arXiv:2301.12722v1 [math.CT] 30 Jan 2023

忠实函子和无记忆函子上的拓扑生成结构

Minani Iragi*, [a]、David Holgate[b]和Josef Slapal[c]

[a], [c]布尔诺理工大学数学研究所，Technick´a 2，616 69，布尔诺，捷克共和国。[b]西开普大学数学与应用数学系，贝尔维尔7535，南非。

摘要

本文从一个相对于子对象的双纤维化定义的、适当的拓扑生成序范畴概念出发，引入并研究忠实函子和无记忆函子上的拓扑生成序。此外，本文证明了这种方法能够刻画形式闭包算子，并引出形式内部算子的定义。转而研究相对于所引入序的特殊态射，我们证明：如果一个序保持某态射的余笛卡尔提升的余定义域，则该态射相对于此序是严格的；而如果一个序反映其笛卡尔提升的定义域，则该态射是终的。文中还给出了拓扑学和代数中的关键实例，以展示我们的结果。

美国数学学会学科分类（2020）：18A20, 06B23, 54B30, 18A05, 18D30。

关键词：忠实函子、形式、（余）笛卡尔提升、闭包算子、内部算子、拓扑生成序、（余）定义域函子。

电子邮件地址：[a]Minani.Iragi@vutbr.cz, [b]dholgate@uwc.ac.za, [c]slapal@fme.vutbr.cz。

*通讯作者。第一作者感谢布尔诺理工大学（BUT）通过项目 MeMoV II（编号 CZ.02.2.69/0.0/0.0/18-053/0016962）提供的支持。第二作者感谢南非国家研究基金会。第三作者感谢 BUT 通过专项研究项目（编号 FSI-S-20-6187）提供的支持。

1 引言

范畴 $\mathcal{C}$ 上的拓扑生成序 $\sqsubset$，其中该范畴配备了一个适用于态射的适当（$\mathcal{E}, \mathcal{M}$）分解结构，是一族二元关系；其中每个关系都定义在对象 X 在 $\mathcal{C}$ 中的子对象格 sub$X$ 上（并满足某些公理）（[9]）。这一概念对于 Cs´asz´ar（[3]）提出的合拓扑生成结构至关重要；这些结构旨在为拓扑空间、一致空间和邻近空间提供统一的方法。该概念在为范畴闭包（[5]）、内部（[10]）和邻域（[17]）算子的研究提供统一框架方面发挥了显著作用，并促使人们在范畴中引入拟一致结构（参见例如 [7,8, 12, 14, 13]）。在研究范畴上的拓扑结构时，拓扑生成序更易于使用。

Dikranjan 和 Giuli 提出了一种在范畴上引入拓扑结构的新方法，他们最初定义了范畴闭包算子。有限 $\mathcal{M}$-完备范畴 $\mathcal{C}$ 上的闭包算子是 $\mathcal{M}$的一个带基点自函子，其中类 $\mathcal{M}$ 被视为箭头范畴 $\mathcal{C}^2$ 的满子范畴，其对象是从$\mathcal{M}$出发的态射；该函子与余域函子 $cod: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$“交换”。函子 cod是一个双纤维化，事实上，范畴闭包算子是相对于 $\mathcal{M}$-子对象的双纤维化定义的。最近， [6]中将 $\mathcal{M}$替换为任意范畴，并将余域函子替换为一个忠实且无记忆的函子 F（在 $[15],$中称为 $form$），由此得到了形式闭包算子的概念。形式闭包算子具有良好的性质，并保留了范畴闭包算子的大部分性质。特别是，这些闭包算子通过幂等性、相容性和极小性的概念刻画上反射子范畴。

将范畴拓扑生成序视为相对于子对象的双纤维化定义，我们用 $cod: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ 上相对于 $\mathcal{C}$ 的一种适当形式取代函子；本文第3节开头将对此作出说明。在这种情况下，对象 $X \in \mathcal{C}$ 的子对象格被视为 X 上的 $fibre$，因此对于 $\mathcal{C}$ 中任意的 $f: X \longrightarrow Y$，我们将子对象的像视为在该子对象处对 f 作余笛卡尔提升所得的余定义域。对偶地，我们将 Y 的子对象的原像视为在该子对象处对 f 作笛卡尔提升所得的定义域。由此，我们得以在适当的忠实无记忆函子上引入并研究拓扑生成序的概念，它导出形式内部算子，并将近期引入的形式闭包作为一种特殊情形纳入其中。我们研究形式上的拓扑生成结构，动机源于拓扑函子，特别是遗忘函子 F : Top $\longrightarrow$ Set；而我们的方法能够得到作用于拓扑函子的商对象、子对象以及纤维上的拓扑生成序——若干示例见第5节。

第2节回顾了研究形式上的拓扑生成结构所需的一些范畴概念与结果。第3节研究形式上的拓扑生成结构。我们证明，形式闭包算子在形式拓扑生成结构范畴中构成一个反射子范畴。随后引入形式上的内部算子，并证明对于每个纤维都是完备格的形式，这些算子与一类特殊的形式拓扑生成序一一对应。第4节研究相对于所引入的拓扑生成序的严格态射与终态射。其中证明了，若某个形式拓扑生成序保持该态射的余笛卡尔提升的余定义域，则该态射相对于此形式拓扑生成序是严格的。相对于此拓扑生成序的终态射，是指其拓扑生成序反映其笛卡尔提升的定义域的态射。本文最后以第5节收尾，该节给出若干示例以阐明我们的结果。

