arXiv:2301.12748v1 [math.GN] 30 Jan 2023

可分解性与完全聚点

A.E. LIPIN

摘要。我们证明:

I. 对每个正则 Lindel¨of 空间 X，若 $|X| = \Delta(X)$ 且 $\mathrm{cf}|X| \neq \omega$，则 X 是极大可分解的;

II. 对每个正则可数紧空间 X，若 $|X| = \Delta(X)$ 且 $\mathrm{cf}|X| = \omega$，则 X 是极大可分解的。

这里，X的离散特征 $\Delta(X)$是 X的非空开子集的最小基数。

命题 I 和 II 是主要结果的推论：对于每个正则空间 X，若 $|X| = \Delta(X)$，且每个基数为 $\mathrm{cf}|X|$ 的集合 $A \subseteq X$ 都有一个完全聚点，那么 X 就是极大可分解的。

此外，这里的正则性可以弱化为 π-正则性，而 Lindel¨of 性质可以弱化为线性 Lindel¨of 性质。

关键词： 可分解性、可数紧空间、Lindel¨of 空间、完全聚点

1. 引言

我们先回顾主要定义（由 E. Hewitt 于 1943年[1] 提出，并由 J.G. Ceder 于 1964 [2]拓展）。

1.1. 定义。设 κ 是一个基数。若拓扑空间 X 包含 κ 个两两不交的稠密子集，则称其为 κ-可分解的。若空间 X 是 $\Delta(X)$-可分解的，则称其为极大可分解，其中

$$\Delta(X) = \min\{|U| : U \text{ is nonempty open in } X\}$$

称为 X的离散特征。若空间 X 是 2-可分解的，则称其为可分解的；若其是稠密的（即没有孤立点），但不可分解，则称其为不可分解的。

一般而言，对于从 2 到 $\Delta(X)$ 的 κ，空间 X 是否 κ-可分解并非显而易见（尤其是对于稠密空间）。Hewitt 研究了可分解性与不可分解性，参数 κ 则由 Ceder 引入。Hewitt 找到了一种构造不可分解空间的方法，并证明某些“良好”类别中的所有空间（度量空间、 T_2 紧空间以及其他一些空间）都是可分解的[1]。1964年，J.G. Ceder 指出，这些类别中的所有空间实际上都是极大可分解的 [2]。

关于可分解性的更多详细信息，请参阅 O. Pavlov于2007年撰写的精选综述 [3] 。某些拓扑性质允许空间

Lipin, A.E., 《可分解性与完全聚点》。本研究是在乌拉尔数学中心开展的研究工作的一部分，获得俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助。© 2023 A.E. Lipin。

不可分解，而另一些则蕴含可分解性，但不蕴含极大可分解性。此外，还有一些 n-可分解空间并非 $(n+1)$-可分解[4]，甚至存在对所有 $\lambda<\kappa$ 都是 λ-可分解、但不是 κ-可分解的空间，其中基数 κ 是不可数正则基数 [5]（但若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$ [6]，则不可能 [7]）。

紧致性的推广通常意味着可分解性，尽管在许多情况下，我们仍不知道它们是否意味着极大可分解性。最早研究的推广之一是豪斯多夫紧致生成空间（即拓扑由其紧子空间定义的空间）。1975年，N.V. Velichko 证明，每个这样的空间都是可分解的 [8], 。1979年，E.G. Pytkeev 证明它是极大可分解的 [9]。

至少从1998年起，人们就开始研究 Lindel¨of 空间的可分解性。这里自然的限制是只考虑离散特征不可数的空间，因为所有可数空间都是 Lindel¨of 的，但并非所有可数空间都是可分解的 [1]。1998年，V.I. Malykhin 构造了一个离散特征不可数的不可分解豪斯多夫 Lindel¨of 空间，并提出了这样一个问题：如果空间 X 是正则 Lindel¨of 空间且 $\Delta(X)\geq\omega_1$ [10]，那么它是否可分解？ X

