2 \leq \cdots$ 个非退化的一周期哈密顿函数 $H_n : M \times S^1 \to \mathbb{R}$ 构成的单调序列，使得

(1) H_n 在 $K \times S^1$ 上为负；(2) 当 $x \in K$ 时， $H_n(x, t)$ 收敛于 0；(3) 当 $x \notin K$ 时， $H_n(x, t)$ 收敛于 $+\infty$。

然后，对每个 n，我们选择一个连接 H_n 和 H_{n+1} 的哈密顿函数单调同伦。由哈密顿函数序列及所选单调同伦构成的集合称为 K 的加速数据。

现在给定 K 的加速数据，我们将 $CF(H_n; \Lambda)$ 的微分记为 $d_n : CF(H_n; \Lambda) \to CF(H_n; \Lambda)$，并将延拓映射记为 $h_n : CF(H_n; \Lambda) \to CF(H_{n+1}; \Lambda)$。

Floer微分和延拓映射都通过计数满足 Floer方程的适当圆柱 $u : \mathbb{R} \times S^1 \to M$ 来定义。我们强调， d_n 和 h_n 都带有 Novikov参数 $T^{E_{top}(u)}$ 的幂次权重。由于我们所选取的同伦是单调的，对于 d_i 和 h_i 的定义中的任意 u，拓扑能量 $E_{top}(u)$ 始终非负。

我们有一条 Floer 复形射线

$$\mathcal{C} := CF(H_1; \Lambda) \to CF(H_2; \Lambda) \to \cdots$$

并且可以通过望远镜构造形成一个新的 $\mathbb{Z}/2$-分次复形 $tel(\mathcal{C}) = \oplus_n (CF(H_n; \Lambda) \oplus CF(H_n; \Lambda)[1])$，参见第 3 节。7 [2] 和第 2 节。1 [28]。 Λ-线性微分 δ 定义如下：若 $x_n \in CF^k(H_n; \Lambda)$，则

$$\delta x_n = (-1)^k d_n x_n \in CF^{k+1}(H_n; \Lambda),$$

并且如果 $x'_n \in CF^k(H_n; \Lambda)[1]$ 那么

$$\delta x'_n = ((-1)^k x'_n, (-1)^{k+1} d_n x'_n, (-1)^{k+1} h_n x'_n) \tag{2.5}$$

$$\in CF^k(H_n; \Lambda) \oplus CF^{k+1}(H_n; \Lambda)[1] \oplus CF^k(H_{n+1}; \Lambda). \tag{2.6}$$

这个望远镜配备了由 $CF(H_n; \Lambda)$ 上的赋值所诱导的最小赋值。于是我们得到一个诱导的非阿基米德范数和一个诱导的度量

$$||x||_{\text{val}} := e^{-\text{val}(x)}, \quad d_{\text{val}}(x, y) := e^{-\text{val}(x-y)} = ||x - y||_{\text{val}}. \tag{2.7}$$

最后，我们使用这个范数将 $tel(\mathcal{C})$完备化。所得的完备赋范向量空间记作$\widehat{tel}(\mathcal{C})$。更具体地说，我们将无穷和 $\sum_{i=1}^{+\infty}(x_n + x'_n)$添加到 $tel(\mathcal{C})$中，其中各项的赋值

x_n 和 x'_n 趋于正无穷。由于 $tel(\mathcal{C})$上的微分是连续的（事实上是压缩的），$\widehat{\ }$它在 $tel(\mathcal{C})$上诱导出一个微分。 K 在 M 中的相对辛上同调定义为δ-同调

$$SH^*_M(K;\Lambda) := H^*(\widehat{tel}(\mathcal{C}),\delta).$$

注 2.14. 上述构造在诺维科夫环 $\Lambda_{\geq 0}$ 上同样适用。设 $CF(H_n;\ \Lambda_{\geq 0})$ 为由 H_n 的一周期轨道生成的自由 $\Lambda_{\geq 0}$-模。根据我们对单调同伦的选择，所有 Floer 微分和延拓映射都带有 T 的非负次幂权重。因此，由此得到的 T-进完备化望远镜 $tel(\mathcal{C};\ \Lambda_{\geq 0})$ 是一个带有微分 δ 的 $\Lambda_{\geq 0}$-模。我们称其 δ-同调为

$$SH_M(K;\Lambda_{\geq 0}) := H(\widehat{tel}(\mathcal{C};\Lambda_{\geq 0}),\delta)$$

关于 $\Lambda_{\geq 0}$ 的相对辛上同调。

注意，自由 $\Lambda_{\geq 0}$-模 A 与 Λ 张量后所得的 T-进完备化，可以自然地等同于关于诱导的非阿基米德范数对 $A\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda$ 进行完备化（例如参见方程 (3.1)）。由于 Λ 是 $\Lambda_{\geq 0}$ 上的平坦模，我们有

$$SH_M(K;\Lambda) \cong SH_M(K;\Lambda_{\geq 0})\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda.$$

另一方面， $SH_M(K;\ \Lambda_{\geq 0})$ 确实含有挠元，且与 $SH_M(K;\ \Lambda)$ 相比，包含更多定量信息。我们在下文的论证中常使用 $\Lambda_{\geq 0}$ 版本。

在 [28],中已证明， $SH_M(K;\ \Lambda)$ 和 $SH_M(K;\ \Lambda_{\geq 0})$ 与选择无关。此外，它们具有若干良好性质，尤其是 Mayer–Vietoris 序列。

命题2.15（命题 3.3.3, [28]）。不变性与限制映射 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$:

(1) 对于两个不同的加速数据 H_s 和 H'_s，有 $H(tel(\mathcal{C};\Lambda_{\geq 0}))\cong H(tel(\mathcal{C}';\Lambda_{\geq 0}))$，且该对应是典范的。因此，我们将此不变量简单记作 $SH_M(K;\ \Lambda_{\geq 0})$。(2) 设 $\phi\colon M\to M$是一个辛同胚。通过用映射 ϕ重新标记一组加速数据，存在一个典范同构 $SH_M(K;\ \Lambda_{\geq 0})\ =SH_M(\phi(K);\ \Lambda_{\geq 0})$。(3) 对于 $K\subset K'$，存在典范限制映射 $r\colon\ SH_M(K';\ \Lambda_{\geq 0})\ \to\ SH_M(K;\ \Lambda_{\geq 0})$。这些映射满足预层性质。