2 预备知识

我们考虑一个函子 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$。对于对象 X，其在 $\mathcal{C}$ 中位于 X 上方的纤维是 $F^{-1}X$ 的子范畴 $\mathcal{A}$，它由满足 $FA = X$ 的对象 A 以及满足 $Fg = 1_X$ 的态射 g 构成（例如参见 [1]）。当对于任意 f、g：$\mathcal{A}$ 中的 $A \longrightarrow B$，都有 $Ff = Fg \Rightarrow f = g$ 时，函子 F 是忠实的。若对于任意 f：$\mathcal{A}$ 中的同构 $A \longrightarrow B$，都有 $Ff = 1_{FA} \Rightarrow A = B$ 和 $f = 1_A$，则 F 是无记忆的。对于任意 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$，我们定义关系 $\leq_f\colon F^{-1}X \longrightarrow F^{-1}Y$ 如下：$A \leq_f B$ 当且仅当存在一个 $\mathcal{A}$- 态射 $A \longrightarrow B$，使得 $F(A \longrightarrow B) = f$。在 $f = 1_X$ 的情况下，我们写作 $A \leq_X B$（有时省略下标，写作 $A \leq B$）。若 $A \leq B$ 且 $B \leq A$，则称 A 和 B 纤维同构。当然，若 F 是无记忆的，且 A 和 B 纤维同构，则它们同构（记作 $A \cong B$）。对于任意对象 $X \in \mathcal{C}$，$\leq_X$ 具有自反性和传递性。若函子 F 是忠实的，则 $\leq_X$ 反对称当且仅当 F 是无记忆的。

设 $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个忠实函子。根据 [4]，$\mathcal{A}$-态射 $\alpha\colon A \longrightarrow B$是 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon FA \longrightarrow FB$的一个 F-提升（或简称提升），当且仅当 $F\alpha = f$。有时，如果一个 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon FA \longrightarrow FB$ 具有一个提升$\alpha\colon A \longrightarrow B$，我们也称它为 $\mathcal{A}$-态射。$\mathcal{C}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 在 $B \in F^{-1}Y$处的笛卡尔提升，是一个以 B为余域的 f的提升，并且具有如下性质：对于任意 $C \in \mathcal{A}$，只要 $f \circ g\colon FC \longrightarrow FB$是一个 $\mathcal{A}$-态射，$\mathcal{C}$-态射 $g\colon FC \longrightarrow FA$就是一个 $\mathcal{A}$-态射。显然，$\alpha\colon A \longrightarrow B$是 $f\colon X \longrightarrow Y$在 $B \in F^{-1}Y$处的笛卡尔提升，当且仅当 $A \leq_f B$，并且对于任意 $C \in \mathcal{A}$及任意 $\mathcal{C}$-态射 $g\colon FC \longrightarrow FA$，都有 $C \leq_{f\circ g} B \Leftrightarrow C \leq_g A$。对偶地，$f\colon X \longrightarrow Y$在 $A \in F^{-1}X$ 处的余笛卡尔提升，是一个以 A 为定义域的 f 的提升，并且具有如下性质：对于任意 $\mathcal{A}$-对象 C，只要 $g \circ f\colon FA \longrightarrow FC$

是一个 $\mathcal{A}$-态射。显然， $\alpha: A \longrightarrow B$ 是 $f: X \longrightarrow Y$ 在$A \in F^{-1}X$处的余笛卡尔提升，当且仅当 $A \leq_f B$，并且对于任意 $C \in \mathcal{A}$及任意 $\mathcal{C}$-态射 $g: FB \longrightarrow FC$，都有 $B \leq_g C \Leftrightarrow A \leq_{g\circ f} C$。如果存在， f 在 A处的余笛卡尔提升的余域记作 $f.A$。对偶地，如果存在， f 在 B处的笛卡尔提升的定义域记作 $B.f$。因此，若 $\alpha: B.f \longrightarrow B$ ($\alpha: A \longrightarrow f.A$) 是 $f: X \longrightarrow Y$ 在 B (A) 处的笛卡尔（余笛卡尔）提升，则当 $C \in \mathcal{A}$ 时有 $C \leq_g B.f \Leftrightarrow C \leq_{f\circ g} B$ ($f.A \leq_g C \Leftrightarrow A \leq_{g\circ f} C$)，且 $g: FC \longrightarrow X$ ($g: Y \longrightarrow FC$) 是一个 $\mathcal{C}$-态射。

按照 [2], ，若函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 对每个态射 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $B \in F^{-1}Y$，都存在 f 在 B 处的笛卡尔提升，则称其为纤维化。若 $F^{op}: \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$ 是纤维化，其中上标 "op" 表示 "对偶"，则称 F 为余纤维化。若 F 同时是纤维化和余纤维化，则称其为 $bifibration$ 。按照 [15], ，范畴 $\mathcal{C}$ 上的形式是指忠实且无记忆的函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$。若 F 是余域函子 $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{C}$ 中单态射的一个类，并将其视为箭头范畴 $\mathcal{C}^2$ 的满子范畴，则称 F 为 $\mathcal{M}$- 子对象的形式。与 $\mathcal{M}$- 子对象的形式对偶的概念是 $\mathcal{M}$- 商对象的形式。根据 [16], ，若范畴 $\mathcal{C}$ 上的形式 F 的每个纤维都有上界和下界，则称其为局部有界。 $F^{-1}X$ 的上界（分别是下界）记为 1^X （分别是 0^X）。若 F 局部有界，且对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f: X \longrightarrow Y$， $f.1^X$ 和 $0^X.f$ 均存在，则称其为有界。下面回顾的引理 [16] 是态射的（余）笛卡尔提升性质的推论。

引理 2.1. 设 F 是 $\mathcal{C}$ 上的一个形式，且 $f: X \longrightarrow Y$、 $g: Y \longrightarrow Z$ $\mathcal{C}$ 是态射。

(1) 对任意 $A \in F^{-1}X$，若 $f.A$ 存在，则 $g.(f.A)$ 存在，当且仅当 $(g \circ f).A$ 存在；此时 $g.(f.A) = (g \circ f).A$。对偶地，对任意 $B \in F^{-1}Z$，若 $B.g$ 存在，则 $(B.g).f$) 存在，当且仅当 $B.(g \circ f)$ 存在；此时 $(B.g).f = B.(g \circ f)$。