2002年，Pavlov 证明，如果 $\Delta(X)\geq\omega_2$，那么空间 X 是 ω-可分解的 [11]。关于 $\Delta(X)=\omega_1$ 的情形，此后两年仍未解决，直到 2004年 M.A. Filatova 证明 X 是可分解的 [12]。这回答了 Malykhin 的问题，但也引出了一个关于 3-可分解性的自然问题。2007年和 2012年，I. Juhasz、L. Soukup 和 Z. Szentmiklossy 推进了 Pavlov 和 Filatova 的结果，并最终证明 X 是 ω-可分解的 [13], [14]。他们还证明，若另外有 $|X|=\Delta(X)=\omega_1$，那么 X 甚至是 ω_1-可分解的。在 [14] 中，他们提出这样一个问题：此类空间 X 是否是极大可分解的。

除此之外，近年来，对于 Lindel¨of 生成的空间，也得到了相同的结果；也就是说，这些空间的拓扑由 Lindel¨of 子空间定义（Filatova 和 A.V. Osipov[15], Juhasz、Soukup 和 Szentmiklossy [16]）。

另一类其极大可分解性通常仍未明了的空间，是正则可数紧空间（注意，Malykhin 构造了一个不可分解的 Hausdorff 可数紧空间 [10]）。E.G. Pytkeev 证明了每个这样的空间都是 ω_1-可分解的 [17], 。随后，在2016—2017年，人们对更广泛的伪紧空间类取得了一些结果（van Mill [18], Ortiz-Castillo 和 Tomita [19], Juhasz、Soukup 与 Szentmiklossy [20]；至少最后一项结果甚至给出了连续统可分解性，但仅适用于胞腔度足够小的空间）。

Lindel¨of 空间和可数紧空间具有与完全聚点相关的强性质。

回顾一下，若空间 X 中的点 x 满足：对于任意无限集 $A\subseteq X$，对 x 的每个邻域 U $|U\cap A|=|A|$，则称该点为该无限集的完全聚点。我们将集合 A 的所有完全聚点组成的集合记作 A°（如 [14]中所示）。沿用 [14], 中的术语，若空间 X 中的每个集合$A\in[X]^\kappa$ 都有一个完全聚点，则称该空间为 κ-紧。

众所周知（且易于证明），所有可数紧空间都是 ω-紧的，而所有 Lindel¨of 空间对于每个余终性不可数的基数 κ 都是 κ-紧的（事实上，这也是更广泛的一类线性 Lindel¨of 空间的一个判据）。本文研究正则 κ-紧空间的可分解性，并由此得到关于可数紧空间和（线性）Lindel¨of 空间的推论（5.1 和 5.2）。本文的主要结果是定理 4.6。

我们还指出，实际上，全文中的正则性都可以弱化为 π-正则性（这意味着，对每个非空开集 U，都存在一个非空开集 V，使得 $\overline{V} \subseteq U$）。

2. 预备知识

我们采用以下符号和约定。

- 如果我们说 $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是枚举，我们的意思是，对于 $\alpha \neq \beta$，总是有 $x_\alpha \neq x_\beta$。
- 如果我们说 $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是指标化，则并非指满足这样的条件。
- 符号 $\bigsqcup$ 表示不交并，其含义如下：它等同于通常的并集，但使用该符号时，我们假设所并的集合两两不交。
- 我们用字母 κ、λ 表示基数，用 α、β、γ、δ 以及在一种情况下的 ξ 表示序数。
- $\mathrm{cf}(\kappa)$ 是基数 κ的余终性。
- 若 S 是一个集合，且 κ 是一个基数，则 $[S]^\kappa$（分别地，$[S]^{<\kappa}$）表示所有满足 $|A| = \kappa$（$|A| < \kappa$）的集合 $A \subseteq S$ 所构成的族。
- 空间 表示拓扑空间。
- $\Delta(X)$ 是空间 X的离散特征，即 X中非空开子集的最小基数。
- 如果 A 是某个空间的子集，那么 A° 就是 A的所有完全聚点组成的集合。
- 如果对所有 $A \in [X]^\kappa$ 都有 $A^\circ \neq \emptyset$，则称空间 X 为 κ-紧。
- 如果 A 是某个空间的子集，那么 $\overline{A}$ 就是 A的闭包。

