arXiv:2301.12733v1 [math.LO] 30 Jan 2023

关于 Weihrauch 度中问题的一阶部分

DAMIR D. D ZHAFAROV, REED SOLOMON 和 KEITA Y OKOYAMA

Abstract. 我们引入 Weihrauch 度中问题的 *first-order part* 这一概念。非正式地说，问题 P 的一阶部分是一个余域为 ω 、且魏劳赫可归约到 P 的最强问题。我们证明一阶部分总是定义良好的，考察这一概念的一些基本性质，并刻画文献中若干众所周知问题的一阶部分。

1. Introduction

本文继续探讨逆向数学与可计算分析之间的交叉领域。这一联系最初由 Gherardi 和 Marcone 提出[14], ，后来 Dorais、Dzhafarov、Hirst、Mileti 和 Shafer 也独立提出了这一联系 [8]。过去几年里，这一领域蓬勃发展，成为一个内容丰富、成果丰硕的研究领域，至今已有许多论文专门探讨这一主题。

逆向数学结合可计算性理论和证明论的视角，分析能够在二阶算术中形式化的定理的逻辑强度。许多研究聚焦于二阶强度，更具体地说，关注证明某个给定定理所必需且充分的集合存在公理。但关于一阶强度的研究也相当丰富，也就是研究能够从某个特定定理推导出哪些数论结果。此类结果中最强的通常称为该定理的一阶部分。一个令人印象深刻的事实是，完全关于自然数集合（进而也包括能够用数集表示的数学对象）的定理，可能具有非平凡且往往出人意料的一阶部分。

另一方面，可计算分析关注的是计算问题，而非定理，并研究这些问题在各种可约性（其中最重要的是 Weihrauch可约性）之下彼此之间的关系。正如我们将在下文详细回顾的那样，这类问题与逆向数学中分析的一种常见类型的定理之间存在众所周知的对应关系，而上述一些近期研究进一步加强了这种联系。

关于逆向数学的背景知识，请读者参阅 Simpson [22], Hirschfeldt [17], 以及 Dzhafarov 和 Mum- mert [12] 。下面我们给出一些可计算分析的基本定义；更完整的介绍请参阅 Brattka 和 Pauly [4] 以及 Brattka、Gherardi 和 Pauly [2] 。

Dzhafarov 和 Solomon 获得了美国国家科学基金会重点研究组项目 DMS-1854355 的部分资助。Yokoyama 获得了 JSPS KAKENHI 项目（编号 JP19K03601 和 JP21KK0045）的部分资助。作者感谢 Alberto Marcone 、 Ludovic Patey 和 Manlio Valenti 在本文撰写过程中提出的宝贵意见。

本文引入问题的一阶部分这一概念。类比逆向数学中的情形，非正式地说，它旨在刻画可魏劳赫归约到该问题的最强“数论”问题。我们将探讨这一概念与逆向数学中定理的一阶部分之间的联系。随后，我们将通过案例研究，对文献中的若干重要问题的一阶部分进行分类。我们注意到，自本文预印本流传以来，已有数篇论文继续研究问题的一阶部分，其中包括 Sold`a 和 Valenti [26], Goh、Pauly 和 Valenti [15], 以及 Cipriani、Marcone 和 Valenti[7]。

本节首先为本文其余部分奠定一些背景。我们的可计算性理论记号和术语基本上遵循标准用法，例如 Soare [25] 或 Downey 和 Hirschfeldt [9]的用法。下面将指出一些细微的差异。

我们通过将 ω 嵌入 ω^ω 来实现这一点：将 $x \in \omega$ 与 $f \in \omega^\omega$ 对应，使得 $f(0) = x$ 且$f(y) = 0$ 对所有 $y > x$都成立。除非另有说明，本文中的集合均指 ω 的子集。我们将集合与其特征函数对应起来，因此所有集合都是 $2^\omega \subseteq \omega^\omega$的元素。对于 f、$g \in \omega^\omega$，我们将 $\langle f, g\rangle$ 记作 f和g的（图灵）并。如果 $f \in \omega^\omega$ 和 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，则 $\langle f, \sigma\rangle$ 表示长度为 $2|\sigma|$ 的字符串 τ，满足$\tau(2x) = f(x)$ 且 $\tau(2x+1) = \sigma(x)$ 对所有 $x < |\sigma|$都成立。我们类似地定义 $\langle \sigma, f\rangle$。两个以上对象的并按通常方式处理，并约定所涉及对象的数量可由该并一致地计算出来。

我们也将 $\langle y_0, \dots, y_{k-1}\rangle$ 记作满足对所有 $x < k$都有 $\sigma(x) = y_x$ 的字符串 $\sigma \in \omega^k$。对于 $b \in \{0, 1\}$，我们将满足对所有 $x < k$都有 $\sigma(x) = b$ 的字符串 $\sigma \in \omega^k$ 记作 b^k，并将满足对所有 x都有 $f(x) = b$ 的序列 $f \in \omega^\omega$ 记作 b^ω。对于 $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$，我们将 σ 与 τ的拼接记作 $\sigma\tau$或$\sigma^\frown\tau$；有限字符串与无限序列的拼接也类似。

我们将所有图灵泛函 Φ 视为部分连续映射 $\omega^\omega \to \omega^\omega$，并记 $\Phi(f) = g$，若对所有 $x \in \omega$都有 $\Phi^f(x) \downarrow = g(x)$。本文中，我们也用 $\Phi(f)(x)$ 代替 $\Phi^f(x)$，用 $\Phi(f, g)$ 代替 $\Phi(\langle f, g\rangle)$，等等。我们遵循这样的约定：若对于某个 $f \in \omega^\omega$和某个 $x \in \omega$，$\Phi(f)(x) \downarrow$，则对所有 $y \leq x$，$\Phi(f)(y) \downarrow$。对于$\sigma \in \omega^{<\omega}$，若对所有在 σ 之后至多经过 $|\sigma|$ 步的 $f \in \omega^\omega$ 都有 $\Phi(f)(x) \downarrow = y$，则记 $\Phi(\sigma)(x) \downarrow = y$。特别地，若 $\Phi(f)(x) \downarrow$，则对于某个 $k \in \omega$，$\Phi(f \upharpoonright k)(x) \downarrow$。

我们用大写希腊字母表示任意图灵泛函，如 Φ、Δ、Γ 等，并用 Φ_0、Φ_1、.....表示所有图灵泛函的一个固定可计算列表。

定义 1.1。

(1) 问题是一个偏多值函数 $\mathsf{P} :\subseteq \omega^\omega \rightrightarrows \omega^\omega$。每个 $f \in \mathrm{dom}(\mathsf{P})$ 都是 P 的一个实例，或简称 P-实例；每个 $g \in \mathsf{P}(f)$ 都是 f in P 的一个解，或简称 f 的 P-解。我们用 $\mathcal{P}$ 表示所有问题构成的类。(2) 如果存在图灵泛函 Φ 和 Ψ，使得对于所有 $f \in \mathrm{dom}(\mathsf{Q})$，都有 $\Phi(f) \in \mathrm{dom}(\mathsf{P})$，且对于每个 $\widehat{g} \in \mathsf{P}(\Phi(f))$，都有 $\Psi(f, \widehat{g}) \in \mathsf{Q}(f)$，则称问题 Q 魏劳赫可归约到问题 P，记作 $\mathsf{Q} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{P}$。在这种情况下，我们也称 Q 通过 Φ 和 Ψ 魏劳赫可归约到 P。(3) 如果存在图灵泛函 Φ 和 Ψ，使得对于所有 $f \in \mathrm{dom}(\mathsf{Q})$，都有 $\Phi(f) \in \mathrm{dom}(\mathsf{P})$，且对于每个 $\widehat{g} \in \mathsf{P}(\Phi(f))$，都有 $\Psi(\widehat{g}) \in \mathsf{Q}(f)$，则称问题 Q 强魏劳赫可归约到问题 P，记作 $\mathsf{Q} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{P}$。在这种情况下，我们称 Q 通过 Φ 和 Ψ 强魏劳赫可归约到 P。