(2) 对任意 A_1、 $A_2 \in F^{-1}X$，若 $f.A_1$ 和 $f.A_2$ 均存在，则 $A_1 \leq A_2$ 蕴含 $f.A_1 \leq f.A_2$。对偶地，对任意 B_1、 $B_2 \in F^{-1}Y$，若 $B_1.f$ 和 $B_2.f$ 均存在，则 $B_1 \leq B_2$ 蕴含 $B_1.f \leq B_2.f$。

定义 2.1. 形式 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 上的闭包算子 C 或形式闭包算子，是满足以下条件的映射族 $\{C_X: F^{-1}X \longrightarrow F^{-1}X \mid X \in \mathcal{C}\}$

($C1$) 对所有 $A \in F^{-1}X$和 $X \in \mathcal{C}$， $A \leq C_X(A)$。

($C2$) 对任意态射 $f: X \longrightarrow Y$in $\mathcal{C}$, $A \leq_f B \Rightarrow C_X(A) \leq_f C_Y(B)$，对所有 $A \in F^{-1}X$and $B \in F^{-1}Y$ 都成立。

我们用 Clo(F) 表示 F 上所有闭包算子构成的汇。Clo(F) 按照如下方式由 $\preceq$ 排序：对于任意 $C, C' \in$ Clo(F)，当且仅当对所有 $A \in F^{-1}X$ and $X \in \mathcal{C}$，$C_X(A) \leq C'_X(A)$。F 上的闭包算子 C 若满足 $C \circ C = C$，则称其为幂等的；也就是说，对所有 $A \in F^{-1}X$ and $X \in \mathcal{C}$，$C_X(C_X(A)) = C_X(A)$。若 F 是一种形式，使得对任意 $f\colon X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$，$A \in F^{-1}X$ and $B \in F^{-1}Y$，$f.A$ 和 $B.f$ 均存在，则定义 2.1 中的 $(C2)$ 等价于 $(C3)$ $f.A \leq_Y B \Rightarrow f.C_X(A) \leq_Y C_Y(A)$，也等价于 $(C4) A \leq_X B.f \Rightarrow C_X(A) \leq_X C_Y(B).f$。对于适当的 A, B，我们还可以将 $(C2)$ 表示为 $(C2')A \leq_X B \Rightarrow C_X(A) \leq_X C_Y(B)$ 与 $(C2'')$ $f.C_X(A) \leq_Y C_Y(f.B)$ 的合取。

3 形式上的 Topogenous 序

在本文余下部分，我们研究范畴 $\mathcal{C}$ 上的形式 F，其满足：对于任意f，若 $X \longrightarrow Y$ 属于 $\mathcal{C}$，则 $A \in F^{-1}X$和 $B \in F^{-1}Y$ 均存在。下面给出一个有用的引理。

引理 3.1. 设 F 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的形式，$f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，并设$A \in F^{-1}X$和 $B \in F^{-1}Y$。则 $A \leq_X (f.A).f$，且 $f.(B.f) \leq_Y B$。此外，若 F 反映截面，且 f 是一个截面，则 $A \cong (f.A).f$。对偶地，若 F 反映余截面，且f 是一个余截面，则 $f.(B.f) \cong B$。若 F 反映同构，且 f 是一个同构，其逆为 g，则对任意 $A \in F^{-1}X$，$f.A \cong A.g$。

证明。设 $\beta\colon (f.A).f \longrightarrow f.A$ 是 f 在 $f.A$ 处的一个笛卡尔提升。由于 $f = f \circ 1_X\colon FA \longrightarrow F(f.A)$，存在一个态射 $h\colon A \longrightarrow (f.A).f$，使得 $Fh = 1_X$。因此 $A \leq_X (f.A).f$。对偶论证表明 $f.(B.f) \leq_Y B$。设 $\alpha\colon A \longrightarrow f.A$ 是 f 在 A 处的一个余笛卡尔提升，f 是一个截面，且 F 保持截面。由于 $F(\alpha) = F(\beta) = f$，可得 $F(\beta \circ h) = F(\beta) \circ F(h) = F(\alpha) \circ 1_X = F(\alpha)$。由于 F 忠实，我们有 $\alpha = \beta \circ h$，并且 α 是一个截面，因为 F 保持截面。因此，h 是一个截面，即存在一个态射$k\colon (f.A).f \longrightarrow A$，使得 $k \circ h = 1_A$。现在，$Fk = Fk \circ 1_X = Fk \circ Fh = F(k \circ h) = F1_A = 1_X$。因此 $(f.A).f \leq_X A$。于是，A 和 $(f.A).f$ 是纤维同构的，因而同构。对偶论证可证明 $f.(B.f) \cong B$。证明的最后一部分由以下事实得出：f 是同构，当且仅当 f 是一个截面和一个截面。 □

由引理 3.1 不难看出，$f.-\colon F^{-1}X \longrightarrow F^{-1}Y$ 将每个 $A \in F^{-1}X$ 映射到 $f.A$，而 $-.f\colon F^{-1}Y \longrightarrow F^{-1}X$ 将每个 $B \in F^{-1}Y$ 映射到 $A.f$，二者构成一个伽罗瓦连接，即 $f.A \leq_Y B \Leftrightarrow A \leq_X B.f$。此外，对引理 3.1 证明的分析表明，$F$ 反映截面的条件可以弱化为：f 的余笛卡尔提升保持截面。对偶地，

F 反映余截面的条件可以弱化为： f 的笛卡尔提升保持余截面。

设 F 为 $\mathcal{M}$-子对象的形式， $\mathcal{C}$ 为一个有限 $\mathcal{M}$-完备范畴，并赋予态射一个适当的（$\mathcal{E}$， $\mathcal{M}$）分解结构。则对于任意 $\mathcal{C}$-态射f： $X \longrightarrow Y$， $F^{-1}X$ 是子对象格，而 $f.\ m$（分别为 $n.\ f$）只是子对象的像（分别为原像），其中 m 和 n 适当。此外，如果 $\mathcal{C}$ 具有二元积，使得 $\mathcal{C}$ 中的截面属于 $\mathcal{M}$，那么引理 3.1 中的条件均得到满足。

