Kopel非对称双寡头模型中的平衡点及其稳定性

李晓亮[a] 和陈孔燕*[a]

[a]Sc数字经济学院，东莞城市学院，中国东莞 523419 a

摘要

本文利用多种基于符号计算的工具，研究Kopel非对称双寡头模型中的平衡点及其稳定性。我们探讨Kopel模型中平衡点可能的位置，讨论多个正平衡点存在的可能性，并建立给定数量的平衡点存在的充要条件。此外，若两个双寡头企业采用最佳反应或同质适应性预期，我们首次为不同数量的正平衡点存在建立了严格条件。

Keywords: duopoly; Kopel's model; equilibrium; local stability; symbolic computation

arXiv:2301.12628v1 [econ.TH] 30 Jan 2023

1 引言

双寡头是一种介于垄断与完全竞争之间的市场形态 [6]。双寡头竞争研究是产业组织领域的核心内容。大约三十年前以来，经济学家一直致力于用具有单峰反应函数的离散动力系统来建立双寡头竞争模型。其中，Kopel [8] 假设需求函数为线性、成本函数为非线性，提出了一个著名的双寡头模型，可表示为以下映射。

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-a)x(t) + auy(t)(1-y(t)), \\ y(t+1) = (1-b)y(t) + bvx(t)(1-x(t)), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0 < a,\ b \leq 1$ 且 $u,\ v > 0$。在此映射中，x（t）和 y（t）分别表示两家双寡头企业的产量。此外，a 和 b 表示两家企业适应性预期的调整系数，而 u 和 v 则衡量一方的行为对其竞争对手收益产生的正外部性的强度。

Kopel模型在数学上颇具趣味，因为它将两个标准逻辑映射耦合在一起。此后，研究者对该模型进行了深入研究、扩展和推广。例如，Agiza[1] 为平衡点的稳定性确立了严格条件，并研究了 $a = b$ 和 $u = v$这一特殊情形下Kopel模型的分岔与混沌。Bischi等人 [3] 证明了映射（1）中多稳态和周期吸引子的存在。Bischi和Kopel [2] 采用临界曲线方法分析全局分岔，并阐明了Kopel模型吸引域拓扑结构的定性变化。许多研究者似乎通过数值模拟观察到了映射（1）中的混沌动力学，但这并非严格证明。对此，Wu等人 [15]运用拓扑马蹄理论，对Kopel模型中混沌动力学的存在给出了严格的计算机辅助验证。此外，C´anovas和Mu˜noz-Guillermo [4] 从解析角度证明，如果Kopel模型中的企业是同质的，那么混沌便会存在。此外，Zhang和Gao [17] 假设每家企业都可以通过简单的外推式预测技术预测对手的产量，并据此扩展了该模型。Elsadany和Awad [5]修改了Kopel博弈，假设一方采用朴素预期，而另一方采用适应性方法，并应用反馈控制法控制混沌行为。Torcicollo [13] 通过引入自扩散项和交叉扩散项推广了映射（1）。

在关于 Kopel 模型的丰富文献中，几乎没有针对 $u \neq v$ 非对称情形下平衡点及其稳定性的解析讨论，这令我们颇感意外。本研究的首要目标是填补这一空白。对 $u \neq v$ 非对称情形进行解析研究的主要障碍在于，无法显式求得闭式均衡点。为克服这一障碍，我们采用了基于符号计算的若干工具，例如三角分解 [14] 和结式 [12] 方法。我们探讨了多个正平衡点存在的可能性，这一问题备受经济学家关注。我们为给定数量的平衡点存在建立了充要条件。首次针对双寡头企业采用最佳反应（$a = b = 1$）或同质适应性预期（$a = b$）的情形，获得了不同数量正均衡点存在的严格条件。