3. 集合论命题

本节的三个命题想必是众所周知的，但为求严谨，我们仍给出证明。

3.1. 定义。设 κ 是一个无限基数，S 是一个集合。若由 S 的子集组成的族 $\mathcal{E}$ 在 S 上满足：对所有 $A \in \mathcal{E}$，都有 $|A| \geq \kappa$；且对任意不同的 A和 $B \in \mathcal{E}$，都有 $|A \cap B| < \kappa$，则称其为 κ-几乎不相交。

3.2. 命题。设 S 是一个基数为 κ 的集合，且族 $\mathcal{E} \subseteq [S]^\kappa$ 是κ-几乎不交的，并且满足 $|\mathcal{E}| \leq \kappa$。那么可以为所有 $A \in \mathcal{E}$ 选择集合 $A^* \subseteq A$，使得 $|A \setminus A^*| < \kappa$，且族 $\{A^* : A \in \mathcal{E}\}$ 互不相交。

证明。任取一个枚举 $\mathcal{E} = \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$，其中 $\lambda \leq \kappa$。现在，对所有 $\alpha < \lambda$，定义 $A^*_\alpha := A_\alpha \setminus \bigcup A_\beta$。显然，所有条件$\beta<\alpha$均得到满足。

□

3.3. 命题。设 S 是一个基数为 $\kappa \geq \omega$ 的集合，且族 $\mathcal{E} \subseteq [S]^{<\kappa}$满足条件 $|\mathcal{E}| \leq \kappa$。那么存在一个集合 $B \in [S]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$，使得对于任意$A \in S$，都有 $|A \cap B| < \mathrm{cf}(\kappa)$。

证明。正则 κ 的情形显然。假设 $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$。

我们断言存在一个指标化 $\mathcal{E} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$，使得对每个 $\gamma < \kappa$ 总有 $|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha| < \kappa$（请注意，使用“指标化”一词时，我们$\alpha<\gamma$指的是同一个元素可以对应多个指标）。

让我们证明这样的指标化存在。首先，我们取任意指标化$\{B_\alpha : \alpha < \kappa\} = \mathcal{E}$，使得 $\mathcal{E}$ 的每个元素都有 κ 个指标。我们还任取一个 $C \in \mathcal{E}$。现在定义 A_α：当 $|B_\alpha| \le |\gamma| + |C| < \kappa$ 时为 B_α，否则为 C。显然，$|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha| \le |\gamma| + |C| < \kappa$。

现在，我们取任意递增的 cf(κ)-序列（$\gamma_\xi : \xi <$cf(κ)），其上确界为 κ。最后，对于所有 $\xi <$ cf(κ)，我们任取$x_\xi \in S \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma_\xi} A_\alpha$。显然，集合 $B := \{x_\xi : \xi <$cf(κ)$\}$ 满足所有条件。

□

3.4. 命题。 如果 S 是一个基数为 $\kappa \ge \omega$ 的集合，那么在 S 上存在一个 $\mathrm{cf}(\kappa)$-几乎不交族 $\mathcal{E}$，使得 $|\mathcal{E}| > \kappa$。

证明。 任取一个极大基数为 cf(κ) 的几乎不交族 $\mathcal{E}$，其中有 κ 个或更多元素，并证明实际上 $|\mathcal{E}| > \kappa$。反设 $|\mathcal{E}| = \kappa$。

若 κ 是奇异基数，则由命题 3.3 可向 $\mathcal{E}$ 中添加一个基数为 cf(κ) 的新集合，同时保持 κ-几乎不交性。这与假设矛盾。

若 κ 是正则基数，则由命题 3.2 可为所有 $A \in \mathcal{E}$ 选择子集 $A^* \subseteq A$，使得 $|A \setminus A^*| < \kappa$，且族 $\{A^* : A \in \mathcal{E}\}$ 是不交的。任取所有 $A \in \mathcal{E}$ 对应的元素 $x_A \in A^*$，并构造 $B := \{x_A : A \in \mathcal{E}\}$。显然，$|B| = \kappa$，而且我们可以将 B 添加到族 $\mathcal{E}$ 中，同时保持 κ-几乎不交性。这再次产生矛盾。

□

4. 主要结果

我们的目标是证明定理 4.6。证明分为两种情形：奇异情形和正则情形。现在我们准备证明奇异情形。用 [11] 的术语来说，这可以归结为证明：在定理的条件下，(κ,cf(κ))-迹在空间 X 中稠密（见 [11] 中的定义 1.2 和命题 2.1）；不过，我们仍给出完整的证明。