定义 3.1. F 上的 $A\ topogenous\ order\ \sqsubset$ 是一族 $\{\sqsubset_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 二元关系，其中每个 $\sqsubset_X$ 定义在 $F^{-1}X$ 上，并满足：

（$T1$）对于每个 A， $A \sqsubset_X B \Rightarrow A \leq_X B\ B \in F^{-1}X$。

（$T2$）对于每个 A， $A' \leq_X A \sqsubset_X B \leq_X B' \Rightarrow A' \sqsubset_X B'\ B \in F^{-1}X$。

($T3$) 对每个态射 f: $X \longrightarrow Y$在 $\mathcal{C}$中， $f.\ A \sqsubset_Y B \Rightarrow A \sqsubset_X B.\ f$对于 $A \in F^{-1}X$和 $B \in F^{-1}Y$。

显然，当 F是 $\mathcal{M}$-子对象的形式且 $\mathcal{C}$ 是有限 $\mathcal{M}$-完备的时，定义 3.1 给出了范畴拓扑生成结构。我们用 TORD(F) 表示 F上所有拓扑生成结构组成的汇。按如下方式用 $\subseteq$ 对 TORD(F) 中的元素排序：对于任意 $\sqsubset$、$\sqsubset' \in \in$TORD(F)， $\sqsubset \subseteq \sqsubset'$当且仅当对所有 $X \in \mathcal{C}$ 和 A， $B \in F^{-1}X$、 $A \sqsubset_X B \Rightarrow A \sqsubset'_X B$。若 $A \sqsubset_X B$ 意味着存在$C \in F^{-1}X$使得 $A \sqsubset_X C \sqsubset_X B$，则称 F 上的拓扑生成序 $\sqsubset$ 是可插值的。我们用 INTORD(F) 表示 F上所有插值拓扑生成结构组成的类。考虑 F上拓扑生成序的以下条件。

(TJ) For $\mathcal{A}_I = \{A_i \mid i \in I\} \subseteq F^{-1}X$, $(\forall i \in I,\ A_i \sqsubset_X B) \Rightarrow \bigvee A_i \sqsubset_X B$ if $\bigvee A_i$ exists.

(TM) For $\mathcal{B}_I = \{B_i \mid i \in I\} \subseteq_X F^{-1}X$, $(\forall i \in I,\ A \sqsubset_X B_i) \Rightarrow A \sqsubset_X \bigwedge B_i$ if $\bigwedge B_i$ exists.

满足条件（TM）（分别为（TJ））的 F 上所有拓扑生成序构成的汇，将记为 MTORD(F)（分别为 JTORD(F)）。MTORD(F) 和 JTORD(F) 在 TORD(F) 中对任意交封闭，因此是反射子范畴。接下来我们将证明，对于适当的形式，满足条件（TM）的拓扑生成序与 F 上的闭包算子一一对应。

命题 3.2. 设 F 是一种形式，其每个纤维都是完备格。对于满足条件 (TM)、定义在 F 上的拓扑生成序 $\sqsubset$，以及定义在 F 上的闭包算子 C，这些映射

$$C \longmapsto \sqsubset^C \ \ and\ \ \sqsubset \longmapsto C^{\sqsubset}$$

其中 $A \sqsubset_X^C B \Leftrightarrow C_X(A) \leq_X B$且 $C^{\sqsubset} = \bigwedge\{B \in F^{-1}X \mid A \sqsubset_X B\}$，对于任意 $X \in \mathcal{C}$ 和 A，$B \in F^{-1}X$ 定义了 MTORD(F) 与 Clo(F) 之间互为逆的序同构。此外，$C^{\sqsubset}$ 是幂等的，当且仅当 $\sqsubset$ 是可插值的。

证明。对于 $\sqsubset^C$，很容易看出满足 $(T1)$ 和 $(T2)$，而对于 $C^{\sqsubset}$，$(C1)$ 显然成立。设 f: $X \longrightarrow Y$是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $\sqsubset \in$TORD(F)。那么，对于任意满足 $A \leq_f B$ 的 $A \in F^{-1}X$和$B \in F^{-1}Y$，由 $(T3)$ 可得 $\{B'.\ f \mid B \sqsubset B'\} \subseteq \{A' \mid A \sqsubset A'\}$。这意味着 $C_X^{\sqsubset}(A) \leq_X C_Y^{\sqsubset}(B).\ f \Leftrightarrow C_X^{\sqsubset}(A) \leq_f C_Y^{\sqsubset}(B)$。对于 $(T3)$，$f.\ A \sqsubset_Y B \Leftrightarrow C_Y^{\sqsubset}(f.\ A) \leq_Y B \Rightarrow C_Y^{\sqsubset}(A) \leq_f B \Leftrightarrow C_Y^{\sqsubset}(A) \leq_X B.f \Leftrightarrow A \sqsubset_X B.\ f.$ 显然，$C \longrightarrow \sqsubset^C$ 和 $\sqsubset \longrightarrow C^{\sqsubset}$保序且互为逆。根据 $C^{\sqsubset}$ 的构造，$C^{\sqsubset}$ 是幂等的当且仅当$\sqsubset$ 是可插值的，这一点显而易见。 □

命题 3.2，结合范畴闭包算子、内部算子与拓扑生成结构之间广为人知的关系（见 [9, 11]），使我们得以引入形式内部算子，并证明，只要 F 是一个其每个纤维均为完备格的形式，满足条件（TJ）的形式拓生序确实与形式内部算子一一对应。

定义 3.2. 形式 F 上的算子 I，即形式内部算子，是由映射 $\{I_X$: $F^{-1}X \longrightarrow F^{-1}X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 构成的映射族，满足

（$I1$） I_X（A） $\leq A$，对所有 $A \in F^{-1}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$ 均成立。（$I1$） $A \leq B \Rightarrow I_X$（A） $\leq I_X$（B），对所有 A、$B \in F^{-1}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$ 均成立。（$I3$）对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 f: $X \longrightarrow Y$， I_Y（B）$.f \leq I_X$（$B.\ f$），其中 $B \in F^{-1}Y$。

