测量动力系统的鲁棒性：将时间和空间与长度和精度联系起来

Manon Blanc 巴黎综合理工学院 巴黎综合理工学院，LIX实验室，91128 帕莱索 Cedex，法国
m
anon.blanc
@lix.polytechnique.fr

Olivier Bournez 巴黎综合理工学院 巴黎综合理工学院，LIX实验室，91128 帕莱索 Cedex，法国
o
il
vier.bournez@lix.polytechnique.fr

arXiv:2301.12723v2 [cs.CC] 8 Jun 2023

摘要——众所周知，对实数上的离散时间或连续时间动力系统进行验证是不可判定的。然而，已知在考虑各种鲁棒系统时，不可判定性并不成立：如果将鲁棒性定义为可达关系在无穷小扰动下保持稳定，那么这类系统的可达关系就是可判定的。换言之，不可判定性意味着系统对无穷小扰动敏感；通常认为“实际应用中”的系统不应具有这一性质，因此可以将其（在某种非正式意义上）视为理论上的产物，因为理论总是假设精确性。同样，众所周知，虽然实数上的逻辑公式具有不可判定性，但考虑 δ-不可判定性时则不然：必须判定某个性质是真的，还是距离为 δ 才为真。

我们首先将前述结论推广为适用于一般动力系统（离散时间、连续时间，甚至混合系统）的理论，并联系这两种方法。我们还将鲁棒性与可达关系的一些几何性质联系起来。

但更重要的是，当一个系统具有鲁棒性时，量化其扰动级别便有了意义。我们证明，若假设系统对精度上的多项式扰动具有鲁棒性，则可达性可在 PSPACE复杂度类中验证，甚至可以据此刻画这一复杂度类。我们还证明，若假设系统对时间或轨迹长度上的多项式扰动具有鲁棒性，也能得到类似结论，但对应的复杂度是多项式时间。

实际上，也可以从模拟模型的计算能力这一角度来理解这些结果。最近有研究出人意料地表明，多项式常微分方程的解的长度对应于计算时间：多项式时间对应于长度为多项式的多项式微分方程的解。对于 PSPACE，我们能否做类似的事情？对于动力系统，如何鲁棒地衡量空间？我们的结果表明，答案在于精度：空间对应于所涉及的精度。

I. 引言

多个研究群体研究了动力系统与计算之间的关系。这包括对动力系统中不可预测性和不可判定性的研究 [27], [26], 关于离散、连续以及所谓混合系统验证困难性的相关问题 [2], 关于循环神经网络模型计算能力的相关问题 [31], 或控制理论相关问题 [3], [10]。

与验证相关的动机：尽管已有若干关于混合系统的不可判定性结果（例如线性混合自动机 [22] 或分段常导数系统 [2]），并且人们观察到某些实用工具在实践中“运行良好”（能够终止），但验证领域的文献或多场报告中出现了一种广为流传（有时并不正式）的猜想，认为这种不可判定性源于系统的非稳定性、非鲁棒性以及对系统初始值的敏感性，并且在“真实”系统中绝不会出现。人们曾多次尝试将这一猜想形式化并加以证明（或证伪），其中包括 [15], [23]。关于相关讨论，请参阅[1], [10] 。

本文受到 [1], 方法的启发，该方法考察了几种离散时间、连续时间和混合动力学系统模型：图灵机、分段仿射映射、线性混合自动机以及分段常导数系统。对于这些模型中的每一种，都定义了在小幅 ϵ （相对于适当度量）下的受扰动力学，并将受扰可达关系定义为对所有可能的 ϵ，由 ϵ 扰动所得到的所有可达关系的交集。作者证明，对于所有这些模型，受扰可达关系都是余可计算可枚举的（co-c.e.， Π_1^0），并且任意余可计算可枚举关系都可以定义为这类模型的受扰可达关系。由此可推得，如果将鲁棒性定义为可达关系在无穷小扰动下的稳定性，那么鲁棒系统具有可判定的可达关系，因此验证也是可判定的。

类似地， [16] 有人观察到，一些逻辑（例如实数算术）是可判定的，但即使是在加入正弦函数的实数算术扩展语言中， Σ_1 句子的集合也已经是不可判定的，因此，在一般情况下，判定这类“简单”公式的满足性是不可能的。然而，这一理论上的否定结果仅涉及以符号方式精确判定逻辑公式的问题。如果考虑一种宽松的正确性概念，那么验证就变得可以通过算法求解：当给定公式 ϕ 为真时，要求返回 true；当其 δ鲁棒地错误时，即 ϕ 为错误，但实际上 δ对 ϕ 的某种强化为假时，要求返回 false。换言之，不可判定性只发生在

精确问题中，其判定结果会因无穷小扰动而不稳定，而鲁棒满足性是可判定的。

这些方法将鲁棒性与其验证的可判定性联系起来，或将鲁棒满足性与满足性的可判定性联系起来，也就是一个可计算性问题。本文旨在拓展上述研究，尤其是 [1]，推广到更一般的动力系统类别，同时也主要探讨复杂性问题：系统验证何时属于 PTIME 或 PSPACE？它与系统对扰动的鲁棒性有何关系？

基本上，当一个系统具有鲁棒性时，量化其鲁棒程度便有意义：允许的扰动级别 ϵ 是多少？我们基本上证明，若假设这种扰动相对于数据是多项式级别的，就能得到 PSPACE 的刻画。这为确保系统验证的复杂性提供了方法。事实上，我们还表明，通过运用各种鲁棒性概念，可以用这一思路定义不同的复杂性类：我们引入时间和长度扰动的概念（基本上，轨迹不能过长），并证明这会导出多项式时间，从而使系统的验证能够在多项式时间内完成。

与计算模型相关的研究动机：另一个研究领域关注如何比较模拟（连续时间）计算模型与较为经典的离散模型（如图灵机）。尤其是，一个著名且备受推崇的历史数学模型是通用模拟计算机（GPAC）模型。Shanon 于 1941年 在 [30], 中提出该模型，用以描述微分分析机 [13], ——一种机械式可编程图灵机，他曾担任这台机器的操作员。已知，GPAC 计算出的函数对应于一个多项式右端项常微分方程系统（也称为多项式常微分方程，即 pODE）解的某个分量 [30], [19]。

在复杂性层级上，将该模型的计算能力与图灵机等经典模型联系起来并非易事。简言之，与离散计算模型不同，连续时间计算模型（不仅是 GPAC，还有许多其他模型）可能会出现所谓的“芝诺现象”：在连续系统中，时间可以任意压缩，从而使计算速度任意加快。这使得我们无法简单地将常微分方程中的时间变量视为定义明确的时间复杂度度量：相关讨论见 [4], [10] 。

近期一项著名的突破出现在 [28], [7], 领域。研究证明，解决这一问题的一个关键思路是：使用多项式常微分方程（原则上，这一思路也可用于其他连续计算模型）计算给定函数 f时，应将计算成本度量为计算该函数 f的多项式初值问题的解曲线长度的函数。由于常微分方程是实验科学中的一种通用语言，这项突破促使人们解决了其他多个领域中的开放问题，包括证明存在一个通用的（依照 Rubel 的定义）常微分方程 [9]；证明生化反应具有强图灵完备性 [14], ；以及关于常微分方程可达性问题完备性的结论（例如，多项式时间——有界可达性的完备性） [7]。

如今，人们已知时间应以长度来衡量，但如何衡量空间仍不明确。应如何衡量某个普通常微分方程所使用的“记忆”？我们能否像 [7] 中对多项式时间的刻画那样，利用常微分方程刻画 PSPACE？如果时间对应于长度，那么空间对应于什么？我们提出一些论据来说明：基本上，对于紧域，空间对应于精度；而对于定义域更一般的系统，空间则对应于某个图的规模的对数。

相关工作与主要结果：本文以 [1] 的若干扩展为基础。我们重新表述了其中的一些论述，并扩展了其中的一些结果。具体而言，我们考虑更一般的离散时间和连续时间动力系统，而 [1] 仅讨论分段仿射映射（PAM）和混合系统，且假定二者均在有界域上运行。我们的论述具有广泛的适用性，因为我们只要求定义域或动力学是可计算的。据我们所知， [8], 也提出了相关推广，但重点是将动力系统作为语言识别器，并主要围绕定理14 的推广展开（[1, 定理 4]）；而本文则以更自然、更一般的方式讨论可达性。

我们还将我们的方法与 [16] 中引入的 δ-可判定性联系起来。值得注意的是，后者所考虑的逻辑表达能力不足以涵盖我们的结果（或 [1]）。

另一个明显的区别是，我们讨论的是复杂性问题（空间、时间），而所有这些参考文献讨论的都只是可计算性问题。此外，我们考虑的不仅是空间扰动，还有时间扰动和长度扰动，并证明许多结果即使是在可计算性层面，也可以推广到这一框架中。

在第二节中，我们回顾图中可达性（可访问性）问题困难性的一些已知事实，并特别讨论其编码。

在讨论一般的离散时间动力系统，以及之后的连续时间和混合时间动力系统之前，我们先考察离散时间动力系统中的一个特例，即图灵机。我们认为，这有助于理解接下来的论述。我们基本上在第三节中引入了（空间）扰动图灵机的概念，沿用 [1], 的做法，并回顾本文确立的一些结果。本节的原创贡献是将这一框架扩展到复杂性领域。我们证明，考虑多项式鲁棒性恰好对应于多项式空间，即 PSPACE （定理 17 ）。这里我们考虑空间扰动，但稍后将证明（在第 VIII 节中），也可以考虑一种自然的时间扰动概念，从而借助类似的思路刻画多项式时间，即多项式时间（定理 58）。

第四节回顾了如何通过将一类动力系统（例如图灵机）嵌入另一类动力系统，来建立若干关于动力系统的不可判定性结果。我们认为，这有助于理解非鲁棒性的相关来源。

第五节讨论一般的离散时间动力系统（定义在 $\mathbb{R}^d$ 上）。我们采用 [1] 中的扰动和鲁棒性概念。但与后者主要局限于分段仿射映射（PAM）的文章不同，我们考虑一般系统，并讨论定义域以及像 PAM 那样保持有理数的重要性。一个主要的技术成果是定理 24：它将 [1,定理 5] 推广到一般情形，证明过程采用了类似的思路，但并非完全[1]。我们还将这一框架扩展到不保持有理数的系统情形。这使得我们能够推广 [1] 的主要结论：鲁棒性意味着可达性可判定（推论25和推论39）。随后，我们证明，这一理论实际上可以与 [16] 提出的 δ-可判定性方法联系起来：（ϵ-）鲁棒意味着命题为真，或（ϵ-）远非为真（定理27）。这也是一项重要的原创贡献，它将两种方法联系起来，并给出了符合 [16] 思路的论证。接下来，我们的关键目标是在复杂性层级上实现所有这些推广。一项关键结果是，多项式鲁棒性意味着可达性问题可在 PSPACE 中解决（定理35）。这甚至给出了 PSPACE 的刻画（定理36）。具体而言，第五节分为两个小节。第一部分只需讨论有理数和经典可计算性。第二部分中，由于函数可能取非有理数值，我们采用可计算分析（CA）的框架。第一部分有助于理解第二部分。不过，实际上，由于 CA 中的可计算函数是连续的，因此即使两部分共享若干方法和推理，第一部分的结论也不是第二部分的推论。

第六节提供了一个新颖而优美的视角。借助元胞自动机领域中确立的各种结果，我们证明，鲁棒性也可以理解为拥有一种可绘制的可达关系。我们在此利用了这样一个事实：对于 $\mathbb{R}^p$ 的子集而言，后者与可计算性有关。

在第七节中，我们指出，类似的论述也适用于连续时间，甚至适用于混合动力系统。

第 VIII 节证明，还可以考虑其他扰动，这会使我们讨论多项式时间，而非 PSPACE。第九节探讨了当前工作与已知的、利用连续时间动力系统刻画复杂性类的方法之间的关系。请注意，近期在 [17], [5] 中已得到 PSPACE 的一些刻画（本节对此进行了讨论），但代价是需要满足一些技术条件；我们认为，这些条件并未能充分解答先前的问题。

预备知识：带 * 表示可以在附录中找到一份（可能更详尽的）证明。我们用 $d(\cdot,\cdot)$ 表示上确界距离。开（分别为闭）有理球是形如 $B(\mathrm{x}\ \delta) = \{\mathrm{y}:\ d(\mathrm{x},\mathrm{y}) < \delta\}$ (resp.$\overline{B}(\mathrm{x}\ \delta) = \{\mathrm{y}:\ d(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \delta\}$) 的子集，其中 x 和 δ 为某个有理数。原则上，我们可以使用欧几里得距离，但这种距离的优点是，它的球可直接对应于某种精度下的舍入。形如 $\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$ 的集合，其中 (a_i)、(b_i) 为有理数，称为有理闭盒。一个开有理盒可通过将前述定义中的区间取为开区间得到。包含 X 的最小闭集记作 $cls(X)$。我们用 $\ell(\cdot)$ 表示用于度量其参数二进制大小的函数。

[1]由于其中的证明对于“可以进行一次转移”究竟是指一步还是一步或多步，表述得含糊不清，而且我们不确定自己是否完全理解了其确切形式。

II. 关于图中的可达性

考虑一个有向图 $G=(V,\to)$，其中 $\to\subseteq V^2$。如果每个节点至多有一条出边，则称其为确定性的。

引理1（图的可达性）。考虑以下判定问题 PATH(G,u,v)：给定一个有向图 $G=(V,\to)$ 以及一些顶点 $u,v\in V$，判断在 G 中 u 和 v 之间是否存在一条路径，记作 $u\xrightarrow{*}v$。

Then $\mathrm{PATH}(G,u,v)\in\mathrm{NLOGSPACE}$.