在 $\leq_{\mathrm{W}}$ 下的等价类构成 Weihrauch 度。

问题与形如 $(\forall X)[\varphi(X) \to (\exists Y)\psi(X,Y)]$ for $X, Y \in \omega^\omega$ 的定理之间存在自然对应。对于任意问题，只要令 φ 定义实例，并令 ψ 定义解，就能得到这种形式的定理。反过来，任意这种形式的定理都对应于一个问题，其实例是满足 $\varphi(X)$ 的 X，而给定 X 的解则是满足 $\psi(X,Y)$ 的 Y。（更详细的讨论请参见[12, 第 4] 章。）当 φ 和 ψ 是算术性质时，这种形式的定理是 Π^1_2 二阶算术语句，构成了逆向数学所研究定理的主体。下文示例中讨论的具体问题都将以这种方式对应于 Π^1_2 定理，我们也将在问题和定理两种视角之间来回切换。

为完整起见，我们列出 Weihrauch 度上的一些主要运算的定义。

定义 1.2。固定 P,Q $\in \mathcal{P}$。

(1) P $\sqcup$ Q（P 与 Q 的并）是一个问题，其定义域为 dom(P) $\sqcup$dom(Q)，且对于所有$f \in$dom(P) 和 $g \in$dom(Q)，(P $\sqcup$Q)$(\langle 0, f\rangle) = \{0\} \times$ P(f)，并且 (P $\sqcup$ Q)$(\langle 1, g\rangle) = \{1\} \times$ Q(g)。(2) P $\sqcap$Q（P 与 Q 的交）是一个问题，其定义域为 dom(P) $\times$ dom(Q)，且对于所有 $f \in$ dom(P) 和$g \in$dom(Q)，(P $\sqcap$ Q)$(\langle f, g\rangle)$ $= (\{0\} \times$ P$(f)) \cup (\{1\} \times$ Q$(g))$。(3) P$\times$Q（P 与 Q 的并行积）是一个问题，其定义域为 dom(P)$\times$dom(Q)，且对于所有 $f \in$ dom(P) 和 $g \in$dom(Q)，(P $\times$ Q)$(\langle f, g\rangle)$ $=$ P(f) $\times$ Q(g)。(4) P$*$Q（P 与 Q 的复合积）是一个问题，其实例为所有满足以下条件的对 $\langle g, \Delta\rangle$： $g \in$ dom(Q)，且 Δ 是一个图灵泛函，并且对于所有 $\hat{}g \in$ Q(g)，$\Delta(g, \hat{}g) \in$ dom(P)；任何这样的 $\langle g, \Delta\rangle\hat{}\hat{}$ 的解均为所有满足 $\hat{}g \in$ Q(g) 且 $f \in$ P$(\Delta(g, \hat{}g))$ 的 $\langle f, \hat{}g\rangle$。(5) P* （P 的有限并行化）是一个问题，其实例为所有 $\langle k, \langle f_0, \ldots, f_{k-1}\rangle\rangle$，其中 $k \geq 1$，且 $f_0, \ldots, f_{k-1}$ 是 P-实例，并且 P$^*(\langle k, \langle f_0, \ldots, f_{k-1}\rangle\rangle)$ $=$ P(f_0) $\times \cdots \times$ P(f_{k-1})。(6) P$'$ （P 的跳跃）是一个问题，其实例为所有满足以下条件的对 $\langle f, i\rangle$： $f \in \omega^\omega$，且 i 是一个 $\Delta^0_{,2}{}^f$ 索引，表示 P 的一个 P-实例 g；任何这样的 $\langle f, i\rangle$ 的解均为 g 的所有 P-解。我们记 P$^{(0)}$ $=$ P；对于$n \in \omega$，P$^{(n+1)}$ $=$ (P$^{(n)}$)$'$。

Weihrauch 度构成一个格，其中 $\sqcup$ 和 $\sqcap$ 分别为并和交。关于在这些（以及许多其他）运算下 Weihrauch 度的代数结构的全面概述，请参阅 Brattka 和 Pauly [4]。

我们将在下一节正式定义问题的一阶部分。现在，我们先明确一阶问题，或称“数论”问题的概念。

定义 1.3。若对所有 $f \in$ dom(P)，P$(f) \subseteq \omega$，则 P $\in \mathcal{P}$ 是一个一阶问题。我们用 $\mathcal{F}$ 表示所有一阶问题构成的类。

$\mathcal{F}$ 是一大类问题，其中包含许多重要且普遍存在的问题，例如 LPO、C_2, $\lim_{\mathbb{N}}$ 等，这些问题在 Weihrauch 度的文献中经常出现。还有许多问题本身虽非一阶问题，却

与一阶问题 Weihrauch 等价。我们将在下一节定义问题的一阶部分，结果表明，它是 $\leq_{\mathrm{W}}$中能够 Weihrauch 归约到该问题的最大成员。

我们感兴趣的一个方面，是在当前语境下，一个问题的一阶部分与其作为二阶算术定理时的一阶部分之间的比较（在这两种视角都有意义的情况下）。在逆向数学中，一阶部分通常根据归纳和有界方案进行衡量，而归纳和有界方案本身又按照算术层级分层。逆向数学中通常使用的基础理论 RCA_0, 包含对 Σ^0_1 公式的归纳，$\mathsf{I}\Sigma^0_1$，在此之上是 Kirby-Paris层级，其中包含一系列强度逐渐增强的方案：$\mathsf{B}\Sigma^0_2 <\mathsf{I}\Sigma^0_2 <\mathsf{B}\Sigma^0_3 <\mathsf{I}\Sigma^0_3 < \cdots$。（关于定义和更多细节，参见 [12, 第 6.1–6 节。3]）这些方案与可计算分析中的某些基本问题之间存在自然的对应关系。我们回顾其定义。在下文中，为了记号方便，我们将每个 $k \in \omega$ 与集合 $\{i \in \omega$ 等同：$i < k\}$。

定义 1.4。固定 $k \in \omega \cup \{\omega\}$。在 k 上的选择问题 C_k，是指其实例为 k 的所有真子集的枚举，而其解为所有未被枚举的 $i \in k$。

为方便起见，我们通常将 C_k 的实例更明确地视为函数 $v\colon \omega \to k+1$，满足：$k \nsubseteq \mathrm{ran}(v)$；若对某个 $s < t$， $v(s) \neq v(t)$，则$v(t) \neq k$；并且若对某个 $s < t$，$v(s) = v(t)$，则对所有 $s < u < t$， $v(s) = v(u) = v(t)$。这样， $\{i < k : (\exists t \leq s)[v(t) = i]\}$ 表示在阶段 s或之前枚举出的 i 的集合。通常用 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 代替 C_ω。

正如 Brattka、Gherardi 和 Pauly [1, 第 9 节所指出的，3], $(\mathsf{C}_{\mathbb{N}})^{(n-1)}$ 对应于 Σ^0_n 公式的归纳 $\mathsf{I}\Sigma^0_n$，而 $(\mathsf{C}^*_2)^{(n-1)}$ 对应于 Σ^0_n 公式的有界化 $\mathsf{B}\Sigma^0_n$。我们将看到，这种对应关系在许多（但并非所有）例子中都扩展到一阶部分。注意，对任意 $k \in \omega \cup \{\omega\}$, C_k 都属于 $\mathcal{F}$；C_k 在有限并行化下的任意组合以及任意多次跳跃也都属于其中。

在经典逆向数学的语境中，若数学原理可在基底理论中证明（通常为 RCA_0），我们就认为它们是“平凡的”。对于 Weihrauch可约性下的问题，与之类似的概念是「一致可计算为真的」。令 $\mathsf{Id}\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 为恒等问题，即对所有 $f \in \omega^\omega$，$\mathsf{Id}(f) = \{f\}$。

定义 1.5。固定 $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$。

(1) 若 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{c}} \mathsf{Id}$，则称 P 是「可计算为真的」，也就是说，每个 P-实例 f 都有一个 f-可计算的解。(2) 若 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{Id}$，则称 P 是「一致可计算为真的」，也就是说，存在一个图灵泛函 Γ，使得对于每个 $f \in \mathrm{dom}(\mathsf{P})$，都有 $\Gamma(f) \in \mathsf{P}(f)$。

在第 3节中，我们将探讨一阶部分平凡的问题，并指出一种比「一致可计算为真的」更强的性质；这种性质或许更贴近逆向数学中「平凡性」的概念。

我们以一个简单但乍看之下有些令人意外的应用来结束本节：孤立类 $\mathcal{F}$。这一应用与我们的讨论原本并无关联，即 $\mathcal{F}$ 可用于刻画可计算为真的问题。