我们用 Int(F) 表示 F 上所有内部算子的汇。它由 $I \leq I'$ 定序，当且仅当对所有 $A \in F^{-1}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$， $I_X(A) \leq I'_X(A)$。如果 $I \circ I = I$，则称 F 上的内部算子 I 是幂等的，也就是说，对所有 $A \in F^{-1}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$， $I_X(I_X(A)) = I_X(A)$。与命题 3.2 中类似的推理可得以下命题。

命题 3.3. 设 F 是一种形式，其每个纤维都是完备格。对于满足条件 (TJ) 的 F 上的拓扑生成序 $\sqsubset$，以及 F 上的内部算子 I，以下对应关系

$$I \longmapsto \sqsubset^I \ \ and \ \ \sqsubset \longmapsto I^{\sqsubset}$$

其中，对于任意 $X \in \mathcal{C}$ 和 A，$B \in F^{-1}X$ 定义了 ITORD(F) 与 Int(F) 之间互为逆的序同构。$I^{\sqsubset}$ 是幂等的，当且仅当 $\sqsubset$ 是可插值的。

4 严格态与终态态射

命题 4.1。设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $\sqsubset \in TORD$(F)。定义 2.1 中的 $(T3)$ 等价于对所有 A、$B \in F^{-1}Y$ 均有 $A \sqsubset_Y B \Rightarrow A.f \sqsubset_X B.f$。

考察定义 3.1 中的公理 $(T3)$ 以及命题 3.3，我们会问：哪些态射满足其逆向蕴含？本节研究保持 $\sqsubset$ 上的拓扑生成序的 $\mathcal{C}$-态射 F，以及反映这些序的态射。

定义 4.1. 设 F 上有一个拓扑生成序 $\sqsubset$。若 $f\colon X \longrightarrow Y$ 在 $\mathcal{C}$ 中满足：对于所有 $A \in F^{-1}X$ 和 $B \in F^{-1}Y$，都有 $A \sqsubset_X B.f \Rightarrow f.A \sqsubset_Y B$，则称其为 $\sqsubset$-严格的。类似地，若对于所有 B'、$B \in F^{-1}Y$，都有 $B.f \sqsubset_X B'.f \Rightarrow B \sqsubset_Y B'$，则称 f 是 $\sqsubset$-终的。

定理 4.2. 设 F 上有一个拓扑生成序 $\sqsubset$。态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是 $\sqsubset$-严格的，当且仅当 $\sqsubset$ 保持 f 的余笛卡尔提升的余定义域，即对于 A、$B \in F^{-1}X$，有 $A \sqsubset_X B \Rightarrow f.A \sqsubset_X f.B$。

证明。假设 f 是 $\sqsubset$-严格的，并且 $A \sqsubset_X B$。由于f 的笛卡尔提升和余笛卡尔提升存在，因此 $(f.B).f$ 存在，且 $A \sqsubset_X B \leq (f.B).f \Rightarrow A \sqsubset_X (f.B).f \Rightarrow f.A \sqsubset_X f.B$。反过来，如果 $\sqsubset$ 保持 f 的余笛卡尔提升的余定义域，并且 $A \sqsubset_X B.f$，那么$f.(B.f)$ 存在，且 $A \sqsubset_X B.f \Rightarrow f.A \sqsubset_X f.(B.f) \leq B \Rightarrow f.A \sqsubset_X B$。 □

让我们回顾一下 [16] 中的厚态射概念，它有助于我们刻画⊏-终态射。在 $\mathcal{C}$上的有界型 F 中，$f\colon X \longrightarrow Y \in \mathcal{C}$ 是厚态射，当且仅当$f.1^X = 1^Y$.

定理 4.3。设 F 是局部有界型，且 $\sqsubset \in$TORD(F)。那么，每个 $\sqsubset$-终态射 $f\colon X \longrightarrow Y$都是厚态射，条件是 $1^Y \sqsubset 1^Y$.。若$\sqsubset \in$MTORD(F)，则可以去掉条件 $1^Y \sqsubset 1^Y$。如果 F 反映余截面，那么每个作为 $\sqsubset$-终态射的余截面都是 $\sqsubset$-严格的；而如果 F 反映截面，那么每个 $\sqsubset$-严格的截面都是 $\sqsubset$-终态射。

证明。由于 $1^Y \sqsubset 1^Y$和 f是 $\sqsubset$-终的，$1^Y \sqsubset 1^Y \Rightarrow 1^Y.f \sqsubset 1^Y.f \Rightarrow 1^Y.f \sqsubset 1^X \leq (f.1^X).f \Rightarrow 1^Y.f \sqsubset 1^X \leq (f.1^X).f \Rightarrow 1^Y \sqsubset f.1^X \Rightarrow 1^Y \leq f.1^X \Rightarrow f.1^X = 1^Y$。显然，若 $\sqsubset \in$MTORD(F)，则可以省略 $1^Y \sqsubset 1^Y$，因为 $1^Y \sqsubset 1^Y \Leftrightarrow C^{\sqsubset}(1^Y) = 1^Y$.。假设 F 反映余截面，且 f 是一个 $\sqsubset$-终的余截面。那么，根据引理 3.1，$A \sqsubset_X B \Leftrightarrow (f.A).f \sqsubset (f.B).f \Leftrightarrow f.A \sqsubset f.B$。最后，设 F 反映截面，且 f 是一个 $\sqsubset$-严格的截面。那么，根据引理 3.1，$B.f \sqsubset_X B'.f \Rightarrow f.(A.f) \sqsubset f.(B.f) \Rightarrow A \sqsubset B$.