□

定理2.16. 整体截面与可位移性：

(1)（定理1.3.*1,* [27]） $SH^*_M(M;\ \Lambda_{\geq 0})$ 与 $\cong H^*(M;\ \mathbb{Z})$ 同构，作为 $\mathbb{Z}/2$ 分次的 $\Lambda_{\geq 0}$-模。(2)（定理1.*2,* [24]）若 K 稳定可位移，则 $SH^*_M(K;\ \Lambda)\ =0$。

□

定义2.17.（定义1.*22,* [5]）设 K_1、K_2 是 M 中的两个紧集。若存在两个泊松对易函数 f_1、$f_2\in C^\infty(M;\ [0,1])$，使得$K_1=f_1^{-1}(0)$ $K_2=f_2^{-1}(0)$，则称它们泊松对易。

定理 2.18. 设 K_1、K_2 是两个泊松对易的紧集，则存在一个长正合列

$$\cdots\to SH^*_M(K_1\cup K_2;\Lambda_{\geq 0})\to SH^*_M(K_1;\Lambda_{\geq 0})\oplus SH^*_M(K_2;\Lambda_{\geq 0})\to SH^*_M(K_1\cap K_2;\Lambda_{\geq 0})\to$$
$$\to SH^{*+1}_M(K_1\cup K_2;\Lambda_{\geq 0})\to\cdots.$$

□

关于该定理最一般的形式，请参见定理 1.3.4 [28]

定理 2.19 ([24]). 相对辛上同调 $SH_M(K;\ \Lambda)$ 具有典范乘积结构和单位元 e_K，使其成为一个分次交换的含单位元 Λ-代数。限制映射保持单位元和乘积结构。□

[24] 的技术也可用于证明以下结果。

定理 2.20. 存在典范的含单位元的 Λ-代数映射

$$PSS_K : QH(M;\Lambda) \to SH_M(K;\Lambda),$$

由复合 $QH(M;\ \Lambda) \to SH_M(M;\ \Lambda) \to SH_M(K;\ \Lambda)$ 给出，它们与限制映射相容。□

以下结论也是标准的。

定理 2.21。对于每个紧 $K \subset M$ 和 $H:\ M \times S^1 \to \mathbb{R}$ 一个在 K 上为负的光滑函数，都存在典范的 $\Lambda_{\geq 0}$- 模映射

$$\kappa : HF(H;\Lambda_{\geq 0}) \to SH^*_M(K;\Lambda_{\geq 0}).$$

这些映射满足

$$\kappa_\Lambda \circ PSS^H_\Lambda = PSS_K,$$

其中 $\kappa_\Lambda = \kappa \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda$. □

定义 2.22. 设 K 是 M 中的一个紧集。令 $a \in QH(M;\ \Lambda)$ 表示一个非零元素，我们作如下定义。

(1) 若 $PSS_K(a) \neq 0$，则称 K 为 SH-a-可见；否则称其为 SH-a-不可见。(2) 若包含于 $M - K$ 中的每个紧集都是 SH-a-不可见的，则称 K 为 SH-a-满。(3) 若任何将 K 包含在其内部的紧区域都是 SH-a-可见的，则称 K 为近乎 SH-a-可见。

当 a 是单位元时，我们在记号中省略它。

由含幺性可知，SH-a-可见性当然等价于 $PSS_K(a) \cdot SH_M(K;\ \Lambda) \neq 0$，特别地，SH-可见性等价于 $SH_M(K;\ \Lambda) \neq 0$.。当 a 是幂等元时， $PSS_K(a)$ 也是幂等元。因此，$PSS_K(a) \cdot SH_M(K;\ \Lambda) \subset SH_M(K;\ \Lambda)$ 是一个理想，它本身也是一个带单位元 $PSS_K(a)$ 的代数。本文的结果只讨论 a 是幂等元的情形。

最后指出，对于幂等元 $A \in SH_M(K;\ \Lambda)$，我们有如下更精细的 Mayer-Vietoris 序列（在相同假设下）：

$$\cdots \to A \cdot SH^*_M(K_1 \cup K_2;\Lambda) \to A \cdot SH^*_M(K_1;\Lambda) \oplus A \cdot SH^*_M(K_2;\Lambda) \to A \cdot SH^*_M(K_1 \cap K_2;\Lambda) \to$$
$$\to A \cdot SH^{*+1}_M(K_1 \cup K_2;\Lambda) \to \cdots.$$

详细讨论请参见 [24] 的注 1.8。

2.4. 辛理想值拟测度。设 K 是闭辛流形 M中的一个紧集。

Dickstein-Ganor-Polterovich-Zapolsky [5] 定义了 K 的量子上同调理想值拟测度：

$$\tau(K) := \bigcap_{K \subset U} \ker(r : SH_M(M;\Lambda) \to SH_M(M-U;\Lambda)) \tag{2.8}$$

其中 U 遍历所有包含 K的开集。

定义 2.23. 若 $\tau(K) \neq 0$，则称 K 是 SH-重的。

2.5. 链级乘积结构。设 $\Bbbk$ 是一个交换环。我们将配备满足分次 Leibniz 法则的微分的 $\Bbbk$-链复形称为带乘积结构的 $\mathbb{Z}/2$分次 $\Bbbk$代数（不一定满足结合律或交换律）。

利用 [1], 的结果，下面的定理显然成立。

定理 2.24. 对于每个紧 $K \subset M$，我们都可以构造一个带有乘积结构的 $\Lambda_{\geq 0}$-链复形 $\mathcal{C}_K$，其底层 $\Lambda_{\geq 0}$-模无挠且在 T-进拓扑下完备，使得