定理 1.6. 问题 $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ 可计算为真，当且仅当存在一个 $\mathsf{Q} \in \mathcal{F}$ 使得 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{Q}$。

证明。如果对某个 $Q \in \mathcal{F}$ 有 $P \leq_W Q$，那么显然 P 是可计算为真的。反过来，固定一个可计算为真的 P。令 Q 为一个与 P 具有相同实例的问题，其对某个实例 f 的解为所有满足$\Phi_e(f) \in P(f)$ 的 $e \in \omega$。于是 $Q \in \mathcal{F}$ 且 $P \leq_W Q$。□

2. Defining the first-order part

重申上一节中的动机，我们希望问题的一阶部分对应于 Weihrauch 归约到该问题的最强一阶问题。我们现在给出的定义看起来并不像这样，但我们将证明它体现了相同的思想。

定义 2.1。对于 $P \in \mathcal{P}$，P 的一阶部分（记作 ^1P）是以下一阶问题：

- 所有 ^1P-实例都是三元组 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$，其中 $f \in \omega^\omega$ 和 Φ 和 Ψ 都是图灵泛函，满足 $\Phi(f) \in \mathrm{dom}(P)$，且对于所有 $g \in P(\Phi(f))$，都有 $\Psi(f,g)(0)\downarrow$；
- 对于任意此类 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$，其 ^1P-解都是满足以下条件的 y：对于某个 $g \in P(\Phi(f))$，有 $\Psi(f,g)(0)\downarrow = y$。

下面我们给出主定理。

定理 2.2。固定 $P \in \mathcal{P}$。

(1) 对每个 $Q \in \mathcal{F}$，若 $Q \leq_W P$，则 $Q \leq_{sW} {}^1P$。

(2) $^1P \equiv_W \max_{\leq_W}\{Q \in \mathcal{F} : Q \leq_W P\}$。

证明。对于 (1)，假设对某个 $Q \in \mathcal{F}$，有 $Q \leq_W P$，例如通过 Φ 和 Ψ。我们证明 $Q \leq_{sW} {}^1P$。将给定的 Q 的实例 f 映射为 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$。根据假设，$\Phi(f)$ 是 P 的一个实例；若 g 是 $\Phi(f)$ 的任意 P-解，则 $\Psi(f,g)$ 是 f 的一个 Q-解。由于 Q 是一阶的，此解就是 $\Psi(f,g)(0)$。特别地，后者收敛，因此 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ 是 ^1P 的一个实例。现在，若 y 是 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ 的任意 ^1P-解，则根据定义，对于某个 P-解 g（它是 $\Phi(f)$ 的解），有 $y = \Psi(f,g)(0)$，因此 y 也是 f 的一个 Q-解。

鉴于第 (1) 部分，要证明第 (2) 部分，只需证明 $^1P \leq_W P$。为此，我们将给定的 ^1P-实例 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ 映射为 P-实例 $\Phi(f)$。然后，我们可以将每个 P-解 g 映射为 $\Phi(f)$，即计算 $\Psi(f,g)(0)$ 的输出。根据定义，后者是 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ 的一个 ^1P-解。□

以下结论可由定义 2.1 和定理直接得到。

推论 2.3. 若 $P \in \mathcal{P}$ 且 $Q \leq_W P$，则 $^1Q \leq_{sW} {}^1P$。特别地，若 $Q \equiv_W P$，则 $^1Q \equiv_{sW} {}^1P$。

推论 2.4. 若 $P \in \mathcal{P}$ 且 $P \equiv_W Q$，其中 $Q \in \mathcal{F}$，则 $^1P \equiv_W P$。

Sold`a 和 Valenti [26] 详细研究了标准运算下 Weihrauch 度的一阶部分的行为。特别是，他们建立了以下基本界。

命题 2.5（Sold`a 和 Valenti [26]，的命题 4.1 和 4.4）。固定 P,Q $\in \mathcal{P}$。

(1) $^1(P \sqcup Q) \equiv_W {}^1P \sqcup {}^1Q$.

(2) $^1(P \sqcap Q) \equiv_W {}^1P \sqcap {}^1Q$.

(3) $^1P \times {}^1Q \leq_W {}^1(P \times Q)$.

(4) ${}^1\mathsf{P} * {}^1\mathsf{Q} \leq_{\mathrm{W}} {}^1(\mathsf{P} * \mathsf{Q}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathsf{P} * \mathsf{Q}$.
(5) ${}^1(\mathsf{P}') \leq_{\mathrm{sW}} ({}^1\mathsf{P})'$.

一般而言，不存在其他关系。

现在我们来看一个具体的例子。回顾一下，对于 $k \geq 1$，RT^1_k 表示这样一个问题：其所有实例都是函数 $c : \omega \to k$（称为 k 染色，或简称染色），而任意此类 c 的解都是其所有无限单色集，即满足 c 为常值的无限集合 $H \subseteq \omega$。（这是关于单元素 k 染色的拉姆齐定理。我们将在第4节更广泛地讨论拉姆齐定理。）这个问题还有一个变体，记作 BWT_k，由 Brattka、Gherardi 和 Marcone[1] 引入。它与 RT^1_k 有相同的实例，但任意 $c : \omega \to k$ 的解都是所有满足以下条件的 $i < k$：对于无穷多个 x，$c(x) = i$。尽管 BWT_k 是一阶的，而 RT^1_k 不是，但很容易看出 $\mathsf{RT}^1_k \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{BWT}_k$。（证明参见例如 [5]，命题3.4。）因此，由推论2.3和2.4可知，${}^1\mathsf{RT}^1_k \equiv_{\mathrm{sW}} {}^1\mathsf{BWT}_k$，且 ${}^1\mathsf{RT}^1_k \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^1_k$。

我们可以用可计算分析中的更基本问题和运算来刻画 RT^1_k 的一阶部分。（这是我们关于此类刻画的第一个例子，但我们将在接下来的两节中看到其他例子。）下面这个众所周知的结果归功于 Brattka、Gherardi 和 Marcone [1]。为完整起见，我们在此给出证明，而且这个证明也稍微直接一些。

命题 2.6（Brattka、Gherardi 和 Marcone[1], 推论11.11）。对于所有$k \geq 1$，$\mathsf{BWT}_k \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_k$。

证明。首先，固定 C'_k 的一个实例。将其视为一个 $f \in \omega^\omega$ 和一个 $\Delta^0_{2}{}^{f}$ index for an f'-computable instance v of C_k。于是，非空集合 $S = \{i < k : (\forall s)[v(s) \neq i]\}$is then uniformly Π^0_2in f。令 R 为一个 f-computable 谓词，使得当且仅当 $(\forall u)(\exists v)R(i,u,v)$ 时，$i \in S$。定义一个 f-computable 染色 $c : \omega \to k$如下。给定 $x \in \omega$，搜索使得 $(\exists i < k)(\forall u < x)(\exists v < y)R(i,u,v)$ 的最小 y，并令 $c(x)$ 为该 y 的最小见证 i。现在设 $i < k$ 是 c 的一个 BWT_k-解。那么特别地，存在无穷多个 x，使得 $(\forall u < x)(\exists v)R(i,u,v)$，因此 $i \in S$。由此可知，i 是 v 的一个 C_2-解，正如所要求的。

反过来，固定一个 BWT_k 的实例 c v。如下定义 $\omega \to k+1$ v：令$v(0) = k$，并且对于所有 $s > 0$，令 $v(s) = i$，其中取满足 $(\forall x > s)[c(x) \neq i]$ 且对任意 $t < s$都有 $v(t) \neq i$ 的最小 $i < k$；若不存在这样的 i，则令 $v(s-1)$。那么 v 是一个一致c'-可计算的 C_k 实例，因此我们可以将 c 与一个 $\Delta^0_{2}{}^{c}$ 的 v 指数一起视为 C'_k 的一个实例。v 的任意 C_k 解 i 都是 c的一个 BWT_k 解。□

推论 2.7. 对所有 $k \geq 1$，${}^1\mathsf{RT}^1_k \equiv_{\mathrm{sW}} {}^1\mathsf{BWT}_k \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}'_k$。