□

命题 4.4。设 $\sqsubset$ 是 F上的一个拓扑生成序。若 F 反映同构，则 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）态射类包含 $\mathcal{C}$的所有同构。 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）态射类在复合下封闭。若 F 反映余截面， $g\circ f$ 是一个 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）态射，且 f 是一个余截面，则 g 是 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）态射。对偶地，若 F 反映截面， $g\circ f$ 是一个 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）态射，且g 是一个余截面，则 f 是 $\sqsubset$-严格（分别为 $\sqsubset$-终的）。

证明。假设 f 是一个同构，其逆为 g。由于 F 反映同构，由引理 3.1 和 2.1 可得，对于任意 $A\in F^{-1}X$ 和 $B\in F^{-1}Y$， $A\sqsubset B.\, f\Rightarrow f.\, A=A.\, g\sqsubset(B.\, f).\, g=B.(g\circ f)=B.\, 1_X=B$。如果 $f\colon X\longrightarrow Y$ 和 $g\colon Y\longrightarrow Z$ 是 $\sqsubset$-严格的，那么由引理 2.1， $A\sqsubset B.(f\circ g)=(B.\, f).\, g\Leftrightarrow f.\, A\sqsubset B.\, g\Leftrightarrow(g\circ f).\, A=g.(f.\, A)\sqsubset B.$。设 f 是一个余截面且为 $g\circ f$ $\sqsubset$-严格的。由于 F 反映余截面，由引理 3.1 和 2.1， $A\sqsubset B.\, g\Rightarrow A.\, f\sqsubset(B.\, g).\, f=B.(g\circ f)\Rightarrow(g\circ f).(A.\, f)\sqsubset B\Leftrightarrow g.\, [f.(A.\, f)]\sqsubset B\Leftrightarrow g.\, A\sqsubset B.$。设 f 是一个截面且为 $g\circ f$ $\sqsubset$-严格的。由于 F 反映截面，由引理 3.1 和 2.1， $A\sqsubset B.\, f=[(g.\, A).\, g].\, f=(g.\, B).(g\circ f)\Rightarrow g.\,(f.\, A)\sqsubset g.\, B\Rightarrow f.\, A\sqsubset(g.\, B).\, g\Rightarrow f.\, A\sqsubset B$。对于 $\sqsubset$-终的情形，也可采用类似的推理。

□

考虑到命题 3.3 和 3.2，以及对于任意态射 $f\colon X\longrightarrow Y$，在 $\mathcal{C}$ 中，对于任意 $A\in F^{-1}X$ （分别为 $B\in F^{-1}Y$），都存在 f 的余笛卡尔提升（分别为笛卡尔提升），我们得到以下结果。

命题 4.5. 设 $\sqsubset$ 是 F 上的拓扑生成序， $f\colon X\longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，并假设 $\sqsubset\in\in$ JTORD(F)。那么，如果 $I^{\sqsubset}$ 保持 f 的笛卡尔提升的定义域，即对于任意 $B\in F^{-1}Y$， $I^{\sqsubset}(B).\, f=I^{\sqsubset}_X(B.\, f)$，则 f 是 $\sqsubset$-严格的。类似地，若 $\sqsubset\in\in$MTORD(F)，则当且仅当 $C^{\sqsubset}$ 保持 f 的余笛卡尔提升的余定义域，即对于任意 $A\in F^{-1}X$， $f.\, C^{\sqsubset}_X(A)=C^{\sqsubset}_X(f.\, A)$ 时，f 才是 $\sqsubset$-严格的。

令 $\mathcal{C}$ 有限余完备（因此，沿任意 $\mathcal{C}$-态射的 $\mathcal{E}$-态射的推出存在且属于 $\mathcal{E}$），并且具有适用于态射的 proper $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-分解结构。令 F 为定义域函子 $dom\colon\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{C}$。对于任意 $X\in\mathcal{C}$， $F^{-1}X$ 是 X 的 $\mathcal{E}$-商对象的预序类。对于任意 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon X\longrightarrow Y$ 以及 $e\in F^{-1}X$， $f.\, e$ 是沿 f 对 e 作出的推出，而对于任意 $d\in F^{-1}Y$， $d.\, f$ 是 $d\circ f$ 的 $(\mathcal{E},\mathcal{M})$-分解中的 $\mathcal{E}$ 部分。

定义 4.2. 若拓扑生成序 $\sqsubset$ on F 满足：对于任意截面$f\colon X\longrightarrow Y$及任意 $A,B\in F^{-1}Y$，$B.\, f\sqsubset_X A.\, f\Rightarrow B\sqsubset_Y A$，则称其为余遗传的。等价地，若每个截面都是 $\sqsubset$-终的，则称 $\sqsubset$ 为余遗传的。

当 $\sqsubset \in$JTORD(F) 时，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意截面， $\sqsubset$ 是余遗传的，当且仅当 $C_Y^{\sqsubset}(B) = f.\ C_X^{\sqsubset}(B.\ f)$。文献 [6] 指出， $\mathcal{C}$ 的所有满 $\mathcal{E}$-反射充实子范畴所成的偏序集，与 $\mathcal{E}$-商对象形式上的余遗传幂等闭包算子所成的偏序集之间存在反序同构。结合这一结果与命题 3.2，可以断定： $\mathcal{C}$ 的所有满 $\mathcal{E}$-反射充实子范畴所成的偏序集，与 $\mathcal{C}$ 中满足条件 (TM) 的 $\mathcal{E}$-商对象形式上的所有余遗传且可插值的拓扑生成序所成的汇之间存在反序同构。

5 一些例子

I. 令 F 为从 Top 到 Set 的遗忘函子。对于每个 $X \in$ Set， $F^{-1}X$ 是 X 上所有拓扑构成的完备格。若 $f: X \longrightarrow Y$ 是 Set 中的一个函数，则对所有 $\mathcal{T}_X \in F^{-1}X$， $f.\ \mathcal{T}_X$ 是由 f 诱导的 Y 上的终拓扑；对所有 $\mathcal{T}_Y \in F^{-1}Y$， $\mathcal{T}_Y.\ f$ 是由 f 诱导的 X 上的始拓扑。 F 是一种有界型，其中对任意 $\mathcal{T}_X \in F^{-1}X$ 和 $\mathcal{T}_Y \in F^{-1}Y$， $\mathcal{T}_Y.\ f$ 和 $f.\ \mathcal{T}_X$ 均存在。令 $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}'_X \in F^{-1}X$.