证明。基本上，非确定性图灵机可以猜出路径上的中间节点：例如参见 [32, 例8.19]。 □

引理2（Immerman–Szelepcs´enyi 定理 [24], [33]）。非确定性对数空间 = 余非确定性对数空间。

证明。例如参见 [32, 定理8.22]。 □

实际上，正如我们将看到的，我们主要关注其补集：

推论 3。考虑以下判定问题 NOPATH(G,u,v)：给定一个有向图 $G=(V,\to)$ 以及一些顶点 $u,v\in V$，确定在 G 中 u 与 v 之间是否不存在路径。

于是 NOPATH $(G,u,v)\in$ 非确定性对数空间。

定理 4（萨维奇定理）。对于任意函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，若 $f(n)\geq\log n$，则有 NSPACE($f(n)$) $\subseteq$SPACE($f^2(n)$)。

证明。参见例如 [32, 定理 8.5]。 □

推论 5. PATH$(G,u,v)\in$SPACE($log^2(n)$)，且无路径$(G,u,v)\in$SPACE($log^2(n)$)。

备注 6. 注意，检测 u 与 v 之间是否不存在路径，基本上等价于确定所有从 u 出发的路径是否都会“循环”，即始终与v不相交。上述结论是通过一种比对图进行简单的深度优先搜索更微妙的方法得出的：采用萨维奇定理证明中的技巧，即递归过程（用少于 2^t步表示可达性，在 *[32]* 中称为 CANYIELD(C_1,C_2,t)），从而保证上述空间复杂度。

我们的目的是讨论各种离散时间动力系统（之后甚至还会讨论连续时间动力系统）。

定义 7（离散时间动力系统）。一个（一般的）离散时间动力系统 $\mathcal{P}$ 由一个集合 X（称为定义域）以及某个从 X 到 X的（可能是部分的）函数 f 给出。

$\mathcal{P}$ 的轨迹是一个按照f演化的序列（x_t），也就是说，对于所有 t，都有 $x_{t+1}=f(x_t)$。如果存在一条轨迹，使得对于某个 t，$x_0=x$且 $x_t=x^*$（分别为 $x_t\in X^*$），我们就称 x^*（或集合 X^*）可从 x 到达。

换句话说，任何离散时间动力系统 $\mathcal{P}$ 都可以看作一种特殊的（确定性的）有向图，只不过

V不一定是有限的。这个图对应于 $V = X$，而 $\to$ 对应于函数 f的图。如果它仍然是有限的，我们可以推广前面的一些论述，但需要基于表示进行处理，才能使之可行。

推论 8（有限图的可达性）。设 $s(n) \geq \log(n)$。假设 G 的顶点可以用长度为 $s(n)$ 的字进行二进制编码。假设关系 $\to$ 在此编码下可用关于 $s(n)$ 的多项式空间判定。

那么，给定 $u \in V$ 和 $v \in V$ 的编码，我们可以在关于 $s(n)$ 的多项式空间内判定是否存在一条从 u 到 v 的路径（分别地：是否不存在路径）。

证明。采用与前一个推论中类似的论证和算法（特别是萨维奇定理的技巧），但针对顶点的表示进行处理。□

我们仍将（不严谨地）用 PATH 和无路径来表示这些问题。请注意，假设 G 的顶点可以用长度为 $s(n)$ 的字进行二进制编码，这就要求图 G 是有限图，且顶点数少于 $2^{s(n)}$。

备注 9。如果将 log-size(G) 记作有限图顶点数的对数，我们会发现，这为这些问题的空间复杂度困难性提供了一种相关的复杂度度量（在对 G 作出上述假设的前提下）。

III. 图灵机

让我们回顾一下（双向无限纸带）图灵机（TM）的定义：设 Σ 是一个有限字母表，$B \notin \Sigma$ 是空白符。在 Σ 上的图灵机是一个五元组（Q、q_{init}、F、R、Γ），其中 Q 是控制状态的有限集，$q_0 \in Q$ 是初始控制状态，$F \subseteq Q$（分别为 $R \subseteq Q$）是接受状态（分别为拒绝状态）的集合，且 $F \cap R = \emptyset$；Γ 是形如（q、a）$\to$（q'、b、δ）的转移集合，其中 q、$q' \in Q$、a、$b \in \Sigma \cup \{B\}$，且 $\delta \in \{-1, 0, 1\}$。当图灵机已经接受或拒绝后，判定结果保持不变：当 $q \in F$ 时，则 $q' \in F$；当 $q \in R$ 时，则 $q' \in R$。

图灵机的一个配置 C 由当前控制状态 q和双向无限纸带的当前内容 $\cdots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2\cdots$给出，其中 a_i是 $\Sigma \cup \{B\}$中的符号：这表示图灵机的磁头位于符号 a_0前方。我们用 $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ 表示图灵机的配置集合，并将这样的配置写作三元组 $(q, \cdots a_{-2}a_{-1}, a_0a_1a_2\cdots)$。给定 Γ中的一个转移 $(q, a) \to (q', b, \delta)$，如果控制状态为 q，且图灵机磁头所指向的符号等于 a，那么图灵机可以按以下方式将其配置 C 变为配置 C'：控制状态变为 q'，磁头所指向的符号替换为 b，然后根据 δ 分别为 -1、1 或 0，将磁头向左或向右移动，或保持在原位。若此关系成立，我们记作 $C \vdash C'$，即 C' 是配置 C的一步后继配置。于是，$(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}, \vdash)$对应于一个特定的动力系统。

单词 $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$被 $\mathcal{M}$接受，当图灵机从初始配置 $C_0 = C_0[w] = (q_0, \cdots BBB, a_1a_2 \cdots a_nBBB\cdots)$开始，最终停在接受控制状态：也就是说，如果我们将 $\mathcal{F}$写作 $*$个配置，其中 $q \in F$，当且仅当存在某个 $C^* \in \mathcal{F}$ 使得 $C_0 \vdash C^*$。令 $L(\mathcal{M})$ 表示这类字的集合，即由 $\mathcal{M}$ 半判定的可计算可枚举（c.e.）语言。若从配置 C_0 开始，图灵机 $\mathcal{M}$ 最终停在拒绝状态，则称 w 被 $\mathcal{M}$ 拒绝。若对于所有 w，w 均被接受或 w 均被拒绝，则称 $\mathcal{M}$ 总是停机。

文章 [1] 引入了空间扰动图灵机的概念：其思想是，给定 $n > 0$，图灵机 $\mathcal{M}$ 的 n 扰动版本无法在距图灵机磁头超过 n 的范围内保持正确。具体而言，图灵机的 n 扰动版本 $\mathcal{M}_n$ 的定义与 $\mathcal{M}$ 完全相同，唯一的区别在于，在每次转移之前，距图灵机磁头 n 或更远的所有符号都可以被改动：给定一个配置（q，$\cdots a_{-n-1}a_{-n}a_{-n+1}\cdots a_{-1}$，$a_0a_1\cdots a_{n-1}a_na_{n+1}\cdots$），$\mathcal{M}_n$ 可以将 a_{-n} 左侧（从 a_{-n-1}开始）以及 a_n 右侧（从 a_{n+1}开始）的任何符号替换为 $\Sigma \cup \{B\}$ 中的任意其他符号，然后在磁头位于 a_0 时执行 $\mathcal{M}$ 的一次转移。因此，$\mathcal{M}_n$ 是非确定性的。

如果存在一条运行，使图灵机在接受状态停止，那么单词 w 就会被 n-扰动版本的 $\mathcal{M}$ 接受。令 $L_n(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$的 n-扰动语言，即 Σ^* 中被 $\mathcal{M}$的 n-扰动版本接受的字所构成的集合。根据定义，如果一个单词被$\mathcal{M}$接受，那么对于任意 $n > 0$，它也能被 $\mathcal{M}$的所有 n-扰动版本识别：扰动机器具有更多行为。此外，如果 $(n+1)$-扰动版本接受了单词 w，那么 n-扰动版本也会接受它，因为 n-扰动机器的行为比 $(n+1)$-扰动机器更多。

令 $L_\omega(\mathcal{M}) = \bigcap_n L_n(\mathcal{M})$：它由所有在受到任意“微小”扰动时可被 $\mathcal{M}$ 接受的单词构成。根据定义：

Lemma 10 ([1, Lemma 2])**.**

$$L(\mathcal{M}) \subseteq L_\omega(\mathcal{M}) \subseteq \cdots \subseteq L_2(\mathcal{M}) \subseteq L_1(\mathcal{M}).$$

图灵机的 ω-扰动语言是一个可计算可枚举语言的补集：

定理 11（扰动可达性是余可计算可枚举的 [1, 定理3]）。$L_\omega(\mathcal{M})$ 属于类 Π_1^0。

证明。给定一个形如 $(q, \cdots a_{-n-1}a_{-n}\ldots a_{-1}, a_0a_1\ldots a_na_{n+1}\cdots)$ 的 M 的双无限配置 C，我们定义由长度为 n 的字组成的 $\varphi_n(C) = (q, a_{-n}\cdots a_{-1}, a_0a_1\cdots a_n)$，以及 $n+1$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们将图灵机 $\mathcal{M}$ 的 n-扰动版本 $\mathcal{M}_n$ 与某个图 $G_n = (V_n, \to_n)$ 联系起来：该图的顶点（记作 $(\mathcal{V}_i)_i$）对应于配置 C 中 $\mathcal{M}$ 的 $|Q| \times |\Sigma+1|^{2n+1}$种可能取值，其中 $\varphi_n(C)$。当且仅当 $\mathcal{M}_n$ 能在一步内从配置 C 转移到配置 C'，且 $\varphi_n(C) = \mathcal{V}_i$ 并且 $\varphi_n(C') = \mathcal{V}_j$ 时，G_n 中的 $\mathcal{V}_i$ 和 $\mathcal{V}_j$ 之间存在一条边。

通过考虑当磁头向左（分别向右）移动时，确定 $\mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_j$ 是否成立很容易（尤其是可以在多项式空间内计算）：

$\Sigma \cup \{B\}$ 中的一个符号会被非确定性地选取，并附加到配置的左侧（分别是右侧），而最右侧（分别是最左侧）的符号则会丢失（它现在属于配置的扰动区域，因此可以被任何其他符号替换）。

令 $\mathcal{F}_n = \varphi_n(\mathcal{F})$ 对应于接受控制状态。根据构造，$\mathcal{M}$ 的 n- 扰动版本 $\mathcal{M}_n$ 从配置 C 出发存在接受运行，当且仅当 $\mathcal{F}_n$ 可从 $\varphi(C)$ 到达，也就是说，PATH$(G_n, \varphi(C)\ \mathcal{F}_n)$。根据推论 8，这可以在关于 n 的多项式空间内判定。

令 $Basis_n$ 为满足以下条件的序列 $s_n \in \Sigma^{n+1}$ 的有限集：$\mathcal{F}_n$ 可从 $C_0[s_n]$ 到达。令 $Short_n$ 为满足 $k < n$ 的序列 $s_k \in \Sigma^k$ 的有限集，其中 $\mathcal{F}_n$ 可从 $C_0[s_k B^{n-k}]$ 到达。那么 $L_n(\mathcal{M}) =$ Short $\cup$ Basis Σ^*。因此，$L_n(\mathcal{M})$ 可在关于 n 的多项式空间内判定，其补集也同样如此。因此，$L_\omega(\mathcal{M})$ 是可计算可枚举的，因为它是（关于 n 一致的）可判定集的并集。 □

由于既是可计算可枚举又是余可计算可枚举的集合必然可判定，鲁棒语言（即 $L_\omega(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M})$）必然是可判定的。

推论 12（鲁棒 $\Rightarrow$ 可判定 [1, 推论 3]）。如果L_ω（$\mathcal{M}$）$= L$（$\mathcal{M}$），那么 L（$\mathcal{M}$）是可判定的。

如果对 $\mathcal{M}$ 增加另一项要求，则逆命题成立。事实上，由于 L（$\mathcal{M}$）$\subseteq L_\omega$（$\mathcal{M}$），L_ω（$\mathcal{M}$）$\neq L$（$\mathcal{M}$）意味着存在某个字 w，它被 $\mathcal{M}$拒绝，却被任何n扰动版本 $\mathcal{M}_n$接受。w 不会在有限时间内被 $\mathcal{M}$ 拒绝，否则它只会用到纸带上有限个单元格；而当 n 足够大时，$\mathcal{M}_n$ 仍会拒绝它。换句话说，w 既不会被 $\mathcal{M}$接受，也不会被其拒绝。

命题 13（可判定 $\Rightarrow$ 鲁棒 [1, 命题 1]）。假设 $\mathcal{M}$ 总会停机。那么 L（$\mathcal{M}$）是可判定的，并且L_ω（$\mathcal{M}$）$= L$（$\mathcal{M}$）。

一般而言，ω扰动语言不是可计算可枚举的。其中一些是余递归可枚举语言中的完备语言：扰动可达性在Π_1^0 [1, 定理 4]中是完备的。

定理14（扰动可达性在 Π_1^0 [1,定理 4] 中是完全的）。对于每个图灵机 $\mathcal{M}$，我们都可以有效地构造另一个图灵机 $\mathcal{M}'$，使得 $L_\omega(\mathcal{M}') = L(\mathcal{M})$。

事实上，我们可以探讨一些复杂性问题，而不必只局限于可计算性。

确实，当一种语言具有鲁棒性时，衡量它能够容忍何种级别的扰动 f 是有意义的：

定义 15. 给定某个函数 f：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们用$L_{\{f\}}(\mathcal{M})$表示在空间扰动 f 下由 $\mathcal{M}$ 接受的字的集合：$L_{\{f\}}(\mathcal{M}) = \{w |\ w \in L_{f(\ell(w))}(\mathcal{M})\}$.