对于 $k \geq 2$，这里的一个要点是：虽然作为二阶算术的一个 Π^1_2陈述，RT^1_k 的一阶部分是平凡的，但在当前设定下，它的一阶部分并非平凡。当然，作为一个 Π^1_2 陈述，RT^1_k 本身是平凡的，而作为一个问题则并非平凡，因此这并不十分令人意外。在接下来的两节中，我们将看到这一现象的一些更有趣的例子。

从Ramsey 定理^1_k 中我们还可以得到一个更深入的认识：${}^1\mathsf{P} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{P}$通常并不成立，即使$\mathsf{P} \in \mathcal{F}$也如此。（因此，推论2.4 无法加强为 $\equiv_{\mathrm{sW}}$，即使那里$\mathsf{P} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{Q}$ 也是如此。）

命题 2.8。对于所有 $k \geq 2$, ${}^1\mathsf{BWT}_k \not\leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{BWT}_k$ 以及 ${}^1\mathsf{BWT}_k \not\leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{RT}^1_k$。

证明。固定 $k \geq 2$。为了证明 $^1\mathrm{BWT}_k \not\leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{BWT}_k$，令 Φ 为 ω^ω上的恒等泛函。令 Ψ 为一个泛函，使得 $\Psi(f,i)(0)$ 是满足$f(x) = i$的最小 $x \in \omega$，对所有 $f \in \omega^\omega$ 和 $i \in \omega$均成立。因此，若 c 是 BWT_k 的一个实例，且 i 是 c的一个解，则 $\Psi(c,i)(0)\downarrow$。由此可知，对于每个这样的 c，$\langle c, \Phi, \Psi\rangle$ 都是 $^1\mathrm{BWT}_k$的一个实例。现在，反设 $^1\mathrm{BWT}_k \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{BWT}_k$，例如$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$通过 Φ 和 Ψ。对于每个 $x \in \omega$，令 $c_x = 0^x 1^\omega$，并将其视为一个染色 $\omega \to k$。那么对$\widehat{\ }$每个 $x \leq k$，根据假设，$\Phi(c_x)$ 是一个 BWT_k-实例。因此必定$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$存在 $x_0 < x_1 \leq k$ 和 $i < k$，使得 $\Phi(c_{x_0})$ 和 $\Phi(c_{x_1})$ 各自都有一个 i 作为 BWT_k-解。因此，$\widehat{\Psi}(i)$ 必定是 $\langle c_{x_0}, \Phi, \Psi\rangle$ 和 $\langle c_{x_1}, \Phi, \Psi\rangle$二者共同的一个 $^1\mathrm{BWT}_k$-解。但由于 c_{x_0} 和 c_{x_1} 各自都有唯一的 BWT_k-解 1，因此$\langle c_{x_0}, \Phi, \Psi\rangle$ 和 $\langle c_{x_1}, \Phi, \Psi\rangle$ 分别有唯一的 $^1\mathrm{BWT}_k$-解 x_0和 x_1，并且 $x_0 \neq x_1$。类似（但更简单）的论证表明，$^1\mathrm{BWT}_k \not\leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{RT}^1_k$。□

请注意，上述两部分缺一不可，因为对于 $k \geq 2$，BWT_k 和 RT^1_k 在强 Weihrauch 可约性下不可比较。我们没有发现文献中有对此的明确证明，但证明起来直接且常规。显然，$^1\mathrm{BWT}_1 \equiv_{\mathrm{sW}} \mathrm{BWT}_1 \equiv_{\mathrm{sW}} \mathrm{RT}^1_1$。

3. 一致可计算解与不可对角化性

在本节中，我们将进一步探讨一致可计算真这一概念（即在 Weihrauch 可约性下平凡），以及它与问题的一阶部分之间的相互作用。首先，我们将这一概念与下述概念联系起来；该概念由 Hirschfeldt 和 Jockusch[18] 在一个无关的背景下提出。

定义 3.1（Hirschfeldt 和 Jockusch [18], 定义 4.11）。如果对于每个问题 P 的实例 f，所有能够扩展为 f 的 P-解 $g \in \omega^\omega$ 的 $\sigma \in \omega^{<\omega}$ 集合，都能在 f 中一致地 Δ^0_1，则称问题 P 是不可对角化的（也就是说，存在一个图灵泛函Γ，使得对于所有问题 P 的实例 f以及所有 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，$\Gamma(f)(\sigma)\downarrow = i \in \{0,1\}$，其中 $i = 1$当且仅当 σ 是 f的 P-解的一个初始片段。）

请注意，只需将每个解替换为它的所有有限修改，就可以在不改变其解的图灵度的情况下，使任何问题都成为不可对角化的。特别是，这类问题有许多例子，它们本身并非一致可计算为真的，甚至并非非一致可计算为真的。这使得下一个结果格外引人注目。

命题 3.2. 设 $\in \mathcal{P}$ P 不可对角化。那么 ^{1}P 是一致可计算为真的。

证明。固定一个 Γ 泛函，见证 P 不可对角化。给定 ^{1}P 的任意实例 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$，搜索第一个满足 $\Gamma(\Phi(f))(\sigma)\downarrow = 1$ 且$\Psi(f,\sigma)(0)\downarrow$ 的 $\sigma \in \omega^{<\omega}$。（搜索必定会成功，因为任意一个 P-解的足够长初始片段都可以作为 σ，用于 $\Phi(f)$。）于是，$\Psi(f,\sigma)(0)\downarrow$ 的值就是 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ 的一个^{1}P-解。□

正如我们将看到的，不可对角化在一定程度上比仅仅要求一阶部分一致可计算为真，更能体现一阶部分是平凡的这一想法。

命题 3.2 的逆命题不成立。事实上，一致可计算为真甚至不意味着魏劳赫可归约到某个不可对角化的问题。为说明这一点，考虑针对单元素集的三染色的 稀疏集原理，TS^1_3。

它的实例是所有染色 $c\colon \omega \to 3$，而任何此类 c 的解都是其无限稀疏集，即满足 $T \subseteq \omega$ 使得 $|c(T)| \leq 2$ 的无限集。Hirschfeldt 和 Jockusch [18, 第 39] 页指出，TS^1_3 具有他们所称的对角化机会（见 [18, 定义 4.12]），并证明，任何具有对角化机会的问题都不能魏劳赫可归约到任何不可对角化的问题（[18, 定理 4.13]）。但是，$^1\mathsf{TS}^1_3$ 是一致可计算为真的。事实上，给定一个实例 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$，即 $^1\mathsf{TS}^1_3$ 的一个实例，其中 $\Phi(f) = c\colon \omega \to 3$，我们可以搜索一个 $\sigma \in 2^{<\omega}$，使得 $c\restriction\{x < |\sigma|\colon \sigma(x) = 1\}$ 为常数，且 $\Psi(f,\sigma)(0)\downarrow$。任何单色集对于 c 而言也是 c 的稀疏集，而且任何有限的 c-齐性集都可以扩展为一个无限的c-稀疏集。因此，这一搜索必定成功，并且 $\Psi(f,\sigma)(0)$ 必定是 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$的一个 $^1\mathsf{TS}^1_3$-解。

我们可以直接得到以下命题的推论3.2 和推论 2.4。

推论 3.3。如果 $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$ 是不可对角化的，但不是一致可计算为真的，那么不存在满足 $\mathsf{Q} \in \mathcal{F}$ satisfies $\mathsf{Q} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{P}$ 的 Q。

这有一个有趣的应用：我们可以借此看出，在定理1.6中，通常不能将 $\leq_{\mathrm{W}}$ 替换为 $\equiv_{\mathrm{W}}$。事实上，考虑任意一个不可对角化、可计算为真但非一致可计算为真的问题。（例如，可以是由 Dzhafarov、Goh、Hirschfeldt、Patey 和 Pauly 引入的问题 FERT^1_2, 定义 1.7。这只是 RT^1_2, ，但将解替换为所有模有限多个误差齐次的无限集合。）根据定理1.6，存在一个 $\mathsf{Q} \in \mathcal{F}$ 使得 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{Q}$，但根据前述推论，不存在这样的 Q满足 $\mathsf{P} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{Q}$。