本文其余部分的结构安排如下。第 2 节探讨映射 (1) 中平衡点的数量及其可能的位置。第 3 节对平衡点的局部稳定性进行解析研究。第 4 节给出结论。

*通讯作者：chenkongyan@dgcu.edu.cn

2 平衡分析

据我们所知，Li等人 [9] 首次探讨了 $u \neq v$的非对称情形下平衡点的数量。本节旨在对此情形进行更系统的分析。在映射 (1) 中令 $x(t+1) = x(t) = x^*$和 $y(t+1) = y(t) = y^*$，即可得到平衡方程

$$\begin{cases} x^* = uy^*(1-y^*), \\ y^* = vx^*(1-x^*). \end{cases} \tag{2}$$

只要 u，$v \leq 4$，显然，$[0,1] \times [0,1]$是映射(1)的陷集，这意味着，如果初始信念（$x(0)$ $y(x)$）取自 $[0,1] \times [0,1]$，则所有轨迹都将保持在 $[0,1] \times [0,1]$中。此外，根据下面的命题1可知，如果 $uv \geq 1$（即使 u，$v > 4$），那么，只要初始信念取自 $[0,1] \times [0,1]$，轨迹所趋近的平衡点就应位于 $[0,1] \times [0,1]$中。在命题1的证明中，三角分解法发挥了重要作用，它将高斯消元法扩展到了多项式方程的求解。有关三角分解的更多信息，请参阅 [14, 10] 。此外，还需要用到结式的概念。下面的引理揭示了结式的主要性质，也可在 [12]中找到。

引理1. 设 A 和 B 是 x中的两个一元多项式。存在 x 中的两个多项式 F 和 G，使得

$$FA + GB = \operatorname{res}(A, B, x).$$

此外，当且仅当$\operatorname{res}(A, B, x) = 0$时，$A$ 和 B 在复数域中有公共零点。

命题1. 在映射(1)中，若 $uv \geq 1$，则所有平衡点都保持在 $[0,1] \times [0,1]$ 内。

证明. 通过使用三角分解法，我们可以将方程（2）的解分解为两个三角集的零点，即 $[y^*, x^*]$ 和 $[T_2, T_1]$，其中

$$T_1 = uv^2x^{*3} - 2\,uv^2x^{*2} + \left(uv^2 + uv\right)x^* - uv + 1, \quad T_2 = y^* + vx^{*2} - vx^*.$$

$[y^*, x^*]$ 的零点对应于平衡点 $E_0(0,0)$，显然它位于 $[0,1] \times [0,1]$内。因此，我们关注另一个分支 $[T_2, T_1]$。

由于式（2）中 x^*、y^* 与 u、v 的对称性，我们只需证明，当 $uv \geq 1$时，T_1 的任意零点都满足 $x^* \in [0,1]$。可以计算得到 $\operatorname{res}(T_1, 1-x^*, x^*) = 1$。根据引理1，我们知道，当 u 和 v 变化时，T_1 的任意零点 x^* 都不能接触直线 $x^* = 1$。因此，T_1 的任意零点 x^* 都小于 1。此外，我们有 $\operatorname{res}(T_1, x^*, x^*) = uv - 1$。这意味着，当参数点（$u$，$v$）穿过曲线 $uv = 1$时，T_1 的某个零点的符号可能发生变化。容易验证，当 $uv > 1$ 时，T_1 的任意零点均为正，反之亦然。当 $uv = 1$时，我们可以将 $v = 1/u$ 代入 T_1，并求得三个复零点 0、$1 + \sqrt{-u}$ 和 $1 - \sqrt{-u}$。显然，唯一的实零点 $x^* = 0$ 位于 $[0,1]$ 中。综上，当 $uv \geq 1$时，T_1 的所有零点始终位于 $[0,1]$ 内，从而证明完毕。 □

从经济学角度来看，满足 $x^*, y^* > 0$ 的正均衡点更为重要，因此下文主要对此进行考察。

定理1. 记 $R_1 = u^2v^2 - 4\,u^2v - 4\,uv^2 + 18\,uv - 27$。若 $R_1 \neq 0$，则当且仅当 $R_1 > 0$ 时存在三个互异的正均衡点；当且仅当 $R_1 < 0$ 和 $uv > 1$ 时存在唯一的正均衡点。若 $R_1 = 0$，则当且仅当 $(u,v) \neq (3,3)$ 时存在两个互异的正均衡点；当 $(u,v) = (3,3)$ 时，存在唯一的正均衡点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。