上述定理 11 的证明明确地确立了：

引理 16. $L_n(\mathcal{M})$ ∈SPACE$(poly(n))$。

我们得到 PSPACE 的刻画：

定理 17（多项式精度鲁棒 $\Leftrightarrow$ PSPACE）。$L \in$ PSPACE 当且仅当存在某个 $\mathcal{M}$ 和某个多项式 p，$L = L(\mathcal{M}) = L_{\{p\}}(\mathcal{M})$。

证明。（$\Rightarrow$）如果 M 总是终止且在多项式空间内运行，那么就存在一个多项式 $q(\cdot)$，它界定了 M所用纸带部分的大小。考虑一个多项式$p \geq q + 2$，对于 $n \in N$ $L_{p(\ell(w))}(\mathcal{M}) \subseteq L(M)$。反向包含关系总是成立。

($\Leftarrow$) 根据前引理，我们总有 $L_{p(n)}(\mathcal{M}) \in$ PSPACE；又因为 $L_{p(n)}(\mathcal{M}) = L$，所以 $L \in PSPACE$。 □

这里考虑的是空间扰动。第 VIII 节将讨论其他类型的扰动，由此得到的是多项式时间而非 PSPACE。目前，我们仅考虑空间扰动。

IV. 嵌入动力系统

讨论图灵机的问题有一个优点：相关的可计算性和复杂性问题众所周知，或者更容易讨论。因此，许多作者将图灵机嵌入各种类别的动力系统中，以得出困难性结果；也就是说，他们指出，后者的可达性问题至少与图灵机的可达性问题一样难。

一般而言，诀窍如下：如果我们将字母表固定为 $\Sigma = \{0, 1\}$，并且对某个整数q有 $Q = \{1, \ldots, q\}$，再忽略空白符，那么总可以认为$\mathcal{C}_\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C} = \mathbb{N} \times \Sigma^* \times \Sigma^*$，也就是说，一个配置由某个控制状态和两个有限字组成。

固定一个将配置编码为实数（或整数）向量的编码函数：$\Upsilon : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^d$，其中 $d \in \mathbb{N}$。例如，可以考虑，$\Upsilon(q, w_1, w_2) = (q, \gamma(w_1)\ \gamma(w_2))$，其中 γ：$\Sigma^* \to \mathbb{R}$ 取为：

- 将 $\gamma_\mathbb{N}$ 编码为 $w = a_1 \ldots a_n$ 所对应的整数，该整数的二进制表示为 w，
- 或者将 w 编码为$[0, 1]$ 所对应的实数，其二进制展开为 w的编码 $\gamma_{[0,1]}$，
- 或者更一般地，使用k 进制而不是二进制，对某些 $k \geq 2$进行编码的 $\gamma^k_{[0,1]}$ 或 $\gamma^k_\mathbb{N}$编码，
- 或者将 w 映射为（$\gamma^k_{[0,1]}(w)$ $\ell(w)$）的 $\gamma'^k_{[0,1]}$。

假设有一个函数 f：$X \subseteq \mathbb{R}^d \to X$，使得对于任意配置 C，若将 C' 记为其单步后继配置，则有 $f(\Upsilon(C)) = \Upsilon(C')$：也就是说，相对于编码 γ，图灵机的一步对应于动力系统（X, f）的一步。换言之，下面的图表对于一步操作是交换的：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\vdash} & C' \\ \Upsilon \downarrow & & \downarrow \Upsilon \\ \Upsilon(C) & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \Upsilon(C') \end{array}$$

那么，对于任意步数，它都会满足交换性：

$$\begin{array}{ccccccccc} C & \xrightarrow{\vdash} & C' & \xrightarrow{\vdash} & C'' & \xrightarrow{\vdash} & C''' & \dashrightarrow & \\ \Upsilon \downarrow & & \downarrow \Upsilon & & \downarrow \Upsilon & & \downarrow \Upsilon & & \\ \Upsilon(C) & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \Upsilon(C') & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \Upsilon(C') & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \Upsilon(C''') & \dashrightarrow & \end{array}$$

因此，关于（与）图灵机（相关联的动力系统）中是否存在轨迹的问题，将被映射为关于动力系统（X, f）中是否存在轨迹的相应问题。

特别是，由于图灵机的可达性问题不可判定（可计算可枚举完全，因此也是可计算可枚举困难），这就证明了各种动力系统类别中的可达性问题不可判定（可计算可枚举困难）。由于大多数自然的动力系统类别中的可达性问题都是可计算可枚举的（只需模拟系统即可得到一个半算法），因此可达性问题是可计算可枚举完全的。

将这种情形称为逐步模拟。

这类嵌入策略确实能得出不可判定性结果。但是，诸如 $\gamma_{[0,1]}$ 或 $\gamma^k_{[0,1]}$ 这样的编码，其像是紧的，会将一些本质上不同的配置映射到彼此任意接近的点上（因为紧集上的序列必有聚点）。像 $\gamma_{\mathbb{N}}$ 这样的编码则没有紧像，但其模拟涉及任意大的整数，这是另一个问题。

V. 离散时间动力系统

现在讨论 $\mathbb{R}^d$ 上一般动力系统的鲁棒性问题，其中 $d \in \mathbb{N}$。

定义18（离散时间动力系统）。离散时间动力系统 $\mathcal{P}$ 由一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$以及从 X 到 X的某个（可能是部分）函数 f 给出。

当 f 保持有理数不变，即只要 f($\mathbb{Q}^d$) $\subseteq \mathbb{Q}^d$时，该动力系统称为有理的。如果一个系统是 $\mathbb{Q}$-可计算的，则称其为 $\mathbb{Q}$-可计算的，条件是它是有理的且 f: $\mathbb{Q}^d \to \mathbb{Q}^d$ 是可计算的。当其中的函数具有利普希茨性质时，我们称该系统为利普希茨的（相应地，局部利普希茨的）。

对于每个有理离散时间动力系统 $\mathcal{P}$，都关联有其在 $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d$上的可达关系 $R^{\mathcal{P}}(\cdot,\cdot)$。具体而言，对于两个有理点 x 和 y，关系 $R^{\mathcal{P}}$(x,y)成立，当且仅当存在一条从 x 到 y 的 $\mathcal{P}$ 轨迹。

A. 有理系统的情形

我们首先关注有理系统的情形。显然，$\mathbb{Q}$-可计算系统的可达关系是可计算可枚举的：只需使用一台图灵机模拟其动力学即可。实际上，[1] 仅考虑分段仿射映射这一特殊情形，将其作为离散时间系统的代表；这类系统是特殊的$\mathbb{Q}$-可计算利普希茨系统。

定义19（PAM系统）。分段仿射映射系统（PAM）是一个离散时间动力系统 $\mathcal{P}$，其中 f 是从 X 到 X 的一个（可能为部分）函数，由以下公式表示：$\mathbf{f(x)} = A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i$，对于 $\mathbf{x} \in P_i$，$i = 1 \ldots N$，其中A_i 是有理数 $d \times d$-矩阵，$\mathbf{b}_i \in \mathbb{Q}^d$ 和 P_i 是 X中的凸有理多面体集合。

换句话说，PAM 系统由将空间划分为凸多面体集合（称为区域），并为属于同一区域的所有点指定仿射更新规则 $\mathbf{x} := A_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i$ 构成。

注 20。PAM 定义中的所有常数都假定为有理数，以确保这仍然是一个 $\mathbb{Q}$-可计算系统。函数 f 不假定具有任何形式的连续性。

关于PAM的计算能力，已有如下已知结果；该结果使用了前一节所述的逐步模拟技术建立（使用 $\gamma_{[0,1]}$，并令 f 为分段仿射函数）。

定理 21（PAM 的计算能力 [27] [26]）。任意可递归枚举语言都可归约到 PAM 的可达性关系。

备注 22。PAM 在 *[1]* 中的定义仅适用于 X 必须是某个有界多面体集合的情况。实际上，根据所考虑的 γ，即使假设区域 P_i 是有理盒，上述结果仍然成立。

这证明了可递归枚举完备性（Σ^0_1-完备性），从而证明了 $\mathbb{Q}$-可计算系统的可达性不可判定。接下来讨论这对“鲁棒系统”是否仍然成立。

我们可以采用小扰动的范式：考虑一个函数为 f 的离散时间动力系统 $\mathcal{P}$。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们考虑其 ε-扰动系统 $\mathcal{P}_\varepsilon$。其轨迹定义为满足不等式 $d(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)) < \varepsilon$ 的序列 $\mathbf{x}_t$，对所有 t 均成立。这个非确定性系统可以视为受到幅度为 ε 的小噪声的 $\mathcal{P}$。为方便起见，我们将 $\mathbf{y} \in \mathbf{f}_\epsilon(\mathbf{x})$ 记作 $d(\mathbf{f(x)}, \mathbf{y}) < \epsilon$ 的同义写法。我们用 $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ 表示系统 $\mathcal{P}_\varepsilon$ 中的可达性。

未受扰系统 $\mathcal{P}$ 的所有轨迹也是 ε-受扰系统 $\mathcal{P}_\varepsilon$的轨迹。如果 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，那么 ε_1-受扰系统的任意轨迹也是 ε_2-受扰 PAM 的轨迹。与图灵机一样，我们可以对 $\varepsilon \to 0$取极限。也就是说，$R^{\mathcal{P}}_\omega$(x,y) 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$ $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x,y)：此关系编码了在任意小扰动噪声下的可达性。

引理 23（[1, 引理 3]）。对于任意 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 以及任意 x 和 y，以下蕴含关系成立：$R^{\mathcal{P}}$(x, y)$\Rightarrow R^{\mathcal{P}}_\omega$(x, y) $\Rightarrow R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon_2}$(x, y) $\Rightarrow R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon_1}$(x, y)。

我们证明，利普希茨 $\mathbb{Q}$-可计算系统的扰动可达关系是余可计算可枚举的，从而推广了 [1, 定理 5]。

定理 24（扰动可达性是余可计算可枚举的）。考虑一个局部利普希茨且 $\mathbb{Q}$可计算的系统，其定义域 X 是一个闭有理盒。

Then the relation $R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d$ *is in the class* Π^0_1.

证明。由于 f 是局部利普希茨的，且 X 是紧集，我们知道 f 是利普希茨的：存在某个 $L > 0$ 使得d(f(x), f(y)) $\leq L \cdot d$(x, y)。

对于每个 $\delta = 2^{-m}$、$m \in \mathbb{N}$，我们都关联一个图$G_m = (V_\delta, \to_\delta)$：其顶点记作$(\mathcal{V}_i)_i$，对应于对紧 X 的一种有限覆盖，该覆盖由半径为 $\delta_i < \delta$的有理开球 $\mathcal{V}_i = B(\mathbf{x}_i, \delta_i)$构成。如果且仅如果 $B(\mathbf{f}(\mathbf{x}_i), (L+1)\delta) \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$，图中就有一条从 $\mathcal{V}_i$ 到 $\mathcal{V}_j$ 的边，也就是说 $\mathcal{V}_i \to_\delta \mathcal{V}_j$。根据我们对定义域的假设，通过对有理盒 X进行适当的离散化，可以有效地从 m得到这样的图。

断言 1：假设 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$，其中对于 $\epsilon = 2^{-n}$，$\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$。那么 $\mathcal{V}_i \to_\epsilon \mathcal{V}_j$ 对于所有满足 $\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 的 $\mathcal{V}_j$ 都成立。

基本上这是成立的，因为 $\delta = \epsilon$ 的图被构造为始终比 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}$ 拥有更多的轨迹/行为。

证明。若 $\mathrm{y} \in \mathrm{f}_\epsilon(\mathrm{x})$，则 $d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_i), \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_i), \mathrm{f}(\mathrm{x})) + d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) < Ld(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}) + \epsilon \leq L\epsilon + \epsilon = (L+1)\epsilon$，因此根据图的定义，从 $\mathcal{V}_i \to_\epsilon \mathcal{V}_j$ 到任何包含 y 的 $\mathcal{V}_j$ 都有一条边。□

命题 2：对于任意 $\epsilon = 2^{-n}$，都存在某个 $\delta = 2^{-m}$，使得如果我们有 $\mathcal{V}_i \to_\delta^* \mathcal{V}_j$，那么当 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 时，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$。

也就是说，命题 2 表明，对于相应的 δ，当 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 时，$\neg R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 蕴含 $\neg(\mathcal{V}_i \to_\delta^* \mathcal{V}_j)$。

证明。考虑 $\delta = 2^{-m}$，其中 $\delta < \epsilon/(2L+2)$：假设 $\mathcal{V}_{i=i_0} \to_\delta \mathcal{V}_{i_1} \ldots \to_\delta \mathcal{V}_{i_t=j}$，其中 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$，$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$。

反设 $\neg R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$，令 ℓ 为满足以下条件的最小下标：对某个 $\mathrm{z} \in \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$，有 $\neg R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{z})$。

由于 $\mathcal{V}_{i_\ell} \to_\delta \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$，存在某个 $\overline{\mathrm{y}} \in \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$，使得 $d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \overline{\mathrm{y}}) < (L+1)\delta$。取 $\mathrm{z} \in \overline{\mathcal{V}}_{i_{\ell+1}}$。

若 $\ell = 0$，则 $d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \overline{\mathrm{z}}) \leq d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell})) + d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{y}) + d(\overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{z}}) < L\delta + (L+1)\delta + \delta = (2L+2)\delta < \epsilon$，因此 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{z})$：矛盾。

若 $\ell > 0$，由于 ℓ 是具有上述性质的最小下标，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_{i_\ell})$。但随后 $d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{z}) \leq d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) < (L+1)\delta + \delta < (2L+2)\delta < \epsilon$。因此，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}_{i_\ell}, \mathrm{z})$，并且由于我们有 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_{i_\ell})$，于是得到 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{z})$，这就产生了矛盾。□

根据上面两条，$\neg R_\omega^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 成立，当且仅当存在某个 $\delta = 2^{-m}$，使得 $\neg(\mathcal{V}_i \to_\delta^* \mathcal{V}_j)$；存在某个 $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$，满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$。这当且仅当存在某个整数 m，使得 $\mathrm{NOPATH}(G_m, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$；存在某个 $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$，满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$。

后一性质是可计算可枚举的，因为它对应于可判定集的并（关于 m 是一致的），而 $\mathrm{NOPATH}(G_m, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$ 是有限图 G_m 上的可判定性质。□

请注意，即使只假设定义域是可计算紧集，这种方法也成立：我们稍后会回顾它的含义（借助可计算分析），但目前可以先指出，上述证明只要求对于给定的 $\delta = 2^{-m}$，存在一种有效方法，能够确定其一个有效覆盖；该覆盖由有限个半径小于 δ 的有理球组成。

推论25（稳健的 $\Rightarrow$ 可判定 [1, 推论 5]）。假设定理 24 的假设成立。 *yp f*

If $R_\omega^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}$ then $R^{\mathcal{P}}$ is decidable.