接下来，我们来看一些较为知名的不可对角化问题。我们回顾一些定义。

定义 3.4。

(1) 如果对于任意 i，$X \cap A_i$ 或 $X \cap \overline{A}_i$ 是有限集，则集合 $X \subseteq \omega$ 对子集族 $\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$ 凝聚。(2) 集合族 $\langle B_i\colon i \in \omega\rangle$ 是集合族 $\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$ 的子族，当且仅当 $(\forall i)(\exists j)[B_i = A_j]$。我们记作 $\langle B_i\colon i \in \omega\rangle \subseteq \langle A_i\colon i \in \omega\rangle$。(3) 如果对于每个非空有限集 F，都有 $\bigcap_{i\in F} A_i \neq \emptyset$，则集合族 $\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$ 具有有限交性质。

以下问题源自逆向数学文献，但在 Weihrauch可约性的语境下也有较少的研究。

定义 3.5。

(1) COH 是这样一个问题：其实例是所有集合族 $\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$，其解是该族所有无限凝聚集。(2) FIP 是这样一个问题：其实例是所有集合族 $\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$，且这些集合并非全为空集；其解是 $\subseteq$-极大的子族$\langle A_i\colon i \in \omega\rangle$，并且这些子族具有有限交性质。(3) $\Pi^0_1\mathsf{G}$ 是这样一个原理：其实例是所有 $f \in \omega^\omega$ 以及所有 $\Pi^{0,\,f}_1$-可定义的、由 $2^{<\omega}$ 的非空子集组成的族 $\langle U_i\colon i \in \omega\rangle$；其解是所有与每个 U_i 都相交的集合 $G \subseteq \omega$（即 $(\forall i)(\exists k)[G\restriction k \in U_i]$）。

（例如，[12], 第 8.4.2 节对 COH 作了更广泛的讨论，第 9.10.3 节对 FIP 和 $\Pi^0_1\mathsf{G}$ 作了更广泛的讨论。）COH 和 $\Pi^0_1\mathsf{G}$ 是不可对角化的

因为每个有限二进制字符串都可以延伸为给定实例的一个解。Dzhafarov 和 Mummert [11, 命题 4。2] 证明了，作为 Π^1_2 原理，FIP可由 Π^0_1G 在RCA_0, 之上推出；他们的证明实际上表明，作为问题，FIP $\leq_{\mathrm{W}}$ Π^0_1G 。FIP 本身并非不可对角化，但事实证明，它在 Weihrauch 等价意义下是不可对角化的。事实上，FIP 显然满足以下结果假设中的较弱性质。

命题3.6。设 P 是一个问题，使得能够扩展为 P-解的 $\sigma \in \omega^{<\omega}$ $g \in \omega^\omega$ 在 f 中一致地 Σ^0_1 。那么存在一个不可对角化的问题 Q，使得 P $\equiv_{\mathrm{W}}$ Q。

证明。固定 P，并令 W_e 满足：对于每个 P-实例 f， W_e^f 是 P-解到 f 的所有初始片段的集合。令 Q 为与 P 具有相同实例的问题，但 Q-实例 f 的解是所有形如 $\langle s_0, \sigma_0\rangle\langle s_1, \sigma_1\rangle \cdots \in \omega^\omega$ 的序列，满足对于每个 k， $s_0 \leq s_1 \leq \cdots$、$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots, \sigma_k \in W_e^f[s_k]$，且 $\bigcup_{k\in\omega} \sigma_k$ 是 f 的一个 P-解。容易看出，Q 不可对角化，并且 P $\equiv_{\mathrm{W}}$ Q。□

由此可知FIP 在 Weihrauch 意义下等价于一个不可对角化的问题。根据命题3.2，现在可以得出以下结论。

推论3.7。 ^{1}COH、 ^{1}FIP 和 $^1\Pi^0_1$G 均一致可计算为真的。

这一推论与已知的关于 COH、FIP 和 Π^0_1G 作为二阶算术的 Π^1_2 陈述时的一阶部分的结果相当吻合。这些原理中的每一个对于 RCA_0 都是 Π^1_1-保守的。对于 COH，这一事实归功于 Cholak、Jockusch 和 Slaman [6, 定理 9.1]。对于 Π^0_1G，则归功于 Hirschfeldt、Shore 和 Slaman [19, 定理 3.13 以及第 5824] 页的评论。后者也说明这一事实对 FIP 同样成立。因此，在这些情况下，经典逆向数学与 Weihrauch分析框架下的一阶强度一致：它们都是平凡的。

本节最后，我们考察一致可计算为真和不可对角化这两种性质在 Weihrauch 度的标准运算下如何表现。

命题 3.8。设 P、Q $\in \mathcal{P}$，且 ^{1}Q 一致可计算为真。

(1) $^1(\mathrm{P} \sqcup \mathrm{Q}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。(2) $^1(\mathrm{P} \sqcap \mathrm{Q}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。(3) $^1\mathrm{P} \times {}^1\mathrm{Q} \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。(4) $^1\mathrm{P} * {}^1\mathrm{Q} \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。(5) $^1\mathrm{Q} * {}^1\mathrm{P} \leq_{\mathrm{W}} {}^1(\mathrm{Q} * \mathrm{P}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。

若 Q 不可对角化，则此外还有 $^1(\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$ 和 $^1(\mathrm{P} * \mathrm{Q}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{P}$。

证明。前四部分都很直接，其中第 (1) 和第 (2) 部分用到了命题 2.5。同样由命题 2.5 可得 $^1\mathrm{Q} * {}^1\mathrm{P} \leq_{\mathrm{W}} {}^1(\mathrm{Q} * \mathrm{P}) \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathrm{Q} * \mathrm{P}$。由于 ^{1}Q 一致可计算为真， $^1\mathrm{Q} * \mathrm{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{P}$。现在，(5) 即由 $^1\mathrm{Q} * {}^1\mathrm{P}$ 和 $^1(\mathrm{Q} * \mathrm{P})$ 是一阶的推出。

现在假设 Q 是不可对角化的。我们将 $^1(\mathrm{P} \times \mathrm{Q})$ 和 $^1(\mathrm{P} * \mathrm{Q})$ 中的每一个都归约为 P，这就足够了。首先，固定一个实例 $\langle f, \Phi, \Psi\rangle$ of $^1(\mathrm{P} \times \mathrm{Q})$，使得 $\Phi(f)$ 是 P $\times$ Q 的一个实例 $\langle f_0, f_1\rangle$ 。我们将其映射到 P-实例 f_0。给定任意 P-解 g to f_0，我们搜索 Q-解的一个初始片段 $\sigma \in \omega^{<\omega}$ of f_1，使得 $\Psi(f, \langle g, \sigma\rangle)(0)\downarrow$。注意，由于 Q 是不可对角化的，这一搜索可关于 f 一致计算，并且它必定成功，因为任何足够长的初始

片段 of 任意 Q-解 to f_1 都可以。于是，$\Psi(f, \langle g, \sigma\rangle)(0)$ 的值就是一个^1(P $\times$Q)-解 to $\langle f$、Φ、$\Psi\rangle$。关于 ^{1}(P $*$Q) 的论证类似。□

4. Additional case studies

我们已经对若干问题的一阶部分进行了分类；此前，这些问题作为二阶算术中的定理，其一阶部分已经是已知的。本节将考察另外几个例子。我们从弱 K¨onig 引理 WKL 开始。作为一个定理，WKL 著名地在 RCA_0 上是 Π^1_1-保守的。（这就是 Har- rington 定理；见 [17, 第7节。2]或 [12, 第7节。7]。）与第3节中的 COH、FIP 和Π^0_1G 不同，WKL 不是不可对角化的，因此不能据此推出它作为问题的一阶部分也是平凡的；事实上，结果并非如此。在下面的定理中，我们回顾一下：弱弱 K¨onig 引理 WWKL 是将 WKL 的实例限制为树 $T \subseteq 2^{<\omega}$，使得 $[T] \subseteq 2^\omega$ 具有正的勒贝格测度。

定理 4.1。对于所有 $n \in \omega$，我们有

$$^1(\mathsf{WWKL}^{(n)}) \equiv_{\mathrm{sW}} {}^1(\mathsf{WKL}^{(n)}) \equiv_{\mathrm{sW}} (\mathsf{C}_2^*)^{(n)}.$$