(1) 存在 $\mathbb{Z}/2$分次的 $\Lambda_{\geq 0}$代数之间的优选同构

$$\iota_K : SH^*_M(K;\Lambda_{\geq 0}) \to H^*(\mathcal{C}_K).$$

(2) 设 $H\colon M\times S^1\to\mathbb{R}$ 是一个在 K上取负值的非退化光滑函数。那么存在一个 $\Lambda_{\geq 0}$链映射

$$CF(H;\Lambda_{\geq 0})\to\mathcal{C}_K$$

使得

$$\begin{array}{ccc} HF(H;\Lambda_{\geq 0}) & \xrightarrow{\kappa} & SH^*_M(K;\Lambda_{\geq 0}) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \iota_K} \\ & & H^*(\mathcal{C}_K) \end{array}$$

可交换。

证明。我们定义

$$\mathcal{C}_K^* := SC^*_{M,f\overline{\mathcal{M}}_0^{\mathbb{R}}}(K)$$

如 [1] 中的定理 1.4 所示。该乘积来自 $C_0(f\overline{\mathcal{M}}_0^{\mathbb{R}},\ 2+1;\ \Lambda_{\geq 0})$ 的任意一个闭元，它生成 $H_0(f\overline{\mathcal{M}}_0^{\mathbb{R}},\ 2+1;\ \Lambda_{\geq 0})\ \simeq\Lambda_{\geq 0}$，参见 [1] 中方程 (1.3) 附近的讨论。然后，其中的定理 1.8 和 1.9 证明了其余结论。□

注 2.25。事实上，对于我们的应用，我们甚至不需要 ι_K 保持乘积结构。我们只需要复合

$$QH(M;\Lambda)\to HF(H;\Lambda)\to H^*(\mathcal{C}_K\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda)$$

保持乘积结构。定理 2.24 表明，这个复合保持乘积结构，因为它等于

$$QH(M;\Lambda)\to SH^*_M(K;\Lambda)\to H^*(\mathcal{C}_K\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda)$$

而后者是代数映射的复合。

注 2.26. 应该可以直接在 $\Lambda_{\geq 0}$ 上的望远镜模型（从而也在完备望远镜）上构造乘积。我们事后知道这一点，因为利用 [1] 中推论 1.13 所述的同伦传递结果，可以赋予它一个 A_∞-结构（并且在特征 0 的假设下，赋予它一个 BV_∞-结构）。我们强调，这也需要选择额外的数据：例如，选择从望远镜到大模型的拟同构的一个单侧同伦逆。这些数据的存在性是在 [1] 中借助模型论论证证明的，但没有给出显式构造。

为说明其中的困难，我们试着在望远镜中，将一个来自 $CF(H_n;\ \Lambda_{\geq 0})$ 的元素与一个来自$CF(H_m;\ \Lambda_{\geq 0})$ 的元素相乘（次数未平移的副本）。乘积似乎可以属于任意一个 $CF(H_k;\ \Lambda_{\geq 0})$，其中 H_k 足够大于 H_n 和 H_m（详情见 [1] 中的定义 2.18）。然而，究竟应该选哪一个？或者乘积是否应该有多个分量？我们不知道如何继续采用这种直接方法。最后我们提出一个问题：在 $\Lambda_{\geq 0}$ 上的望远镜模型中，是否存在一种乘积，既满足莱布尼茨法则，又诱导出正确的同调层次的乘积，并且所涉及的模空间问题至多只有两个输入？

3. Proof of results

3.1. 一个代数引理。我们首先陈述一个代数引理，它将在主定理的证明中发挥关键作用。满足此引理的相对辛上同调适当链模型上的代数结构构造见 [1], ，而我们需要的是定理 2.24。

设 (A,d) 是一个带有乘积结构的 Λ-链复形。这意味着在 A 的上同调 $H(A)$ 上存在一个分次乘积。假设存在一个映射 $\mathrm{val}\colon A\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，使得 $\mathrm{val}^{-1}(\infty)=0$ [2]，并且对于 $c\in\Lambda$ 和 $x,y\in A$:

(1) $\mathrm{val}(x\cdot y)\geq\mathrm{val}(x)+\mathrm{val}(y)$;
(2) $\mathrm{val}(dx)\geq\mathrm{val}(x)$; (3) $\mathrm{val}(cx)=\mathrm{val}(c)+\mathrm{val}(x)$;

[2]我们提醒读者，对于 $H^*(A)$ 上诱导的赋值，只有较弱的 $\mathrm{val}(0)=\infty$ 必然成立。

(4) $\mathrm{val}(x+y) \geq \min\{\mathrm{val}(x),\mathrm{val}(y)\}$。

此外，我们假设 A 关于由 val 诱导的非阿基米德范数是完备的。

一个具有乘积结构的 $\Lambda_{\geq 0}$-链复形 $\mathcal{C}$，其底层 $\Lambda_{\geq 0}$-模关于 T-进拓扑完备，可在 $\mathcal{C} \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda$. 上赋予这样的结构。这里， $\mathcal{C} \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda$ 上的赋值定义为

$$val(x) := -\inf\{r \in \mathbb{R} \mid T^r x \in \iota(C)\}, \tag{3.1}$$

其中， $\iota\colon C \to C \otimes \Lambda$ 是自然映射。

我们定义 $xyz := x \cdot (y \cdot z)$。对于任意正整数 k， x^k 也应作类似理解。

引理 3.1. 设 (A, d, val) 如上。设 a 是 $H(A)$ 中的非零幂等元。那么， a 的任意次数为 0 的链级代表元都具有非正赋值。

证明. 取一个闭的齐次元素 y，使得 $[y] = a$ 且 $\deg(y) = 0$。于是我们有$[y \cdot y] = [y] \cdot [y] = [y]$。因此存在 $\alpha \in A$ 使得

$$y - y \cdot y = d\alpha.$$

在等式两边从左侧乘以 y，得到

$$y \cdot y - y \cdot (y \cdot y) = y \cdot d\alpha = d(y \cdot \alpha).$$

在此等式两边从左侧乘以 y，得到

$$y \cdot (y \cdot y) - y \cdot (y \cdot (y \cdot y)) = y \cdot (y \cdot d\alpha) = d(y \cdot (y \cdot \alpha)).$$

然后我们可以重复这一过程，得到

$$y^k - y^{k+1} = d(y^{k-1}\alpha), \quad \forall k \geq 1.$$

对 k 求和，形式上得到

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} (y^{k+1} - y^{k+2}) = d \sum_{k=0}^{+\infty} y^k \alpha.$$