证明. 容易看出，T_2 关于 y^* 是线性的，这意味着与 $[T_2, T_1]$ 对应的平衡点数量等于 T_1 的互异实根数量。因此，接下来我们着重分析 T_1 的实根。

对于一元多项式 $F(x)$，若同时满足 $F(\bar{x}) = 0$和 $F'(\bar{x}) = 0$，则零点 $\bar{x}$的重数大于 1，其中 F'是 F的导数。我们有 $\operatorname{res}(T_1, T_1', x^*) = -u^3v^6R_1$。因此，当参数点 (u,v) 随着 u,v的取值变化而不跨越曲线 $R_1 = 0$ 时，T_1 的实零点的性质（例如重数和个数）不应发生变化。如图1所示，曲线 $R_1 = 0$（红色曲线）将所关注的参数集 $\{(u,v) \mid u,v > 0\}$分成两个区域。在由 $R_1 > 0$定义的深灰色区域内，只需检查一个样本点即可确定零点的性质，例如 $(4,4)$。在 $(4,4)$ 处，$T_1 = 64\,x^{*3} - 128\,x^{*2} + 80\,x^* - 15$，可由 3 4 求解，$\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}$。因此，当 $R_1 > 0$时，T_1 存在三个互异实根。这意味着，当$R_1 > 0$时，映射 (1) 中存在三个不同的正均衡点。

在由 $R_1 < 0$ 定义的另一个区域中，我们同样选取一个样本点，例如（2，2）。我们有 $T_1 = 8\,x^{*3} - 16\,x^{*2} + 12\,x^* - 3$，可通过 1 2，$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$，$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ 求解。因此，当 $R_1 < 0$ 时，T_1 仅存在一个实解。然而，在命题1的证明中，已经证明当 $uv > 1$时，T_1 的零点为正。因此，当 $R_1 < 0$ 且 $uv > 1$时，存在唯一的正平衡点。

此外，根据引理1，在曲线 $R_1 = 0$ 上，我们有 $T_1 = T_1' = 0$。因此，T_1 的某些零点的重数应大于 1，这意味着当参数点 (u,v) 从区域 $R_1 > 0$ 变化到其边界 $R_1 = 0$时，T_1 的某些零点会重合。T_1 关于 x^* 的次数为 3，因此 T_1 的零点重数最大可取 3。在这种情况下，$T_1 = 0$、$T_1' = 0$和 $T_1'' = 0$ 应同时成立。可以计算 $\operatorname{res}(T_1, T_1'', x^*) = -8\,u^3v^6\left(2\,uv^2 - 9\,uv + 27\right)$。通过求解 $2\,uv^2 - 9\,uv + 27 = 0$ 和 $R_1 = 0$，我们得到 $(u,v) = (3,3)$，此时 T_1 有一个重数为 3 的唯一零点 $x^* = 2/3$。因此，若 $(u,v) = (3,3)$，则存在一个唯一的正平衡点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$。但是，若曲线 $uv = 0$ 上 $(u,v) \neq (3,3)$，则 $T_1 = 0$、$T_1' = 0$和 $T_1'' \neq 0$。在这种情况下，T_1有三个实零点，其中两个相等。这意味着存在两个不同的正平衡点。证明完毕。