证明。$R^{\mathcal{P}}$ 是可计算可枚举的，并且根据定理 24，我们知道 $R_\omega^{\mathcal{P}}$ 是余可计算可枚举的。如果它们相等，那么它们就是可判定的，因为一个既是可计算可枚举又是余可计算可枚举的集合是可判定的。□

注 26。请注意，即使 X不是紧集，类似的结论仍然成立：从证明可知，只要存在某个图族 $\mathcal{G} = (G_m)$，且满足 $G_m = (V_m, \to_m)$，就可以进行类似的推理，并得到以下性质：

1) $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 当 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$, $\epsilon = 2^{-n}$ 时，意味着对于所有包含 y 的 $\mathcal{V}_j$，都有 $\mathcal{V}_i \to_n \mathcal{V}_j$。2) 对于任意 $\epsilon = 2^{-n}$，都存在某个 m，使得如果我们有 $\mathcal{V}_i \to_m^* \mathcal{V}_j$，那么当 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 时，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$。

3) 对于所有 m，G_m 都是有限的可计算图：给定整数 m、i 和 j，可以有效地确定 $\mathcal{V}_i \to_m \mathcal{V}_j$ 是否属于 G_m。

当这三个性质成立时，我们称 $\mathcal{G}$ 是该离散时间动力系统的可计算抽象。

如果增加某个条件，则存在一种逆命题性质。在将此表述为推论 31 之前，我们将鲁棒性与 δ 中的可判定性概念联系起来，同时也联系到某个不可达性见证的存在性。

给定 x，我们用 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 表示从 x 可达的点 y 的集合：$R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{y} | R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\}$. 容易看出，这也对应于满足 $\mathrm{x} \in R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 且 $\mathrm{f}(R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})) \subseteq R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 的最小集合。

如果存在 $\mathcal{R}^* \subseteq X$ 使得，那么我们称 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 是 ϵ-远离为真。

1) $\mathrm{x} \in \mathcal{R}^*$，2) $\mathrm{f}_\epsilon(\mathcal{R}^*) \subseteq \mathcal{R}^*$，3) $\mathrm{y} \notin \mathcal{R}^*$。

当这一条件成立时，必有 $\neg R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$：事实上，对于所有 $\epsilon > 0$，集合 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{y} | R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\}$ 是满足 $\mathrm{x} \in R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 且 $\mathrm{f}_\epsilon(R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})) \subseteq R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 的最小集合。因此，由于 $\mathcal{R}^*$ 也满足前两项所述的这些性质，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) \subseteq \mathcal{R}^*$，故根据第三项，$\mathrm{y} \notin R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$，因为 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) \subseteq R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) \subseteq \mathcal{R}^*$ 且 $\mathrm{y} \notin \mathcal{R}^*$。

换言之，$\mathcal{R}^*$ 可以视为 y 无法从 x 到达的见证。我们称它处于 ϵ 级。

这将我们引向 δ-可判定性 [16]:

命题 27（稳健的 $\Leftrightarrow$ 可达性为真，或距离为真还差 ϵ）。当且仅当对于所有 $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{Q}^d$，我们都有 $R_\omega^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}$，且以下情况之一成立：

1) $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为真 2) 或 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为假，但此外，还存在 $\epsilon > 0$，使其与为真相差 ϵ。（即，在某个 $\epsilon > 0$ 层级上存在其见证。）

证明。 $\Rightarrow$：如我们所说，对于所有 $\epsilon > 0$，集合 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 满足 $\mathrm{x} \in R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 且 $\mathrm{f}_\epsilon(R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})) \subseteq R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$（这甚至是满足该条件的最小集合）。

令 $\mathrm{y} \in \mathbb{Q}^d$，假设 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \bigcap_\epsilon R_\omega^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 不为真。那么存在 ϵ，使得 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为假，即 $\mathrm{y} \notin R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$。考虑 $\mathcal{R}^* = R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$。于是，$\mathrm{x} \in \mathcal{R}^*$，并且根据第一段，$\mathrm{f}_\epsilon(\mathcal{R}^*) \subseteq \mathcal{R}^*$ 且 $\mathrm{y} \notin \mathcal{R}^*$。

$\Leftarrow$：当 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为真时，对于所有 $\epsilon > 0$，$R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 都为真，因此 $R_\omega^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为真。现在，当 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为假时，根据假设，我们知道对于某个$\epsilon > 0$，$R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 与为真相差 ϵ：存在一个集合 $\mathcal{R}^*$，满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{R}^*$ 且 $\mathrm{f}_\epsilon(\mathcal{R}^*) \subseteq \mathcal{R}^*$。由于 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$ 是这样的最小集合，因此 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) \subseteq \mathcal{R}^*$。现在，由于 $\mathrm{y} \notin \mathcal{R}^*$，必然有 $\mathrm{y} \notin R_\varepsilon^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$。因此 $R_\omega^{\mathcal{P}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 为假。

□

如果一个子集 R^* of X 满足条件 2) 和 3)，也就是说，$\mathrm{f}_\epsilon(R^*) \subseteq R^*$，且 $\mathrm{y} \notin R^*$，我们就称其为 ϵ-拒绝的。到达这样的 R^* 的轨迹将永远不会离开它。如果对于任意 x、y，都存在某个 R^* ϵ-拒绝的集合，使得从 x 出发的轨迹要么到达 y，要么在无法到达 y 时到达 R^*，则称一个系统最终具有判定性。

我们回到推论25的逆命题：根据命题 27，通过将其中第 2) 项所给出的 $\mathcal{R}^*$的 $R^* = \mathcal{R}^*$ 视为 $R^{\mathcal{P}}_\omega = R^{\mathcal{P}}$，鲁棒动力系统（即 $R^{\mathcal{P}}_\omega = R^{\mathcal{P}}$）是最终具有判定性的。反之：

引理28。设一个有理系统不具鲁棒性，且 f 连续或满足利普希茨条件：根据 $R^{\mathcal{P}} \subseteq R^{\mathcal{P}}_\omega$，这意味着存在某些 x 和 y，使得 $R^{\mathcal{P}}_\omega$(x, y) 成立，但 $R^{\mathcal{P}}$(x, y) 不成立。从 x 出发的轨迹无法到达任何 ϵ-拒绝子集。

证明。反证法，假设从 x 出发的轨迹到达了某个 ϵ-拒绝 R^*。或许只需再考虑一步，就可以假设它在时间 t 首次到达 R^* 的内部：事实上，如果它在 x* 处到达边界，那么我们知道 B(f(x*) ϵ) $\subseteq R^*$，且 f(x*) 位于该球的内部。现在，从初始点 x 到时间 t 的位置，它与 y 始终保持正距离。由于 f 连续或满足利普希茨条件，f 的 t 次迭代也如此。因此，存在一个足够小的 $0 < \epsilon' < \epsilon$，使得 $R^{\mathcal{P}}_{\epsilon'}$ 与 R^* 的内部相交，并且始终与 y 保持正距离。一旦进入 R^*，经 ϵ' 扰动的轨迹就会留在其中，因为我们有 $\epsilon' < \epsilon$。于是得到 y $\notin R^{\mathcal{P}}_{\epsilon'}$，进而得到¬$R^{\mathcal{P}}_\omega$(x, y)：矛盾。 □

推论29。考虑一个连续或利普希茨有理动力系统。它具有鲁棒性，当且仅当它最终具有判定性。

在定理 24 的假设下，我们甚至可以计算这些见证。如果存在一个算法，使得给定 x 和 y 后，它（能够终止并）以有理球并集的形式输出这样的 R^*，那么我们称某个动力系统是有效最终可判定的。

命题30（推论25的加强）。假设定理 24 的假设成立。如果 $R^{\mathcal{P}}_\omega = R^{\mathcal{P}}$ 那么 $R^{\mathcal{P}}$ 是可计算的，并且该系统是有效最终可判定的。

证明。定理 24 的证明表明，当 $R^{\mathcal{P}}_\omega$(x,y) 为假时，对于某个 $\epsilon = 2^{-n}$，$R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x,y) 为假；并且存在某个 $\delta = 2^{-m}$，以及某个图 G_m，其顶点为$\mathcal{V}_i$ 和 $\mathcal{V}_j$，满足 x $\in \mathcal{V}_i$、y $\in \mathcal{V}_j$ 和 ¬($\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$)。将满足 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_k$ 的顶点 $\mathcal{V}_k$ 的并记为 R^{G_m}，其中 x $\in \mathcal{V}_i$ 位于该图中。考虑 $\mathcal{R}^* = R^{G_m}$。根据该证明中构造的性质，这构成了层级 $\delta = 2^{-m}$ 上的一个见证。

然后，可以通过逐渐增大 m 进行测试，直到找到具有上述性质的图，从而找到 m。第一个找到的图所对应的 $\mathcal{R}^* = R^{G_m}$ 将是由上述论证得到的层级 $\delta = 2^{-m}$ 上的见证。 □

有效的最终可判定系统，其可达关系必然是可判定的（给定 x 和 y，计算路径，直到到达 y（然后接受），或 R^*（然后拒绝）：

推论 31（最终可判定系统的可判定 ⇔ 鲁棒）。在定理 24 的假设下，$R^{\mathcal{P}}_\omega = R^{\mathcal{P}}$ 当且仅当$R^{\mathcal{P}}$ 可判定；并且，它是有效最终可判定的，当且仅当它是有效最终可判定的。

现在我们来讨论复杂性问题。

假设该动力系统具有鲁棒性，即 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}_\omega$。这意味着，对于所有有理数 x、y，都有 $R^{\mathcal{P}}$(x, y) ⇔$R^{\mathcal{P}}_\omega$(x, y)。因此，对于所有有理数 x、y，都存在某个 ε（取决于 x、y），使得 $R^{\mathcal{P}}$(x, y) 和 $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, y) 具有相同的真值（且真值不受更小的 ϵ 影响）。

因此，自然要根据 x 和 y 对所需鲁棒性的层级进行量化，即考察值 ε。

由于我们总可以假设对于某个整数 n，$\varepsilon = 2^{-n}$，因此记 $R^{\mathcal{P}}_n$ 为$R^{\mathcal{P}}_{2^{-n}}$，并由此引入：

定义32. 给定某个函数 f： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将关系$R^{\mathcal{P}}{}_{\{f\}}$ 记作如下定义的关系：对于任意有理点 x 和 y，该关系成立当且仅当 $R^{\mathcal{P}}_{f(\ell(\mathbf{x})+\ell(\mathbf{y}))}$(x, y)。

引理33。考虑一个局部利普希茨 $\mathbb{Q}$-可计算系统，其中 f：$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 可在多项式时间内计算，且其定义域 X 是一个闭有理盒。对于 $\delta = 2^{-m}$，考虑定理 24 的证明中所考虑的关联图 G_m。则 NOPATH($G_m, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$) 是可判定的，并且所需空间关于 m 为多项式。

证明。该图的顶点数少于 $\mathcal{O}(2^{d*m})$。该图具有一个后继关系 $\to_\delta$，可使用关于 m 为多项式的空间计算。因此，推论 8 的分析适用，我们可以使用关于 m 为多项式的空间确定 NOPATH($G_m, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$)。 □

定理34。假设引理33的假设成立。假设p 是某个多项式。则 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}} \in$ PSPACE。

证明。根据定理 24 的证明，我们知道，对于所有n，存在某个 m（取决于 n），使得 $R^{\mathcal{P}}_n$(x, y) 和 R^{G_m}(x, y) 具有相同的真值，其中 R^{G_m} 表示图 G_m中的可达性。

根据这些假设，给定 x 和 y，我们可以通过确定 $R^{\mathcal{P}}_n$(x, y) 的真值来判断 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$(x, y)，其中 n 关于 ℓ(x)+ℓ(y) 是多项式级的。根据定理 24 的证明，相应的 m 与 n 是多项式相关的（它甚至是关于 n 的仿射函数）。现在，引理33的分析表明，可以在关于 m 为多项式级的空间内确定 R^{G_m}(x, y) 的真值。 □

定理35（对精度 ⇒ PSPACE 多项式鲁棒）。在相同假设下，若 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$ 对某个多项式 p 成立，则 $R^{\mathcal{P}} \in$ PSPACE。

证明。根据定理（34），我们有 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}} \in$ PSPACE；又因为 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$，所以 $R^{\mathcal{P}} \in$ PSPACE。 □

实际上，这甚至是对 PSPACE 的一种刻画（或者也可以说：对于 $\mathbb{Q}$-可计算的多项式时间计算，若其对精度具有多项式鲁棒性，则可达性是 PSPACE 完全的）。

定理36（对精度 ⇔ 多项式稳健，属于PSPACE）。任何 PSPACE语言都可归约到PAM的可达性关系，其中 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$，且存在某个多项式 p。

证明。设 $L \in$ PSPACE。存在一台图灵机 $\mathcal{M}$，其 $L(\mathcal{M}) = L$在多项式空间 $q(\cdot)$ 内运行。定理 21 中所考虑的逐步模拟，使用 $\gamma_{[0,1]}$，在长度为 n 的字上以精度 $\mathcal{O}(2^{-q(n)})$ 完成。所得

系统根据模拟的性质满足 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{q+\mathcal{O}(1)\}} = R^{\mathcal{P}}$。换言之，这是因为所涉及的模拟保持了图灵机的鲁棒性。 □

假设与定理 35 中相同，当$R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$对于某个多项式 p成立时，我们还可以在多项式空间内确定一个见证，证明 $\neg R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$（使用其一种适当的表示）。

B. 可计算系统的情形

现在我们考虑一般（可能非有理数值的）离散时间动力系统的情形。在这种情况下，f 可能取非有理数值，因此我们需要讨论实函数的可计算性。若函数 $\mathrm{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 属于可计算分析（CA），则称该系统是可计算的。

关于可计算分析（CA）的速成介绍可见附录（例如参见 [34] 或 [11]），简而言之：点 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ 的一个名称是由嵌套开有理球组成的序列 (I_n)，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$，都有 $I_{n+1} \subseteq I_n$。函数 $\mathrm{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ 的一个名称是包含所有开有理球对 (I, J) 的列表，这些球对满足 $\mathrm{f}(cls(I)) \subseteq J$。闭集 F 的一个名称是由所有满足 $cls(I_n) \cap F = \emptyset$的开有理球组成的序列 (I_n)，以及由所有满足 $J_n \cap F \neq \emptyset$的开有理球组成的序列 (J_n)。紧集 K 的一个名称是将 F 作为闭集时的名称，以及一个整数 L，使得 $K \subseteq B(0, L)$。所有这些名称都可以编码为符号的无限序列。这里所涉及的可计算性概念是第二型图灵机的可计算性，也就是说，图灵机可以在无限纸带上运行，并将结果输出到只写输出带上。于是：点 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ 是可计算的，当且仅当它有一个可计算名称。类似地，可定义可计算函数、可计算闭集或可计算紧集的概念：例如，若一个闭集有可计算名称，就称其为可计算的（因此，紧集也作为闭集而可计算）。特别是，紧集的这一可计算性概念蕴含了定理 24 之后讨论的性质（证明见 [34, 引理 5.2.5]）。若 Y 和 Z 是配有相应名称系统的空间，则称算子 $f : Y \to Z$ 可计算，当且仅当存在一个可计算函数，它将 $y \in Y$的每个名称映射到 $f(y) \in Z$的一个名称。