若 $\mathrm{val}(y) > 0$，则项 $y^k\alpha$ 的赋值趋于无穷大，当 k 趋于无穷大时。因此 $\sum_{k=0}^{+\infty} y^k \alpha$收敛。这意味着 $[y] = 0$，矛盾。□

事实上，用同样的证明可以证明下面更一般的结果。

引理 3.2. 设 (A, d, val) 如上。设 $a, b \in H(A)$ 满足 $ba = \lambda a$，其中 $\lambda \in \Lambda^*$，并假设 b 有一个赋值大于 $val(\lambda)$ 的代表元。那么 $a = 0$。□

若要得到前一个引理，令 $a = b$ 和 $\lambda = 1$。读者不妨将我们的讨论与 [3,第 1.6 节.2] 进行比较。

3.2. 重性。现在我们用这个代数引理证明我们的主要定理之一。本节中，令 $a \in QH(M; \Lambda)$ 为一个非零幂等元。

定理 3.3. 对于 M 的紧子集 K，设 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个在 K 上为零的光滑函数。若 $c(a; H) > 0$，则 $PSS_K(a) = 0 \in SH_M(K; \Lambda)$。

证明。我们可以很容易找到一个非退化光滑函数 $H'\colon M \times S^1 \to \mathbb{R}$，它在 K 上为负，且满足 $c(a; H') > 0$。我们考虑定理 2.24 中的映射 $g\colon CF(H'; \Lambda) \to \mathcal{C}_K \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda$，它给出如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} QH(M;\Lambda) & \xrightarrow{PSS_K} & SH^*_M(K;\Lambda) \\ \downarrow{\scriptstyle PSS^{H'}_\Lambda} & \nearrow{\scriptstyle \kappa} & \downarrow{\scriptstyle \iota_K} \\ HF(H';\Lambda) & \xrightarrow{[g]} & H^*(\mathcal{C}_K \otimes_{\Lambda_{\geq 0}} \Lambda) \end{array}$$

令 A 为 $PSS_\Lambda^{H'}(a)$ 在 $CF(H';\Lambda)$ 中的一个代表元，其赋值为正；这样的代表元存在，因为 $c(a;H')>0$。由定理 2.24，只需证明 $[g(A)]=0.$。由于 g 在同调层面保持乘积结构，$[g(A)]$ 是一个幂等元。对于 $\mathcal{C}_K\otimes_{\Lambda_{\geq 0}}\Lambda$ 上的自然赋值，我们有 $val(g(A))\geq val(A)>0$。现在我们使用引理 3.1 完成证明。□

特别地，若 $c(1;H)>0$ then $SH_M(K;\Lambda)=0$。一个直接推论是，SH-可见紧集是重的。

推论 3.4. 对于 M 的一个紧子集 K，若 K 是 SH-a-可见的，则 K 是 a-重的。

证明。假设 K 不是 a-重的，那么存在一个非负函数 H，它在 K 上为零，且根据引理 2.12 有 $\mu(a;H)>0$。然而，定理 3.3 表明，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有 $c(a;nH)\leq 0$（事实上，这是一个等式），这就产生了矛盾。□

接下来我们证明重蕴含 SH-可见。

定理 引理 3.5. 设 K 是 M 的一个紧子集。若 K 是 a-重的，则 $PSS_K(a)\neq 0$.

证明。设 G 是 M 上的一个在 K 上恰好为零的非负函数。由于 K 是 a-重的，根据引理 2.10 以及谱不变量的单调性，我们有 $c(a;nG)=0$。

注意到 G 在 $M-K$ 上严格为正，因此当 n 趋于无穷时，nG 在 $M-K$ 上趋于正无穷。于是，我们可以为 K 找到加速数据 $\{G_n\}$，使得

$$G_n(x,t)<nG(x),\quad \forall n\geq 1,\quad \forall x\in M.$$

根据单调 性，谱不变量的单调性表明，对于任意 $n\geq 1$，我们有 $0>c(a;G_n)$。

设 $x\in CF(G_1)$ 是一个表示 $PSS_\Lambda^{G_1}(a)$ 的元素。容易证明

$$(x,0,0,0,\cdots)\in\widehat{tel}(CF(G_n;\Lambda))$$

是一个闭元，在 $SH_M(K;\Lambda)$ 中代表 $PSS_K(a)$。为方便起见，我们回顾一下 (2.5)：望远镜的微分定义为

$$\delta(x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots)=(d_1x_1+x_1',-d_1x_1',d_2x_2+x_2'+h_1x_1',-d_2x_2',\cdots) \tag{3.2}$$

其中 d_n 是 $CF(G_n;\Lambda)$ 上的 Floer 微分，而 $h_n\colon CF(G_n;\Lambda)\to CF(G_{n+1};\Lambda)$ 是连续性映射。

假设

$$\delta(y_1,y_1',y_2,y_2',\cdots)=(x,0,0,0,\cdots),$$

这等价于

$$d_1y_1+y_1'=x,\quad d_1y_1'=0,\quad d_2y_2+y_2'+h_1y_1'=0,\quad d_2y_2'=0,\cdots. \tag{3.3}$$

第一个等式表明 y_1' 与 x_1 在 $HF(G_1;\Lambda)$ 中同调等价，因此 $\mathrm{val}(y_1')<0$。第三个等式表明 y_2' 与 h_1y_1' 在 $HF(G_2;\Lambda)$ 中同调等价。根据连续性映射与 PSS映射的相容性，h_1y_1' 代表 $PSS_\Lambda^{G_2}(a)$，因此 $\mathrm{val}(y_2')<0$。归纳地，运用相同的论证可得，对所有 $n\geq 1$，都有 $\mathrm{val}(y_n')<0$。因此，$(y_1,y_1',y_2,y_2',\cdots)$ 不是完备望远镜中的元素，这表明 $(x,0,0,0,\cdots)$ 确实不是恰当元。□

注记 3.6. 上述证明实际上表明，如果（y_1、y_1'、y_2、y_2'、$\cdots$）是（x_1、0、0、0、$\cdots$）的一个收敛原像，那么 $\lim_{n\to+\infty}c(a;G_n)=+\infty$。因为 $\mathrm{val}(y_n')\to+\infty$ as $n\to+\infty$，且 y_n' 表示$PSS_\Lambda^{G_n}(a)$。这里的 a 可以是 $QH(M;\Lambda)$ 中的任意非零类，不一定是幂等元。这一事实本身可能具有独立的意义，稍后还将用到。