□

我们在图1中总结了上述结果。存在三个和一个唯一正平衡点的区域分别以深灰色和浅灰色标示。

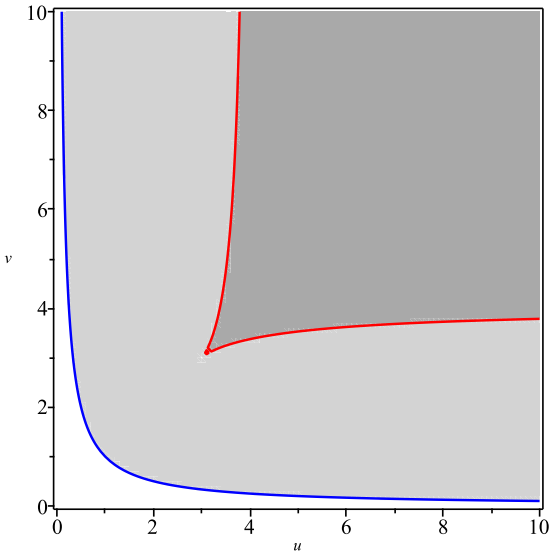


图1：映射 (1) 的参数集 $\{(u,\ v)\,|\,u,\ v>0\}$ 按不同平衡点数量划分的区域。蓝色和红色曲线分别由 $uv=1$ 和 $R_1=0$定义。在深灰色和浅灰色区域内，分别存在三个和一个正均衡点。

3 局部稳定性

映射 (1) 在平衡点 $(x^*,\ y^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}1-a & ua(1-2\,y^*)\\ vb(1-2\,x^*) & 1-b\end{bmatrix}. \tag{3}$$

于是， J 的特征多项式变为

$$CP(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{Tr}(J)\lambda+\mathrm{Det}(J),$$

其中

$$\mathrm{Tr}(J)=2-a-b,\quad \mathrm{Det}(J)=(1-a)(1-b)-uvab(1-2\,x^*)(1-2\,y^*),$$

分别为 J 的迹和行列式。根据 Jury判据 [7], ，局部稳定性的条件包括:

1. $CD_1^J\equiv CP(1)=1-$迹$(J)+$行列式(J)
>0, 2. $CD_2^J\equiv CP(-1)=1+$迹$(J)+$行列
式$(J)>0$, 3. $CD_3^J\equiv 1-$行列式$(J)>0$.

对于零平衡点 $E_0(0,0)$，我们有

$$\begin{aligned}CD_1^J(E_0)&=ab(1-uv),\\ CD_2^J(E_0)&=ab(1-uv)-2a-2b+4,\\ CD_3^J(E_0)&=ab(uv-1)+a+b.\end{aligned}$$

容易推得，当 $1-\frac{a+b}{ab}<uv<1$ 时， E_0 局部稳定。下文中，我们将关注正均衡点。

已知当平衡点在 $CD_1^J=0$、 $CD_2^J=0$ 或 $CD_3^J=0$ 处失去稳定性时，离散动力系统可能发生局部分岔。记 $\mathcal{T}=[T_2,T_1]$。首先，我们通过计算来考察发生 $CD_1^J=0$ 的可能性

$$\mathrm{res}(CD_1^J,\mathcal{T})\equiv\mathrm{res}(\mathrm{res}(CD_1^J,T_2,y^*),T_1,x^*).$$

可得

$$\mathrm{res}(CD_1^J,\mathcal{T})=-a^3b^3u^3v^6\,(uv-1)\,R_1.$$

根据引理1， CD_1^J和 $\mathcal{T}=0$ 蕴含 res$(CD_1^J,\ \mathcal{T})=0$。因此，在映射(1)的正平衡点处，$CD_1^J=0$ 的必要条件是 $uv=1$ 或 $R_1=0$。同样，对于 $CD_2^J=0$ 和 $CD_3^J=0$的可能性，我们计算得

$$\mathrm{res}(CD_2^J,\mathcal{T})=-u^3v^6R_2,\quad \mathrm{res}(CD_3^J,\mathcal{T})=u^3v^6R_3,$$