根据元胞自动机的模型，给定 f 的名称[2]，即使给定某些有理数 x 和 y，一般情况下也无法有效判断 $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$。因此，给定某个有理球 $B(\mathrm{y}\ \delta)$，我们必须排除“边界可达性”，也就是说，排除这样的情况：$B(\mathrm{y}\ \delta)$不可达，但其边界可达，即 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \delta) - B(\mathrm{y}\ \delta)$可达。于是，一个自然的问题是：给定某个球，若 $B(\mathrm{y}\ \delta)$可达（这种情况意味着 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \delta)$可达），或者$\overline{B}(\mathrm{y}\ \delta)$不可达，判断哪种情况成立。我们称之为球（判定）问题。当然，根据上述定义，当 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$是一个闭集时，$R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})$是可计算闭集，当且仅当相应的球问题可算法求解。

对于一个可计算系统，球判定问题是可计算可枚举的：以递增的精度和 T，模拟系统从 x 开始的演化，直到第 T 步，直至找到保证位置 x_T 在时间 T 仍处于某个 $\delta' < \delta$ 的 $B(\mathrm{y}\ \delta')$ 中。这是可行的：如果该球确实可达，那么最终计算出相应 x_T 的充分近似值后，过程就会终止；反之，若不能保证可达性，过程就不可能终止。一般而言，球问题当然不是余可计算可枚举的。

对于离散时间系统，我们还可以在 $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d \times \mathbb{N}$ 上定义其可达关系 $R^{\mathcal{P}}(\cdot, \cdot, \cdot)$。具体而言，对于两个有理点 x 和 y 以及由整数 p 编码的有理数 $0 < \eta = 2^{-p}$，关系 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p)$ 成立，当且仅当存在一条从 x 到 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta)$ 的 $\mathcal{P}$ 轨迹。我们以类似方式定义 $R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$，以及 $R^{\mathcal{P}}_{\omega} = \bigcap_{\epsilon} R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$。该关系描述了在任意小的扰动噪声下到达某个闭球的可达性。

引理 37. 对于任意 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 以及任意 x 和 y，η，以下蕴含关系成立：$R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p) \Rightarrow R^{\mathcal{P}}_{\omega}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p) \Rightarrow R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon_2}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p) \Rightarrow R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon_1}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p)$。

给定 x 和 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$，我们有 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) \subseteq R^{\mathcal{P}}_{\epsilon_2}(\mathrm{x}) \subseteq cls(R^{\mathcal{P}}_{\epsilon_2}(\mathrm{x})) \subseteq R^{\mathcal{P}}_{\epsilon_1}(\mathrm{x}) \subseteq cls(R^{\mathcal{P}}_{\epsilon_1}(\mathrm{x}))$。因此，$R^{\mathcal{P}}_{\omega}(\mathrm{x}) = \bigcap_{\epsilon>0} R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}(\mathrm{x}) = \bigcap_{\epsilon>0} cls(R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}(\mathrm{x}))$ 是一个闭集。

定理 38（扰动可达性是余递归可枚举的）。考虑一个局部利普希茨可计算系统，其定义域 X 是一个可计算紧集。$R^{\mathcal{P}}_{\omega}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p) \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d \times \mathbb{N}$ 属于 Π^0_1。

这一表述与 [8, 定理 13] 有相似之处：他们的结果确立的是系统所接受的语言，但其关于终止的假设比我们的强得多，因此他们的分析确实简单得多。

证明。由于 f 是局部利普希茨的，且 X 是紧集，我们知道 f 是利普希茨的：存在某个 $L > 0$，使得$d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{f}(\mathrm{y})) \leq L \cdot d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$。

对于每个 $\delta = 2^{-m}$、$m \in \mathbb{N}$，我们关联一个图$G_m = (V_\delta, \to_\delta)$：该图的顶点（记作 $(\mathcal{V}_i)_i$）对应于对紧集 X 的某个有限覆盖，该覆盖由半径为 $\delta_i < \delta$ 的有理开球 $\mathcal{V}_i = B(\mathrm{x}_i, \delta_i)$ 构成。

在此图中，从 $\mathcal{V}_i$ 到 $\mathcal{V}_j$ 有一条边，也就是说$\mathcal{V}_i \to_\delta \mathcal{V}_j$，当且仅当 $B(\mathrm{f}_i, (L+2)\delta) \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$；其中，给定某个有理数 f_i，它由 $\mathrm{f}(\mathrm{x}_i)$ 的某个（已计算的）δ-近似给出，即 f_i，使得 $\mathrm{f}(\mathrm{x}_i) \in B(\mathrm{f}_i, \delta)$。

这样做是为了确保覆盖 $B(\mathrm{f}(\mathrm{x}_i), (L+1)\delta)$。

由于我们假设 X 是紧的且可计算，因此可以通过计算 $\mathrm{f}(\mathrm{x}_i)$ 的适当近似 f_i（精度为 δ），从 m有效地构造出这样的图。

如预期，我们记 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ 表示存在一条从 x 到 y 的轨迹，其中 y 可以是某个实数点（对于$R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ 也类似）。

- 断言 1：假设 $R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$，其中 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$ for $\epsilon = 2^{-n}$。那么，对于所有满足 $\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$的 $\mathcal{V}_j$，都有 $\mathcal{V}_i \to_\epsilon \mathcal{V}_j$。这基本成立，因为 $\delta = \epsilon$ 的图总是构造得包含比 $R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$更多的轨迹／行为。

证明。若 $\mathrm{y} \in \mathrm{f}_\epsilon(\mathrm{x})$，则 $d(\mathrm{f}_i, \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{f}_i, \mathrm{f}(\mathrm{x}_i)) + d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_i), \mathrm{f}(\mathrm{x})) + d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) < \epsilon + Ld(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}) + \epsilon = (L+2)\epsilon$，因此根据图的定义，从 $\mathcal{V}_i \to_\epsilon \mathcal{V}_j$ 到任意包含 y 的 $\mathcal{V}_j$都有一条边。 □

[2]即使假设它是可计算的。

• 命题 2：对于任意 $\epsilon = 2^{-n}$，都存在某个 $\delta = 2^{-m}$，使得如果我们有 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$，那么当 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 时，$R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x,y)。

证明。考虑 $\delta = 2^{-m}$ with $\delta < \epsilon/(2L+4)$：假设 $\mathcal{V}_{i=i_0} \to_\delta \mathcal{V}_{i_1} \ldots \to_\delta \mathcal{V}_{i_t=j}$ with $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$, $\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$。反设 $\neg R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, y) 不成立，并令 ℓ 为满足以下条件的最小下标：存在某个 $\mathrm{z} \in \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$ 使得 $\neg R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, z)。由于 $\mathcal{V}_{i_\ell} \to_\delta \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$，存在某个 $\mathrm{y} \in \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$ 满足 $d(\mathrm{f}_{i_\ell}, \mathrm{y}) < (L+2)\delta$ with $d(\mathrm{f}_{i_\ell}, \mathrm{f}(x_{i_\ell})) < \delta$。取 $\mathrm{z} \in \mathcal{V}_{i_{\ell+1}}$。若 $\ell = 0$，则 $d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{z}) \le d(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell})) + d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{f}_{i_\ell}) + d(\mathrm{f}_{i_\ell}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) < L\delta + \delta + (L+2)\delta + \delta = (2L+4)\delta < \epsilon$，因此 $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, z)：矛盾。若 $\ell > 0$，由于 ℓ 是满足上述性质的最小下标，$R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, x_{i_ℓ})。但这样一来，$d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{z}) \le d(\mathrm{f}(\mathrm{x}_{i_\ell}), \mathrm{f}_{i_\ell}) + d(\mathrm{f}_{i_\ell}, \mathrm{y}) + d(\mathrm{y}, \mathrm{z}) < \delta + (L+2)\delta + \delta < (2L+4)\delta < \epsilon$。因此，$R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x}_{i_\ell}, \mathrm{z})$，又因为我们有 $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x}, \mathrm{x}_{i_\ell})$，所以得到 $R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, z)，从而产生矛盾。 □

也就是说，对于相应的 δ，只要 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$，命题 2 就表明 $\neg R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x, y) 蕴含 $\neg(\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j)$。

根据以上两项，当且仅当对所有 $\delta = 2^{-m}$，都有 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$；并且对所有 $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$，只要 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$，$R^{\mathcal{P}}_\omega$(x,y) 成立。

如果更倾向于另一种表述，那么当且仅当存在某个 $\delta = 2^{-m}$，$\neg(\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j)$，且存在某个 $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$，使得 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$、$\mathrm{y} \in \mathcal{V}_j$ 时，$\neg R^{\mathcal{P}}_\omega$(x,y) 成立。

于是：

• 命题*（紧致性论证）：给定一个球 $B(\mathrm{y}\ \eta)$，我们有 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}) = \emptyset$ 当且仅当 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap cls(R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x})) = \emptyset$ 对某个 $\epsilon > 0$ 成立。

证明。 $\Leftarrow$（容易的方向）：如果对于某个 $\epsilon > 0$ 有 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x) $= \emptyset$，那么我们不可能有 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}) \neq \emptyset$，因为其中会包含一个必然属于 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\varepsilon$(x) 的点。

$\Rightarrow$（紧致性论证）：假设 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}) = \emptyset$。由于 $R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}) = \bigcap_{\epsilon>0} cls(R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x}))$，这意味着 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(cls(R^{\mathcal{P}}_{2^{-n}}(\mathrm{x})))^c$ 是 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta)$ 的某个覆盖。由于 $B(\mathrm{y}\ \eta)$ 是闭且有界的，因此它是紧的。由此，可以从该覆盖中提取出某个有限覆盖。因此，对于某个 n_0，$\bigcup_{n\neq n_0}(cls(R^{\mathcal{P}}_{2^{-n}}(\mathrm{x})))^c = (cls(R^{\mathcal{P}}_{2^{-n_0}}(\mathrm{x})))^c$ 是 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta)$ 的一个覆盖。换言之，对于 $\epsilon = 2^{-n_0}$，$\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap cls(R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x})) = \emptyset$。这证明了从左到右的方向。 □

因此，我们基本上可以采用与定理 24 的证明非常相似的论证，其中现在由 $\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta)$ 承担 y 的作用。具体来说：

当且仅当对于所有 $\delta = 2^{-m}$，都有 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$；对于所有满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$ 的 $\mathcal{V}_i$，以及满足 $\mathcal{V}_j \cap \overline{B}(\mathrm{y}\ 2^{-p}) \neq \emptyset$ 的情形，$R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ \eta)$ 成立。

从左到右的方向由断言 1 显然成立。反过来，假设对于所有 $\delta = 2^{-m}$，都有 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$；对于所有满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$ 的 $\mathcal{V}_i$、$\mathcal{V}_j$，都有 $\mathcal{V}_j \cap \overline{B}(\mathrm{y}\ 2^{-p}) \neq \emptyset$。用矛盾法，假设 $\neg R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ \eta)$。由命题*，我们知道，对于某个 $\epsilon > 0$，$\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap cls(R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x})) = \emptyset$。特别地，$\overline{B}(\mathrm{y}\ \eta) \cap R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x}) = \emptyset$。那么，对于断言 2 中对应的 $\delta = 2^{-m}$，我们不可能有 $\mathcal{V}_i \overset{*}{\to}_\delta \mathcal{V}_j$，对于任何满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$，都有 $\mathcal{V}_j \cap \overline{B}(\mathrm{y}\ 2^{-p}) \neq \emptyset$。这就证明了从右到左的方向。

如果愿意，也可以说，当且仅当存在某个整数 m，使得以下性质 P_m 成立：对于任意 $\mathcal{V}_i$，以及满足 $\mathrm{x} \in \mathcal{V}_i$ 且 $\mathcal{V}_j \cap \overline{B}(\mathrm{y}\ 2^{-p}) \neq \emptyset$ 的 $\mathcal{V}_j$，都有 NOPATH($G_m, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$)。

后一个性质是可计算可枚举的，因为它对应于可判定集的并（关于 m 一致），而性质 P_m 是有限图 G_m 上的可判定性质。 □

推论39（鲁棒 $\Rightarrow$ 可判定）。假设定理 38 的假设成立。假设对于所有有理数 x，$R^{\mathcal{P}}$(x) 是闭的，并且 $R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) = R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x})$。那么球判定问题是可判定的。

证明。给定球问题的某个实例 $B(\mathrm{y}\ \delta)$，并行运行其可计算枚举算法（检测到该算法终止时接受）和 $\left(R^{\mathcal{P}}\right)^c = (\mathrm{x})$ (x) 的可计算枚举算法（检测到该算法终止时拒绝）。 □

定义40。给定某个函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{f\}}$ 记作：对于两个有理点 x 和 y，以及 p，该关系成立当且仅当 $R^{\mathcal{P}}_{f(\ell(\mathrm{x})+\ell(\mathrm{y})+p)}$(x, y p)。

我们还需要多项式时间（poly. time）可计算函数的概念：见 [25]。简而言之，$\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ 的快速收敛名称是 x 的一个名称，其 I_n 半径为 $< 2^{-n}$。那么，如果存在某个预言机图灵机 M，使得对于所有 x，给定任意一个以快速收敛名称为预言机的 x 的名称，并给定 n，M 都能在关于 n 的多项式时间内输出一个包含 f(x)、半径为 $< 2^{-n}$ 的开有理球，则 $\mathrm{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ 是多项式时间可计算的。

定理41。考虑一个局部利普希茨系统，其 f 可在多项式时间内计算，定义域 X 是一个闭有理盒。那么 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}} \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d \times \mathbb{N} \in$ PSPACE。