现在，推论 3.4 和定理 3.5 给出了重集与 SH可见集之间的等价性，而且完全一般。接下来我们讨论一些直接的推论。

引理 3.7. 设 $K\subset M$ 是一个紧集，并考虑一个紧集序列 $K_1\supset K_2\supset\ldots$，满足 $\bigcap K_n=K.$。若对于所有 $n\geq 1$，K_n 都是 a-重的（分别为 a-超重的），则 K 是 a-重的（分别为 a-超重的）。

证明. 我们只证明 a-重性。 a-超重性的证明类似。

我们将再次使用引理 2.12 来证明 K 是重的。设 H 是 M 上的一个非负光滑函数，并且在 K 上为零。定义 ϵ_n 为 H 在 K_n上的最大值。显然，我们有 $\epsilon_n \to 0$ 为$n \to \infty$。由于对于每个 n，K_n 都是 a-重的，因此 $\mu(a; H) \leq \max_{K_n} H = \epsilon_n$。于是， $\mu(a; H) = 0$ ，且 K 是a-重的。□

另一方面，目前尚不清楚相对辛上同调在近似下将如何表现。特别是，SH-可见与近似 SH-可见这两个概念是否等价，此前尚无定论。现在，结合推论 3.4、定理 3.5 和引理 3.7，我们得到了肯定的答案。

推论 3.8。 K 的紧子集 M 是 SH-a-可见的，当且仅当它是近似 SH-a-可见的 .

证明。注意，对于任意紧集 K ，我们都可以构造紧区域 $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ ，使得$\bigcap K_n = K$；例如，可以在 M 上找到一个非负光滑函数，使其零点集恰好为 K ，然后使用 Sard 定理。如果 K 是近似 SH-可见的，那么 K_n 是 SH-可见的，因此对于所有 n都是重的。引理 3.7 表明， K 是重的，因而是 SH-可见的。□

另一个应用涉及 SH-重性的概念。

命题 3.9。如果 M 中的紧子集 K 是 SH-重的，那么它就是重的。

证明。对于紧集 K 和包含 K的开集 U ，我们可以找到另一个开集 V ，使得 $M - U \subset V$、 $\bar{V} \cap K = \emptyset$以及 $\partial\bar{V} \cap \partial\bar{U} = \emptyset$。如果 SH_M（$\bar{U}$； Λ） $= 0$，那么关于对（U， V）的 Mayer–Vietoris 序列¯ ¯告诉我们

$$\ker(r : SH_M(M; \Lambda) \to SH_M(\bar{V}; \Lambda)) = 0.$$

¯因此，对于 SH-重集 K，任何包含 K 的开集 U 都有 $SH_M(U; \Lambda) \neq 0$。由此我们推得 K 近似 SH-可见。接着，推论 3.8 和 3.4 表明 K 是重集。□

这以完全一般的形式回答了猜想 1.6 的一个方向。对于相反的方向，我们尚不清楚答案。

3.3. 超重性。我们的第一个结果是一个推论，它源于超重集与任意重集相交这一事实。

推论 3.10. 设 $a \in QH(M; \Lambda)$ 是一个非零幂等元。对于 M 的一个紧子集 K，若 K 是 a-超重的，则 K 是 SH-a- 满的。

证明。假设 K 不是 SH-a-满的。那么，存在 M 的一个与 K 不相交且 SH-a-可见的紧子集 K' 。根据推论 3.4， K' 是 a-重的；这与 K 是 a-超重的矛盾，因为 a-重集与 a-超重集相交。□

我们不知道如何证明一般情形下的逆命题，但将讨论一种得出部分逆命题的策略。为简单起见，本文其余部分将限制在 $a = 1$ 。我们从一个关键但简单的引理开始。

引理 3.1 1. 设 (M, ω) 是一个满足 $c_1(M, \omega)|_{\pi_2(M)} = 0$ 的辛流形。我们有

$$c([vol]; H) = \sup\{c(a; H) \mid \Pi(a, 1) \neq 0\} \tag{3.4}$$

对于任意 $H \in C^\infty(M)$。因此，我们有

$$c(1; H) = -c([vol]; -H).$$

证明。首 先，我们有 $\Pi([vol], 1) \neq 0$。因此 $\sup\{c(a; H) \mid \Pi(a, 1) \neq 0\} \geq c([vol]; H)$。

接下来我们证明反方向的不等式。取一个类 a ，使得 $\Pi(a, 1) \neq 0$。由于 (M, ω) 在球面类上是辛 Calabi-Yau，量子乘积保持 $\mathbb{Z}$-分次在$QH(M, \Lambda)$上的自然分次。特别地，我们必须有

$$a = a_0[vol] + a'$$

其中 a' 的次数小于 $2n$，且 $a_0 \in \Lambda$ 满足 $\mathrm{val}(a_0) = 0$。回顾一下，对于次数不同的两个类 x、y，谱不变量满足

$$c(x+y;H) = \min\{c(x;H), c(y;H)\}$$

对于任意函数 H。因此我们得到

$$c(a;H) = \min\{c(a_0[vol];H), c(a';H)\} \leq c(a_0[vol];H) = c([vol];H).$$

这表明 $\sup\{c(a;H) \mid \Pi(a,1) \neq 0\} \leq c([vol];H)$。最后一个推论由引理 2.7 得出。□

注 3.12。当 M 是

(1) 负单调，或 (2) 正单调且其最小陈数大于 n 时，等式 (3.4) 也成立，其中 $2n$是 M的实维数。

回想一下，为了证明 K 是超重的，我们需要估计 $c(1;nH)$，使其对所有在 K上为零的非正 H 都满足 $n \to \infty$。利用引理（在适用时），我们可以转而尝试估计$c([vol];nH)$，使其对所有在 K上为零的非负 H 都满足 $n \to \infty$。这就是命题 3.13 的内容。在解释之前，我们先回顾一下，余链复形 A 在 Λ 上的边界深度（参见 [26, 第 2] 节）定义为

$$\beta(A) := \sup_{x \in \mathrm{im}(\delta)} \inf_{y \in A} \{\mathrm{val}(x) - \mathrm{val}(y) | dy = x\}. \tag{3.5}$$

命题 3.13. 假设对于 $a \in QH(M;\Lambda)$ 以及一个在K上为零的非负 $H \in C^\infty(M)$，我们有

- $c(a;nH) \to \infty$ 为 $n \to \infty$，并且
- $CF(nH;\Lambda)$ 的边界深度存在一个与n无关的一致上界。

那么，$PSS_K(a) = 0$.