其中

$$R_2 = a^3b^3u^3v^3 - 4\,a^3b^3u^3v^2 - 4\,a^3b^3u^2v^3 + 17\,a^3b^3u^2v^2 + 4\,a^3b^3u^2v + 4\,a^3b^3uv^2 - 2\,a^3b^2u^2v^2 - 2\,a^2b^3u^2v^2 - 45\,a^3b^3uv + 8\,a^3b^2u^2v + 8\,a^3b^2uv^2 + 8\,a^2b^3u^2v + 8\,a^2b^3uv^2 + 4\,a^2b^2u^2v^2 - 36\,a^3b^2uv - 36\,a^2b^3uv - 16\,a^2b^2u^2v - 16\,a^2b^2uv^2 + 27\,a^3b^3 - 4\,a^3buv + 64\,a^2b^2uv - 4\,ab^3uv + 54\,a^3b^2 + 54\,a^2b^3 + 16\,a^2buv + 16\,ab^2uv + 36\,a^3b - 36\,a^2b^2 + 36\,ab^3 - 16\,abuv + 8\,a^3 - 120\,a^2b - 120\,ab^2 + 8\,b^3 - 48\,a^2 + 48\,ab - 48\,b^2 + 96\,a + 96\,b - 64,$$

$$R_3 = a^3b^3u^3v^3 - 4\,a^3b^3u^3v^2 - 4\,a^3b^3u^2v^3 + 17\,a^3b^3u^2v^2 + 4\,a^3b^3u^2v + 4\,a^3b^3uv^2 - a^3b^2u^2v^2 - a^2b^3u^2v^2 - 45\,a^3b^3uv + 4\,a^3b^2u^2v + 4\,a^3b^2uv^2 + 4\,a^2b^3u^2v + 4\,a^2b^3uv^2 - 18\,a^3b^2uv - 18\,a^2b^3uv + 27\,a^3b^3 - a^3buv - 2\,a^2b^2uv - ab^3uv + 27\,a^3b^2 + 27\,a^2b^3 + 9\,a^3b + 18\,a^2b^2 + 9\,ab^3 + a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

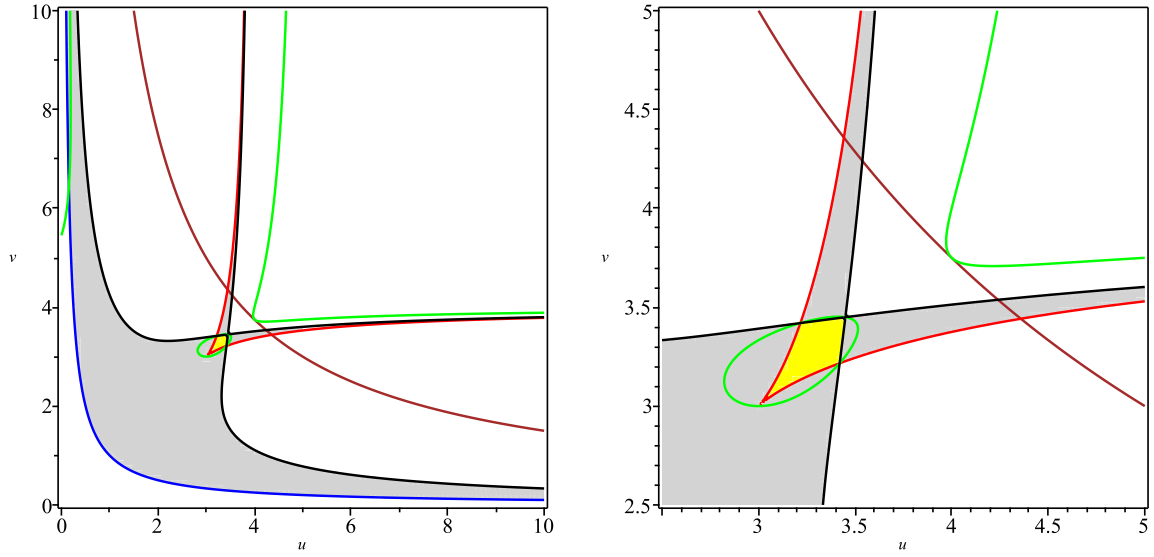
因此，当 $uv = 1$ 或 $R_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ 时，平衡点可能发生局部分岔。然而，我们需要指出，对于给定的 i， CD_i^J 和 $\mathrm{res}(CD_i^J, \mathcal{T})$ 的符号可能不同。即使 $\mathrm{res}(CD_i^J, \mathcal{T})$ 的符号固定， CD_i^J的符号也可能改变。例如，若保持 $a = b = 1$不变，当 $u = v = 4$或 $u = v = \frac{13}{4}$时，我们有 $\mathrm{res}(R_1, \mathcal{T}) < 0$、$\mathrm{res}(R_3, \mathcal{T}) < 0$ 和 $\mathrm{res}(R_3, \mathcal{T}) > 0$。然而，当 $u = v = 4$时，存在三个平衡点，即 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}\right)$，以及$\left(\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}, \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right)$，其中 CD_3^J的符号分别为 $+$, $-$和 $-$。而当 $u = v = \frac{13}{4}$ 时，存在三个平衡点$\left(\frac{9}{13}, \frac{9}{13}\right)$, $\left(\frac{17}{26} - \frac{\sqrt{17}}{26}, \frac{17}{26} + \frac{\sqrt{17}}{26}\right)$和 $\left(\frac{17}{26} + \frac{\sqrt{17}}{26}, \frac{17}{26} - \frac{\sqrt{17}}{26}\right)$，其中 CD_3^J的符号分别为 $+$, $+$和 $+$。备注1。然而可以推得，若连续改变参数点，且不穿过参数空间中的代数簇 $\mathrm{res}(CD_i^J, \mathcal{T}) = 0$，那么 CD_i^J不会消失（变为零），其符号也将保持不变。这意味着，在由 $\mathrm{res}(CD_i^J, \mathcal{T}) = 0$, $i = 1, 2, 3$ 划分的每个区域内， CD_i, $i = 1, 2, 3$ 的符号都不会改变，因此只需选取一个样本点，就可以确定满足 $CD_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ 的实零点数量。