证明。定理 38 的证明（与定理 24 的证明类似）表明，当 $R^{\mathcal{P}}_\omega(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p)$ 为假时，对于某个 $\epsilon = 2^{-n}$，$R^{\mathcal{P}}_\varepsilon(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p)$ 为假。根据这些假设，给定 x、y 和 p，我们可以取一个关于 $\ell(\mathrm{x}) + \ell(\mathrm{y}) + p$ 多项式的 n。根据证明，相应的 m 与 n 呈多项式关系（它甚至是关于 n 的仿射函数）。现在，类似于引理 33中的分析表明，可以用关于 m 的多项式空间确定 $R^{G_m}(\mathrm{x}, \mathrm{y}\ p)$ 的真值。 □

定理42（对精度 $\Rightarrow$ PSPACE 多项式稳健）。考虑定理41的假设。假设对于所有有理数 x，$R^{\mathcal{P}}$(x) 都是闭的，并且对于某个多项式 p，$R^{\mathcal{P}}(\mathrm{x}) = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$。那么球判定问题属于 PSPACE。

证明。根据定理41，我们有 $R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}} \in$ PSPACE；由于 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}{}_{\{p\}}$，因此 $R^{\mathcal{P}} \in$ PSPACE。 □

VI. 鲁棒性与可绘性的关系

我们还可以更进一步，研究几何性质：在前几节中，我们为每个离散时间动力系统关联了一个定义在有理数上的可达关系。但我们也可以将其视为定义在实数上的关系，并使用元胞自动机的框架，讨论 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 的子集。若能有效地

枚举与其相交的有理开球，则称 的闭子集为可枚举闭集。由 [34], 的陈述可得：

定理 43. 考虑一个可计算离散时间系统 $\mathcal{P}$，其定义域是一个可计算紧集。

对于所有 x， $cls(R^{\mathcal{P}}(x)) \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个可计算可枚举闭子集。

证明. 我们针对离散时间动力系统的情形给出证明。记 $R^{\mathcal{P}}$,$_T$(x, y) 当且仅当存在一条从 x 到 y、步数少于 T 的 $\mathcal{P}$ 轨迹。我们可以将 $R^{\mathcal{P}}$,^{0}(x, y) 写成{(x, y)|x $=$ y}，它是一个可计算闭子集 [34,例 5.1.3])。接着，我们也可以将 $R^{\mathcal{P}}$,$^{T+1}$(x .) 写成 =F($R^{\mathcal{P}}$,$_T$(x .))，其中 F(K) := $K \cup$ f(K)。由于 f 是可计算的，我们知道它是连续的；并且通过对 T 进行归纳，$R^{\mathcal{P}}$,$^{T+1}$(x, y) 是紧集：事实上，由于 f 是可计算的，它是连续的；又由于 K 是一个包含于某个紧集中的闭子集，依归纳假设它是紧的，而紧集在连续函数下的像也是紧集。由于 f 是可计算的，且 K 是紧集，我们知道 f(K) 是可计算的（[34, 定理 6.2.4]），因此 F(K) 也是可计算的（[34, 定理 5.1.13]）。然后通过对 T 进行归纳可得， $R^{\mathcal{P}}$,$_T$(x, y) 是一个可计算闭子集。可计算闭集是可计算可枚举闭集：我们可以枚举与其相交的有理球（[11,命题 5.16]）。

此外，正如从 [34], 上述所有关于定理的参考文献中可以查证的那样（所需的迭代另见 [34, 定理 6.2.1] ），上述推理甚至是有效的：我们甚至可以在 T 中有效地生成它的一个名称（而且可以从 f 的一个名称有效地生成）。因此，通过并行执行这些操作（即交错枚举），我们可以有效地枚举与 $cls(\bigcup_T R^{\mathcal{P}},\ _T(.,.))$ 相交的有理球，只需考虑递增的 T 以及这些枚举中的球即可。 □

如果一个闭集的补集中所有有理闭球都可以有效枚举，则称该闭集为余可枚举闭集。使用与定理 38 和 24 的证明类似的论证：

定理 44. 考虑一个可计算局部利普希茨离散时间系统，其定义域 X 是一个可计算紧集。

对于所有 x， $cls(R^{\mathcal{P}}_{\omega}$(x)) $\subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个补递归可枚举闭子集。

证明。根据定理 38 的证明，对于所有使 $R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$(x, y) 为假的 x、y，在 x 的一个易于控制的可计算邻域中，满足 $\epsilon = 2^{-n}$，存在某个 $\delta = 2^{-m}$以及该事实在层级 δ 上的某个见证 $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*_\delta$：这个见证保证 $R^{\mathcal{P}}$(x) $\subseteq R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$(x) $\subseteq \mathcal{R}^*_\delta$, 并且 $\overline{B}$(y η) $\cap R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$(x) $= \emptyset$蕴含 $\overline{B}$(y η) $\cap \mathcal{R}^*_\delta = \emptyset$。

接下来，采用一种策略来生成所有闭包与 $cls(R^{\mathcal{P}}$(x)) 不相交的有理球：随着 n递增，并行生成对应见证中的所有此类球。这样就能穷尽所有此类球。 □

推论45（鲁棒 $\Rightarrow$ 可计算））。假设定理 44 的假设成立。

If $R^{\mathcal{P}}_{\omega} = R^{\mathcal{P}}$ *then* $cls(R^{\mathcal{P}}) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *is computable.*

证明。这是因为闭集可计算当且仅当它既是可枚举闭集又是余可枚举闭集（[11, 命题 5.16]），并注意到给定 x 的名称后，上述陈述都是有效的。 □

对于闭集，可计算性的概念也可以理解为能够以任意选定的精度绘图：这里的直观理解是，z/2^n 对应精度为 2^n 的某个像素，并且 1 表示黑色（即该像素绘制为黑色），0 表示白色（即该像素绘制为白色）。

定理46（[11, 命题 5.7],[34, 第 127–128] 页）。对于闭集 $A \subseteq \mathbb{R}^k$, A 可计算，当且仅当 A 可绘制：存在一个可计算函数 f：$\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{N}$，使得$range(f) \subseteq \{0, 1\}$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 z $\in \mathbb{Z}^k$

$$f(n, \mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } B(\frac{\mathbf{z}}{2^n}, 2^{-n}) \cap A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } B(\frac{\mathbf{z}}{2^n}, 2.2^{-n}) \cap A = \emptyset, \\ 0 \text{ or } 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这在 [12] 中称为局部可计算性。

推论47（稳健 $\Rightarrow$ 可绘制））。假设定理44的假设成立。

If $R^{\mathcal{P}}_{\omega} = R^{\mathcal{P}}$ *then* $cls(R^{\mathcal{P}}) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *can be plotted.*

证明。这可由推论45和定理46得出（也就是说， [11, 命题 5.7],[34, 第 127–128] 页）。 □

这对 f 的一个名称来说甚至是有效的。实际上，如果假设某些拓扑性质，反之亦然。

定理48。假设 $R^{\mathcal{P}}$ 是闭集，并且可以根据 f 的一个名称有效地绘制出来。那么该系统是鲁棒的，即 $R^{\mathcal{P}}_{\omega} = R^{\mathcal{P}}$。

实际上，我们证明了更强的结论：如果 $cls(R^{\mathcal{P}})$ 可以根据 f 的一个名称有效地绘制出来，那么除了可能在 $cls(R^{\mathcal{P}}) - R^{\mathcal{P}}$ 中的某些 (x, y) 之外， $R^{\mathcal{P}}_{\omega}$(x, y) =$R^{\mathcal{P}}$(x, y)。

证明。根据定理46，我们知道 $cls(R^{\mathcal{P}})$ 是可计算的；已知这等价于距离函数 $d(\cdot, cls(R^{\mathcal{P}}))$ 是可计算的这一事实 [34, 推论 5.1。8]。这意味着，给定某个有理球、 x 的一个名称以及 y 的一个名称，并满足 $\neg R^{\mathcal{P}}$(x, y)，当 (x, y) 不在 $cls(R^{\mathcal{P}})$ $- R^{\mathcal{P}}$ 中时，以下过程保证会终止：计算 d((x, y) $cls(R^{\mathcal{P}}$(x))) 的一个名称，直到找到其严格为正的证明： d((x, y) cls ($R^{\mathcal{P}}$(x))) $= 0$ 将意味着 (x, y) $\in cls(R^{\mathcal{P}})$，但不在 $R^{\mathcal{P}}$ 中。

它通过读取 x、y 和 f 的名称中有限的一部分，例如 m 个单元格，来给出答案，因此，如果在符号编号 m之后更改这些名称，答案也会相同。这意味着存在某种精度 ϵ （与 m 相关；基本上， 2^{-m}如果我们认为名称以指数速度收敛），使得$\neg R^{\mathcal{P}}$(x, y) 对 x 和 y 的某个 ϵ-邻域中的取值仍然成立，并且不受 f 的小幅变化影响。换句话说，对于所有 x、y，当 $\neg R^{\mathcal{P}}$(x, y) 时，存在某个 ϵ，使得$\neg R^{\mathcal{P}}_{\varepsilon}$(x, y)，即 $\neg R^{\mathcal{P}}_{\omega}$(x, y)。当 $R^{\mathcal{P}}$(x, y) 成立时，我们总能得出 $R^{\mathcal{P}}_{\omega}$(x, y) 成立。 □

也可以按照此前结果的思路，在复杂性层级上对其进行调整，并引入相应的假设。这将导出一种局部多项式空间可计算性的概念，其

思路与 [12] 中提出的局部多项式时间复杂度相同。后者旨在讨论紧集各种表示在多项式时间复杂度下的等价性。

VII. 连续时间与混合系统

EMS

前面的方法具有很高的适用性，能够讨论甚至是连续时间系统或混合系统。

定义 49. 连续时间动力系统 $\mathcal{P}$ 由一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$以及某个形式为 $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ on X 的常微分方程（ODE）给出。

已知，即使对于可计算常微分方程，解的最大存在区间也可能是不可计算的[20]。为简化讨论，本文假设常微分方程具有解[3]，且定义在整个 $\mathbb{R}$ 上。以某个 $\mathrm{x}_0 \in X$ 为初始点的 $\mathcal{P}$ 轨迹，是满足初始条件 $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{x}_0$, 的微分方程解，并被定义为一个连续且右可导的函数 $\xi : \mathbb{R}^+ \to X$，满足 $\xi(0) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$，且对于每个 t，$\mathrm{f}(\xi(t))$ 等于 $\xi(t)$ 的右导数。对于每个连续时间动力系统 $\mathcal{P}$，我们像之前一样将其与可达关系 $R^{\mathcal{P}}$ 关联起来。

对于任意 $\varepsilon > 0$，ε扰动系统 $\mathcal{P}_\varepsilon$ 由微分包含 $d(\dot{\mathrm{x}}, \mathrm{f}(\mathrm{x})) < \varepsilon$描述。这个非确定性系统可以看作是 $\mathcal{P}$ 受到幅度为 ε的小噪声作用。我们用 $R_\varepsilon^{\mathcal{P}}$表示系统 $\mathcal{P}_\varepsilon$ 中的可达性。极限可达关系 $R_\omega^{\mathcal{P}}$ 的引入方式与之前相同。

定理 50（扰动可达性是余递归可枚举的）。考虑一个连续时间动力系统，其 f 是局部利普希茨且可计算的，并且其定义域是一个可计算紧集。

那么，对于所有 x，$cls(R_\omega^{\mathcal{P}}(\mathrm{x})) \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个余可计算可枚举闭集。

其证明可以视为在 [29] 中建立的主要技术结果。独立地：

证明。该证明类似于定理 38 和 24 的证明：调整所涉及的图 G_m，使其涵盖轨迹的流。在我们的假设下，解在所有 $\mathbb{R}$ 上都有定义。 [20, 定理 3.1]证明了，利普希茨（甚至有效局部利普希茨）齐次可计算常微分方程在其最大定义域上具有可计算解，因此这是可行的。 □

推论 51（鲁棒 $\Rightarrow$ 可判定）。假设定理 50 的假设成立。若 $R_\omega^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P}}$，则 $cls(R^{\mathcal{P}}) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 可计算。

我们也可以在复杂性层级上陈述前述结论的等价形式，并假设一些基本条件，以确保解的可计算性仍处于多项式空间内。

实际上，我们甚至可以处理所谓的混合系统。文献中已有各种模型，但它们有一个共同点：都对应连续时间动力系统，其动力学可能不连续（因此不可计算）。概括而言，

[3]注意，非全定义的解必然会离开任意一个紧集，参见例如 [21], ；因此，当 X 是紧集时，这不构成限制。

动力系统可以用其流 $\phi(\mathrm{x}\ t)$ 来描述（其思路是，给定 x 和时间 t，ϕ 会将从 x 开始的轨迹映射到时间 t 时的位置）。将 T 视为离散的情况，还可以涵盖离散时间动力系统，以及 $T = [0, +\infty)$、连续时间系统和混合时间系统。

定义 52。混合系统 $\mathcal{P}$ 由一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$、一个半群 T以及某个流函数 ϕ给出：$X \times T \to X$满足 $\phi(\mathrm{x}, 0) = \mathrm{x}$ 且 $\phi(\phi(\mathrm{x}\ t)\ t') = \phi(\mathrm{x}\ t + t')$。

先前的证明基本上利用了这样一个事实：

1）可达性 $R^{\mathcal{P}}$ 是可枚举的；

2）扰动可达性是余可计算可枚举的

在所考虑的任何模型中，第一点通常都非常明确，因为粗略地说，人们总是期望至少能够模拟该模型。第二点对于给定的模型类别通常不那么明确，但如果考察我们的证明方法，尤其是定理 38 和 24 的证明，就会发现我们只需要能够构造出某个满足断言 1 和断言 2 的可计算抽象。

关键在于，这些性质讨论的不是函数 f，而是它的图。要点是，假设一个函数的图的闭包是可计算的，这比假设该函数具有可计算性要普遍得多。例如，特征函数 $\chi_{[0,\infty)}$ 不可计算，因为它不是连续的。但它的图及其闭包都很容易画出（由两条线段组成）：例如参见 [12] 中的相关讨论。人们通常期望能够画出流的图的闭包，而这已经足以得到与之前类似的结果，将鲁棒性与可计算性联系起来。特别是，这使我们能够讨论不连续函数，尤其是那些在元胞自动机中不可计算的函数，正如我们所做的那样。

VIII. 其他扰动

我们也可以考虑时间扰动图灵机：其思想是，给定 $n > 0$，图灵机 $\mathcal{M}$ 的 n 扰动版本在经过时间 n 后无法继续保持正确：给定一个整数 $n > 0$，图灵机 $\mathcal{M}$ 的 n 扰动版本定义与 $\mathcal{M}$ 完全相同，只不过在超过 n 的时间后，其内部状态 q 可以以非确定性的方式改变：给定一个配置 $(q, \cdots a_{-n-1}a_{-n}a_{-n+1}\cdots a_{-1}, a_0a_1\cdots a_{n-1}a_na_{n+1}\cdots)$（其中 $\neg(q \in F \cup R)$），$\mathcal{M}$ 的 n 扰动版本可以转移到 $(q', \cdots a_{-n-1}a_{-n}a_{-n+1}\cdots a_{-1}, a_0a_1\cdots a_{n-1}a_na_{n+1}\cdots)$，其中 [4] $q' \in Q$ 可以是任意值。

令 $L^n(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的时间 n-扰动语言，即 Σ^* 中被 $\mathcal{M}$ 的时间 n-扰动版本所接受的字的集合。根据定义，并运用类似的思想：

Lemma 53. $L(\mathcal{M}) \subseteq L^\omega(\mathcal{M}) \subseteq \cdots \subseteq L^2(\mathcal{M}) \subseteq L^1(\mathcal{M})$.