证明。该证明与定理 3.5 的证明有一些相似之处。我们不打算证明 $PSS_K(a)$ 的链级代表元不是恰当的，而是希望利用关于 $c(a;nH)$ 和边界深度的条件找到它的原像。

令 H_n 为 K 的一个加速数据，使得

- $H_n(x,t) < nH(x), \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in M,$
- $c(a;H_n) \to \infty$ as $n \to \infty$, and
- there is $B > 0$ such that the boundary depth $\beta(H_n) := \beta(CF(H_n;\Lambda)) \leq B$ for all n.

令 $x \in CF(H_1)$ 为表示 $PSS_\Lambda^{G_1}(a)$ 的一个元素，因此

$$(x,0,0,0,\cdots) \in \widehat{tel}(CF(H_n;\Lambda))$$

是一个闭元，表示 $SH_M(K;\Lambda)$ 中的 $PSS_K(a)$。望远镜的微分由 (3.2) 给出：

$$\delta(x_1,x_1',x_2,x_2',\cdots) = (d_1x_1 + x_1', -d_1x_1', d_2x_2 + x_2' + h_1x_1', -d_2x_2', \cdots)$$

我们要构造一个元素 $(y_1,y_1',y_2,y_2',\cdots)$，使得

$$\delta(y_1,y_1',y_2,y_2',\cdots) = (x,0,0,0,\cdots),$$

（等价形式见 (3.3)）。y_i 和 y_i' 将通过归纳定义。

式（3.3）的第一个等式要求 y_1' 与 x_1 在 $HF(H_1;\Lambda)$ 中同调等价。特别地，我们可以取 $y_1 = 0$ 和 $y_1' = x$。式（3.3）的第三个等式表明，y_2' 与 h_1y_1' 在$HF(H_2;\Lambda)$中同调等价。根据延续映射与 PSS映射的相容性，h_1y_1' 代表 $PSS_\Lambda^{H_2}(a)$，因此我们可以选取 y_2' 作为 $PSS_\Lambda^{H_2}(a)$ 的链级代表元，使得 $\mathrm{val}(y_2') = c(a;H_2)$。由于 y_2' 和 h_1y_1' 在 $HF(H_2;\Lambda)$ 中归结为同一个类，我们可以找到满足方程 $d_2y_2 + y_2' + h_1y_1' = 0$的 y_2。此外，根据边界深度的定义（3.5），对于任意 $\epsilon > 0$，我们可以

找到这样的 y_2，使得 $\mathrm{val}(y_2' + h_1 y_1') - \mathrm{val}(y_2) < \beta(H_2) + \epsilon$。由归纳法，运用相同的论证，我们得到对于所有 $n \geq 1$,

- $\mathrm{val}(y_n') = c(a; H_n)$ 和
- 值$(y_n' + h_{n-1} y_{n-1}') -$ 值$(y_n) < \beta(H_n) + \epsilon \leq B + \epsilon$。

由于 $\mathrm{val}(h_{n-1} y_{n-1}') \geq \mathrm{val}(y_{n-1}')$ 且 $\mathrm{val}(y_n' + h_{n-1} y_{n-1}') \geq \min\{y_n', h_{n-1} y_{n-1}'\}$，$c(a; H_n)$ 在 n 趋于无穷时趋于无穷这一事实意味着，当 n 趋于无穷时，$\mathrm{val}(y_n)$ 也趋于无穷。因此，$(y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots)$ 是完备望远镜的一个元素，这表明 $(x, 0, 0, 0, \cdots)$ 是恰当的。

□

定理 3.14. 设 K 是一个紧子集，且 $H \in C^\infty(M)$ 是一个在 K上为零的非负函数。假设 nH 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 (3.4)，并且 $CF(nH; \Lambda)$ 的边界深度存在一个一致上界。若 $PSS_K([vol]) \neq 0$，则 K是超重的。

证明。由 $PSS_K([vol]) \neq 0$和命题 3.13 可知，$c([vol]; nH)$ 有一致上界。在所有 nH都满足条件 (3.4) 的情况下，我们因此得到 $c(1; -nH)$ 有一致下界，从而 $\mu(1; -H) = 0.$。因此，这意味着 K的超重性。□

注 3.15. 当 K 是李乌维尔区域时，施加指标有界条件是获得边界深度一致界的一种方法。更多讨论见 $[16, 24, 5, 22]$。

注 3.16. 如果没有条件 (3.4)，我们就需要对所有满足$\Pi(a, 1) \neq 0$的 $c(a; nH)$ 给出一个统一上界。这并不能由对所有此类 a均有 $PSS_K(a) \neq 0$推出，而且似乎更难获得。另一方面，我们最终证明的结论严格强于 $\mu(1; -H) = 0.$

处理边界深度这一假设有一种方便的方法，即将相对辛上同调替换为约化辛上同调 $[11]$，，其定义如下：取$\frown\{H_n\}$作为 K的加速数据，并构造完备望远镜 $tel(CF(H_n; \Lambda))$，然后将约化辛上同调 $SH^{red}{}_M^*(K; \Lambda)$ 定义为核 $\ker(\delta\colon \widehat{tel}^*(CF(H_n; \Lambda)) \to \widehat{tel}^{*+1}(CF(H_n; \Lambda)))$，再对像 $\mathrm{im}(\delta\colon \widehat{tel}^{*-1}(CF(H_n; \Lambda)) \to \widehat{tel}^*(CF(H_n; \Lambda)))$ 的闭包取商，其中 $\underline{\mathrm{im}}$ 表示关于 (2.7) 的闭包像。