证明。固定 n。我们首先证明 $(\mathsf{C}_2^*)^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} {}^1$(弱弱柯尼希引理$^{(n)}$)。根据定理 2.2，由于 $(\mathsf{C}_2^*)^{(n)} \in \mathcal{F}$，我们只需证明 $(\mathsf{C}_2^*)^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}}$ 弱弱柯尼希引理$^{(n)}$。又由于跳跃算子在 $\leq_{\mathrm{sW}}$ 上是单调的，只需证明 $\mathsf{C}_2^* \leq_{\mathrm{sW}}$ 弱弱柯尼希引理。为此，取 $\langle v_0, \ldots\ldots, v_{k-1}\rangle$ 为 C_2^* 的任意实例。定义 T 为所有满足以下条件的 $\sigma \in 2^{<\omega}$ 的集合：对于所有 $e < |\sigma|$，

$$\sigma(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } e < k, \\ 1 & \text{if } e = k, \\ 1 - v_{e-k-1}(|\sigma|) & \text{if } k < e \leq 2k \text{ and } v_{e-k-1}(|\sigma|) < 2. \end{cases}$$

注意，如果对于某些 $k < e \leq 2k$ 和某个 $\tau \preceq \sigma$，$\sigma \in T$ 和 $v_{e-k-1}(|\tau|) \neq v_{e-k-1}(|\sigma|)$，那么必然有 $v_{e-k-1}(|\tau|) = 2$，因此显然 $\tau \in T$。所以，T 是一棵树。此外，按构造，$[T]$ 的元素恰好是形如 $0^k 1 x_0 \cdots x_{k-1} g$ 的序列，其中 $\langle x_0, \ldots\ldots, x_{k-1}\rangle$ 是 $\langle v_0, \ldots\ldots, v_{k-1}\rangle$ 的 C_2^*-解，而 $g \in 2^\omega$ 是任意的。因此，$[T]$ 的测度至少为 2^{-2k-1}，所以 T 是弱弱柯尼希引理的一个实例。现在，若 p 是 T 的任意弱弱柯尼希引理解，则可计算地恢复 k：取满足 $p(e) = 1$ 的最小 e；随后，$\langle p(k+e+1) : e < k\rangle$ 是 $\langle v_0, \ldots\ldots, v_{k-1}\rangle$ 的 C_2^*-解。

显然，^{1}(弱弱柯尼希引理$^{(n)}$) $\leq_{\mathrm{sW}}$ ^{1}(弱柯尼希引理$^{(n)}$)。因此，只需证明 ^{1}(弱柯尼希引理$^{(n)}$) $\leq_{\mathrm{sW}}$ $(\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$。由命题2.5，$_1$(弱柯尼希引理$^{(n)}$) $\leq_{\mathrm{sW}}$ (^{1}弱柯尼希引理)$^{(n)}$，因此根据跳跃算子在 $\leq_{\mathrm{sW}}$ 上的单调性，只需证明 ^{1}弱柯尼希引理 $\leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_2^*$。我们将使用问题 DNR_2 而非弱柯尼希引理，其实例全都是$g \in 2^\omega$，且任意此类 g 的解都是所有 $\{0,1\}$ 值函数，这些函数相对于 g 是对角线不可计算的（下文简称为 DNC^g）。根据 Brattka、Hendtlass 和 Kreuzer 的结果[3, 推论 5.3], 弱柯尼希引理 $\equiv_{\mathrm{sW}} \mathrm{DNR}_2$

考虑一个 $^1\mathrm{DNR}_2$ 实例。由于 DNR_2 的实例遍历 ω^ω 的所有元素，我们可以将其简单地视为一对 $\langle g, \Psi\rangle$，其中 $g \in \omega^\omega$ 且对于每个 $\{0,1\}$ 值的 DNC^g 函数 p，都有 $\Psi(g,p)(0)\downarrow$。这里，Ψ 由一个指标 i 给出。令 $T_0 \subseteq 2^{<\omega}$ 为标准的 g-可计算树，其路径恰好是$\{0,1\}$值的 DNC^g 函数。令 $T \subseteq 2^{<\omega}$ 为所有形如 $0^i 1\rho$ 的 σ 构成的树，其中 $\rho \in T_0$。

由紧致性可知，存在一个 k，使得对于长度为 k 的每个 $\sigma \in T_0$，都有 $\Psi(g,\sigma)(0)\downarrow$。我们必须将 i、k 和 $g\upharpoonright k$ 编码进 C_2^* 实例的解中。对于每个$e<k$，定义 $w_e\colon \omega\to 3$ 如下：

$$w_e(s)=\begin{cases}2 & \text{if } \Phi_e(g)(e)[s]\uparrow,\\ \min\{\Phi_e(g)(e)[s],1\} & \text{otherwise,}\end{cases}$$

对所有 s 均成立。因此，每个 w_e 都是 C_2 的一个实例；如果 $1-\lim_s w_e(s)\neq\Phi_e(g)(e)$ 收敛，则.....

现在考虑序列

$$1^{i}{}^\frown 0{}^\frown\langle 1-g(e):e<k\rangle{}^\frown\langle w_e:e<k\rangle,$$

其中我们将 0、1 和 $1-g(e)$ 都视为常值函数 $\omega\to 3$。因此，我们有一个 C_2^*的实例 $\vec{v}=\langle v_j:j<i+1+2k\rangle$。由于 k 以及每个 w_e 都可以从我们的 $^1\mathsf{DNR}_2$- 实例 $\langle g,i\rangle$ 中一致地计算出来，因此我们可以从这些数据中一致地计算出$\vec{v}$。这就是我们所需的 C_2^*实例。

现在令 $\langle x_j:j<i+1+2k\rangle$为该实例的任意一个解。由于 $x_j\neq\lim_s v_j(s)$，我们可以计算地恢复 i：取满足 $x_j=1$的最小 j 即可。利用 i 以及解的长度，我们接下来也能恢复 k和 $g\upharpoonright k$。最后，如上所述，对于 $i+1+k\le j<i+1+2k$，必有 $x_j\neq\Phi_{j-i-1-k}(g)(j-i-1-k)$。换言之，由 $\sigma(e)=x_{i+1+k+e}$ 对所有 $e<k$ 定义的字符串 $\sigma\in 2^k$ 属于T_0，因此根据 k的选取，$\Psi(g\upharpoonright k,\sigma)(0)\downarrow$。根据关于 Ψ的假设，该计算的值是我们起初所考虑实例的一个 $^1\mathsf{DNR}_2$-解。既然我们已经证明可以从 $\langle x_j:j<i+1+2k\rangle$一致地、可计算地得到该值，证明便告完成。□

前述结果以一种有趣的方式细化了上文提到的 WKL 的 Π^1_1-保守性。具体而言，已知对于所有 $n\ge 1$，WKL 不仅对 RCA_0，是 Π^1_1-保守的，对 $\mathsf{RCA}_0^*+\mathrm{I}\Sigma^0_n$ 和 $\mathsf{RCA}_0^*+\mathrm{B}\Sigma^0_n$ 也是如此。（参见 H´ajek [16,推论 3.14]，以及 Simpson 和 Smith [23, 推论 4.7]。）最近，Fiori- Carones、Ko lodziejczyk、Wong 和 Yokoyama [13, 引理 4.5] 定义了一个针对 Δ^0_n-可定义树的 WKL 变体，并证明它对 $\mathsf{RCA}_0^*+\mathrm{B}\Sigma^0_n$ 也是 Π^1_1-保守的。回顾一下，在该 Weihrauch 度中，$(\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$ 对应于 $\mathrm{B}\Sigma^0_n$，因此我们上面的定理与后一结果完全类似。

接下来我们转向逆向数学中的算术理解公理 ACA。形式上，它是 RCA_0 加上对所有算术可定义的数集的理解公理。通常，它以 $(\forall X)[X'\text{ exists}]$，的形式给出，该形式依赖于基理论 RCA_0 中对可计算性理论的形式化。（参见 [12,推论 5.6.3]。）这又有一个显而易见的问题形式，即图灵跳跃问题 TJ，其实例都是 $g\in\omega^\omega$，且任意此类g 的唯一解都是 g'。但 ACA_0 也等价于如下陈述：对于任意 $n\in\omega$，$(\forall X)[X^{(n+1)}\text{ exists}]$，，因此它同样可以用 $\mathsf{TJ}^{(n)}$ 表示，甚至可以用 $\bigsqcup_{n\in\omega}\mathsf{TJ}^{(n)}$ 表示。