4.1. 结论。 设 X 是一个正则空间，满足 $|X| = \Delta(X) = \kappa > \mathrm{cf}(\kappa)$，且$X$ 是$\mathrm{cf}(\kappa)$-紧的。那么 X 是极大可分解的。

证明。 记 M 为所有满足下述条件的点 $x \in X$ 的集合：存在 $R_x \in [X]^{<\kappa}$，使得对每个 $A \in [X \setminus R_x]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$，都有 $x \notin A^\circ$。我们还记$H := X \setminus M$。

首先，我们证明 H 是稠密的。设 U 是 X 中任意一个非空开集。记 $\mathcal{E} := \{R_x \cap \overline{U} : x \in M\}$。将命题 3.3 应用于 $\mathcal{E}$ 和 $\overline{U}$，可得存在一个集合 $B \in [\overline{U}]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$，使得对于所有 $x \in M$，都有 $|R_x \cap \overline{U} \cap B| <$ cf(κ)，从而有 $x \notin B^\circ$（否则将有 $x \in (B \setminus R_x)^\circ$，这与 M 的定义矛盾）。因此，非空集合 B° 包含于 $H \cap \overline{U}$ 中。考虑到空间 X 是正则的，这意味着 H 是稠密的。

现在我们任意选取一个具有以下性质的指标化 $H = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 每个点 $x \in H$ 都有 κ 个指标。递归地，先根据 $\alpha < \kappa$，再根据 $\beta < \alpha$，我们选取

集合 $A_{\alpha,\ \beta} \in [X]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 使得 $x_\alpha \in A^\circ_{\alpha,\ \beta}$ 并且如果 $(\alpha,\beta) \neq (\gamma,\delta)$，那么 $A_{\alpha,\ \beta} \cap A_{\gamma,\ \delta} = \emptyset$。

对于所有 $\beta < \kappa$，我们定义 $D_\beta := \bigsqcup A_{\alpha,\beta}$。容易看出，集合 D_β 两两不相交，并且对于所有 $x \in H$，都有 $x \in \overline{D_\beta}$，因此 $\overline{D_\beta} \supseteq H$，从而 $\overline{D_\beta} = X$。

□

定理 4.6 的正则情形需要多做一些工作。我们借助以下概念来证明它（将我们的方法与 [14] 中的定义 2.5 和 Theorem2.7 进行比较。我们主要重复了他们的思路，只增加了一点技术上的复杂性，这使我们能够使用命题 3.4 并证明关键的引理 4.3）。

4.2. 定义。设 κ 是一个基数，X 是一个空间。我们称空间 X 的子集族的一个集族Σ 为该空间 X 在非空集合 $H \subseteq X$ 处的 κ-裂分，如果满足以下所有条件：

(A) $|\Sigma| = \kappa$，并且如果 $\mathcal{S} \in \Sigma$，则 $|\mathcal{S}| \leq \kappa$；如果 $A \in \mathcal{S} \in \Sigma$，则 $|A| = \kappa$；

(B) 如果 $A \in \mathcal{S} \in \Sigma$、$B \in \mathcal{T} \in \Sigma$ 且（$\mathcal{S}$、A）$\neq$（$\mathcal{T}$、B），则 $|A \cap B| < \kappa$；(C) 如果 $\mathcal{S} \in \Sigma$，则 $\bigcup_{A\in\mathcal{S}} A^\circ = H$。

如果存在一个在 H 处对 X 的 κ-裂分，我们就称 X 在集合 $H \subseteq X$ 处是 κ-可裂分的。

让我们证明这样的对象确实存在。

4.3. 引理。设 X 是一个 κ-紧空间，其中 $\kappa = |X|$ 是正则的。则存在一个非空集合 $H \subseteq X$，使得 X 在 H 处是 κ-可裂分的。