—

$\mathbb{Z}/2$分次的 Λ向量空间

$$SH_M^{red}(K; \Lambda)$$

是良定义的，且与 K 的加速数据选择无关，见 $[11]$。存在一个自然映射

$$SH_M(K; \Lambda) \to SH_M^{red}(K; \Lambda), \tag{3.6}$$

当且仅当 $\mathrm{im}(\delta) = \overline{\mathrm{im}(\delta)}$ 时，它是同构。其核恰为赋值为无限的元素所构成的子空间。

首先，我们在具备上述所有概念后，给出命题 1.15 的证明。

命题 1.15 的证明。$SH_M^{red}(K; \Lambda) = 0$ 意味着 $SH_M(K; \Lambda)$ 中的单位元赋值为无限。利用定理 2.24 的链级乘积结构以及基本代数引理（引理 3.1），我们得到单位元必为零。证明至此完成。□

注 3.17。此时值得记住，$tel(CF(H_n; \Lambda))$ 自然带有 $\mathbb{Z}/2N$分次，其中 N是 M 的最小陈数。在这种情况下，我们可以取 $\mathbb{Z}/2N$分次完备化（当 $N = 0$ 时，这可能不同于单纯取完备化），而且 $SH_M(K; \Lambda)$ 和 $SH_M^{red}(K; \Lambda)$ 仍然都是 $\mathbb{Z}/2N$分次的。命题 1.15（及其证明）在这一版本中同样成立。

以下定理是定理 3.14 的对应版本，其中相对辛上同调被约化辛上同调所取代。

定理 3.18. 设 (M, ω) 是一个满足 (3.4) 的闭辛流形。对于 M 的紧子集 K，如果 $PSS([vol])$ 在 $SH_M^{red}(K; \Lambda)$ 中经由 (3.6) 映到 $\in SH_M(K; \Lambda)$ 的像非零，那么 K 是超重的。

证明。证明过程几乎与命题 3.13 和定理 3.14 的证明完全相同。

首先，如果 $c(a;nH) \to \infty$ 如 $n \to \infty$，那么我们可以尝试像命题 3.13 中那样，为 $PSS_K(a)$ 的一个链级代表元构造一个原像。使用命题 3.13 中的记号，显然，当 k 趋于无穷时，$\delta(y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots y_k, y_k', 0, 0, \ldots)$ 收敛到 x。因此，$x \in \mathrm{im}(\delta)$ □

下面的引理给出了 $SH_M(K;\Lambda) \simeq SH_M^{red}(K;\Lambda)$ 的一个充分条件。

引理 3.19. 若 $tel(CF(H_n))$ 具有有限边界深度，则 $\mathrm{im}(\delta) = \mathrm{im}(\overline{\delta})$，因此 $SH_M(K;\Lambda) \simeq SH_M^{red}(K;\Lambda)$。

证明。设 $x \in \overline{\mathrm{im}(\delta)}$ 和 $x_n \in \mathrm{im}(\delta)$ 是一个序列，使得 $\lim_n x_n = x$，因此 $\lim_n \mathrm{val}(x_{n+1} - x_n) = \infty$。令 β 为 $tel(CF(H_n;\Lambda))$ 的边界深度，并取 y_n 使得 $\delta y_n = x_{n+1} - x_n$ 且 $\mathrm{val}(y_n) \geq \mathrm{val}(x_{n+1} - x_n) - 2\beta$。显然，$y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是一个收敛和，满足 $\delta y = x$。因此，$x \in \mathrm{im}(\delta)$ 也成立。

□

下面的引理说明，$tel(CF(H_n;\Lambda))$ 的边界深度与 K 的加速数据选择无关。因此，我们也称 $tel(CF(H_n;\Lambda))$ 的边界深度为 K 的边界深度。

引理 3.20。$tel(CF(H_n;\Lambda))$ 的边界深度 β 等于 $SH_M(K;\Lambda_{\geq 0})$ 的最大挠指数 τ，且与加速数据的选择无关。

证明。取 $x, y \in \widehat{tel}(CF(H_n;\Lambda))$，使得 $\delta y = x$。令 $x' := T^{-\mathrm{val}(x)}x$，并令 $y' := T^{-\mathrm{val}(y)}y$。它们都属于包含映射 $tel(CF(H_n;\Lambda_{\geq 0})) \to tel(CF(H_n;\Lambda))$ 的像，因此我们可以将它们视为 $\widehat{tel}(CF(H_n;\Lambda_{\geq 0}))$ 中的元素。显然，我们有 $\delta y' = T^{\mathrm{val}(x)-\mathrm{val}(y)}x'$，因此 $T^{\mathrm{val}(x)-\mathrm{val}(y)}[x'] = 0$ 属于 $SH_M(K;\Lambda_{\geq 0})$。根据 β 的定义，对于固定的 x 和 $\epsilon > 0$，我们可以找到一个 y，使得 $\mathrm{val}(x) - \mathrm{val}(y) < \beta + \epsilon$。由此可得 $\tau \leq \beta$。

反过来，根据 τ 的定义，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $x' \in \widehat{tel}(CF(H_n;\Lambda_{\geq 0}))$，使得 $T^{\tau-\epsilon}[x'] \neq 0$，但 $T^{\tau}[x'] = 0$。令 $x \in tel(CF(H_n;\Lambda))$ 为 x' 的像。由 $T^{\tau-\epsilon}[x'] \neq 0$ 可知，不存在 $y \in tel(CF(H_n;\Lambda))$ 使得 $\delta y = x$ 且 $\mathrm{val}(x) - \mathrm{val}(y) \leq \tau - \epsilon$。因此，这证明了 $\beta \leq \tau$。□

在 $\mathbb{Z}$-分次的语境下，讨论在固定次数上具有有限边界深度是有意义的。请注意，在所有次数上都可能具有有限边界深度，但不具有上文所定义的有限边界深度。

推论 3.21。设 (M,ω) 是一个满足 $c_1(TM)|_{\pi_2(M)} = 0$ 的闭辛流形。设 K 是 M 的一个紧子集。假设

- K 是 SH-满的，并且
- 存在一个紧集序列 $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$，其中每个紧集的边界深度均有限，且都包含位于其内部的 K，使得 $\bigcap K_i = K$。