定理 4.2. 对所有 $n\in\omega$，

$$^1(\mathsf{TJ}^{(n)})\equiv_{\mathrm{sW}}\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}.$$

证明。首先，我们证明 $^1(\mathsf{TJ}^{(n)})\le_{\mathrm{sW}}\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$。根据命题 2.5 以及跳跃算子在 $\le_{\mathrm{sW}}$ 上的单调性，只需证明 $^1\mathsf{TJ}\le_{\mathrm{sW}}\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。因此，固定一个 $^1\mathsf{TJ}$ 的实例，我们可以将其视为一对 $\langle g,\Psi\rangle$，其中 $g\in\omega^\omega$ 且 $\Psi(g,g')(0)\downarrow$。令 $m\colon\omega\to\omega$ 为一个 g-可计算的极限逼近，用以逼近该值

$\Psi(g, g')(0)$。定义 $v : \omega \to \omega$ 如下。对于每个 s，找出最小的 k，使得 $\langle k, m(s)\rangle \notin \mathrm{ran}(v \upharpoonright s)$，然后令 $v(s)$ 为不同于 $\langle k$ 且不在 $v \upharpoonright s$ 的值域中的最小 x，其中 $m(s)\rangle$。注意，由于 $y = \lim_s m(s)$ 存在，因此有一个 k 使得 $\langle k, y\rangle \notin \mathrm{ran}(v)$。根据构造，每个 $x \neq \langle k, y\rangle$ 都属于 $\mathrm{ran}(v)$。因此，v 是 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的一个实例，其唯一的解为 $\langle k, y\rangle$。此外，v 可由 g 一致地计算得到，因为 m 如此，正如所需。

根据定理 2.2，由于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \in \mathcal{F}$，要证明 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} {}^1(\mathsf{TJ}^{(n)})$，只需证明 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{TJ}^{(n)}$。由于跳跃算子在 $\leq_{\mathrm{sW}}$上具有单调性，进而只需证明$\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{TJ}$。这显而易见。□

请注意，上述论证实际证明的是 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{TJ}^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{UC}_{\mathbb{N}}^{(n)}$，其中 $\mathsf{UC}_{\mathbb{N}}^{(n)}$ 是 $\mathbb{N}$上的唯一选择问题，或者说是将 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 限制在具有唯一解的实例上。为完整起见，我们指出，$\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{sW}} \mathsf{UC}_{\mathbb{N}}$ 这一事实众所周知；例如参见 Brattka、Gherardi 和 Pauly[2, 定理 7.13]。

推论 4.3. ${}^1\bigsqcup_{n\in\omega} \mathsf{TJ}^{(n)} \equiv_{\mathrm{sW}} \bigsqcup_{n\in\omega} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}^{(n)}$。

众所周知，ACA_0 在 Π^1_1皮亚诺算术之上是保守的，PA。（例如，参见[17, 推论 7.5]，其中给出了证明。）实际上，这意味着 ACA_0 的一阶强度就是算术归纳。推论4.3 非常直接地证实了这一点，而定理4.2 则可视为对这一结果的分层，而这种分层无法在经典逆向数学框架中提取出来。

作为最后一个案例研究，我们考察拉姆齐定理。它一直是逆向数学和可计算分析领域广泛研究的对象。（详细概述见 [12, 第 8 章和第 9 节]。）

定义 4.4. 固定 $X \subseteq \omega$ 和 $n, k \geq 1$。

(1) $[X]^n$ 表示所有 $\langle x_0$、……、$x_{n-1}\rangle \in X^n$ 且满足 $x_0 < \cdots < x_{n-1}$ 的集合。(2) $[X]^n$ 的 k-染色（简称染色）是一个映射 $c : [X]^n \to k$。(3) 若对所有 $x \in [X]^{n-1}$，$\lim_s c(\vec{x}, s)$ 都存在，则称 k-染色 $c : [X]^n \to k$ 是稳定的。(4) 若 $c \upharpoonright [Y]^n$ 为常数，则称集合 $Y \subseteq X$ 是 $c : [X]^n \to k$ 的齐性集。(5) RT^n_k 是这样一个问题：其所有实例均为染色 $c : [\omega]^n \to k$，而任一此类 c 的解均为其所有无限齐性集。(6) SRT^n_k 是 RT^n_k 在稳定着色上的限制。(7) $\mathsf{RT}^n_+ = \bigsqcup_{k\geq 2} \mathsf{RT}^n_k$ 且 $\mathsf{SRT}^n_+ = \bigsqcup_{k\geq 2} \mathsf{SRT}^n_k$。(8) $\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{RT}^n_k$ 且 $\mathsf{SRT}^n_{\mathbb{N}} = \bigcup_{k\geq 1} \mathsf{SRT}^n_k$。

RT^n_+ 和 $\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$ 这两个变体由 Brattka 和 Rakotoniaina 在[5, 定义 3.1]中引入。在这两个变体中，实例都是指数为 n 的 k-染色，其中某个 k已给定；二者的区别仅在于，在 RT^n_+中，这个 k 被规定为实例的一部分，而在 $\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$ 中则没有。因此，$\mathsf{RT}^n_+ \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$，并且 Brattka 和 Rakotoniaina 在 [5,推论 4.23] 中证明了 $\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^n_+$。然而，这两个问题对应于同一个二阶算术 Π^1_2 陈述，即（$\forall k$）RT^n_k；在逆向数学文献中，它记作 RT^n 或 $\mathsf{RT}^n_{<\infty}$。稳定变体 SRT^n_+ 和 $\mathsf{SRT}^n_{\mathbb{N}}$也同样如此。

以下定理中的上界由 Sold`a 和 Valenti [26, 第 7 节]独立获得；他们当时研究的是有限值下的 RT^n_k和 SRT^n_k 问题 k。在 $n = 0$ 的情形下，上界也由 Brattka 和 Rakotoniaina [5]以不同的方法获得。

定理 4.5。对于所有 $n \geq 1$，我们有

$$(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathsf{SRT}^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$$

and

$$(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathsf{SRT}^n_{+} \leq_{\mathrm{W}} {}^1\mathsf{RT}^n_{+} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_2^*)^{(n)}.$$

证明。固定 n。我们有 $\mathsf{SRT}^n_+ \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{SRT}^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$，且 $\mathsf{SRT}^n_+ \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^n_+ \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$。因此，由于 $(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \in \mathcal{F}$，只需证明 $(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{SRT}^n_+$，以及 ${}^1\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$。

对于第一个归约，我们首先注意到，由命题 2.6 以及跳跃算子的单调性，关于 $\leq_{\mathrm{sW}}$，有 $\mathsf{C}_2^{(n)} \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{BWT}_2^{(n-1)}$。容易看出，$\mathsf{BWT}_2^{(n-1)} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{SRT}^n_2$。事实上，考虑任意一个 $\mathsf{BWT}_2^{(n-1)}$ 实例。我们将其视为一个序列 $\langle c_{\vec{s}} : \vec{s} \in \omega^{n-1} \rangle$ 个染色 $c_{\vec{s}} : \omega \to 2$，使得对每个 x，$\lim_{\vec{s}} c_{\vec{s}}(x)$ 都存在。将此极限记作 $c(x)$，由此定义一个染色 $c : \omega \to 2$。我们定义一个染色 $d : [\omega]^n \to 2$，令 $d(x, \vec{s}) = c_{\vec{s}}(x)$。那么 d 就是一个 SRT^n_2 实例，它可由 $\langle c_{\vec{s}} : \vec{s} \in \omega^{n-1} \rangle$ 一致地计算得到，并且满足对所有x，$\lim_{\vec{s}} d(x, \vec{s}) = c(x)$。现在，若 H 是 d 的任意一个 SRT^n_2-解，那么对每个 $x \in H$，$d(H) = \lim_{\vec{s}} d(x, \vec{s})$，因此$H$ 是一个关于 c 、颜色为 $d(H)$ 的无限齐次集。由此可得 $d(H)$，它可由 $d \oplus H \leq_{\mathrm{T}} \langle c_{\vec{s}} : \vec{s} \in \omega^{n-1} \rangle \oplus H$一致地计算得到，是 $\langle c_{\vec{s}} : \vec{s} \in \omega^{n-1} \rangle$的一个 $\mathsf{BWT}_2^{(n-1)}$-解，正如所需。因此我们也可以得出 $(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{SRT}^n_2)^*$。然而，对于任意 $k \geq 1$，k 重积 $\mathsf{SRT}^n_2 \times \cdots \times \mathsf{SRT}^n_2$ 在 Weihrauch 意义下可归约到 $\mathsf{SRT}^n_{2^k}$（例如参见 Dorais 等人的[8], 命题 2.1。）因此，$(\mathsf{SRT}^n_2)^* \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{SRT}^n_+$，从而也有 $(\mathsf{C}_2^{(n)})^* \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{SRT}^n_+$。这正是我们要证明的。