定理 54。 $L^\omega(\mathcal{M})$ 属于类 Π_1^0。

证明。对于单词 w, $w \notin L^\omega(\mathcal{M})$，当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $w \notin L^n(\mathcal{M})$。由于 $L^n(\mathcal{M})$ 在

[4]特别地，可能接受。可以考虑更微妙的扰动，同时保持结果有效。

n 中是一致可判定的， $L^{\omega}(\mathcal{M})$ 的补集是可计算可枚举的，因为它是 n 中一族可判定集的一致并。由此可得， $L^{\omega}(\mathcal{M}) \in \Pi_1^0$（余可计算可枚举）。 □

推论 55（长度鲁棒 $\Rightarrow$ 可判定）。如果 $L^{\omega}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M})$，那么 $L(\mathcal{M})$ 是可判定的。

定理 56。当 M 总是停机时， $L^{\omega}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M})$。

证明。我们直接得到 $L(\mathcal{M}) \subseteq L^{\omega}(\mathcal{M})$。

令 $w \in L^{\omega}(\mathcal{M}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^n(\mathcal{M})$，于是 $\forall n \in \mathbb{N}$， $w \in L^n(\mathcal{M})$。反证法，假设 $L(\mathcal{M}) \subsetneq L^{\omega}(\mathcal{M})$。因此存在 $w \in L^{\omega}(\mathcal{M})$，使得 $w \notin L(\mathcal{M})$。由于 $\mathcal{M}$ 总会停机，它在使用时间 $q(\ell(w))$ 后拒绝了 w。但是，对任意 $n \geq q(\ell(w)) + 2$，都有 $w \notin L^n(\mathcal{M})$，因此 $w \notin L^{\omega}(\mathcal{M})$，这就产生了矛盾。 □

定义 57。给定某个函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将 $L^{\{f\}}(\mathcal{M})$ 记作由 $\mathcal{M}$ 在时间扰动 f： $L^{\{f\}}(\mathcal{M}) = \{w \mid w \in L^{f(\ell(w))}(\mathcal{M})\}$. 下接受的字集合

定理 58（时间多项式鲁棒 $\Leftrightarrow$ PTIME）。语言 L 属于 PTIME，当且仅当存在某个 $\mathcal{M}$ 和某个多项式 p，使得 $L = L(\mathcal{M}) = L^{\{p\}}(\mathcal{M})$。

证明。可以像处理空间扰动那样证明。从另一个角度看，这个证明的直觉是， n 中的多项式可以视为超时限制。 M 在多项式时间内运行 $p(n)$，因此最多需要 $p(n)$ 步；于是，如果图灵机 $L^n(M)$ 在 $p(n)$ 步内尚未接受或拒绝，就可以拒绝。

($\Rightarrow$) 如果 M 总是终止，且在多项式时间内运行，那么存在一个多项式 q ，可以界定 M 的执行时间，因此存在一个多项式 p ($p \geq q$)，使得对于 $n \in N$， $L^p(\mathcal{M}) \subseteq L(M)$。根据定义可得另一方向的包含关系。

($\Leftarrow$) 我们总有 $L^{p(n)}(\mathcal{M}) \in$ PTIME，并且由于 $L^{p(n)}(\mathcal{M}) = L$，所以 $L \in$ PTIME。 □

定理 59（长度 $\Leftrightarrow$ PTIME 多项式鲁棒）。任意多项式时间语言都可归约到 PAM 的可达关系，其中 $R^{\mathcal{P}} = L^{\{p\}}(\mathcal{P})$ 满足某个多项式 p。

在定义域 X 上固定某个距离 $\delta(\cdot,\cdot)$。离散时间动力系统 $\mathcal{P}$ 的有限轨迹是一个有限序列 $(x_t)_{t\in 0\ldots T}$，满足对所有 $0 \leq t < T$ 均有 $x_{t+1} = f(x_t)$。其关联长度定义为 $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{T-1} \delta(x_i, x_{i+1})$。

我们也可以考虑长度扰动离散时间动力系统：其思路是，给定 $L > 0$ 后，系统的 L-扰动版本在经过长度 L 后便无法继续保持正确。于是，我们将 $R^{\mathcal{P},\ L}$(x,y) 定义为：存在一条从 x 到 y、长度为 $\mathcal{L} \leq L$ 的 $\mathcal{P}$ 有限轨迹。

将图灵机视为此类动力系统时， $\delta(\cdot,\cdot)$ 基本上是图灵机配置之间的某种距离。若从 $C_0[w]$ 到接受配置的轨迹长度为 $\leq d$，则称单词 w 在长度 d 下被接受。

定义 60. 距离 $\delta(C, C')$ 称为时间度量，当且仅当对于 $C \vdash C'$，我们有 $\delta(C, C') \leq p(\ell(C))$，并且 $\delta(C, C') \geq {}_p\ell^{1}((C))$，其中某个多项式为 p。

用 $\mathcal{L}(M, t)$ 表示由 M 在长度小于 t 时接受的字的集合。给定某个函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们用 $L^{(f)}(\mathcal{M})$ 表示 $L^{(f)}(\mathcal{M}) = \{w \mid w \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, f(\ell(w)))\}$.

定理 61（对于某个时间度量距离$\Leftrightarrow$ 多项式时间的长度鲁棒性）。假设 $\delta(\cdot,\cdot)$ 是时间度量。那么，语言 L 属于 $PTIME$，当且仅当存在某个图灵机 $\mathcal{M}$ 以及某个多项式 $p(n)$，使得 $L = L(\mathcal{M}) = L^{(f)}(\mathcal{M})$。

证明。设 w 是大小为 n 的输入。图灵机的执行过程是一个序列 $(C_i) = (q_i, l_i, r_i)$。

($\Rightarrow$) 如果 L 属于多项式时间，则存在一台图灵机 $\mathcal{M}$ ，在多项式时间 $p(n)$ 内计算 L 。由于两个相邻配置之间的距离由多项式 $q(n)$ 界定，因此总长度 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{p(n)-1} d(C_i, C_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{p(n)-1} q(n)$，这是 n 的一个多项式。

因此， L 可在多项式长度内计算。

($\Leftarrow$) 如果 L 可在多项式长度 $p(n)$ 内计算。

固定 T。那么对于所有 $i \in \{1\ldots T\}$，我们有：

$d\ C_i\ C_{i+1} \geq \frac{1}{poly\ \ell\ C_i} \geq \frac{T}{poly\ \ell\ C_{min}}$ $\sum_{i=0}^{T-1} d\ C_i\ C_{i+1} \geq (,)_{((}$，因此 $(,)_{((}$，其中选择 使前一个下界最小。 $\frac{1}{C_{min}}$

取 $T = p(n) \times poly(\ell(C_{min}))$，我们知道，模拟该轨迹的图灵机将在多项式步数后接受或拒绝，因此 $L \in$属于多项式时间。 □

构造此类距离 $\delta(C, C')$ 的一种方法，是对 $\gamma = \gamma_{[0,1]}$ 取 $\Upsilon(C)$ 与 $\Upsilon(C')$ 之间的欧几里得距离。

命题 62。所得距离是时间度量。

证明。我们考虑 $C_i = (q_i, l_i, r_i)$ 和 $C_{i+1} = (q_{i+1}, l_{i+1}, r_{i+1})$，其中 $C_i \vdash C_{i+1}$。记 $\overline{l_i} = \Upsilon(l_i)$ 和 $\overline{r_i} = \Upsilon(r_i)$。

那么，根据 Υ 和 $\gamma_{[0,1]}$ 的定义：

- $|\overline{r_{i+1}} - \overline{r_i}| \leq 1$。
- $|\overline{l_{i+1}} - \overline{l_i}| \leq 1$。
- 而 $\overline{r_{i+1}}$ 与 $\overline{r_i}$ 之间，以及 $\overline{l_{i+1}}$ 与 $\overline{l_i}$ 之间的间隔，相对于配置的大小仍为多项式。

这满足性质 1。

根据图灵机纸带上实数的编码，两个连续配置之间的间隔至少为 $_1{}_2$ （我们假设图灵机不允许什么也不做：这显然对应于循环情形）。这满足性质 2。

□

给定函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将 $R^{\mathcal{P},\ (f)}$ 记作由 $\mathcal{M}$ 在长度扰动 f: $R^{\mathcal{M},\ (f)} = \{w \mid w \in R^{\mathcal{M}, f(\ell(w))}\}$. 下所接受的字的集合

定理 63（多项式长度鲁棒 $\Leftrightarrow$ 多项式时间）。假设距离 d 是时间度量。假设对于某个多项式 p，有 $R^{\mathcal{P}} = R^{\mathcal{P},\ (p)}$ 。那么 $R^{\mathcal{P}}$ 属于多项式时间。

证明。由于 d 是时间度量，多项式时间与多项式长度本质上相同，因此证明与定理 61 的证明非常类似。

□

IX. 鲁棒性视角下的模拟复杂性

以下结论已在 [7] 中得到证明（$\mathrm{len}_{\mathrm{y}}(0,t)$ 表示时间 0 与 t 之间曲线的长度）：

定理 64（多项式时间的模拟刻画 [7, 定理 2.2]）。一个判定问题（语言） $\mathcal{L}$ 属于多项式时间类，当且仅当它是多项式长度模拟可识别的。也就是说：存在具有有理系数的多项式向量 p 和 q，以及一个多项式 $\mathrm{II}:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对于所有 $w \in \Sigma^*$，存在唯一的 y：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$，满足对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$：

1) $\mathrm{y}(0) = \mathrm{q}(\gamma^k_{[0,1]}(w))$ 且 $\mathrm{y}'(t) = \mathrm{p}(\mathrm{y}(t))$ 2) 若 $|\mathrm{y}_1(t)| \geqslant 1$，则对于所有 $u \geqslant t$，$|\mathrm{y}_1(u)| \geqslant 1$ 3) 若 $w \in \mathcal{L}$（分别为 $\notin \mathcal{L}$）且 $\mathrm{len}_{\mathrm{y}}(0,t) \geqslant \mathrm{II}(|w|)$，则 $\mathrm{y}_1(t) \geqslant 1$（分别为 $\leqslant -1$）4) $\mathrm{len}_{\mathrm{y}}(0,t) \geqslant t$

条件 2）基本上表明这是一个长度鲁棒系统。条件 4）相当于定义 60 的第二个条件，它保证了与图灵机长度的等价性。该结果通过使用编码进行逐步模拟而得出 $\gamma^k_{[0,1]}$。

最近，PSPACE 的一种刻画也已得到：完整细节见 [17]，。基本上，其形式如下。

定理 65（[6, 定理 3.11],[17]）。语言 $L \subseteq \Gamma^*$属于 PSPACE，当且仅当存在常微分方程 $\mathrm{y}' = \mathrm{p}(\mathrm{y}, \mathrm{z})$ 和 $\mathrm{z}' = \mathrm{q}(\mathrm{y}, \mathrm{z})$，其中 p、q 是多项式向量；存在一个多项式 u、（向量值）函数 $\mathrm{r}, \mathrm{s} \in \mathrm{GPVAL}$、一个 $\gamma^k_{\mathbb{N}}$-界 ϕ，以及 $\varepsilon > 0, \tau \geq \alpha > 0$，$\alpha, \tau \in \mathbb{Q}$，使得对于所有$w \in \Sigma^*$，常微分方程在初始条件 $\mathrm{y}(0) = \mathrm{r}(x)$ 和 $\mathrm{z}(0) = \mathrm{s}(\mathrm{y}(0)) = \mathrm{s} \circ \mathrm{r}(0)$ 下的解 (y, z)，满足 $d(\gamma^k_{\mathbb{N}}(w), x) < 1/4$：

1. 如果 $\bar{t}_1 > 0$ 使得 $|\mathrm{y}_1(\bar{t}_1)| \geq 1$，那么对于所有$t \geq \bar{t}_1$，$|\mathrm{y}_1(t)| \geq 1$，并且对于所有 $t \geq \bar{t}_1 + 1$，$|\mathrm{y}_1(t)| \geq 3/2$；
2. 如果$>u0$ 使得 $|\mathrm{y}_1(\bar{t}_1)| \geq 1$（分别地，$\notin L$），那么存在某个；3. 对所有 $t \geq 0$，$\|(\mathrm{y}(t), \mathrm{z}(t))\| \leq \phi \circ u(|w|)$；4. 假设 $(\tilde{\mathrm{y}}\ \tilde{\mathrm{z}})$ 满足常微分方程，其中 $\mathrm{y}(0) = \mathrm{r}(x)$，$\mathrm{z}(0) = \mathrm{s}(\mathrm{y}(0)) = \mathrm{s} \circ \mathrm{r}(x)$，除可能在时间点$t_i$处外，对于 $i = 1$、2、.....均满足：a) $t_i - t_{i-1} \geq \tau$，其中 $t_0 = 0$；b) $\|\tilde{\mathrm{y}}(t_i) - \lim_{t \to t_i^-} \tilde{\mathrm{y}}(t)\| \leq \varepsilon$，且 $\tilde{\mathrm{z}}(t_i) = \mathrm{s}(\tilde{\mathrm{y}}(t_i))$；c) $\lim_{t \to t_i^-} \tilde{\mathrm{z}}_1(t) > 1$。则条件 1、2、3、5 对于 $(\tilde{\mathrm{y}}\ \tilde{\mathrm{z}})$ 成立；5) 对于任意满足 $|b-a| \geq \tau$ 的 $b > a \geq 0$，存在一个区间$I = [c,d] \subseteq [a,b]$，其中 $|d-c| \geq \alpha$，使得对于所有 $t \in I$，$\mathrm{z}_1(t) \geq 3/2$。