证明。根据命题 3.4，存在某个位于 X 上的 κ-几乎不交族 $\mathcal{E}$，使得$|\mathcal{E}| > \kappa$。对于每个 $x \in X$，我们将族 $\{A \in \mathcal{E}$ 记作 $\mathcal{L}_x\colon\ x \in A^\circ\}$。令 M 为满足 $|\mathcal{L}_x| \leq \kappa$ 的所有点 $x \in X$ 所组成的集合。定义 $H\colon = X \setminus M$ 以及 $\mathcal{F}\colon = \mathcal{E} \setminus \bigcup_{x\in M} \mathcal{L}_x$。

我们来证明 H 非空。由于 $|M| \leq |X| = \kappa$，且对所有 $x \in M$ 都有 $|\mathcal{L}_x| \leq \kappa$，因此可得 $|\mathcal{F}| = |\mathcal{E}| > \kappa$。任取一个 $A \in \mathcal{F}$。对所有 $x \in M$ 都有 $A \notin \mathcal{L}_x$，按定义这意味着 $x \notin A^\circ$。因此，非空集合A° 包含于 H中。所以 $H \neq \emptyset$。

注意，对每个 $x \in H$，都存在多于 κ 个集合 $A \in \mathcal{F}$，使得 $x \in A^\circ$（实际上，κ 就足够了）。这使我们能够对所有 $\alpha < \kappa$ 和 $x \in H$选取两两不同的集合 $A_{x,\ \alpha} \in \mathcal{F}$，使得 $x \in A^\circ_{x,\ \alpha}$。对每个 $\alpha < \kappa$，我们定义$\mathcal{S}_\alpha := \{A_{x,\alpha}\colon\ x \in H\}$。最后，记 $\Sigma := \{\mathcal{S}_\alpha\colon\ \alpha < \kappa\}$。容易验证，$\Sigma$ 是在 H处对 X 进行的一个 κ-裂分。

□

4.3.1. 推论。设 X 是一个正则的 κ-紧空间，其中 $\kappa = |X| = \Delta(X)$ 是正则的。那么存在一个由 X 的子集构成的不交族 $\mathcal{H}$，使得 $\bigsqcup\mathcal{H}$ 是稠密的，并且空间 X 在每个 $H \in \mathcal{H}$处都是 κ-可裂的。

证明。令 $\mathcal{H}$ 表示 X 的一个任意极大不交子集族，使得空间 X 在每个 $H \in \mathcal{H}$处都是 κ-可裂的。我们证明 $\mathcal{H}$ 就是所需的族。

唯一尚待证明的是，$\bigsqcup\mathcal{H}$ 是稠密的。设 U 是 X中的一个非空开集。根据引理 4.3，子空间 $\overline{U}$ 包含某个子集 K，使得

它在 K处是 κ-裂分 Σ 的 $\overline{U}$。显然， Σ 也是 K处 X 的 κ-裂分，因此根据 $\mathcal{H}$的极大性，存在 $H \in \mathcal{H}$使得 $H \cap K \neq \emptyset$。因此， $\bigsqcup \mathcal{H} \cap \overline{U} \neq \emptyset$。由于 X 是正则的，我们现在可以推 deduce 出集合 $\bigsqcup \mathcal{H}$ 是稠密的。

□

4.4. 引理。 设 X 是一个正则的 κ-紧空间，其中 $\kappa = |X| = \Delta(X)$ 是正则的。那么存在一个稠密集 $H \subseteq X$，使得空间 X 在 H处是 κ-可裂的。

证明。 我们任取一个满足推论 4.3.1 中性质的族 $\mathcal{H}$ 。下面证明 $\bigsqcup \mathcal{H}$ 是所需的集合。对于每个 $H \in \mathcal{H}$，记 Σ_H 为 X 在 H处的任意一个 κ-裂分。

我们断言，对于任意的 H、 $K \in \mathcal{H}$、 $A \in \mathcal{S} \in \Sigma_H$和 $B \in \mathcal{T} \in \Sigma_K$，若 $(H, \mathcal{S}, A) \neq (K, \mathcal{T}, B)$，则 $|A \cap B| < \kappa$。若 $H = K$，则这由 κ-裂分定义的性质 (B) 得出。设 $H \neq K$。反过来，假设 $|A \cap B| = \kappa$。于是 $(A \cap B)^\circ \neq \emptyset$，且 $(A \cap B)^\circ \subseteq H \cap K$，因此与 $\mathcal{H}$两两不交的条件矛盾。