那么 K 是超重的。

证明。假设 K 是 SH-满的。那么根据 Mayer–Vietoris 性质，对于任意一个紧集 K'，只要它包含位于其内部的 K，我们就知道 $QH(M,\Lambda) \to SH_M(K',\Lambda)$ 是一个同构。

由引理 3.11、定理 3.18 和引理 3.19 可立即得知，对于所有 $n \geq 1$，K_n 都是超重的。利用引理 3.7，我们得出 K 也超重。□

回顾注 3.17，当 $c_1(TM) = 0$ 时，我们可以取 $\mathbb{Z}$-分次完备化，而所得的 $SH_M(K;\Lambda)$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的。随后，我们可以将有限边界深度这一假设替换为更弱的假设，即边界深度在所有次数上均有限。这样一来，推论 3.21 的适用性便大大增强，见定理 1.13。结合这些说明，定理 1.13 的证明现已完成。

References

1. M.Abouzaid, Y.Groman 和 U.Varolgunes *Framed E^2 structures in Floer theory.* arXiv:2210.11027. 2. M.Abouzaid, P.Seidel *An open string analogue of Viterbo functoriality.*《Geometry & Topology》14 (2010), no. 2, 627–718. 3. S.Borman, N.Sheridan 和 U.Varolgunes *Quantum cohomology as a deformation of symplectic cohomology.*《Journal of Fixed Point Theory and Applications》volume 24, Article number: 48 (2022). 4. K.Cieliebak, A.Floer, H.Hofer 和 K.Wysocki *Applications of symplectic homology II: Stability of the action spectrum.*《Mathematische Zeitschrift》, September 1996, Volume 223, Issue 1, pp 27-45. 5. A.Dickstein, Y.Ganor, L.Polterovich 和 F.Zapolsky *Symplectic topology and ideal-valued measures.* arXiv:2107.10012. 6. M.Entov *Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology.* arXiv:1404.6408 (2014). 7. M.Entov 和 L.Polterovich *Calabi quasimorphism and quantum homology.* Int. Math. Res. Not. 2003, 30, 1635 1676 no. – . 8. M.Entov 和 L.Polterovich *Quasi-states and symplectic intersections.* Comment. Math. Helv. 81 (2006), no. 1, 75–99. 9. M.Entov 和 L.Polterovich *Rigid subsets of symplectic manifolds.* Compos. Math. 145 (2009), no. 3, 773–826. 10. K.Fukaya, Y.-G.Oh, H.Ohta, K.Ono *Spectral invariants with bulk, quasi-morphisms and Lagrangian Floer theory.*《Mem. Amer. Math. Soc.》260 (2019), no. 1254, x+266 pp. 11. Y.Groman *Floer theory and reduced cohomology on open manifolds.* arXiv:1510.04265, 即将在《Geometry & Topology》发表 12. H.Hofer 和 D.Salamon *Floer homology and Novikov rings.* The Floer memorial volume, 483-524, Progr. Math., 133, Birkh¨auser, Basel, 1995. 13. V.Humili` ere, F.Le Roux 和 S.Seyfaddini *Towards a dynamical interpretation of Hamiltonian spectral invariants on surfaces* Geom. Topol. ( ), no. – . 14. S.Ishikawa *Spectral invariants of distance functions.* J. Topol. Anal. 8 (2016), no. 4, 655–676. 15. R.Leclercq 和 F.Zapolsky *Spectral invariants for monotone Lagrangians.* J. Topol. Anal. 10 (2018), no. 3, 627–700. 16. M.McLean *Birational Calabi-Yau manifolds have the same small quantum products.* Ann. of Math. (2) 191 (2020), no. 2, 439-579. 17. K.Morimichi *Superheavy Lagrangian immersions in surfaces.* J. Symplectic Geom. 17 (2019), no. 1, 239–249. 18. Y.-G.Oh *Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds.* 辛与泊松几何的广度, 525–570, Progr. Math., 232, Birkh¨auser Boston, Boston, MA, 2005. 19. J.Pardon *Contact homology and virtual fundamental cycles.* J. Amer. Math. Soc. 32 (2019), no. 3, 825–919. 20. L.Polterovich *Symplectic rigidity and quantum mechanics* Eur. Math. Soc., 155-179, European Congress of Mathematics, Z¨urich, 2018. 21. S.Piunikhin, D.Salamon 和 M.Schwarz *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology.* 接触与辛几何 (剑桥, 1994), 171–200, Publ. Newton Inst., 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996. 22. Y.Sun *Heavy sets and index bounded relative symplectic cohomology.* arXiv:2206.00066. 23. S.Tanny *A max inequality for spectral invariants of disjointly supported Hamiltonians.* arXiv:2102.07487. 24. D.Tonkonog 和 U.Varolgunes *Super-rigidity of certain skeleta using relative symplectic cohomology.* Journal of Topology and Analysis, 即将发表. 25. M.Usher *Spectral numbers in Floer theories.* Compos. Math. 144 (2008), no. 6, 1581–1592. 26. M.Usher *Boundary depth in Hamiltonian Floer theory and its applications to Hamiltonian dynamics and coisotropic submanifolds.* Israel J. Math. ( ), - . 27. U.Varolgunes *Mayer-Vietoris property for relative symplectic cohomology.* 作者网站上的论文版本. 28. U.Varolgunes *Mayer–Vietoris property for relative symplectic cohomology.*《Geometry & Topology》25 (2021) 547-642. 29. C.Viterbo *Functors and Computations in Floer Homology with Applications* Geom. Funct. Anal. ( ), no. - . 30. L.Wolfgang *L2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory.* 柏林，海德堡：Springer Berlin Heidelberg, 2002. CHEUK YU MAK 数学科学学院，南安普顿大学，南安普顿，SO17 1BJ，英国

电子邮箱：C.Y.Mak@soton.ac.uk

YUHAN SUN

希尔中心，罗格斯大学数学系，弗雷林海森路110号，皮斯卡特维，新泽西州08854，美国
电子邮箱：sun.yuhan@rutgers.edu

Umut Varolgunes，数学系，博阿兹奇大学，34342 贝贝克，伊斯坦布尔，土耳其；电子邮箱：varolgunesu@gmail.com