(a) 置 $\mathcal{T}_X \sqsubset_X \mathcal{T}'_X \Leftrightarrow \theta(\mathcal{T}_X) \leq_X \mathcal{T}'_X$，其中 $\theta(\mathcal{T}_X)$ 是由 $\mathcal{T}_X$ 生成的 θ-拓扑，我们得到 F 上的拓扑生成序。($T1$) 和 ($T2$) 可由以下事实推出： $\theta(\mathcal{T}_X) \leq_X \mathcal{T}'_X \Leftrightarrow \mathcal{T}'_X \subseteq \theta(\mathcal{T}_X)$。对于 ($T3$)，令 $f: X \longrightarrow Y$，且 $\mathcal{T}_Y, \mathcal{T}'_Y \in F^{-1}Y$。假设 $\mathcal{T}'_Y \subseteq \theta(\mathcal{T}_Y)$ 且 $A \in \mathcal{T}'_Y.\ f$。则由假设，存在 $O' \in \mathcal{T}'_Y$ 使得 $A = f^{-1}(O')$ 且 $O' \in \theta(\mathcal{T}_Y)$。令 $y \in A$。则 $f(y) \in O$，因此存在 $U \in \mathcal{U}_{f(y)}$，使得 U 是闭的且 $U \subseteq O$。这意味着 $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(O) = A$，并且 $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_Y$。因此 $A \in \theta(\mathcal{T}_Y.\ f)$，即 $\mathcal{T}'_Y.\ f \subseteq \theta(\mathcal{T}_Y.\ f)$。容易看出 $\sqsubset \in MTORD(F)$。

命题 5.1. 函数 $f: X \longrightarrow Y$ 若为 $\sqsubset$-严格，则它是满射，且对于任意 $\mathcal{T}_X \in F^{-1}X$ 和 $\mathcal{T}_Y \in F^{-1}Y$, $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 既开又闭。每个满射 $f: X \longrightarrow Y$ 都是 $\sqsubset$-终的。

证明。假设 $\mathcal{T}_Y.\ f \subseteq \theta(\mathcal{T}_X)$ 且 $A \in \mathcal{T}_Y$。若 $y \in A$，则由 f 的满射性可知，存在 $x \in f^{-1}(A)$，使得 $f(x) = y$ 且 $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_Y.\ f$。根据假设，存在 $O \in \mathcal{T}_X$ 和 U，它们在 $\mathcal{T}_X$ 中是闭集，且满足 $x \in O \subseteq U \subseteq f^{-1}(A)$。由于 f 既开又闭， $f(O) \in \mathcal{T}_Y$，并且 $f(U)$ 在 $\mathcal{T}_Y$ 中是闭集。我们有 $f(x) = y \in f(O) \subseteq f(U) \in A$。因此 $A \in \theta(f.\ \mathcal{T}_X)$，也就是说 $\mathcal{T}_Y \subseteq \theta(f.\ \mathcal{T}_X)$。于是 f 是 $\sqsubset$-严格的。假设 $\mathcal{T}'_Y.\ f \subseteq \theta(\mathcal{T}_Y.\ f)$ 且 $A \in \mathcal{T}'_Y$.。令 $x \in A$。由于 f 是满射，存在 $x \in f^{-1}(A)$，使得 $y = f(x)$ 且 $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}'_Y.\ f$。根据假设， $f^{-1}(A) \in \theta(\mathcal{T}_Y.\ f)$，因此存在 $O \in \mathcal{T}_Y.\ f$（开集）和 U（闭集），它们都在 $\mathcal{T}_Y.\ f$ 中，且满足 $x \in O \subseteq U \subseteq f^{-1}(A)$。现在，$O = f^{-1}(O')$ 且 $U = f^{-1}(U')$，其中 $O' \in \mathcal{T}_Y$和 U'在 $\mathcal{T}_Y$ 中是闭集。我们得到 $f(x) \in O' \subseteq U' \subseteq A$。因此 $A \in \theta(\mathcal{T}_Y)$ 且 $\mathcal{T}'_Y \subseteq \theta(\mathcal{T}_Y)$。 □

(*b*) 令 $\mathcal{T}_X \sqsubset_X \mathcal{T}'_X \Leftrightarrow \mathcal{T}_X \leq_X b(\mathcal{T}'_X)$，其中 $b(\mathcal{T}'_X)$ 是由$\mathcal{T}'_X$生成的 b-拓扑，则其为 F 上的拓扑生成序。($T1$) 和 ($T2$) 由以下事实可得： $\mathcal{T}_X) \leq_X b(\mathcal{T}'_X) \Leftrightarrow b(\mathcal{T}'_X) \subseteq \mathcal{T}_X$。对于 ($T3$)，设 $f\colon X \longrightarrow Y \in$Set，且 $\mathcal{T}_X \in F^{-1}X$, $\mathcal{T}_Y \in F^{-1}Y$。假设 $b(\mathcal{T}_Y) \subseteq f.\mathcal{T}_X$且 $A \in \mathcal{T}_Y.f.$。那么，存在 $O \in \mathcal{T}_Y$，使得 $A = f^{-1}(O)$。由于$\mathcal{T}_Y \subseteq b(\mathcal{T}_Y)$， $O \in b(\mathcal{T}_Y)$，并且根据假设，$O \in f.\mathcal{T}_X$，这意味着 $A \in \mathcal{T}_X$ 且$A \in b(\mathcal{T}_X)$。因此 $\mathcal{T}_Y.f \subseteq b(\mathcal{T}_X)$。显然， $\sqsubset \in JTORD(F)$。

命题 5.2. 每个函数 $f\colon X \longrightarrow Y$ 都是 $\sqsubset$ 严格的（分别为 $\sqsubset$-终的） .