我们任意选取枚举 $\Sigma_H = \{\mathcal{S}_{H,\alpha} : \alpha < \kappa\}$。对于所有 $\alpha < \kappa$，我们记 $\mathcal{S}_\alpha$ 为族 $\bigsqcup_{H} \mathcal{S}_{H,\alpha}$。最后，我们构造 $\Sigma := \{\mathcal{S}_\alpha : \alpha < \kappa\}$。不难验证集族 Σ 是 X 在 $\bigsqcup \mathcal{H}$ 处的 κ-裂分。

□

4.5. 引理。 设空间 X 在稠密集 $H \subseteq X$ 处是 κ-可裂分的，其中 κ 是正则的。则空间 X 是 κ-可分解的。

证明。 设集族 Σ 是空间 X 在集合 H 处的 κ-裂分。根据命题 3.2，我们可以选取两两不相交的集合 $A^* \subseteq A$，对所有 $A \in \mathcal{S} \in \Sigma$，使得 $|A \setminus A^*| < \kappa$。注意，$(A^*)^\circ = A^\circ$。

对于每个 $\mathcal{S} \in \Sigma$，我们记 $D_{\mathcal{S}} := \bigsqcup_{A} A^*$。集合 $D_{\mathcal{S}}$ 两两不相交，并且对所有 $\mathcal{S} \in \Sigma$，$A \in \mathcal{S}$均有 $\overline{D_{\mathcal{S}}} \supseteq \overline{H} = X$。由于 $|\Sigma| = \kappa$，可知 X 是 κ-可分解的。

□

结合引理 4.4 和 4.5，我们完成了定理正则情形的证明。现在可以给出一般形式的主要结果。

4.6. 定理。 设 X 是一个正则的 $\mathrm{cf}(\kappa)$-紧空间，其中 $\kappa = |X| = \Delta(X)$。那么 X 是极大可分解的。

最后再次指出，本节（以及下一节）中的所有论述里，正则性条件都可以弱化为 π-正则性。

5. 推论

众所周知，如果空间 X 是可数紧的，那么每个无限子集 $A \subseteq X$ 都有一个极限点，因此 X 是 ω-紧的。于是，我们有

5.1. 推论。 设 X 是一个正则可数紧空间， $|X| = \Delta(X)$ 且$\mathrm{cf}|X| = \omega$。那么 X 是极大可分解的。

我们回顾一下：如果空间 X 满足，对于 X 的每个按包含关系线性有序的开覆盖，都包含一个可数子覆盖，则称其为线性林德洛夫¨空间。已知

空间 X 是线性林德洛夫¨空间，当且仅当对于每个具有不可数上共尾性的无限 λ， X 都是 λ-紧的。每个林德洛夫¨空间显然都是线性林德洛夫¨空间。我们仅针对林德洛夫¨空间表述下面的推论，但请注意，对于所有线性林德洛夫¨空间，同样的结论也成立。

5.2. 推论。 设 X 是正则 ***Lindel¨of*** 空间， $|X| = \Delta(X)$ 且$\mathrm{cf}|X| \neq \omega$。则 X 是极大可分解的。

最后，我们对条件 $|X| = \Delta(X)$作一点简短说明。在 [21] ，A.G. Elkin 观察到了以下有用的事实:

•空间 X 是 κ-可分解的，当且仅当 X 中的每个非空开集都包含一个非空的 κ-可分解子空间。

在正则 Lindel¨of 空间 X 中，每个非空开集都包含一个非空的 Lindel¨of 子空间 Y，使得 $\Delta(X) \leq \Delta(Y) = |Y| \leq |X|$。因此，对正则 Lindel¨of 空间的（极大）可分解性的研究可归结为情形 $|X| = \Delta(X)$。显然，对于可数紧性以及其他任何可由闭子空间继承的性质，结论也相同。特别地，推论 5.2 有其自身的

5.2.1. 推论。 设 X 是一个正则 ***Lindel¨of*** 空间。假设对于每个满足 $\Delta(X) \leq \kappa \leq |X|$ 的基数κ ，都有 $\mathrm{cf}(\kappa) \neq \omega$ （例如，当$\omega < \Delta(X) \leq |X| < \aleph_\omega$时，这一条件成立）。那么 X 是极大可分解的。