首先，我们考虑 $a = b = 1$ 的情形。这个情形简单得多，但本身具有极大的经济学意义，因为两家双寡头企业实际采用了最佳反应函数。我们记

$$S_2 \equiv R_2|_{a=b=1} = (uv - 1)\,R_1,$$
$$S_3 \equiv R_3|_{a=b=1} = u^3v^3 - 4\,u^3v^2 - 4\,u^2v^3 + 15\,u^2v^2 + 12\,u^2v + 12\,u\,v^2 - 85\,uv + 125.$$

根据备注1，我们得到具有不同数量稳定正均衡点的区域，如图2所示。由于篇幅有限，我们省略计算细节。在图2中，有两个稳定正均衡点的区域以黄色标示，而有一个稳定正均衡点的区域以浅灰色标示。事实上，要用代数方式描述由代数簇围成的区域可能相当复杂。例如，黄色区域无法用 $uv - 1$、 R_1 和 S_3 的不等式来描述（它们在黄色区域内的符号与白色区域内的相同，而 (4,4) 位于白色区域内）。不过，通过引入附加多项式，可以用代数方式描述该区域；这些多项式可在所谓的广义判别式列表中找到。读者可参阅 [11, 16] 了解更多信息。

我们在定理2中正式总结所得结果，其中 A_1 和 A_2 是从广义判别式列表中选出的附加多项式。需要指出的是，尽管理论上这一过程完全可行，但搜索这些多项式的计算开销相当大。



(a) $(u,\ v) \in (0,\ 10) \times (1,\ 10)$　　(b) $(u,\ v) \in (2.5,\ 5) \times (2.5,\ 5)$

图2：参数集 $\{(u,\ v) \mid u,\ v > 0\}$ 在 $a = b = 1$ 情况下，不同稳定正均衡数量对应的划分。蓝色、红色、黑色、棕色和绿色曲线分别由 $uv = 1$、 $R_1 = 0$、 $S_3 = 0$、 $A_1 = 0$ 和 $A_2 = 0$ 定义。黄色和浅灰色区域分别有两个和一个稳定正均衡。