条件 $d(\gamma^k_{\mathbb{N}}(w)\ x) < 1/4$、4) 和 5) 基本上要求存在某个抽象图。条件 3) 使其保持多项式对数规模，而条件 1) 和 2) 则要求该系统最终具有判定性。这保证了 PSPACE，并允许对图灵机进行鲁棒模拟。然而，常微分方程所使用的空间无法轻易“读取”（不像前一定理中长度这样的概念）。

这里采用了一种相当自然的编码，但系统并不是存在于一个紧空间中。如果希望保持有界，可以使用基于变量变换的 [8], 技巧，但代价是需要采用一种相当临时的编码变量，但代价是采用一种相当临时的编码。这基本上基于以下内容：

定理 66（在 $\mathbb{R}^6$ [18] 上对图灵机进行鲁棒模拟）。对于任意图灵机 M，存在一个解析且可计算的常微分方程 $y' = g_M(y)$，定义在 $\mathbb{R}^6$ 上，它使用编码 $\gamma_{\mathbb{N}}$ 模拟 M，并且在扰动小于 $\varepsilon \leq 1/4$. 时仍然有效

其思路是，如果 ϕ 是常微分方程 $y' = \mathrm{g}_M(y)$ 的一个解，用于模拟 M 在 $\mathbb{R}^6$ 上的运行，那么我们可以将 $\phi_1 = \frac{2}{\pi}\arctan\phi$ 视为对 M 在 $(-1,1)^6$ 上运行的相应模拟。于是，ϕ_1 将是常微分方程 $\phi_1' = \mathrm{f}_M(\phi_1)$ 的解，其中 $\mathrm{f}_M(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\tan(\frac{x\pi}{2})\mathrm{g}_M(\tan(\frac{x\pi}{2}))$。因此，由 $y' = \mathrm{f}_M(y)$ 给出的连续时间动力系统会在 X 上模拟图灵机 M；若输入词 $w = a_1 \ldots a_n$ 通过 $\gamma_{arctan}(w) = \frac{2}{\pi}\arctan(\gamma_{\mathbb{N}}(w)) = \frac{2}{\pi}\arctan(w_0 + w_1 2 + \cdots + w_n 2^n)$ 编码在 X 中，则计算在状态扰动不超过 $\arctan(s(w)+\varepsilon) - \arctan(s(w))$ 时仍会保持正确，其中 $s(w)$ 是单词 w 上纸带大小的上界。

然而，所使用的编码 γ_{arctan} 相当人为，而且系统主要定义在某个有界开定义域上，而非紧集上。此外，鲁棒性只适用于靠近配置像 Υ 的点，而不适用于任意点。

如何使用简单编码在紧集上对 PSPACE 作出更简单的刻画，这个问题仍未解决。不过，我们认为，我们的结果有助于理解：空间复杂度与紧集上的精度鲁棒性有关；更一般地说，它与一般定义域上某个抽象图的对数规模有关。

请注意，我们可以证明，对于多项式鲁棒的多项式常微分方程系统，可达性是 PSPACE 完全的。不过，先前结果（以及开放问题）的重点在于实现一致嵌入：给定某个图灵机 M，我们希望有一个相同的常微分方程适用于任意输入规模。

参考文献

[1] Eugene Asarin 和 Ahmed Bouajjani。受扰动的图灵机与混合系统。载于第16届 IEEE 计算机科学逻辑研讨会（LICS-01）论文集，第269–278页，洛斯阿拉米托斯，CA，2001年6月16–19日。IEEE计算机学会出版社。 [2] Eugene Asarin、Oded Maler 和 Amir Pnueli。具有分段常数导数的动力系统的可达性分析。《理论计算机科学》，138(1):35–65，1995年2月。 [3] Vincent Blondel 和 John Tsitsiklis。系统与控制中计算复杂性结果综述。Automatica，36(9):1249–1274，2000年。[4] Olivier Bournez 和 Manuel L. Campagnolo。新的计算范式：对可计算性概念的变革。章节《连续时间计算综述》，第383–423页。施普林格出版社，纽约，2008年。 [5] Olivier Bournez、Riccardo Gozzi、Daniel Grac¸a 和 Amaury Pouly。利用多项式常微分方程对 PSPACE 的连续刻画。投稿中，2022年。 [6] Olivier Bournez、Riccardo Gozzi、Daniel S. Grac¸a 和 Amaury Pouly。利用多项式常微分方程对 PSPACE 的连续刻画。2022年。 [7] Olivier Bournez、Daniel S. Grac¸a 和 Amaury Pouly。多项式时间对应于多项式长度的多项式常微分方程的解。《ACM学报》，64(6):38:1–38:76，2017年。ICALP 2017最佳论文奖（A组）论文的期刊版本。 [8] Olivier Bournez、Daniel S. Grac¸a 和 Emmanuel Hainry。利用动力系统进行鲁棒计算。载于《计算机科学数学基础》，MFCS'2010，《计算机科学讲义》第6281卷，第198–208页。施普林格，2010年。 [9] Olivier Bournez 和 Amaury Pouly。一个通用常微分方程。《计算机科学中的逻辑方法》，16(1)，2020年。 [10] Olivier Bournez 和 Amaury Pouly。模拟计算模型综述。载于《可计算分析与复杂性手册》，第173–226页。施普林格，2021年。 [11] Vasco Brattka、Peter Hertling 和 Klaus Weihrauch。可计算分析教程。载于《新计算范式》，第425–491页。施普林格，2008年。 [12] Mark Braverman。欧几里得集合的计算复杂性：双曲 Julia 集可在多项式时间内计算。硕士论文，多伦多大学，2004年。[13] Vannevar Bush。微分分析机：一种求解微分方程的新机器。《富兰克林研究所杂志》，212:447–488，1931年。 [14] Francois Fages、Guillaume Le Guludec、Olivier Bournez 和 Amaury Pouly。连续化学反应网络的强图灵完备性，以及混合模拟数字程序的编译。载于《系统生物学中的计算方法——CMSB 2017》，2017年。 [15] Martin Fr¨anzle。混合系统分析：适度的现实主义即可避免无限多个状态。载于 J¨org Flum 和 Mario Rodr´ıguez-Artalejo 编，《计算机科学逻辑》，第13届国际研讨会暨第8届 EACSL 年会，CSL '99，西班牙马德里，1999年9月，论文集，《计算机科学讲义》第1683卷，第126–140页。施普林格，1999年。 [16] Sicun Gao、Jeremy Avigad 和 Edmund M Clarke。实数上的 δ-可判定性。载于《计算机科学中的逻辑》（LICS），2012年第27届 IEEE 年度研讨会论文集，第305–314页。IEEE，2012年。 [17] Riccardo Gozzi。复杂性类的模拟刻画。博士论文，里斯本高等技术学院，葡萄牙里斯本，以及阿尔加维大学，葡萄牙法鲁，2022年。 ´D. S. Grac[18] a、M. L. Campagnolo 和 J. Buescu。多项式微分方程的可计算性。《应用数学进展》，40 349，2008 3 330( ): – .„Daniel S. Grac[19] a 和 Jos¸e F´elix Costa。模拟计算机与实数上的递归函数。《复杂性杂志》，19(5):644–664，2003年。 ´ Daniel S. Grac[20] a、N. Zhong 和 J. Buescu。初值问题最大区间的可计算性、不可计算性与不可判定性。《美国数学会汇刊》，2006年。即将出版。 „Philip Hartman。《常微分方程》。John Wiley and Sonc，1964年。[21] Thomas A. Henzinger、Peter W. W. Kopke、Anuj Puri 和 Pravin Varaiya。混合自动机有哪些性质是可判定的？《计算机与系统科学杂志》，57(1):94–124，1998年8月。 [23] Thomas A. Henzinger 和 Jean-Franc¸ois Raskin。定时系统与混合系统的稳健不可判定性。载于 Nancy A. Lynch 和 Bruce H. Krogh 编，《混合系统：计算与控制》，第三届国际研讨会，HSCC 2000，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，2000年3月23–25日，论文集，《计算机科学讲义》第1790卷，第145–159页。施普林格，2000年。[24] N. Immerman。非确定性空间在补运算下封闭。载于《复杂性理论结构会议》，1988年。第三届年度会议论文集，第112–115页。IEEE，1988年。[25] Ker-I Ko。《实函数复杂性理论》。《理论计算机科学进展》。Birkha¨user，波士顿，1991年。[26] Pascal Koiran、Michel Cosnard 和 Max Garzon。利用低维动力系统实现可计算性。《理论计算机科学》，132(1-2):113–128，1994年9月。[27] Cristopher Moore。广义移位：动力系统中的不可预测性与不可判定性。《非线性》，4(3):199–230，1991年。[28] Amaury Pouly。连续计算模型：从可计算性到复杂性。博士论文，巴黎综合理工学院和阿尔加维大学，答辩日期为2015年7月6日。2015年。https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01223284，获颁巴黎综合理工学院博士奖 Prix de Th`ese 2016年，以及国际博士奖阿克曼奖 2017年。[29] A. Puri、V. Borkar 和 P. Varaiya。微分包含的ε近似。载于第34届IEEE决策与控制会议论文集，第2892–2897页，1995年。[30] Claude E. Shannon。微分分析机的数学理论。《麻省理工学院数学与物理学杂志》，20:337–354，1941年。[31] Hava T. Siegelmann 和 Eduardo D. Sontag。论神经网络的计算能力。《计算机与系统科学杂志》，50(1):132–150，1995年2月。[32] Michael Sipser。《计算理论导论》。PWS出版公司，1997年。[33] R. Szelepcs´enyi。非确定自动机的强制枚举方法。《信息学学报》，26(3):279–284，1988年11月。[34] Klaus Weihrauch。《可计算分析：导论》。施普林格，2000年。

附录

可计算分析速成课程

这里回顾可计算分析的基本内容：参见[34]或 [11]。

基本上，经典可计算性与复杂度理论的核心思想，是固定对象（如图、整数等）的一些表示，使用某个有限字母表 $\Sigma = \{0,1\}$ 上的有限字来表示，并规定当图灵机能够生成这种表示时，该对象就是可计算的。可计算分析的目标，是也能讨论实数、实函数、闭子集、紧子集等对象；这些对象无法用 Σ 上的有限字表示（一个显而易见的原因是，这类字的数量可数，而集合 $\mathbb{R}$ 例如却不可数）。不过，它们可以用 Σ 上的一些无限字表示。其思路是为这些不同对象固定相应的表示，称为名称，并使其具备适当的可计算性质。特别是，对于下文提出的所有表示，都可以证明：一个对象可计算，当且仅当它具有某种可计算表示。

备注 67。这里涉及的可计算性概念是第二型图灵机的可计算性，也就是说，是关于可能为无限字的可计算性：其思想是，这类图灵机有一些只读输入带，用来存放输入；输入可以是有限字或无限字；还有一条读写工作带，以及一条（或多条）只写输出带。它的运行方式与经典图灵机相同，唯一的区别是：如果它在只写无限输出带上永远写下该字的符号，我们就认为它输出了一个无限字：详情见 *[34]* 。

点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 的一个名称是由一列嵌套的开有理球 (I_n) 组成的序列，其中 $I_{n+1} \subseteq I_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，且 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$。这样的名称可以编码为一个符号的无限序列。

如果存在某台（第二型图灵）图灵机，能将 $\mathrm{dom}(f)$ 中任意 $x \in$ 的任意名称映射为 $f(x)$ 的一个名称，我们就称实函数 $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可计算。对于实函数 $\mathbf{f} :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ，我们考虑并行读取 n 个名称的图灵机。

可以证明，可计算函数必然是连续的。函数 f 的一个名称是由所有满足 $\mathbf{f}(I) \subseteq J$ 的开有理球对 (I, J) 组成的列表。根据上述说明，可以证明，一个实函数可计算，当且仅当它具有某个可计算名称。

闭集 F 的一个名称是一个开有理球序列 (I_n)，满足 $cls(I_n) \cap F = \emptyset$ ，以及一个开有理球序列 (J_n)，满足 $J_n \cap F \neq \emptyset$。

给定某个闭集 F，距离函数 $d_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为 $d_F(x) := \inf_{y\in F} d(x, y)$。闭子集 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 可计算，当且仅当其距离函数 $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 ([34, 推论 5.1.8])。紧 K 的一个名称是将 F 作为闭集的名称，以及一个满足 $K \subseteq B(0, L)$ 的整数 L 。

若能有效枚举与其相交的有理开球，则称闭集为可计算可枚举闭的： $\{(q, \varepsilon) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+ \mid \mathrm{B}(q, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ 是可计算可枚举的（[11, 定义 5.13],[34, 定义 5.1.1]）。若能有效枚举其补集中的有理闭球，则称闭集为余可计算可枚举闭集：集合 $\{(q, \varepsilon) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+ \mid \mathrm{B}(q, \varepsilon) \subseteq U\}$ 是可计算可枚举的（[11, 定义 5.10],[34, 定义 5.1.1]）。

我们还需要可计算分析中的多项式时间可计算函数这一概念：参见 [25]。简而言之，x 的快速收敛名称 $\in \mathbb{R}^d$ 是 x 的一个名称，其中 I_n 半径为$< 2^{-n}$。如果存在某个预言机图灵机 M，使得对于所有 x，以 x 的任意快速收敛名称作为预言机，并给定 n， M 在关于 n的多项式时间内，输出一个包含 f(x)、半径为 $< 2^{-n}$ 的开有理球，则称函数 f: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ 是多项式时间可计算的。