证明。假设 $b(\mathcal{T}'_X) \subseteq \mathcal{T}_X$且 $A \in b(f.\mathcal{T}'_X)$。若 $x \in f^{-1}(A)$，则 $f(x) \in A$，并且存在 $O \in f.\mathcal{T}'_X$和 $F \in f.\mathcal{T}_X$使得 $f(x) \in O \cap F \subseteq A.$。现在， $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}'_X$，且 $f^{-1}(F)$ 在 $\mathcal{T}'_X$ 中是闭的。我们有 $x \in f^{-1}(O \cap F) = f^{-1}(O) \cap f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(A)$。由于 $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}'_X$，且 $f^{-1}(F)$ 在 $\mathcal{T}'_X$ 中是闭的， $f^{-1}(A) \in b(\mathcal{T}'_X)$，这意味着 $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$。因此 $A \in b(f.\mathcal{T}_X)$。假设对于任意 $\mathcal{T}_Y$， $b(\mathcal{T}'_Y.f) \subseteq \mathcal{T}_Y.f$，并且 $\mathcal{T}'_Y \in F^{-1}Y$和$A \in b(\mathcal{T}'_Y)$。设 $x \in f^{-1}(A)$。于是 $f(x) \in A$，并且存在 $O \in \mathcal{T}'_Y$和 F，它们在 $\mathcal{T}'_Y$ 中是闭的，使得 $f(x) \in O \cap F \subseteq A$。这意味着 $x \in f^{-1}(O) \cap f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}(A)$。因此$f^{-1}(A) \in b(\mathcal{T}'_Y.f) \subseteq \mathcal{T}_Y.f$。

□

II. 另一个例子与前一个有些相似，是从 Qunif 到 Top 的具体函子 F（其中，Top 表示拓扑空间及连续映射范畴，而 Qunif）表示拟一致空间及拟一致连续映射范畴。于是，对于任意 $X \in$ Top， $F^{-1}X$ 是与 $\mathcal{T}$相容的 X 上所有拟一致结构构成的完备格，称为函子拟一致结构。若 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是连续映射且 $\mathcal{U}_Y \in F^{-1}Y$，则 $\mathcal{U}_Y.f$是由 f诱导的初始拟一致性，而$f.\mathcal{U}_X$ 是 Y 上的最大拟一致性，使得 f 是拟一致连续的。对于任意 $\mathcal{U}_X$、$\mathcal{V}_X \in F^{-1}X$，令 $\mathcal{U}_X \sqsubset_X \mathcal{V}_X \Leftrightarrow \mathcal{U}_X \leq_X \mathcal{V}_X^{\star}$，其中 $\mathcal{V}_X^{\star}$是包含 $\mathcal{V}_X$ 的最粗一致性，则可得到 F上的一个拓扑生成序。

III. 令 F 为子群形式（即单射群同态），其中 Grp 表示群及群同态构成的范畴。那么，对于任意 $X \in$ Grp， $F^{-1}X$ 是 X所有子群构成的完备格。显然，这一形式是有界且 $A.f$的，并且对任意 $A \in F^{-1}X$和 $B \in F^{-1}Y.$， $f.B$均存在。现在，在 F上定义 $\sqsubset$ 如下： $A \sqsubset B \Leftrightarrow A \leq N \leq B$，其中 N 是 X的正规子群。于是， $\sqsubset$ 是 F上的拓扑生成序。群同态 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是 $\sqsubset$-严格的，当且仅当它保正规子群；而 f 是 $\sqsubset$-终的，当且仅当它是满射。

参考文献

[1] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴：猫的乐趣》。《Repr. Theory Appl. Categ.》，(17)，1–507，2006年。重印自 1990 年版 [Wiley，纽约]。[2] F. Borceux。《范畴代数手册》。第 2 卷，《数学及其应用百科全书》第 51 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。范畴与结构。[3] A. Cs´asz´ar。《一般拓扑学基础》。佩加蒙出版社丛书。麦克米伦公司，纽约，1963年。[4] D. Dikrajan 和 W. Tholen。《具有拓扑学、代数与离散数学应用的闭包算子的范畴结构》。《数学及其应用》第 346 卷。克吕维尔学术出版集团，多德雷赫特，1995年。[5] D. Dikranjan 和 E. Giuli。闭包算子 I。《拓扑学及其应用》，27(2)：129–143，1987年。[6] M. Duckerts-Antoine、M. Gran 和 Z. Janelidze。上反射子范畴与形式闭包算子。《Theory and Applications of Categories》，32：第 15 号论文，526–546，2017年。[7] D. Holgate 和 M. Iragi。范畴上的拟一致结构与综合拓扑生成结构。《拓扑学及其应用》，263：16–25，2019年。[8] D. Holgate 和 M. Iragi。由闭包算子确定的拟一致结构。《Topology Appl.》，295：第 107669 号论文，9，2021年。[9] D. Holgate、M. Iragi 和 A. Razafindrakoto。范畴上的拓扑生成结构与邻近结构。《Appl. Categor. Struct.》，(24)：447–455，2016年。[10]D. Holgate 和 J. ˇSlapal。范畴邻域算子。《Topology Appl.》，158(17)：2356–2365，2011年。[11] M. Iragi。《范畴上的拓扑生成结构》。理学硕士论文，西开普大学，2016年。[12] M. Iragi。《范畴上的拟一致结构与综合拓扑生成结构》。博士论文，西开普大学，2019年。

[13] M. Iragi 和 D. Holgate。拟一致结构与函子，即将刊于《范畴论及其应用》，2023年。[14] M. Iragi 和 J. ˇSlapal。依赖于参数的传递拟一致结构。《Aequationes Mathematicae》（2023年）。https://doi.org/10.1007/s00010-022-00937-8。[15] Z. Janelidze 和 T. Weighill。非阿贝尔代数中的对偶性 I：从覆盖关系到 Grandis ex2-范畴。《范畴论及其应用》，29：第11期，315–331，2014年。[16] Z. Janelidze 和 T. Weighill。非阿贝尔代数中的对偶性 II：从 Isbell 双范畴到 Grandis 正合范畴。《Journal of Homotopy and Related Structures》，11(3)：553–570，2016年。[17] S. J. R. Vorster。一般范畴中的内部算子。《Quaestiones Mathematicae》，23(4)：405–416，2000年。