定理2. 当 $a=b=1$ 时，若 $R_1>0$、$S_3>0$、$A_1<0$ 和 $A_2>0$，则存在两个稳定正均衡点，其中

$$A_1=uv-15,\quad A_2=u^2v^2-4\,u^2v-5\,uv^2+21\,uv+11\,v-60.$$

此外，一个唯一的稳定正平衡点存在，当 $uv>1$, $R_1<0$, $S_3>0$ 或 $uv>1$, $R_1>0$, $S_3<0$。

在 $a=b$的一般情形下，两个双寡头企业采用同质适应性预期。我们可以进行类似的计算。读者可以理解，根据我们对这些方法的实现，无法在合理的短时间内计算出存在两个稳定正平衡点区域的代数描述。不过，我们可以对存在两个稳定正平衡点的区域进行几何描述：该区域由 $R_1=0$（红色曲面）、$H_3=0$（蓝色曲面）、$a=0$和 $a=1$ 所围成（见图3）。对于存在一个稳定正平衡点的区域，我们的计算可以得出结果，详见定理3。

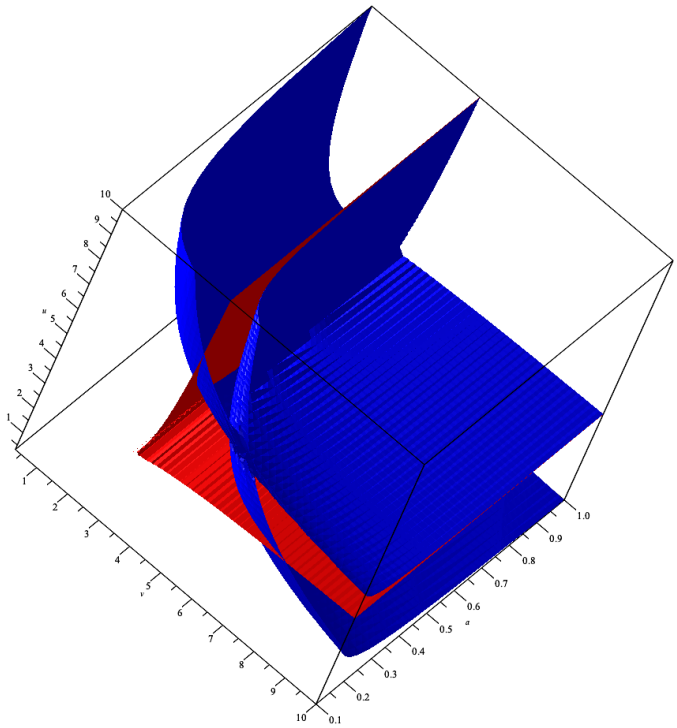


图3：在 $a=b$情形下，映射(1)的参数集 $\{(u,\ v,\ a)\mid u,\ v>0,\ 0<a\le 1\}$。$R_1=0$和$H_3=0$ 的曲面分别以红色和蓝色表示。存在两个稳定正平衡点的区域由曲面 $R_1=0$、$H_3=0$、$a=0$和 $a=1$围成。

定理3. 在 $a=b$ 的情形下，若 $uv>1$, $R_1<0$, $H_3>0$ 或 $uv>1$, $R_1>0$,$H_3<0$，则存在唯一的稳定正平衡点，其中 $H_3\equiv R_3|_{b=a}$，即，

$$H_3=a^3u^3v^3-4\,a^3u^3v^2-4\,a^3u^2v^3+17\,a^3u^2v^2+4\,a^3u^2v+4\,a^3uv^2-2\,a^2u^2v^2-45\,a^3uv+8\,a^2u^2v+8\,a^2uv^2-36\,a^2uv$$
$$+27\,a^3-4\,auv+54\,a^2+36\,a+8.$$