接下来我们证明 ${}^1\mathsf{Ramsey}$ 定理$^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$。Wang 已证明 [27, 定理 4.2] 而 Brattka 和 Rakotoniaina 也独立证明了 [5, 推论 4.15], 由此可知 Ramsey 定理$^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}}$弱柯尼希引理$^{(n)}$。因此 ^{1}Ramsey 定理$^n_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}}$ ^{1}弱柯尼希引理$^{(n)}$，现在由定理4.1即可得出所需结论。□

在逆向数学中，稳定 Ramsey 定理$^n_{<\infty}$ 和 Ramsey 定理$^n_{<\infty}$ 的一阶部分如今已完全明了。Hirst [20, 定理 6.4] 证明，Ramsey 定理$^1_{<\infty}$ 在 RCA_0上等价于 $\mathrm{B}\Sigma^0_2$，因此这就是它的一阶部分。根据 Jockusch[21, 引理 5.9]和 Simpson [22, 定理 III.7.6], 的结果，如果 $n \geq 3$，那么 Ramsey 定理$^n_{<\infty}$ 在 RCA_0 上等价于 ACA_0，，因此 Ramsey 定理$^n_{<\infty}$ 的一阶部分就是算术归纳。对于 $n = 2$，其分类是近期才得到的。Cholak、Jockusch 和 Slaman [6,定理 11.4] 证明，稳定 Ramsey 定理$^2_{<\infty}$ 蕴含 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$；而 Slaman 和 Yokoyama [24,定理 2.1] 证明，Ramsey 定理$^2_{<\infty}$ 在 RCA_0 +上对 $\mathrm{B}\Sigma^0_3$是 Π^1_1-保守的。鉴于第 1 节提到的对应关系——一方面是归纳与有界方案，另一方面是选择问题的跳跃——这些界与定理 4.5 给出的界相符。不过，该定理留下了一个缺口，因为当 $n \geq 1$ 时，$(\mathsf{C}_2^*)^{(n)} \not\leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_2^{(n)})^*$。（这留给读者作为练习。在这两个问题中，实例都是由 C_2^*的实例的有限近似序列构成的。但对于 $(\mathsf{C}_2^{(n)})^*$，每个此类序列的长度明确地是实例的一部分；而对于 $(\mathsf{C}_2^*)^{(n)}$，长度本身也是被近似的。）这一缺口引出了下面的问题，我们以此作结。

问题 4.6。能否更精确地刻画 SRT^n_+、RT^n_+、$\mathsf{SRT}^n_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathsf{RT}^n_{\mathbb{N}}$ 的一阶部分?

References

[1]Vasco Brattka、Guido Gherardi 和 Alberto Marcone。《博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理是弱 K″onig 引理的跳跃》。《纯粹与应用逻辑年刊》，163(6):623–655，2012年。[2] Vasco Brattka、Guido Gherardi 和 Arno Pauly。《可计算分析中的 Weihrauch 复杂度》。即将出版。[3] Vasco Brattka、Matthew Hendtlass 和 Alexander P. Kreuzer。《论可计算性理论的统一计算内容》。《理论计算机系统》，61(4):1376–1426，2017年。[4] Vasco Brattka 和 Arno Pauly。《论 Weihrauch 度的代数结构》。《计算机科学逻辑方法》，即将出版。[5] Vasco Brattka 和 Tahina Rakotoniaina。《论拉姆齐定理的统一计算内容》。《符号逻辑杂志》，82(4):1278–1316，2017年。[6] Peter A. Cholak、Carl G. Jockusch 和 Theodore A. Slaman。《论二元组拉姆齐定理的强度》。《符号逻辑杂志》，66(1):1–55，2001年。[7] Vittorio Cipriani、Alberto Marcone 和 Manlio Valenti。《Weihrauch 格在 Π^1_1-CA_0 层级上的结构：康托尔-本迪克松定理》。[8] Fran¸cois G. Dorais、Damir D. Dzhafarov、Jeffry L. Hirst、Joseph R. Mileti 和 Paul Shafer。《论组合问题之间的统一关系》。《美国数学会汇刊》，368(2):1321–1359，2016年。[9] Rodney G. Downey 和 Denis R. Hirschfeldt。《算法随机性与复杂度》。《可计算性理论与应用》。施普林格，纽约，2010年。[10] Damir D. Dzhafarov、Jun Le Goh、Denis R. Hirschfeldt、Ludovic Patey 和 Arno Pauly。《拉姆齐定理与 Weihrauch 度中的乘积》。《可计算性》，9(2):85–110，2020年。[11] Damir D. Dzhafarov 和 Carl Mummert。《论有限交原理的强度》。《以色列数学杂志》，196(1):345–361，2013年。[12] Damir D. Dzhafarov 和 Carl Mummert。《逆向数学：问题、归约与证明》。《可计算性理论与应用》。施普林格，纽约，2022年。[13] Marta Fiori-Carones、Leszek Aleksander Kolodziejczyk、Tin Lok Wong 和 Keita Yokoyama。《一个关于不含原始递归的弱 K¨onig 引理模型的同构定理》，2021年。[14] Guido Gherardi 和 Alberto Marcone。《可分豪斯多夫-巴拿赫定理有多么不可计算？》载于《第五届可计算性与复杂性分析国际会议论文集》（CCA 2008），《电子理论计算机科学札记》第221卷，第85–102页。爱思唯尔科学有限公司，阿姆斯特丹，2008年。[15] Jun Le Goh、Arno Pauly 和 Manlio Valenti。《通过非良基线序寻找下降序列》。《符号逻辑杂志》，86(2):817–854，2021年。[16] Petr H´ajek。《可解释性与算术片段》。载于《算术、证明论与计算复杂性》（布拉格，1991年），《牛津逻辑指南》第23卷，第185–196页。牛津大学出版社，纽约，1993年。[17] Denis R. Hirschfeldt。《切分真理：组合原理的可计算性与逆向数学》。新加坡国立大学数学科学研究所讲义系列。世界科学出版社

Company Incorporated，2014年。[18] Denis R. Hirschfeldt 和 Carl G. Jockusch, Jr. 关于 Π^1_2 原理之间的可计算性理论约化概念。《数学逻辑杂志》，16(1):1650002，59，2016年。[19] Denis R. Hirschfeldt、Richard A. Shore 和 Theodore A. Slaman。原子模型定理与类型省略。《美国数学会汇刊》，361(11):5805–5837，2009年。[20] Jeffry L. Hirst。《二阶算术子系统中的组合学》。博士论文，宾夕法尼亚州立大学，1987年。[21] Carl G. Jockusch, Jr. 拉姆齐定理与递归论。《符号逻辑杂志》，37:268–280，1972年。[22] Stephen G. Simpson。《二阶算术子系统》。逻辑学视野丛书。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2009年。[23] Stephen G. Simpson 和 Rick L. Smith。多项式因式分解与 Σ^0_1归纳。第31卷，第289–306页。1986年。专刊：第二届东南亚逻辑会议（曼谷，1984年）。[24] Theodore A. Slaman 和 Keita Yokoyama。二元组拉姆齐定理与任意多个颜色的强度。《符号逻辑杂志》，83(4):1610–1617，2018年。[25] Robert I. Soare。《图灵可计算性：理论与应用》。施普林格，第一版，2016年。[26] Giovanni Solda 和 Manlio Valenti。问题一阶部分的代数性质，2022年。[27] Wei Wang。彩虹拉姆齐定理的一些逆向数学。未发表。

Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, Connecticut U.S.A.
Email address: damir@math.uconn.eduDepartment of Mathematics,
University of Connecticut, Storrs, Connecticut U.S.A.*Email address*:
solomon@math.uconn.eduMathematical Institute, Tohoku University, Sendai, Japan.
Email address: keita.yokoyama.c2@tohoku.ac.jp