现在，关于具有不可数离散特征的正则 Lindel¨of 空间 X 是否极大可分解的问题，可归结为情形 $|X| = \Delta(X) > \mathrm{cf}|X| = \omega$。这一情形仍未解决；事实上，我们甚至不知道这样的空间是否不可数可分解。

6. 致谢

作者感谢 Maria A. Filatova 始终关注这项工作，并感谢 Vladislav R. Smolin 和 Vladimir V. Ivchenko 在编辑方面提供的帮助。

参考文献

[1] E. Hewitt, 集合论拓扑学中的一个问题, 《杜克数学杂志》10 (1943年) 309-333. [2] J.G. Ceder, 关于极大可分解空间, Fundamenta Mathematicae 55 (1964年) 87-93. [3] O. Pavlov, 关于（不可）析性的问题, 《拓扑学中的公开问题II》 (2007年), 爱思唯尔公司[4] Li Feng, 强恰好 n-可析且具有任意大离散特征的空间, Topology and its Applications 105 (2000) 31-36. [5] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy, *D*-强制空间：一种关于可分解性的新方法, Topology and its Applications 153 11 (2006) 1800-1824. [6] A. Illanes, 有限且

ω 124 -可

4 1996 1243 1246

析性, 《美国数学会会刊》, (April), - . [7] Bhaskara Rao, K.P.S. 关于可分解性的一则注记, 《匈牙利数学学报》159 (2019) 669-673. [8] N.V. Velichko, 可析空间理论, 《苏联科学院数学札记》19 (1976) 65-68. [9] E.G. Pytkeev, 极大可分解空间, (俄文) 《拓扑学》（莫斯科，1979年）. 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》154 (1983), 209-213. [10] V.I. Malykhin, 紧空间及其子空间的 *Borel* 可析性, 《数学札记》64 (1998年), 第5期, 607-615. [11] O. Pavlov, 关于拓扑空间的可分解性, Topology Appl. 126 (2002年), 第1-2期, 37-47.

[12] M.A. Filatova, *Lindel¨of* 空间的可分解性. (俄文。英文、俄文摘要) Fundam. Prikl. Mat. 11 (2005), 第5期, 225-231；译文见 J. Math. Sci. (N. Y.) 146 (2007年), 第1期, 5603-5607[13] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy, 具有小离散度或小延拓度空间的可分解性, Topology Appl., 154 (2007年) , 144-154. [14] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy, 小延拓度正则空间是 ω-可析的, Fundamenta Mathematicae

228 1 2013 27 46 < 282992 > . ( ): - .

[15] http://eudml.org/doc/ M.A. Filatova, A.V. Osipov, 关于 *Lindelof* 生成空间的可分解性, Siberian Electronic Mathematical Reports, 第15卷 (2018) 1260-1270. [16] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy, 关于 *Lindel¨of* 生成空间及（可数延拓度）生成空间的可分解性, Topology and its Applications 259 (2019) 267-274. [17] E.G. Pytkeev, 可数紧正则空间的可分解性, 载于：Alg., Top., Math. Anal.,《斯捷克洛夫数学研究所论文集》（增刊2）(2002), S152-S154. [18] J. van Mill, 每个无孤立点伪紧*ccc*空间都是可分解的, Topology Appl. 213 (2016), 127-134.[19] Yasser F. Ortiz-Castillo, Artur H. Tomita, 胞腔度至多为连续统的无孤立点伪紧 *Tychonoff* 空间是可分解的, Toposym 2016 会议报告.[20] I. Juhasz, L. Soukup, Z. Szentmiklossy, *Cantor*集的着色与伪紧空间的可分解性, Comment.Math.Univ.Carolin. 59,4 (2018) 523-529. [21] A.G. Elkin, 可分解但非极大可分解的空间, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh., 24 4 (1969) 66-70.

Anton Evgenevich Lipin，俄罗斯科学院乌拉尔分院N.N. Krasovskii数学与力学研究所，俄罗斯叶卡捷琳堡索菲娅·科瓦列夫斯卡娅街16号，邮编620108电子邮箱：tony.lipin@yandex.ru