在 $a\neq b$ 的一般情形下，寻找代数描述的计算会变得尤为复杂。此外，由于涉及的参数超过3个，也无法绘制几何描述。我们将留待未来研究探索这一情形。

4 结论

本研究填补了有关Kopel非对称双寡头模型中平衡点及其稳定性的解析研究几乎空白这一缺口。我们在研究中采用了多种基于符号计算的工具，例如三角分解和结式。符号计算得出的结果精确且严谨，因此可用于证明与多项式方程和代数簇相关的定理。我们推导出了Kopel模型中平衡点可能出现的位置。具体而言，只要 $uv\ge 1$，所有平衡点都应位于 $[0,1]\times[0,1]$（见命题1）。我们探讨了多个正平衡点存在的可能性，并建立了给定数量的平衡点存在的充要条件（见定理1）。此外，若两家双寡头企业采用最佳反应（$a=b=1$）或同质适应性预期（$a=b$），我们首次为不同数量的正平衡点存在建立了严格条件（见定理2和定理3）。然而，在 $a\neq b$的一般情形下，我们未能得出给定数量的稳定平衡点存在的完整条件。我们指出，根本困难在于，计算由代数簇围成区域的代数描述代价高昂。

致谢

作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。本研究得到广东省哲学社会科学基金项目（项目编号：GD21CLJ01）、东莞城市学院重大研究与培育项目（项目编号：2021YZDYB04Z和2022YZD05R）以及东莞市社会发展科技项目（项目编号：20211800900692）的资助。

参考文献

[1] H. Agiza。关于Kopel映射的稳定性、分岔、混沌与混沌控制分析。*Chaos, Solitons & Fractals*，10(11):1909–1916，1999。[2] G. I. Bischi 和 M. Kopel。具有适应性预期的非线性双寡头博弈中的平衡点选择。*Journal ofEconomic Behavior & Organization*，46(1):73–100，2001。[3] G. I. Bischi、C. Mammana 和 L. Gardini。双寡头博弈中的多稳态与周期吸引子。*Chaos, Solitons &Fractals*，11(4):543–564，2000。[4] J. S. C´anovas 和 M. Mu˜noz-Guillermo。关于Kopel的Cournot双寡头模型的动态。*Applied Mathematicsand Computation*，330:292–306，2018。[5] A. A. Elsadany 和 A. M. Awad。异质Kopel双寡头博弈中的动力学分析与混沌控制。*IndianJournal of Pure and Applied Mathematics*，47(4):617–639，2016。[6] J. L. G. Guirao 和 R. G. Rubio。Cournot双寡头的扩展：应用数学视角。*Applied MathematicsLetters*，23:836–838，2010。[7] E. Jury、L. Stark 和 V. Krishnan。动态系统的内点与稳定性。*IEEE Transactions on Systems, Man, andCybernetics*，(10):724–725，1976。[8] M. Kopel。Cournot双寡头模型中的简单与复杂调整动态。*Chaos, Solitons & Fractals*，7(12):2031– 2048，1996。[9] B. Li、H. Liang、L. Shi 和 Q. He。寡头企业之间具有非对称响应的Kopel模型的复杂动态。*Chaos, Solitons & Fractals*，156:111860，2022。[10] X. Li、C. Mou 和 D. Wang。将有限域上的多项式集合分解为简单集合：零维情形。*Computers & Mathematics with Applications*，60(11):2983–2997，2010。[11] X. Li 和 D. Wang。利用三角分解和实解分类计算半代数经济中的平衡点。*Journal of Mathematical Economics*，54:48–58，2014。[12] B. Mishra。算法代数。Springer-Verlag，纽约，1993。[13] I. Torcicollo。关于非线性双寡头博弈模型的动态。*International Journal of Non-Linear Mechanics*，57:31–38，2013。[14] D. Wang。消元方法。符号计算丛书。Springer，纽约，2001。[15] W. Wu、Z. Chen 和 W. Ip。Cournot双寡头经济模型中的复杂非线性动态与混沌控制。*Nonlinear Analysis: Real World Applications*，11(5):4363–4377，2010。[16] L. Yang、X. Hou 和 B. Xia。一类不等式型定理的自动发现完整算法。*Science in China Series F*，44:33–49，2001。[17] Y. Zhang 和 X. Gao。具有外推性预期的同质双寡头的平衡点选择。*Communicationsin Nonlinear Science and Numerical Simulation*，67:366–374，2019。